CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula

Tesis que presenta

Jaime Lorenzo Arrieta Vera

para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Codirectores de Tesis:

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Dr. Francisco Cordero Osorio

México, Distrito Federal, marzo de 2003

Agradezco al Conacyt por el respaldo que durante los dos primeros años del desarrollo de este proyecto brindó y a Promep por el apoyo prestado para su conclusión

Agradezco de forma muy significativa a mis directores de esta investigación por su valiosa orientación y asumir ser copartícipes del proyecto: Dr. Ricardo Cantoral y Dr. Francisco Cordero.

Reconozco los apoyos brindados por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, en especial a mi amigo y compañero de grandes proyectos el M. en C. Efrén Marmolejo y al Dr. Edgardo Locia.

El Instituto Tecnológico de Acapulco fue determinante en la conclusión de este proyecto, por esto hago un reconocimiento al Arq. Raúl Aguilar Reza, al Ing. Eliseo Muñoz, al M. en C. Adolfo Galeana, al M. en C. Juan Pedro Ramírez, al M. en C. Antonio Canul, a la Ing. Adriana Galicia, al Ing. Enrique Gómez y a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Bioquímica.

En este rubro no podría dejar de mencionar al M. en C. Gildardo Cortés profesor del Conalep Acapulco II y al M. en C. Víctor Talamante del CET-mar de Acapulco que me dieron la oportunidad de dirigir sus tesis de maestría y que enriquecieron particularmente esta investigación.

A mis amigos Josip Slisko, Fernando Cajas, Vicente Carrión y Leonora Díaz muchas gracias por sus importantes comentarios.

Mi gratitud muy especial es al Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav quien fue el formador de mi identidad como investigador comprometido con la sociedad. A todos los que conforman el Área de Educación Superior en el Departamento, a la Dra. Rosa María Farfán, a la Dra. Asuman Oktaç, a la C. a Dra. Gabriela Buendía, al C. a Dr. Gustavo Martínez, al C. a Dr. Javier Lezama, a la M. en C. Liliana Suárez, al C. a Dr. Apolo Castañeda, a la M. en C. Gisela Montiel y a todos aquellos que han contribuido en la formación de la perspectiva teórica que sustentamos: la socioepistemológica.

A Marina Peral, Clara Hernández Chávez y a Marta Maldonado que diligentemente han fungido como soporte a los estudiantes de este Departamento.

Resumen

Argumentamos y mostramos evidencias con respecto a nuestra posición sobre el conocimiento, a lo que es aprender y el papel de los actores en el aula. De esta manera concretamos lo epistemológico, lo cognitivo y lo didáctico, en un lugar y en un tiempo, en contextos sociales.

Aprender. Sostenemos que el aprendizaje es una actividad humana situada en contextos sociales donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad, las mismas prácticas, su entorno, sus realidades, sus herramientas y su identidad.

Los conocimientos. Para nosotros, en esta aproximación, los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades.

La interacción en el aula. La construcción de los conocimientos se devela en las interacciones del humano con su entorno y con los otros humanos; en sus prácticas, en el empleo de sus capacidades, en las herramientas que emplea, por sus intenciones, por su visión del mundo, por su pertenencia a comunidades; es decir, en su actuar en el mundo.

Los contextos sociales. El humano participa en contextos sociales construyendo su conocimiento y su realidad. No hemos querido desprendernos de la temporalidad y del lugar donde esta participación sucede.

Mostramos evidencias de cómo los humanos construyen conocimiento en el ejercicio de prácticas sociales. Aquí se han propuesto a los actores diseños donde ejercen prácticas sociales de modelación particulares, la figuración del devenir de las cualidades y la numerización de los fenómenos. Al ejercer las prácticas sociales de modelación propuesta, construyen lo lineal y lo cuadrático como herramientas para intervenir en sus comunidades. Esto, precisamente, es lo que se constituye en conocimiento. Entendemos que al hablar del conocimiento utilizamos el lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos.

En nuestra investigación se ha tratado lo lineal y lo cuadrático no como dos cosas distintas, como dicotomía; más bien como un todo indisoluble, necesitario de su contraparte y, por ende, como un todo complejo. Esto rompe con cuestiones como “la centración en lo lineal”.

Este trabajo pretende estar en la línea de investigación que versa sobre el estudio de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento.

Los logros deseados en esta investigación se refieren, por una parte, a proporcionar elementos para el desarrollo de la perspectiva teórica que construimos llamada socioepistemología y mostrar evidencias que sustenten nuestras afirmaciones en lo teórico. Por otra parte, aportar elementos para incorporarlos en nuestro quehacer cotidiano en el aula.

Abstract

We argue and show evidence with respect to our position about knowledge and what learning is as well as the paper of actors in the classroom. This way we put together the epistemological, the cognitive and the didactic facts, in a given place and at a specific time, in its social contexts.

Learning. We sustain that learning is a human activity situated in social contexts where the social actors exercise practices using and building tools, modifying with this activities these practices, its environment, their realities, their tools and their identity.

The knowledge. For us, in this approach, the mathematical knowledge is seen as arisen social constructions of practices exercised by social groups in specific social contexts and reproduced by communities.

Interaction in the classroom. The construction of knowledge unveils in human interactions with their environment and with other humans; in their practices, in the use of their capacities, in the tools they use, for their intentions, for their vision of the world, for their ownership to communities; that is to say, in their interaction in the world.

The social contexts. Human participates in social contexts building his knowledge and his reality. We don't want to dispose both temporality and the place where this participation happens.

We show evidence about how humans build knowledge in the exercise of social practices. Here it has been proposed to actors some designs in which they exercise social practices of specific modeling, the anticipation of what is to come in a future about features and quantization of phenomenon. When exercising social practices. When exercising the social practices of proposed modeling, they construct the lineal and squared facts as tools to apply in their communities. This, in fact, is what is constituted in knowledge. We understand that when speaking of knowledge we use the language of tools over the language of objects.

In our research both, the lineal aspects as well as the squared ones, haven't been treated as two different things, as dichotomies; rather, they have been treated as a non-separable entity, needing its counterpart and, thus, as whole complex concept. The latter breaks with such questions as "focusing on the lineal".

This work seeks to be in the line of research that focuses on the study of social practices and the social construction of knowledge.

The achievements pretended in this research refer, on one hand, to provide elements for the development of the theoretical perspective that we build called socio-epistemology and to show evidence that sustains our theoretical ideas. On the other hand, to contribute with elements to incorporate in our daily work in the classroom is another target of this research.

Índice

Introducción

1. Planteamiento del problema

El desarrollo de nuestra disciplina, matemática educativa, ha impulsado diferentes puntos de vista acerca de la construcción de los conocimientos por los actores sociales cada vez más complejos. Su tránsito por propuestas donde se desdeñaba bien a los actores de los procesos y con ello al lugar y el tiempo, o bien a lo epistemológico, y con ello borrando el peso de los aprendizajes referidos a ciertas construcciones histórico culturales, las matemáticas, fue abonado por metáforas basadas en dicotomías que intentaban explicar los fenómenos referentes a como los humanos construyen sus conocimientos.

Uno de los debates candentes en las dos últimas décadas estaba basada en una de estas dicotomías de las que hemos hablado anteriormente: lo social versus lo individual. Hoy día, es difícil encontrar perspectivas donde se niegue la importancia de alguno de estos aspectos. Esto último no implica, de ninguna manera, la uniformidad de las perspectivas, sino que la diferencia estriba no en negar o distinguir alguno de los aspectos, sino en la relación que adquieren en dicho acercamiento, y en ese terreno la diversidad es amplia. No es posible negar tanto el papel de la interacción como el de la identidad de los participantes.

Se ha contrapuesto el conocimiento científico con la experiencia cotidiana. Así ha surgido el mito de la verdad sin tiempo ni lugar de las matemáticas, el mito de la independencia de sus orígenes (Lizcano, 1998). Basados en estas ideas se han hecho propuestas educativas olvidándose del individuo, del salón de clases y del contexto social. Ejemplos de este tipo de esfuerzos son aquellos que surgieron en el movimiento nacido en Francia en la década de los sesenta llamado de "las matemáticas modernas". Este tipo de esfuerzos atiende a la relación yo – matemáticas. El planteamiento es: ¿qué formas, considero yo, de presentar mejor la matemática?

Los enfoques constructivistas vuelven la mirada hacia cómo el individuo aprende, en este caso matemáticas. Las miradas se dirigen a las construcciones que el estudiante realiza ante una situación, el proceso de construcción del conocimiento es un proceso fundamentalmente interno e individual, donde el diálogo se establece entre sujeto y objeto de conocimiento. La cuestión es yo observo cómo los estudiantes aprenden matemáticas.

Como contraparte a las perspectivas que dirigen la atención hacia cómo los estudiantes aprenden matemáticas, es decir, que atienden la relación entre estudiante – matemáticas, se plantean los enfoques que prestan atención a lo que sucede en el salón de clases. Estos acercamientos teóricos reconocen el papel de la interacción social: "la construcción del conocimiento no es un proceso individual aislado, sino un proceso social de creación conjunta". Pero aún cuando el planteamiento es que el conocimiento se genera en un contexto social y culturalmente organizado, los estudios en general se refieren a los contextos escolares. La cuestión es: ¿cuáles son las interacciones en el salón de clases?

En tales casos, la matemática es vista independiente de los individuos o de toda práctica social, donde el lugar de su vivencia sería el ámbito escolar. Sin embargo, se han planteado acercamientos que miran hacia fuera de la escuela. Algunas de estas perspectivas cuestionan los procesos de *transferencia* del conocimiento matemático, desde la clase de matemáticas hacia otras actividades (Lave, 1992; Lave y Wenger, 1993). La cuestión es: ¿cuáles son las formas en que vive el conocimiento matemático en contextos escolares y no escolares?

Plantemos una distinción con las investigaciones donde la matemática es única e independiente de "los sujetos"; donde se reportan diferentes resultados o construcciones sin atender las interacciones que dieron lugar a ellas; donde se omiten los contextos sociales.

Nosotros sostenemos que las actividades matemáticas no son "neutras", **dependen del contexto social** donde se abordan. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores escolares, o no escolares, este contexto social es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad.

Así por ejemplo, en la resolución de problemas con una misma estructura matemática los profesores operaron con diferentes estrategias, de acuerdo al contexto en el que fue abordado. De esto mostramos evidencias en el presente trabajo.

En nuestra propuesta, aprender está referido a las formas en que el conocimiento, construido por el humano, vive, es movilizado en las interacciones sociales. Desde este punto de vista, no sólo es importante que un estudiante construya el concepto de derivada, por ejemplo, sino que fundamentalmente nos interesa saber cómo es movilizado en sus interacciones sociales, la forma en cómo viven los conocimientos construidos, cómo son movilizados como argumentos o se emplean como herramienta para intervenir en su entorno.

Pero esta forma de entender el aprendizaje nos lleva a replantear nuestra noción de conocimiento: los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades.

Planteamos, entonces, una distinción con aproximaciones donde el objeto de estudio, la matemática, se torna ya dado, externa al sujeto y los esfuerzos educativos se centran en cómo este sujeto se apropia, construye, reifica o aprehende este objeto. Donde construcciones alternas a las de este objeto, son vistas como errores o desviaciones que hay que erradicar o corregir; donde la evaluación de un proceso está en términos de qué tanto los alumnos se han apropiado de estos objetos o de cómo los pueden aplicar a ciertos problemas; donde las investigaciones epistemológicas se ven desde el punto de vista de cómo los objetos matemáticos han llegado a ser parte de esta verdad eterna, por ejemplo en términos de Sfard (1992) "la turbulenta biografía de la función puede ser vista como una larga lucha de tres siglos por reificarse".

Así, de alguna forma nuestra investigación está insertada en el proceso de búsqueda sobre las formas de interacción de los conocimientos matemáticos de los estudiantes en diversos contextos, extraescolares o no, como los son el trabajo y la interacción con otras ramas de la ciencia. Naturalmente, en este proceso, las propuestas incorporan profundas reflexiones sobre el papel que la escuela y la universidad deben jugar. Se ha pensado, por ejemplo, en un currículo integrado que permita el tratamiento de las ciencias exactas y naturales a la par de las sociales, donde la matemática y la tecnología jugarían un papel relevante. Estos intentos ofrecen una visión más integral de la naturaleza y nuestro entorno cultural y social. Los esfuerzos en esta dirección son diversos, para algunos la cuestión radica en el problema de la transferencia de conocimientos del ámbito escolar al ámbito cotidiano y viceversa (Evans, 1996; Saxe, 1991; Carraher, 1991). Para otros la cuestión radica en una integración del currículum que permita el tratamiento simultáneo de asignaturas tradicionalmente disjuntas (AAAS, 1997; Bernstein, 1971, 1990; Waszkiewicz, 1978). Naturalmente es posible encontrar en el medio otras aproximaciones y combinaciones de las anteriores.

Por ejemplo, los teóricos de la *cognición en práctica* y de la *psicología de exteriores* (Lave, 1992; Lave y Wenger, 1993 y Wenger, 2001) ponen énfasis en el estudio de las *continuidades* y *discontinuidades* de la práctica matemática en una variedad de actividades escolares y extraescolares, en lugar de preocuparse solamente de los procesos de *transferencia* del conocimiento matemático, desde la clase de matemáticas hacia otras actividades.

Del lado de la didáctica de las ciencias encontramos por ejemplo que la American Association for the Advancement of Science (AAAS) considera que la formación en ciencias, entendida en un sentido amplio donde incluyen matemáticas y tecnología, así como ciencias naturales y sociales debe obedecer a intencionalidades múltiples. Citan que una comprensión integrada del conocimiento científico habría de permitir que los estudiantes y la población puedan conocer al mundo natural y respetar su unidad; percatarse de algunos de los modos importantes de interdependencia de las matemáticas, la tecnología y las ciencias; comprender algunos de los conceptos y principios claves de la ciencia; tener capacidad de razonamiento científico; reconocer que la ciencia, las matemáticas y la tecnología son empresas humanas; saber lo que ello implica para sus potenciales y limitaciones, y poder emplear el conocimiento científico para fines personales y sociales, como se cita en (AAAS, 1997).

Coll (1986) pone énfasis en el aspecto cultural, así, establece que los propósitos de la enseñanza de la ciencia son la adquisición de una cultura científica y el desarrollo de una actitud científica, esto es contribuir a la formación de valores y de una concepción racional y razonada de la relación del ser humano con su medio ambiente. Para que estos propósitos se cumplan, es necesario que los alumnos construyan el conocimiento, las actitudes y los valores en una comunidad como la que se forma en el medio sociocultural de la familia y la escuela (Vigotsky, 1984). Esto es así si consideramos que la construcción del conocimiento no es un proceso individual, aislado, sino un proceso social de creación conjunta de la cultura (Bruner, 1988).

De este modo, en esta investigación compartimos las preocupaciones descritas anteriormente y buscamos, mediante la investigación en escenarios adecuados, que la clase de matemáticas sirva como espacio natural para el ejercicio de prácticas sociales de matematización, donde los estudiantes y su profesor participen en actividades compartidas en las que las construcciones ligadas al saber matemático desempeñe un papel fundamental. Para nosotros en esta aproximación, los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades.

En nuestra aproximación nos apoyamos en actividades humanas de exploración y significación progresiva, para conformar un cuerpo de conocimientos escolares fundamentales para la vida del estudiante.

La historia del conocimiento muestra que en numerosas ocasiones, diversas nociones y procedimientos matemáticos han surgido del proceso de comprender y transformar fenómenos "reales". Sin embargo, a pesar de este hecho, el peso que los fenómenos tanto físicos, químicos, o económicos por citar algunos, tienen en la generalidad de las clases de matemáticas es francamente escaso. Naturalmente, en el desarrollo de esta investigación, nos preguntamos sobre las causas de su ausencia y exploramos posibilidades de incorporación racional.

Estudios recientes en el campo de la matemática educativa como (Moreno, 1999) o (Farfán, 1997) mencionan en la componente epistemológica de su análisis preliminar, que los matemáticos de antaño recurrían frecuentemente a *argumentos contextuales* para validar sus afirmaciones matemáticas. Nos interesa explorar las formas en las que dicha tradición podría jugar un papel en las actividades de los estudiantes para la construcción de su cognición y sus realidades.

En una encuesta que realizamos entre profesores de nivel medio superior y superior sobre los motivos de la ausencia del tratamiento de fenómenos en las actividades escolares, establece que ésta obedece a distintas razones, de las que nosotros sólo citaremos algunas a manera de ejemplo. Porque se les considera ajenas al discurso matemático escolar y se les limita al tratamiento en tanto aplicaciones o ejemplos. Otro tipo de razones obedece a cuestiones del tratamiento educativo, pues al trabajar con fenómenos se abre la posibilidad de manejar grandes cantidades de datos en condiciones instrumentalmente desventajosas. Este asunto se favorece ante la carencia de instrumentos de medición apropiados. Una razón de tipo conceptual que favorece el que los fenómenos no sean vividos en la clase de matemáticas es la presencia de ruido en los datos pues nos obliga a considerar factores adicionales no previstos.

Como señalamos, en estudios anteriores como en (Farfán, 1995), se muestra la insuficiencia de un contexto fenomenológico como el de la propagación del calor en cuerpos sólidos para desarrollar nociones matemáticas como el de la convergencia de series de Fourier. Mientras que Moreno (1999) sostiene que es posible favorecer el desarrollo de la intuición requerida para la noción matemática de convergencia de una serie trigonométrica, a través de un escenario físico - geométrico simulado por computadora.

Por nuestra parte, nos preguntamos sobre las construcciones ligadas al conocimiento matemático que hacen los estudiantes y profesor en contextos sociales concretos al ejercer prácticas de modelación de fenómenos. Esto nos remite a cuestionarnos sobre las condiciones de incorporación de fenómenos al escenario escolar en la clase de matemáticas. Planteamos, en consecuencia, una pregunta de investigación que consiste en explorar las prácticas discursivas que ejercen los estudiantes y profesor en el aula en contextos discursivos centrados en las prácticas de modelación de fenómenos donde construyen, interactivamente, argumentos, herramientas y significados a partir de la interacción con el fenómeno a modelar.

Nuestro interés específico consiste en investigar las interacciones entre estudiantes y profesores con fenómenos modelables mediante relaciones lineales y no lineales, en un proceso de matematización en el aula, y cómo coadyuvan a desarrollar nociones matemáticas ligadas a procesos de cambio y de variación, donde busquemos predecir estados futuros de un proceso de cambio con base en datos que provienen de la empiria y de la matematización del fenómeno en sí. Así, nuestra intención es investigar las prácticas donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática y las construcciones al ser ejercidas dichas prácticas.

A continuación se presenta un esquema de lo planteado.

- La relación yo - matemáticas (Las "Matemáticas Modernas") (lo epistemológico)
- La relación yo observo cómo los estudiantes aprenden matemáticas (la relación estudiante - matemáticas) (Piaget,...) (lo cognitivo)
- La relación salón de clases - matemáticas. (Vygotsky,...) (lo didáctico)
- La relación lo no escolar - matemáticas. (Lave, Carraher, ...) (lo social)

2. Antecedentes

La presente investigación tiene diversos antecedentes fundamentales. Por una parte, el trabajo original, bajo la dirección del Dr. Carlos Imaz, estaba en la dirección de investigar la construcción de objetos matemáticos continuos a partir de entidades discretas que tendrían como base el tratamiento hiperdiscreto de observables. Este antecedente, en nuestro caso, condujo al surgimiento de algunas ideas que pudieron constituirse como la fuente de un proyecto de investigación, por ejemplo, la de tratar de incorporar los fenómenos, "problemas reales", al discurso matemático escolar, o la de escudriñar las prácticas de inducción de cómo a partir de ciertos datos se plantea un modelo, a través del manejo de observables o la transferencia de procesos discretos a procesos continuos.

Otro antecedente lo conforman las investigaciones realizadas hace algunos años sobre la formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas a través de la modelación de fenómenos, reportada en el trabajo de (Carrión y Arrieta, 1998). En este trabajo se consideran los sistemas semióticos de representación verbal, gráfico, numérico y algebraico; incluyendo un sistema de representación físico que se toma como punto de partida para el proceso didáctico. Se organizó una reflexión sobre los diferentes sistemas de representación que pueden utilizar los alumnos y profesores, provocando un diseño experimental con estas características, la linealidad entre dos variables a través de la modelación de la elasticidad de resortes.

Consideramos importante la propia experiencia adquirida en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero y en el Instituto Tecnológico de Acapulco, pues proporcionó evidencias surgidas de exploraciones iniciales o de experiencias en el salón de clases. Estudiamos cómo y en qué medida la modelación de fenómenos en el aula puede constituirse como una rica fuente de elementos para la construcción del conocimiento matemático.

La participación en las diferentes actividades académicas del grupo de investigación sobre pensamiento y lenguaje variacional en el Cinvestav – IPN, constituye, sin duda alguna, la fuente principal de la presente investigación. Las interacciones con diversos investigadores en el proceso de construcción de una perspectiva teórica llamada "socioepistemología", permitieron una visión profunda de la problemática de la presente investigación y esperamos aportar elementos, al interior de nuestra perspectiva teórica, que contribuyan a su desarrollo.

3. Perspectiva teórica

La perspectiva teórica con que es aborda la presente investigación toma al sistema social como un sistema complejo, donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, que es el lugar que se atiende, confluyen dimensiones que sistémicamente relacionadas conforman un todo. Las dimensiones que consideramos en este todo tienen que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural y la producción y reproducción social del mismo, la dimensión epistemológica; la cognitiva, con relación a las interacciones que da lugar el proceso de aprendizaje, las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos. A esta perspectiva se le ha llamado socioepistemología (Cantoral, 1999; Cantoral y Farfán, 1998a; Cordero, 2001, 2002; Cantoral y Farfán, 2002).

Tres características son fundamentales en el enfoque teórico con el que se aborda la presente investigación.

1. La primacía de las prácticas sobre los objetos. Es en el ejercicio de las prácticas donde los artefactos son utilizados, son utilizados con intenciones situadas en un contexto, es decir, se interactúa con herramientas.

2. El carácter situado de dichas prácticas. El contexto viene a ser una componente inseparable de las prácticas. Esta inseparabilidad entre contexto y práctica esta en contraste con el papel de las condiciones que facilitan o alteran las acciones.

3. El carácter discursivo en la construcción social del conocimiento, las interacciones. Los humanos participan en el mundo construyendo sus conocimientos, sus realidades y sus herramientas, interactúan con el mundo y con otros humanos.

Esta perspectiva teórica está en correspondencia con la problemática que atiende. En la problemática que abordamos el humano ocupa el lugar central, no sólo como objeto biológico sino fundamentalmente a través de su actuar (sus prácticas), los elementos con los que actúa (herramientas) y sus producciones. Esta problemática realiza la idea de la cultura. Esta creación cultural en su profusión y multiplicidad, transcurre en el tiempo, sufre un desarrollo, está subordinada a las más diversas transformaciones y regresiones, recibe a lo que lo antecede para elaborarlo más o para impugnarlo. Esta creación cultural deviene en un lugar con sus características específicas. Esta creación cultural del hombre, dentro de y en cooperación con las asociaciones y organizaciones igualmente creadas por él, en comunidades, es el escenario de la problemática que abordamos.

Esta idea modifica la concepción de que la problemática no cambia, lo que cambia sólo es la forma de ver las cosas, la perspectiva teórica. Desde nuestra óptica la perspectiva esta indisolublemente ligada a la problemática y caminan transformándose como siameses.

4. Descripción del cuerpo de la tesis

En el Capítulo I argumentamos nuestra perspectiva acerca del aprendizaje, sostenemos que ***el aprendizaje es una actividad humana situada en contextos sociales, donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad, las mismas prácticas, su entorno, sus realidades, sus herramientas y su identidad.***

Estas actividades, las de aprendizaje, se ejercen en un lugar, en un tiempo, en interacción con otros humanos, no son actividades separadas, son prácticas ejercidas en contextos sociales. El aprendizaje es una actividad inminentemente social, que destaca el papel de las interacciones con los demás y con el mundo, construyendo sus herramientas, su cognición y su realidad.

En el Capítulo II afirmamos que todo conocimiento se construye en estrecha interrelación con los contextos en que se usa, y que, por lo tanto, no es posible separar los aspectos presentes en el contexto en el que se actúa. Por esto nuestro principal objetivo en este capítulo es precisar lo que entendemos por contexto social desde nuestra perspectiva.

La importancia que concedemos al "contexto social" en la construcción social del conocimiento en nuestra perspectiva deviene de la interpretación de que las prácticas que ejercen y las construcciones que hacen determinados grupos sociales no están determinadas fuera de su existencia y de que no son unívocas, sino por el contrario es en contextos sociales donde se brinda un abanico de posibilidades de construcciones, si bien variado, restringido, de donde los actores toman "lo que está a la mano".

Mantenemos que hay que concebir el contexto en su complejidad como un lugar donde confluyen, temporal, espacial y mentalmente, diferentes factores organizados de manera sistémica.

En este sentido para nosotros contexto social es una totalidad que da significado a las partes. Entonces estudiamos fenómenos de la construcción de conocimiento en contextos sociales donde las construcciones histórico - culturalmente constituidas, reconstruidas, adquieren particular significado.

En el Capítulo III se describen las prácticas de modelación como prácticas sociales de matemátización en el aula.

En este capítulo pretendemos argumentar sobre la pertinencia de tomar las prácticas sociales de modelación como epistemologías en el diseño de secuencias de aprendizaje.

Las prácticas de modelación que se han elegido se enfocan en prácticas que se desarrollan en interacción con fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.), conjeturando y realizando predicciones de ellos utilizando modelos. Estas prácticas no sólo se han ejercido históricamente, en el plano profesional y de los problemas cotidianos actuales esta práctica es ejercida.

De esta forma nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños. Esto significa que la epistemología debería reconocer la actividad humana como una organización social y una fuente donde se construye conocimiento (Cordero, 2001).

Se diseñan secuencias bajo esta perspectiva teórica de la que podemos destacar tres aspectos: la selección del lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos, el carácter discursivo de la construcción social del conocimiento y las interacciones en el aula.

En el Capítulo IV se describen secuencias diseñadas bajo esta perspectiva: "*Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil*" y "*Las matemáticas del movimiento*". También en este capítulo se reportan y analizan las experiencias de su puesta en escena.

Los diseños referidos se centran, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por los participantes utilizando herramientas, situadas en un contexto social; en este caso las prácticas sociales que hemos llamado "*la figuración del devenir de las cualidades*" en referencia a los trabajos de Oresme.

De la misma manera, en el Capítulo V, se describen secuencias diseñadas tomando como base las prácticas sociales que hemos llamado "*la numerización de los fenómenos*". Las prácticas referidas son prácticas de modelación que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y se toma, como base, su uso. Estas prácticas ponen en el centro el uso de modelos numéricos, mientras que en el caso de las secuencias del capítulo IV lo hacen más bien en el uso de modelos gráficos.

En este capítulo, también, se reportan y analizan las evidencias empíricas de su puesta en escena.

En el Capítulo VI se mencionan las conclusiones generales, perspectivas y continuidades de la investigación.

Incluimos en el Anexo 1, el cuestionario aplicado a los estudiantes participantes en la puesta en escena de los diseños. El cuestionario tiene la finalidad de indagar sobre la ideología y las creencias alrededor de las matemáticas; sobre la preparación académica de los padres y sus actividades económicas y sobre las condiciones de estudio dentro de la familia.

En el Anexo 2 incluimos los guiones de las secuencias aplicadas.

Capítulo I

Una perspectiva del aprendizaje desde la actividad humana

Resumen

Nuestras perspectivas de aprendizaje son importantes: lo que pensamos del aprendizaje influye en nuestra manera de reconocerlo y en lo que hacemos cuando decidimos que debemos hacer algo al respecto como individuos, como comunidades y como organizaciones.

En este capítulo argumentaremos nuestra perspectiva acerca del aprendizaje, sostenemos que ***es una actividad humana situada en contextos sociales, donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad, las mismas prácticas, su entorno, sus realidades, sus herramientas y su identidad.***

En esta dirección, el aprendizaje es una actividad humana, donde el hombre interviene en el mundo desplegando sus capacidades, lo que siente, lo que racionaliza y sus sentimientos de forma integral y compleja. Las actividades de aprendizaje, se ejercen en un lugar, en un tiempo, en

interacción con otros humanos, no son actividades separadas, son prácticas ejercidas en contextos sociales. El aprendizaje es una actividad inminentemente social, que destaca el papel de las interacciones con los demás y con el mundo, construyendo sus herramientas, su cognición y su realidad.

En esta perspectiva el aprendizaje no es guiado por los contenidos (preexistentes a los grupos sociales), es guiado por las intenciones y las actividades que desarrollan los grupos sociales en contextos sociales concretos, así lo cognoscible no es preexistente y externo a los actores sociales, sino reconstruido, al mismo tiempo el sujeto cambia al aprender y construir su conocimiento. Existe unidad entre lo cognoscible y el actor del proceso de su construcción.

Los aprendizajes son actividades situadas, no escindidas, no separadas de su entrono, donde la razón, los sentimientos y los sentidos intervienen integralmente.

1.1 El aprendizaje como actividad humana

"¿Qué ocurriría si adoptáramos una perspectiva diferente que colocara el aprendizaje en el contexto de nuestra propia experiencia de participación en el mundo?"

Etienne Wenger. Comunidades de práctica.

Cuando abordamos explícitamente cuestiones relacionadas con el aprendizaje, en muchas ocasiones nos basamos en el supuesto que aprender es un proceso individual que tiene un principio y un final, que es mejor separarlo de nuestras restantes actividades y que es resultado de la enseñanza. Es algo que tiene que suceder dentro de cuatro paredes, donde el conocimiento tiene sentido por sí mismo, es algo que, por razones históricas o culturales, tiene que aprenderse. De ahí que las aulas sean lugares donde se pretende que los estudiantes –libres de las distracciones de su participación en el mundo exterior- puedan prestar atención a un profesor o centrarse en unos ejercicios o una secuencia diseñada. Wenger (2001), menciona que para evaluar el aprendizaje empleamos pruebas a las que ellos se enfrentan en un combate individual, donde el conocimiento se debe demostrar fuera de contexto y donde se considera que colaborar es hacer trampa. El resultado es que gran parte de nuestra enseñanza y de nuestra formación institucionalizada es percibida por muchos estudiantes como irrelevante y la mayoría de ellos sienten que aprender es algo aburrido y arduo y que realmente no estamos hechos para ello.

Desde nuestra perspectiva el aprendizaje es parte de nuestra naturaleza humana y el hacer énfasis en la naturaleza del aprendizaje como actividad humana proviene de resaltar que desde nuestra perspectiva el aprendizaje es, al igual que comer o dormir, sustentador de la vida y al mismo tiempo inevitable y que –si se nos da la oportunidad- somos bastante buenos en él. El aprendizaje se da en el contexto de nuestra propia participación en el mundo, no por separado, y que esta actividad es un fenómeno fundamentalmente social que refleja nuestra propia naturaleza profundamente social como seres humanas capaces de conocer.

El aprendizaje, en este sentido, no es una actividad separada. No es algo que hacemos cuando no hacemos otra cosa, o que dejamos de hacer, cuando emprendemos otras tareas.

El hecho de vivir como seres humanos significa que ejercemos constantemente actividades de todo tipo, desde procurar nuestra supervivencia física hasta buscar los placeres más elevados. Cuando definimos una tarea y participamos en su realización, interactuamos con los demás y con el mundo y, en consecuencia, ajustamos nuestras relaciones con el mundo y con los demás. En otras palabras, aprendemos. Así, el aprendizaje es una actividad humana ejercida en contextos sociales concretos y donde los conocimientos son construcciones producto de las interacciones en nuestro accionar. Pero en estas interacciones interviene una vasta red de acciones, prácticas, herramientas, argumentos, conocimientos y realidades, se trata, pues, de una situación compleja.

1.1.1 El todo y las partes

> *El pensamiento complejo no es el pensamiento omnisciente. Por el contrario, es el pensamiento que sabe que siempre es local. Ubicado en un tiempo y en un momento. El pensamiento complejo no es el pensamiento completo; por el contrario, sabe de antemano que siempre hay incertidumbre.*
>
> ***Edgar Morin. Epistemología de la complejidad.***

Con la palabra "complejo" no estamos dando una explicación sino que señalamos una dificultad para explicar. En el fondo, quisiéramos evitar la complejidad, nos gustaría tener ideas simples, leyes simples, fórmulas simples, para comprender y explicar lo que ocurre alrededor nuestro y en nosotros mismos. Pero como estas fórmulas y leyes simples son cada vez más insuficientes, estamos confrontados al desafío de la complejidad.

Se puede decir que hay complejidad donde quiera que se produzca un enmarañamiento de acciones, de interacciones, de retroacciones (Morin, 1995).

Nada está realmente aislado en el universo y todo está en relación. Una forma de decir esto es como lo planteó Pascal hace tres siglos:

> "Todas las cosas son ayudadas y ayudantes, toda las cosas son mediatas e inmediatas, y todas están ligadas entre sí por un lazo que conecta unas a otras, aun las más alejadas. En esas condiciones considero imposible conocer las partes si no conozco el todo, pero considero imposible conocer el todo si no conozco las partes" (Pascal, B. citado en Morin, 1995).

Así, no sólo una parte está en el todo, sino que también el todo esta en la parte.

Cada individuo en una sociedad es una parte de un todo, que es la sociedad, pero esta interviene, desde el nacimiento del individuo, con su lenguaje, sus normas, sus prohibiciones, su cultura, su saber; otra vez el todo está en la parte. Y, sin embargo, somos singulares puesto que "el todo esta en la parte" no significa que la parte sea un reflejo puro y simple del todo. Cada parte conserva su singularidad y su individualidad pero, de algún modo, contiene el todo.

En la escuela hemos aprendido a "pensar separado". Aprendimos a separar las materias: la historia, la geografía, la física, las matemáticas y, en ésta, la aritmética, el álgebra, el cálculo o la geometría. Sin embargo, las relaciones entre la física y las matemáticas, historia y geografía son múltiples. Está bien distinguir estas materias, pero no hay que establecer separaciones absolutas.

Aprendimos muy bien a separar. Apartamos un objeto de su entorno, aislamos un objeto con respecto al observador que lo observa. Nuestro pensamiento es disyuntivo y, además, reductor: buscamos la explicación de un todo a través de la constitución de sus partes. Queremos eliminar el problema de la complejidad. Morin, (1995) afirma que este es un obstáculo profundo, pues obedece al arraigamiento de una forma de pensamiento que se impone en nuestra mente desde nuestra infancia, que se desarrolla en la escuela, en la universidad y se incrusta en la especialización.

La idea que destruye todo intento reduccionista de explicación es que el todo tiene una de propiedades y cualidades que no tienen las partes cuando están separadas.

Una bacteria posee cualidades y propiedades de autorreproducción, de movimiento, de alimentación, de autorreparación que, de ningún modo, tienen, aisladamente, las macromoléculas que la constituyen. Podemos llamar emergencias a esas cualidades que nacen a nivel del todo, dado que emergen, que llegan a ser cualidades a partir del momento en que hay un todo. Estas cualidades emergentes pueden retroactuar sobre las partes (Morin, 1995). Como antes se mencionó, la sociedad es un todo cuyas cualidades retroactúan sobre los individuos dándoles un lenguaje, una cultura y una educación. El todo por lo tanto, es más que la suma de sus partes.

Tenemos grabadas en nosotros esas formas de pensamiento que nos lleva a reducir, a separar, a simplificar, a ocultar los grandes problemas.

Una tradición de esta perspectiva es la de separar las actividades del hombre, lo sensible, lo racional, lo sentimental y de darle primacía a lo racional.

1.2 Lo sensible, lo razonable y lo sentimental

"Queda, pues, demostrado aquí; si queremos saber verdaderamente alguna cosa, es preciso prescindir del cuerpo y que sea el alma sola la que examine los objetos que quiera conocer".

Platón. Diálogos.

Una idea muy difundida, sobre todo en las clases de matemáticas, es que el conocimiento es el resultado automático, impersonal, de razonamientos hipotéticos - deductivos. Donde ciertas verdades son obtenidas a partir de verdades ya establecidas por medio de inferencias lógicas.

Consideramos pues, que en las actividades de aprendizaje, como parte de la actividad humana, no sólo lo racional juega un papel fundamental, sino lo sensible y lo sentimental juegan un papel esencial. Consideramos que la actividad humana, plantea una actividad integral de nuestros sentidos, la razón y los sentimientos, en este sentido coincidimos con González, (1996):

> "Planteamos la vuelta a Heráclito, que no piensa en una unidad sin multiplicidad, un ser fuera de tiempo (ni del espacio), ni una razón sin "vista", sin "oídos" y sin "palabras", sin comunicación y sin comunidad. En Heráclito se da una visión realmente integral, unitaria y dinámica de la realidad, antes de las escisiones. Es una visión no marcada aún por los prejuicios de la razón "pura" y especulativa, que va a predominar después en Occidente. La vuelta a Heráclito no es la vuelta a un filósofo o a un tiempo, sino la vuelta a una consideración originaria de la realidad, análoga a la que pudieron tener los primitivos filósofos, sin prejuicios metafísicos y racionalista".

De esta forma, replanteamos que nuestra experiencia del mundo y de nosotros mismos sea una experiencia no metafísica, en sentido no duelista, no escindida, recobrando la visión unitaria o sintética, con múltiples aspectos interrelacionados, es decir, compleja.

En la práctica, la llamada actividad manual no es irreflexiva y la actividad mental no es incorpórea. Y ninguna de ellas es lo concreto, sólidamente evidente, ni lo abstracto, trascendentalmente general; las dos obtienen su significado dentro la perspectiva de unas prácticas específica y, en consecuencia, pueden conseguir gran variedad de interpretaciones.

El empleo que se hace del concepto de práctica no pertenece a ninguno de los dos lados de las dicotomías tradicionales que separan la acción del conocimiento, lo manual de lo mental, lo concreto de lo abstracto. El proceso de participar en una práctica siempre implica a toda la persona actuando y conociendo al mismo tiempo. En ocasiones, el término práctica se emplea como un antónimo de la teoría, de las ideas o del habla. Sin embargo, el empleo que se hace aquí de este término no refleja una dicotomía entre lo práctico y lo teórico, los ideales y la realidad o hablar y hacer.

El concepto de "práctica" connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido la práctica siempre es una práctica social.

Este concepto de práctica incluye tanto los aspectos explícitos como los implícitos. Incluye lo que se dice y lo que se calla. Lo que se presenta y lo que se da por supuesto. Incluye el lenguaje, los instrumentos, los documentos, las imágenes, los símbolos, los roles definidos, los criterios especificados, los procedimientos codificados, las regulaciones y los compromisos que las diversas prácticas determinan para una variedad de propósitos.

En los contextos sociales, donde se ejercen prácticas sociales, se incluye todo, en ese sentido no es una realidad escindida, aunque a veces haya diferencia entre lo que decimos y lo que hacemos, aquello a lo que aspiramos, lo que nos conformamos, lo que sabemos y lo que podemos manifestar.

1.3 El aprendizaje como prácticas situacionales (lo social)

No hay nada semejante a una capacidad para ver u oír o recordar en general; sólo hay la capacidad para ver u oír o recordar algo. Es absurdo hablar de adiestrar y cultivar un poder o capacidad mental o física en general independientemente de la materia implicada en su ejercicio.

John Dewey. Democracia y educación

Decíamos que para muchos de nosotros el concepto de aprendizaje evoca inmediatamente imágenes de aulas, clases, profesores, libros de texto, tareas y ejercicios. Sin embargo, en nuestra experiencia, aprender es una parte integral de la vida cotidiana. Forma parte de nuestra participación en el mundo.

Sostenemos que el aprendizaje es una actividad situada en contextos sociales, donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad las mismas prácticas y las herramientas, su entorno, su identidad, su cognición y su realidad.

Mantenemos que hay que concebir el contexto en su complejidad y, en este sentido, lo hemos llamado contexto social para distinguirlo de otros "contextos", como un lugar donde confluyen, temporal y espacialmente, diferentes factores organizados sistémicamente.

Así un contexto social es la confluencia, fundamentalmente, de lo siguiente:

- La formación sociocultural de los grupos sociales y de los participantes (incluye concepciones, experiencias, posición social, desarrollo físico y cultural).

- Las intencionalidades de los estudiantes, profesores e investigadores (las implícitas y las explícitas).
- Las prácticas que se desarrollan (incluyendo las herramientas que utilizan).
- El entorno físico (ambiente virtual, particularidades como "hace mucho calor", "tengo hambre", etc.).
- Supuestos compartidos (los referentes del discurso como "compras", "experimento", creencias y concepciones compartidas).

Así el contexto es una construcción original donde confluyen las características sociales e individuales de los participantes (su experiencia escolar y extraescolar, la edad, su escolaridad, sus características culturales y sociales), el entorno físico, las prácticas que se realizan, la intencionalidad de los participantes y los supuestos compartidos.

Sobre lo que entendemos por contexto social y contexto discursivo propuesto le hemos dedicado un apartado en este trabajo, por lo cuál abordaremos posteriormente estos aspectos con mayor detalle.

1.4 La determinación de los conocimientos por los actores sociales y los contextos (el objeto)

"Este conocimiento (la geometría) lo es de lo que siempre es y no de lo que tan pronto nace como perece".

Platón.

El énfasis en la dimensión social de nuestra perspectiva nos lleva a enfatizar nuestra noción de conocimiento, que distingue el conocimiento tradicional acumulativo, con valor por si mismo, un conocimiento bibliotecario, de un conocimiento situacional, sólo importante cuando es movilizado en las interacciones sociales, es adecuado, modificado y enriquecido (vuelto a construir) en los contextos sociales.

El énfasis en lo socio en la construcción del conocimiento se ve reflejado en que no sólo nos interesa, por ejemplo, cómo se construye el concepto de función con relación a una estructura formal, sino sobre todo cómo se construye con relación a las intenciones humanas, determinadas por las interacciones con los demás y con el mundo: transformar. En este sentido el lenguaje de las herramientas predomina al lenguaje de los objetos y lo mencionamos en el sentido de que la herramienta no es sólo el objeto, sino fundamentalmente, y ahí está lo socio, en la intención humana, determinada socialmente en cuanto su origen, su motivo y su programa. Es decir la piedra no es martillo hasta que existe la intención de utilizarla para golpear para que se logre un propósito.

En este sentido, el aspecto importante (en la didáctica de las matemáticas) de las categorías basadas en el lenguaje de las herramientas, no consiste en establecer una definición matemática sino en establecer e identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático (herramientas y significados) (Cordero, 2001).

En esta investigación el papel de las herramientas es fundamental, sobre todo la articulación discursiva de éstas, con los argumentos, los modelos y las realidades, lo cual abordamos con más detalle en la sección 1.6.2 de este capítulo.

1.5 La constitución de identidades por el aprendizaje (el sujeto)

Sabemos quiénes somos por lo que nos es familiar y por lo que podemos negociar y utilizar y sabemos quiénes no somos por lo que nos es desconocido y difícil de manejar o está fuera de nuestro ámbito. No sólo producimos nuestras identidades mediante las prácticas en las que nos comprometemos, sino que también nos definimos mediante las prácticas en las que no nos comprometemos. Nuestras identidades no sólo están constituidas por lo que somos, sino también por lo que no somos.

Etienne Wenger. Comunidades de práctica.

Hemos visto que en nuestra participación en el mundo, ejercemos prácticas sociales, construimos argumentos, herramientas y significados en un contexto social, construimos nuestra cognición. Estas construcciones modifican a los actores sociales; es decir, el aprendizaje constituye identidades.

Foucault (1972) sugiere que los discursos, además de producir objetos, pueden producir sujetos. Con esto quiere decir que las formas de hablar de los sujetos se relacionan estrechamente con identidades particulares. Por ejemplo, el discurso médico del examen, las preguntas, el diagnóstico, prescripción, etc., constituyen una gama de objetos. En épocas pasadas estos objetos pudieron haber sido la invasión de espíritus o vapores; es probable que sean hoy el linfoma de Hodgkin y el VIH positivo. Sin embargo, este discurso también constituye al médico como persona particular. El médico se genera como un sujeto con una autoridad, unos conocimientos, unas habilidades, etc., particulares. Deberíamos destacar que Foucault no le da a esto un sentido psicológico; no habla de sentimientos de autoridad que el médico pueda tener o de sus habilidades curativas. Más bien, el médico es engendrado como un sujeto particular a partir de la variedad de discursos que constituyen la medicina (Wenger, 2001).

Como el aprendizaje transforma a quienes somos y lo que podemos hacer; es una experiencia de identidad. No es sólo una acumulación de detalles e información, también un proceso de llegar a ser, de convertirse en una persona determinada o, a la inversa, de evitar convertirse en determinada persona. Incluso el aprendizaje que realizamos totalmente por nuestra cuenta acaba contribuyendo a convertirnos en una clase específica de persona. Acumulamos capacidades e información, pero no en abstracto, como un fin en sí mismo, sino al servicio de una identidad.

De esta forma coincidimos con lo planteado por Wegner (2001) cuando señala que en la formación de una identidad el aprendizaje se puede convertir en una fuente de significado y de energía personal y social.

Nuestra visión propone una persona en proceso, una persona que se va redefiniendo y reconociendo, participando en un movimiento donde se articulan y reajustan constantemente los procesos cognitivos y la experiencia.

La experiencia de la identidad en la práctica es una manera de ser en el mundo. Quienes somos reside en nuestra manera de vivir día a día, no sólo en lo que pensamos o decimos sobre nosotros mismos, aunque, naturalmente, esto forma parte, pero sólo parte, de nuestra manera de vivir. Esta forma de vivir nos remite a la interacción con el mundo y los demás.

Así, para nosotros, el concepto de identidad lo utilizaremos para centrarnos en la persona sin tomar el yo individual como punto de partida. Construir una identidad consiste en negociar los significados de nuestras experiencias de afiliación a comunidades sociales (Wenger, 2001). El concepto de identidad actúa como un pivote entre lo social y lo individual, de modo que se pueda hablar de lo uno en función de lo otro. Evita una dicotomía simplista individual-social sin anular la distinción. La perspectiva resultante no es individualista ni abstractamente institucional o social, sino que hace justicia a la experiencia de identidad vivida al tiempo que reconoce su carácter social: es lo social, lo cultural, lo histórico con un rostro humano.

Es una dicotomía errónea pensar en que la unidad de análisis de la identidad debe de ser la comunidad o la persona. El enfoque debe de recaer en el proceso de constitución mutua, en una dualidad donde lo que más importa es la interacción, no la capacidad de clasificación (Wegner, 2001).

La dimensión temporal de la identidad es esencial. No sólo negociamos constantemente nuestras identidades, sino que éstas colocan nuestro compromiso en la práctica en este contexto temporal. Siempre estamos tratando simultáneamente con situaciones específicas, participando en las historias de ciertas prácticas y tratando de convertirnos en ciertas personas. Como ya dijimos anteriormente, nuestras identidades incorporan el pasado y el futuro en el proceso mismo de negociar el presente. Otorgan significado a los eventos en relación con el tiempo interpretado como una extensión del yo. Proporcionan un contexto en el que determinar que es, entre todas las cosas que son potencialmente significativas, lo que se convierte realmente en un aprendizaje significativo. La sensación de trayectoria nos permite distinguir lo que contribuye a nuestra identidad.

La identidad se devela en las interacciones del humano con su entorno y con los otros, en sus prácticas, por sus capacidades, las herramientas que emplea, por sus intenciones, por su visión del mundo, por su pertenencia a comunidades; y en ella ocupa herramientas.

1.6 La intención, las herramientas y las prácticas (la epistemología)

Aquí nuestro intento está dirigido a presentar y argumentar sobre el papel de las herramientas en la actividad humana y la relación con las prácticas y las intenciones.

1.6.1 El que usa herramientas para producir: el humano

> *"Los humanos son humanos en todas partes, por avanzada o "primitiva" que sea su civilización, la diferencia no estriba en ser más o menos humano, sino en la forma en que las distintas sociedades de los hombres expresan sus capacidades humanas".*
>
> **Jerome Brune. Realidad mental y mundos posibles**

Desde diferentes perspectivas la distinción del hombre, como especie, y las demás especies, ha sido resaltada al llamarle *homo sapiens*, *homo erectus*, *homo faber*, *homo depictor*, etc., asociando a la actividad humana ciertas características como el uso del lenguaje, el caminar erecto, el fabricar herramientas, etc.

En este sentido Bruner, (1972) utiliza la herramienta en un sentido "humanizador" ya que "estos temas están estrechamente relacionados con la evolución del hombre como especie y definen de una vez la calidad distintiva del hombre y su potencialidad de evolución. Las cinco grandes fuerzas humanizadoras son la elaboración de utensilios, el lenguaje, la organización social, la dirección de la prolongada infancia del hombre y su impulso a explicar el mundo" (Bruner, 1972; p. 99).

Engels (1976, a) señala la importancia de la herramienta utilizada en la labor. Por ejemplo, en sus documentos titulados "*Introducción a la dialéctica* *de la naturaleza*" y "*El papel del trabajo en la transformación del mono en hombre*", señala como origen de la herramienta la especialización de la mano.

> "Cuando después de una lucha de milenios la mano se diferenció por fin de los pies y se llegó a la actitud erecta, el hombre se hizo distinto del mono y quedó sentada la base para el desarrollo del lenguaje articulado y para el poderoso desarrollo del cerebro, que desde entonces ha abierto un abismo infranqueable entre el hombre y el mono. La especialización de la mano implica la aparición de *la herramienta* y ésta implica actividad específicamente humana, la acción recíproca transformadora del hombre sobre la naturaleza, *la producción*. . . . Únicamente el hombre ha logrado imprimir su sello a la naturaleza,. . . Y esto lo ha conseguido el hombre, ante todo y sobre todo, valiéndose de *la mano*. Hasta la máquina de vapor, que es hoy por hoy su herramienta más poderosa para la transformación de la naturaleza, depende en fin de cuentas, como herramienta de la actividad de las manos. Sin embargo, paralelamente a la mano fue desarrollándose, paso a paso, el cerebro;. . . la mano sola nunca hubiera logrado crear la máquina de vapor si, paralelamente, y en parte gracias a la mano, no se hubiera desarrollado correlativamente el cerebro del hombre. (Engels, 1976, a)

Engels (1976) sostiene que "*gracias a la cooperación de la mano, de los órganos del lenguaje y del cerebro*, no sólo en cada individuo, sino también en la sociedad, los hombres fueron aprendiendo a ejecutar operaciones cada vez más complicadas, a plantearse y a alcanzar objetivos cada vez más elevados".

Por otra parte, y de manera similar a Engels, Bruner (1972) menciona que la naturaleza favoreció la supervivencia de aquellos que podían vincularse con sistemas de herramientas en menoscabo de los que intentaban subsistir sólo por sus características físicas sobresalientes (mandíbulas poderosas, su fuerte dentadura o su gran peso).

Bruner (1979) habla también de la importancia de los cambios en las herramientas utilizadas por las sociedades. Menciona que en todos los tiempos, los cambios en los utensilios han significado cambios en la cultura y en la organización social y, finalmente, cambios también en la crianza de los hijos.

1.6.2 Herramientas y modelos

Herramienta: instrumento con el que se realiza un trabajo manual o mecánico. Instrumento de trabajo.

Instrumento: Aparato, utensilio o herramienta para cierto fin. Lo que sirve de medio para hacer una cosa.

Diccionario Larousse.

La herramienta en esta investigación es entendida, en el sentido de una ampliación de la herramienta de Engels, es algo que utiliza el hombre para manufacturar la naturaleza. La manufacturación (Engels toma el término manufacturación en el sentido de hecho por la mano) no sólo es transformación sino intencionalidad, y es esto último lo que le da el carácter social a la herramienta. Un objeto en sí mismo no es herramienta, es herramienta hasta que el hombre lo utiliza con una intención, determinada no individualmente, sino socialmente. Así, una piedra es un objeto, esa piedra se vuelve en herramienta en tanto es usada, por ejemplo, como martillo para golpear. La derivada es un objeto que puede ser estudiada como tal, sin embargo esta puede ser estudiada como herramienta en tanto es estudiada con relación a la intencionalidad de transformación del humano, es decir en su dimensión social. Las herramientas no sólo son objetos físicos, también lo son el lenguaje y otros entes abstractos.

La importancia de las herramientas no radica en las herramientas en sí, sino en el programa que orienta su uso. En este sentido más amplio es cuando las herramientas adquieren un sentido propio como amplificadores de las capacidades humanas e instrumentos de la actividad del hombre.

El modelo de un fenómeno es una herramienta usada para transformarlo. Un modelo es algo utilizado en sustitución de lo modelado, la manipulación del modelo nos permite entender y predecir el comportamiento del fenómeno, así como validar hipótesis y elaborar estrategias para la intervención.

Un modelo es una herramienta para interpretar e intervenir en un contexto.

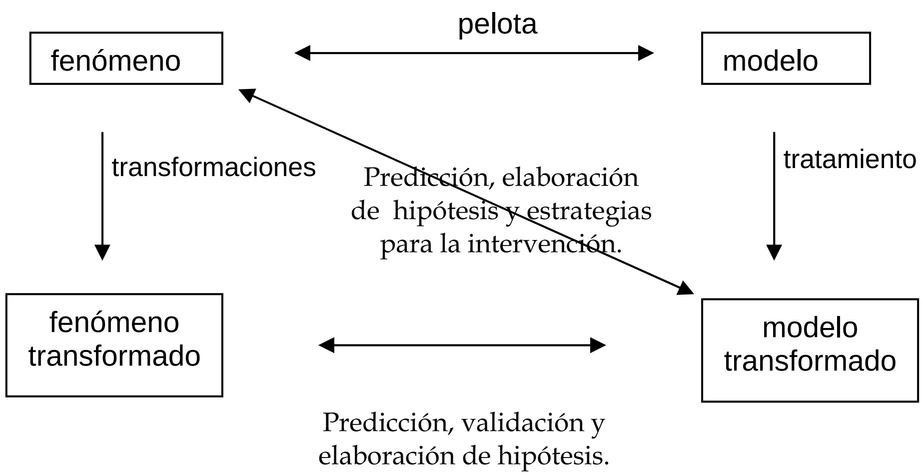


Figura 2.1. Las prácticas sociales de modelación

Distinguimos tres fases de la modelación: formación de modelos, tratamientos dentro de los modelos y elaboración de esquemas (articulación de los modelos organizando esquemas).

La modelación no es representación. La modelación, a diferencia de la representación, es una práctica que refleja la intencionalidad humana y que no puede ser juzgado por su corrección independientemente de ella.

La palabra representación fue usada para traducir la palabra Vorstellung de Kant, algo que se coloca frente a la mente, la palabra representación evoca un acto privado. El modelo tiene que ver con lo público, con lo social.

Sólo se puede representar un mundo que está predefinido. Si el mundo va surgiendo o es modelado en vez de ser predefinido, la noción de representación ya no puede desempeñar un papel protagónico.

Así el modelo es un ente para la intervención en la naturaleza, es una herramienta, es algo utilizado para comprender e intervenir en lo modelado, la representación es de alguna forma el reflejo de una "realidad", de una situación o conocimiento preexistente. Si la realidad no es "un reflejo de lo que pasa", entonces ¿qué es?

1.6.3 La realidad

> *"La búsqueda de cimientos puede cobrar muchas formas pero, dada la lógica básica del representasionismo, la tendencia es buscar un cimiento externo en el mundo o un cimiento interno en la mente. Al tratar la mente y el mundo como polos opuestos, subjetivo y objetivo, la angustia cartesiana oscila sin cesar entre las dos en busca de tierra firme".*
>
> ***Francisco Varela. De cuerpo presente.***

Una manera extremadamente poderosa y fascinante de comprender los hechos se basa en considerar que ellos son las observaciones del mundo tal cual es. La realidad es tal como la vemos, está ahí. Cualquier observador que adopte la misma perspectiva debe ver lo mismo. La realidad es externa, es única y preexistente.

De otra forma, "Las cosas son las sombras de las ideas proyectadas sobre la pantalla de la experiencia" (Platón, 1991). La realidad, consecuentemente, había de ser encontrada en las ideas de los objetos físicos sensibles. Para Platón las leyes matemáticas no sólo son la esencia de la realidad, sino también eternas e inalterables. De esta forma la realidad es ajena al hombre y lo que tiene que hacer éste es capturarla o descubrirla.

Estas posiciones son dos polos de una misma perspectiva de la “realidad”; por una parte, la realidad se captura observando, empleando fundamentalmente los sentidos; por otra, la realidad se descubre hurgando en un mundo ideal, empleando la razón, las dos plantean que la realidad es preexistente, única y externa al hombre. Desde esta perspectiva el papel activo del humano radica en capturar la realidad, no en constituirla.

Como consecuencia y motivo de esta perspectiva se encuentra la división entre la razón y los sentidos, en el rompimiento de la visión unitaria del hombre y de la “realidad”.

La idea de realidad en esta obra, está ligada a una realidad humana, construida por esa especie. Sólo existente en su construcción y para fines determinados.

De la misma forma la cognición no es única, ni preexistente al humano; éste la construye en la interacción.

1.6.4 La cognición

La construcción del conocimiento no es un proceso individual aislado, sino un proceso social de creación conjunta de la cultura.

Jerome Bruner, Realidad mental y mundos posibles.

Aquellas clases tradicionales caracterizadas por ser el profesor quien domina, con muy poca participación de los alumnos, muy pocas preguntas y, por lo tanto, muy poca interacción entre ellos, trabajando obviamente en un relativo aislamiento y todo intento de cooperación, es visto como desleal; dependiendo de un libro de texto –un sólo punto de vista sobre temas complejos— y trabajando en tareas que demandan mucha memoria y poco uso de destrezas de pensamiento; donde la comprensión del alumno no se valora ya que el profesor no está dispuesto a escuchar los razonamientos y análisis de los alumnos sobre algo complejo y sólo quiere saber si el alumno sabe la respuesta "correcta". Este tipo de clases descansa sobre la premisa de que hay un mundo fijo y un conocimiento terminado que los alumnos tienen que llegar a conocer. La construcción de conocimiento y de nuevos conocimientos no se valora tanto como la capacidad de demostrar dominio de conocimientos tradicionalmente aceptados.

Dewey (1916/2001) desde principios de siglo rechaza esta concepción, él plantea que "consideran el conocimiento como algo completo en sí mismo, independientemente de su disponibilidad para tratar lo que aún ha de ser... así como la extendida creencia de que la mera apropiación de la materia de estudios que se almacena en los libros constituye conocimiento. Por muy verdadero que sea lo aprendido, para aquellos que lo descubrieron y en cuya experiencia funcionó, no hay en ello nada que constituya conocimiento para los alumnos". Para Dewey, la educación es un proceso constructivo en el que los estudiantes le dan sentido a lo que aprenden porque se involucran en el acto de conocer y al hacerlo el conocimiento se hace relevante.

Rechazamos el modelo en el que el proceso de construcción del conocimiento es un proceso fundamentalmente interno e individual, donde el diálogo se establece entre sujeto y objeto de conocimiento. En este sentido nuestra posición es coincidente con lo planteado por Vygotsky "cualquier conocimiento se genera en un contexto social y culturalmente organizado, es decir destaca la importancia, del componente sociocultural y contextual en la construcción del conocimiento" (Vygotsky, 1984). O sea, "la construcción del conocimiento no es un proceso individual aislado, sino un proceso social de creación conjunta de la cultura" (Bruner, 1988).

1.7 La construcción discursiva del conocimiento (lo cognitivo)

Consideramos que el habla como acción situada en un contexto discursivo, construye el significado, la realidad e incluso a la misma cognición.

Antonia Candela. Ciencia en el aula.

Consideramos que la ciencia es un campo de la cultura humana que se estructura sobre la base de grandes debates acerca de lo que son los hechos y fenómenos y la explicación de sus causas. La ciencia posee una serie de recursos discursivos especiales para construir los hechos científicos (Candela, 1999).

Aquí *la ciencia no es entendida como constituida sólo por hechos científicos sino, sobre todo, como recursos argumentativos* que establecen a los hechos científicos y la experimentación y los datos empíricos como un recurso para argumentar.

Lo fundamental, nos dice Edwards (1996), es que nos liberemos de la idea de que el conocimiento científico, es el resultado automático, impersonal, de razonamientos hipotéticos – deductivos y de observaciones neutrales, y que empecemos a tratar aquellas nociones precisamente como aspectos del discurso científico. Y de esta manera plantea que aceptemos mejor la noción de "conocimiento científico", -no sólo influido sino constituido por prácticas sociodiscursivas a través de las cuales los planteamientos sobre el conocimiento son elaborados, defendidos, fortalecidos, ignorados y demás- que nos brinda una comprensión de cómo funcionan los trabajos "propios" de la ciencia que puede ser aplicada a los estudios y prácticas de la enseñanza de las ciencias.

Pero, construir conocimiento en interacción, requiere experimentar, especular, compartir, confrontar, argumentar, convencer, rechazar, validar, debatir, negociar o concensar y para esto requerimos del lenguaje usado socialmente, que en este caso llamaremos discurso.

De esta forma tomamos al discurso como un medio para estudiar las prácticas sociales, estudiamos la construcción retórica de los hechos para saber cómo se establece interactivamente el *sentido de la realidad y de la cognición*.

El carácter discursivo de la ciencia en el aula implica la *producción de versiones diferentes según los contextos para los que se construye*. Es necesario considerar las versiones alternativas como argumentos, *por eso las versiones son construcciones situacionales para el debate y no manifestaciones de ideas preconcebidas.*

Esta es la diferencia con el trabajo de Duval (1995), las representaciones son construcciones de objetos matemáticos establecidos, el enfoque cognitivo planteado por él es la aprehensión de objetos matemáticos a través de la formación, tratamiento y conversión de representaciones en diferentes sistemas semióticos.

Un argumento es un invento, una construcción original que utiliza material conocido: ideas, valores, concepciones, etc., compartidos por los participantes (Billing, 1989). Los modelos son recursos discursivos utilizados para argumentar y construir realidades.

El carácter discursivo que le hemos conferido al conocimiento matemático escolar nos remite a actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en un salón de clases, confrontando y argumentado diferentes versiones de un fenómeno de la naturaleza (comprendidos los fenómenos sociales).

1.7.1 La realidad: el mundo “más” lo humano

Tu no puedes saber lo que yo veo, tu no eres yo.

Celine

Citada por R. Duval en Semiosis y pensamiento humano

Entre las diversas fuentes del conocimiento de la ciencia, “la evidencia” (o lo que es descrito por los participantes como lo que se “observa en la realidad”) tiene un papel predominante.

Sin embargo el papel de la “evidencia” ha sido cuestionado desde diferentes ópticas, por ejemplo, Morin (1995) menciona que Niels Bohr y los partidarios de la escuela de Copenhague pensaban que lo que conocemos no es el mundo en sí, es el mundo con nuestro conocimiento. No podemos separar el mundo que conocemos de las estructuras de nuestro conocimiento. Hay una adherencia inseparable entre nuestro espíritu y el mundo.

El interés de estudiar la relación de la “evidencia” con la construcción de los hechos científicos en el discurso escolar también se debe a la importancia que se le ha dado a la experimentación en la enseñanza de las ciencias.

Nuestro planteamiento es en el sentido de que “lo que se ve” es una construcción discursiva y, por tanto, puede variar dependiendo de los actores que “ven”, de sus concepciones y del contexto de la interacción.

La evidencia, la experimentación y los datos empíricos son construcciones sociales, discursivas con fines argumentativos y esencialmente retórica, pueden construirse versiones alternativas tanto de “evidencias empíricas” como resultado de actividades realizadas en el aula (Candela, 1999).

Desde esta perspectiva, por tanto no se estudian las representaciones que se expresan en el habla como si fueran un reflejo de la realidad o una verbalización de nociones significativas preexistentes. Esta es la diferencia con la perspectiva planteada por Vergnaud (1998), ya que, se plantea el trabajo de representaciones de situaciones de la realidad, en nuestro caso planteamos que esta realidad no es preexistente y no es única.

Sostenemos que para aprender ciencia no basta con experiencia perspectiva, pues es necesario aprender cómo se reconstruye esa experiencia en el discurso científico, escolar, dialécticamente se puede decir que para responder a las demandas del discurso científico escolar es necesario realizar reconstrucciones diversas de la experiencia física, tanto escolar como extraescolar, situadas en contextos argumentativos.

1.8 El diseño de secuencias didácticas en el aula: los contextos argumentativos propuestos.

Enseñanza - aprendizaje - conocimiento (Lo didáctico)

La visón anterior obliga a una reformulación epistemológica, que consiste en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano.

Francisco Cordero. La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana.

Algunas investigaciones en matemática educativa han centrado su atención en la forma de cómo el alumno aprehende, construye, reifica,. . ., tal o cual concepto de la obra matemática, es decir hace investigación en matemática educativa mirando hacia el objeto de estudio: la matemática. Nosotros centramos la atención en las prácticas que los humanos realizamos, en este caso en las prácticas escolares, y sobre todo, reproducimos aquellas de una esfera determinada, la del uso de las matemáticas.

Nos interesa no sólo como se construye el conocimiento, sino las prácticas que llevaron a la construcción de este y a su uso en contextos sociales. Es en el ejercicio de estas prácticas donde los actores construyen y utilizan herramientas para lograr sus intenciones. Es decir privilegiamos el papel de las herramientas sobre los objetos.

Ante todo la didáctica es intervención. El papel de esta intervención, proponemos, es guiada por la reproducción de las prácticas socialmente validadas histórica y culturalmente. Es decir, por la producción y reproducción de prácticas a lo largo de la humanidad con una intencionalidad y situación especificas. En este sentido se investigan contextos argumentativos ricos a lo largo de la historia y se analizan las prácticas que intervinieron en estos y sobre todo la permanencia de estas prácticas en el contexto social; es decir, su utilidad.

Así un "contexto discursivo propuesto" es una propuesta para desarrollar prácticas a un grupo social. Esta propuesta es un diseño que contempla un análisis cognitivo, didáctico y epistemológico.

El análisis cognitivo abarca las condiciones socioculturales de los participantes, el análisis epistemológico proporciona sustento a las intencionalidades mediante el estudio de la constitución y reproducción de prácticas histórica, culturalmente y socialmente validadas, mientras que el didáctico analiza las formas de concretar las intencionalidades.

Planteamos que el diseño es un recurso, no es el que funda el conocimiento. El elemento decisivo es la propuesta y la interacción en el aula. La constitución de conocimientos es situacional y por eso tenemos que el papel del profesor es de propositor de contextos discursivos, donde el profesor interviene propiciando la interacción.

Nuestra visión de la enseñanza esta acorde con lo expresado por Wenger (2001), la enseñanza no causa el aprendizaje; crea un contexto en la que éste se produce, como hacen otros contextos: el aprendizaje y la enseñanza no están intrínsicamente unidos. Gran parte del aprendizaje tiene lugar sin la enseñanza y mucha enseñanza se desarrolla sin aprendizaje. De acuerdo a esta visión tradicional plantea la relación entre enseñanza y aprendizaje como una relación entre causa y efecto.

El aprendizaje en el aula no se determina de antemano, por el diseño, por los contenidos o por "la vida real", el profesor propone un contexto discursivo, que no necesariamente "prende", este contexto es sobre la base de un estudio epistemológico sobre las prácticas histórica y socialmente ejercidas. Las prácticas no son únicamente determinadas por este análisis epistemológico sino por el contexto social donde son propuestas. El debate que empapa la didáctica es la interacción entre lo planificado y lo emergente.

Así, el diseño es un recurso para la enseñanza y no una categoría para el aprendizaje. ¿Cuáles son los elementos del diseño?

- El contexto social
- el análisis epistemológico de las prácticas históricas y culturales
- las formas de construcción de los actores en práctica
- las formas en que el diseño puede influir.

Los aspectos que estudiamos en la puesta en escena de los diseños son la participación en la comunidad, su forma de identidad, las competencias en labores específicas y, sobre todo, la construcción o reconstrucción de significados.

Creemos en una visión donde el profesor propone contextos y el alumno decide, explicita o implícitamente de acuerdo a sus intenciones. Es decir se consideran las intenciones de los participantes en la secuencia.

El discurso matemático escolar esta desvinculado de estas intencionalidades, se enseña, por ejemplo, derivada sin que la intencionalidad de los alumnos sea considerada. Así, cuando los alumnos preguntan: "Profesor y esto ¿para qué nos va ha servir?" De alguna forma buscan una intencionalidad. A este respecto Bruner y Haste (1990) plantean que no es sólo el contenido lo que debe de aprender el niño, también debe de aprender el motivo.

Las formas de las puestas en escena de los diseños son importantes y por eso destacamos el papel de las interacciones en el aula.

El prejuicio del profesor "pasivo" o del profesor con papel "protagónico" en el aprendizaje, es cuestionado, las interacciones en el salón de clases son parte fundamental en nuestra perspectiva.

1.9 Las dimensiones del aprendizaje

El maestro debe de estar ocupado, no con la materia de estudio en sí mismo, sin en su interacción con las necesidades y capacidades del alumno. De aquí el simple saber no sea bastante.

John Dewey. Democracia y educación

Hay muchos tipos distintos de teorías del aprendizaje, cada una destaca diferentes aspectos del mismo. Nosotros destacamos cuatro premisas vinculadas con la naturaleza del conocimiento, con lo que es aprender, con el conocer y los conocedores.

1. Somos seres sociales. Este hecho, lejos de ser una verdad trivial, es un aspecto esencial del aprendizaje (la identidad);
2. El conocimiento es una cuestión de competencia en relación con ciertas tareas valoradas, por ejemplo, cantar afinado, descubrir hechos científicos, arreglar máquinas, escribir poesía, ser cordial, crecer como un muchacho o una muchacha, etc. (la práctica, el quehacer);
3. Participar es cuestión de intervenir en la consecución de estas tareas, es decir, de comprometerse de una manera activa en el mundo (los contextos sociales, las comunidades);
4. El significado –nuestra capacidad de experimentar el mundo y nuestro compromiso con él como algo significativo- es, en última instancia, lo que debe producir el aprendizaje.

El principal centro de interés de nuestra perspectiva reside en el aprendizaje como participación social, como práctica social. Aquí, la participación no sólo se refiere a los eventos locales de compromiso con ciertas actividades y con determinadas personas, sino también a un proceso de mayor alcance consistente en participar de una manera activa en las prácticas de las comunidades sociales y en construir identidades en relación con estas comunidades. Esta participación no sólo da forma a lo que hacemos, sino que también conforma quiénes somos y cómo interpretamos lo que hacemos.

En la construcción social del conocimiento las prácticas discursivas son centrales.

En este sentido tres conceptos son esenciales en nuestra visión de aprendizaje, contexto social, prácticas sociales y herramientas.

Así nuestra visión de aprendizaje nos ha obligado a clarificar los términos herramientas, argumentos, modelos, cognición, identidad y realidad.

1.10 Socioepistemología

“La socioepistemología plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizandolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión”.

Ricardo Cantoral y Rosa María Farfán.

La sensibilidad a la contradicción: un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja.

La aproximación teórica que guía la presente investigación es la perspectiva que desarrolla el grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, que actualmente denominamos *aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa,* sintéticamente conocida como “*Socioepistemología*”. Como una perspectiva teórica viva, siempre en construcción, intentamos, modestamente, aportar elementos para su desarrollo.

Sin duda los trabajos de Cantoral, Farfán y Cordero (Cantoral, 1999; Cantoral y Farfán, 1998a; Cordero, 2001, 2002; Cantoral y Farfán, 2002) son la base de esta aproximación.

En un intento por presentar a esta perspectiva de forma sucinta Cantoral y Farfán (2002) propone la siguiente descripción.

De esta forma la Socioepistemología hace énfasis en la naturaleza social en la actividad de la construcción, por parte de los actores sociales en contextos sociales concretos, de sus conocimientos y sus realidades. Esta énfasis en lo social, trastoca el sentido tradicional que se le ha otorgado a las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica.

De esta forma lo social no es una dimensión más en la perspectiva sistémica que se propone, el intervenir modifica el sistema y reactúa en las dimensiones restantes.

En (Cantoral y Farfán, 2002) se plantea lo que se entiende por socioepistemología:

> **Socioepistemología.** Aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizandolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión.

Cordero (2001) establece el papel fundamental del humano y su actividad en esta aproximación, así, plantea que la aproximación socioepistemológica intenta articular dos grandes componentes, la social y la epistemológica, en los que el humano y su actividad se conviertan en elementos primarios en las teorizaciones de la matemática educativa.

Abunda en esta posición, lo socioepistemológico debe significar, en primer lugar, el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe de estar en correspondencia con la modelación y el uso de las matemáticas, es decir, con el lenguaje de las herramientas.

El término socioepistemología, pretende plantear una distinción de origen con las aproximaciones epistemológicas tradicionales, pues mientras éstas asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda la actividad humana, la socioepistemología, en cambio, se plante el examen del conocimiento situado, aquel que atiende alas circunstancias y escenarios socio culturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales (Cantoral y Farfán, 2002).

Así, en nuestra aproximación teórica involucra cómo los estudiantes y el profesor, interactivamente, construyen sus significados, sus identidades, sus realidades y su propia cognición; cuáles son los contextos sociales, las formas y los mecanismos para argumentar y llegar a consensos; cómo el conocimiento se constituye, atendiendo la naturaleza social del conocimiento, los contextos en que éste se construye, las prácticas sociales que se reproducen y las formas de cómo vive el conocimiento. Sobre todo, la articulación sistémica de estos aspectos.

En consecuencia, se toma al sistema social como un sistema complejo, donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, que es el lugar que se atiende, confluyen dimensiones que sistémicamente relacionadas conforman un todo. Las dimensiones que consideramos en este todo tienen que ver con la naturaleza social del conocimiento, su formación histórico cultural y la producción y reproducción social del mismo, la dimensión epistemológica; la cognitiva, con relación a las interacciones que da lugar el proceso de aprendizaje, las interacciones entre los actores y las interacciones con el mundo; las formas de intervención en los procesos escolares, la didáctica; que adquieren sus particularidades en contextos sociales concretos.

Tres características son fundamentales en la perspectiva con la que se aborda la presente investigación.

La primacía de las prácticas sobre los objetos. Es en el ejercicio de las prácticas donde los artefactos son utilizados, son utilizados con intenciones situadas en un contexto, es decir, se interactúa con herramientas.

El carácter situado de dichas prácticas. El contexto viene a ser una componente inseparable de las prácticas. Esta inseparabilidad entre contexto y práctica está en contraste con el papel de las condiciones que facilitan o alteran las acciones.

El carácter discursivo en la construcción social del conocimiento, las interacciones. Los humanos participan en el mundo construyendo sus conocimientos, sus realidades y sus herramientas, interactúan con el mundo y con otros seres humanos.

Así en el capítulo hemos intentado presentar las dimensiones epistemológica, cognitiva y social, desde una posición sistémica, como un todo unitario y complejo.

Por último quisiéramos contrastar el significado que adquieren las dimensiones abordadas desde nuestra perspectiva.

1.10.1 El objeto cognitivo y el sujeto cognoscente

La perspectiva que trata la mente y el mundo como polos opuestos, subjetivo y objetivo, tradicionalmente intenta explicar los fenómenos cognitivos a través de la metáfora objeto – sujeto.

El modelo donde se presenta el proceso de cognición como la relación entre el objeto cognitivo y el sujeto cognoscente, tiene una perspectiva de las dimensiones epistemológicas, cognitivas y didácticas, así por ejemplo la dimensión epistemológica es guiada por la pregunta ¿cómo se constituye el objeto de conocimiento?, la cognitiva por ¿cómo el estudiante aprende el objeto? y la didáctica por ¿cómo se enseña el objeto? Giran alrededor de la construcción del objeto matemático por lo que el foco de interés de sus respectivos marcos teóricos está en la actividad matemática y la cognición del individuo respecto a la adquisición de ese objeto. El sujeto es determinado linealmente y de forma única.

En esta relación el objeto es externo al sujeto, es algo predeterminado, preexistente al proceso de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, en las prácticas escolares este objeto no está determinado, no es único y es reconstruido de acuerdo a las prácticas de los grupos sociales que participan en contextos determinados socialmente.

Sostenemos una crítica a las perspectivas que proponen la existencia de un objeto cognitivo preexistente, único y con estructuras rígidas. Planteamos que aún la cognición es situacional, es decir, el conocimiento se construye en contextos sociales donde los grupos sociales desarrollan determinadas prácticas y estas construcciones no son únicas, se presenta ante ellos una vasta red de posibles construcciones y toman "lo que está a la mano". Recalcamos, las bases de este planteamiento es la diversidad, el respeto a lo diferente y la oposición a la verdad, la realidad, la cognición, la ética como algo único y predeterminado.

El aspecto cognitivo es guiado por la pregunta ¿cómo los estudiantes y profesor, interactivamente, construyen identidades, significados, sus realidades y su propia cognición? Este aspecto atañe a la naturaleza de la construcción del conocimiento y a sus procesos, cuestiones sobre cómo construimos nuestros significados y nuestras realidades, cuestiones sobre la formación de las prácticas en la historia y la cultura.

El aspecto didáctico aborda cuestiones relativas a los contextos argumentativos que se proponen a los estudiantes y las formas y mecanismos para argumentar y llegar a consensos. Se estudian las formas de argumentación, de intervención, de dominación y de consensos.

La dimensión epistemológica es guiada por la pregunta ¿cómo el conocimiento se constituye en tal contexto y cuál es su uso cultural y social? Se analiza la naturaleza de la construcción del conocimiento matemático, su conformación cultural y el papel esencial que desempeña en la acción humana. Cómo lo interpretan los seres humanos y cómo interpretamos nosotros sus actos de interpretación.

Capítulo II

El contexto social

Resumen

Afirmamos que todo conocimiento se construye en estrecha interrelación con los contextos en que se usa y que, por lo tanto, no es posible separar los aspectos presentes en el contexto en el que se actúa.

Hemos adoptado una perspectiva sobre el aprendizaje y la construcción del conocimiento que hace hincapié en su base en las interacciones de los humanos con su entorno y con los otros. El saber y el aprendizaje no tienen sólo que ver con la forma en que piensan los individuos sino que son intrínsicamente sociales y culturales. Nos hemos centrado, por tanto, en estudiar las prácticas intencionales que ejercen los actores en contextos sociales donde se realizan diversas construcciones para su realización, entre ellas sus saberes y sus realidades.

La importancia que concedemos al “contexto social” en la construcción social del conocimiento en nuestra perspectiva deviene de la

interpretación de que las prácticas que ejercen y las construcciones que hacen determinados grupos sociales no están determinadas fuera de su existencia y que no son unívocas; por el contrario, es en contextos sociales donde se brinda un abanico de posibilidades de construcciones, si bien variado, restringido, donde los actores toman “lo que está a la mano”.

Mantenemos que debe concebirse el contexto en su complejidad y, en este sentido, lo hemos llamado contexto social para distinguirlo de otros “contextos”, como un lugar donde confluyen, temporal, espacial y mentalmente, diferentes factores organizados de manera sistémica.

El contexto, para nosotros, es temporal. El contexto en si es la trama de tres temporalidades de los actores sociales, su pasado, sus posibilidades y su presente. De esta forma se articulan el peso de la formación sociocultural y las intenciones para producir prácticas que se ejercen en un contexto social.

Sobre todo, compartimos la posición de Heidegger (1927/1999), en la interpretación de que nos contraponemos a la posición metafísica que siempre concibió al ser según el modelo de la simple presencia, con lo cual la metafísica mostraba que privilegiaba, sin fundarlo explícitamente, una dimensión del tiempo: el presente.

En este sentido para nosotros contexto social es una totalidad que da significado a las partes. Entonces estudiamos fenómenos de la construcción de conocimiento en contextos sociales donde las construcciones histórico - culturalmente constituidas, reconstruidas, adquieren particular significado.

2.1 El contexto social y la construcción social del conocimiento

Tradicionalmente se ha considerado que el conocimiento es independiente del contexto en el que se adquiere, y que una vez adquirido un determinado conocimiento puede ser aplicado a cualquier situación, sea esta escolar o de "la vida real"; sin embargo, numerosos trabajos de investigación muestran lo contrario.

En (Newman, Griffin y Cole, 1998) se afirma que todo conocimiento se construye en estrecha interrelación en los contextos que usa y que, por tanto, no es posible separar los aspectos cognitivos, emocionales y sociales presentes en el contexto en el que se actúa. Mientras que en (Pozo, 1993) se sostiene que la investigación sobre el cambio cognitivo debería orientarse hacia el estudio de las formas en que las personas construyen, usan o activan sus conocimientos en función del contexto. A su vez Wertsch, (1993) afirma que posiblemente en un mismo sujeto coexisten distintas formas de actividad mental, de forma que manifiesta unas u otras en función del contexto. Por otro lado, la perspectiva conceptual implica la idea de que los procesos de cambio cognitivos deben ser estudiados en el contexto donde se producen

Nosotros hemos adoptado una perspectiva sobre el aprendizaje y la construcción del conocimiento que hace hincapié en su base en las interacciones de los humanos con su entorno y con los otros. El saber y el aprendizaje no tienen sólo que ver con la manera en que piensan los individuos sino que son intrínsicamente sociales y culturales. Nos hemos centrado, por tanto, en estudiar las prácticas intencionales que ejercen los actores en contextos sociales, donde se realizan diversas construcciones para su realización, entre ellas, sus saberes y sus realidades.

La importancia que concedemos al "contexto social" en la construcción social del conocimiento en nuestra perspectiva deviene de la interpretación de que las prácticas que ejercen y las construcciones que hacen determinados grupos sociales no están determinadas fuera de su existencia y no son unívocas, por el contrario, es en contextos sociales donde se brinda un abanico de posibilidades de construcciones, si bien variado, restringido, donde los actores toman "lo que está a la mano".

2.1.1 El contexto desde diferentes perspectivas

Lamentablemente es difícil ofrecer una definición satisfactoria de "contexto" a pesar que muchos lo han intentado.

La palabra contexto viene del latín *contexere* que significa "tejiendo juntos", "reunir junto", "compuesto" o "componer". Sin embargo, la palabra contexto se refiere comúnmente al uso lingüístico o por extensión al entorno físico. Así, el diccionario esencial de la Real Academia Española indica que contexto es el entorno lingüístico del cual depende el sentido y el valor de una palabra, frase o fragmento considerados. Por extensión entorno físico o de situación (político, histórico, cultural o de cualquier otra índole) en el cual se considera un hecho.

Los lingüistas emplean a veces la palabra "contexto" para referirse únicamente a las partes de una expresión hablada o de un texto escrito que están cerca de la palabra que estudian. Pero los lingüistas también usan la expresión "contexto de situaciones" para referirse al "conjunto entero de características externas que se consideran pertinentes al análisis lingüístico de una expresión" (Cristal, 1985). En la práctica, claro esta, no oímos simplemente las palabras y deducimos su significado únicamente a partir de éstas. Intentamos darle sentido analizándolas con la memoria, el conocimiento y la asociación. Les damos un "significado" introduciéndolas en nuestro mundo conocido, considerando las características internas.

Diferentes autores ponen atención en el contexto; mientras, para algunos, el contexto es mental (Edwards y Mercer, 1994), para otros, su énfasis está en el contexto discursivo (Candela, 1999). También varía mucho el uso que hacen los psicólogos de la noción de "contexto" (Qhelhas y Pereira, 1998; Mercer, 1993).

Nosotros, en primer lugar, podemos distinguir entre contextos lingüísticos y contextos no lingüísticos; el contexto lingüístico es el habla o texto que precede y sigue a toda expresión hablada, mientras que el contexto no lingüístico incluye el tiempo y el lugar, la ocasión social, las personas implicadas, su conducta o sus gestos. Ambos tipos son muy importantes en cuanto a la forma o estructura de todo discurso y, también, respecto a su contenido.

Distinguimos entre el contexto físico y el mental. Pensamos normalmente en el "contexto" como algo concreto y determinable, el habla o el texto de alrededor, las acciones, gestos, las situaciones y características físicas del entorno, los objetos y herramientas. Ésta es una visión desde el exterior, este es un contexto físico. Para los participantes, el contexto de toda expresión también es una cuestión de percepción y de memoria, lo que creen que se ha dicho, lo que creen que se quería decir, lo que perciben como relevante. El contexto también es algo mental. La relación de éstos es de interdependencia, es compleja. Las circunstancias físicas de todo aprendizaje, podrían servir de soporte a una infinidad de prácticas. Sin embargo, *lo que importa es lo que los participantes en sus actos consideran y entienden como relevante*. Incluso el mismo discurso de alrededor es contextual en la medida en que es recordado o comprendido, ya sea de manera precisa o no (Edwards y Mercer, 1994).

Los contextos institucionales y cotidianos. Las normas, los propósitos y las actividades de las instituciones forman parte de lo que hemos llamado contexto institucional. Los contextos escolares son contextos institucionales, donde el peso de los currícula y las normas, explícitas o implícitas en el aula, son de suma importancia en cuanto plantean ciertas relaciones entre los participantes (contrato pedagógico).

Diversas comunidades están ligadas a ciertos contextos fuera de la escuela, digamos contextos no escolares. El peso de estos contextos en la construcción de los conocimientos es reportado en múltiples investigaciones (Lave, 1992; Lave y Wenger, 1993; Noss, Hoyles y Pozzi, 2002; Roth y Bowen, 2001; Carraher y Schliemann, 1993) donde se estudia, por ejemplo, que a pesar del pobre desempeño escolar en tareas con operaciones aritméticas, niños de un nivel socio–económico bajo que trabajan como vendedores ambulante en las calles de Brasil, resuelven frecuentemente tareas similares si se presentan en el contexto de ventas en su lugar de trabajo (Carraher, Carraher y Schliemann, 1985, 1991). De esta forma existen diferencias cuando se plantea el "contexto de ingeniería" (Camarena, 2001-a, 2001-b) en las escuelas de ingeniería y el contexto de las comunidades de ingenieros, mientras que uno se refiere a un contexto institucional el otro se refiere a un contexto no escolar.

Por otra parte, nuestras formas de actuar son características de quienes somos, es decir de las experiencias a las que hacemos referencias, a nuestras tradiciones culturales, a las normas sociales de las comunidades donde participamos; en suma, a nuestra formación sociocultural. En este sentido el contexto es sociocultural. Contexto es una construcción personal y social que incluye la historia personal y social de los estudiantes, concepciones, artefactos e interacciones sociales.

2.1.2 ¿Escenario, entorno, contexto?

Mantenemos que hay que concebir el contexto en su complejidad, y en este sentido lo hemos llamado contexto social para distinguirlo de otros "contextos", como un lugar donde confluyen, temporal, espacial y mentalmente, diferentes factores organizados de manera sistémica.

Como dijimos, el contexto, para nosotros, es temporal. El contexto en sí es la trama de tres temporalidades de los actores sociales, su pasado, sus posibilidades y su presente. De esta forma se articulan el peso de la formación sociocultural y las intenciones para reproducir prácticas que se ejercen en un contexto social. Se supone que maestros y alumnos efectúan, en gran medida, intercambios de conocimiento y pensamiento respecto a acontecimientos remotos en el tiempo y en el espacio, futuros y pasados, imaginados e hipotéticos, mediante la invocación de generalizaciones abstractas más que de simples descripciones de lo que es físicamente real y presente para los sentidos (Bruner, 1987; Donaldson, 1979; Bernstein, 1971). Las construcciones provenientes de las prácticas sociales devienen; siempre estamos participando en las historias de algunas prácticas y tratando de convertirnos en ciertas personas. Como trayectorias *nuestras identidades incorporan el pasado y el futuro en el proceso mismo de negociar el presente.* De esta forma el contexto social es un escenario en el sentido sociocultural.

El contexto social es físico y lingüístico. El contexto involucra las condiciones "objetivas", las cuestiones físicas; sin embargo, las cosas de "ahí afuera" se hacen contextuales sólo cuando son invocadas, es decir, cuando se hace referencia a ellas, cuando se suponen o se insinúan en la comunicación o en sus actos. El mismo acto de nombrar las cosas, o de suponer comprensiones compartidas de las mismas, convierte, para los participantes, su realidad en una realidad social y conceptual más que una simple existencia física en el mundo de alrededor. El contexto social también es el conocimiento común de los hablantes invocado por el discurso. En este sentido el contexto social es entorno.

El contexto social también es mental. El contexto de una actividad no sólo es la descripción externa y objetiva de las condiciones materiales de la actividad pues también incluye componentes subjetivas tales como la historia personal, concepciones y relaciones sociales de los participantes.

Así, como hemos dicho, un contexto social es la confluencia de:

1. La formación sociocultural de los grupos sociales y de los participantes (incluye la historia personal, concepciones, las

relaciones sociales entre los participantes, experiencias, posición social, desarrollo físico y cultural).

2. Las intencionalidades y expectativas de los estudiantes, profesores e investigadores (las implícitas y las explícitas).
3. Las prácticas que se desarrollan (incluyendo las herramientas que utilizan).
4. El entorno físico (ambiente virtual, los objetos físicos de alrededor, hasta particularidades como "hace mucho calor", "tengo hambre", etc.).
5. El contexto mental, supuestos compartidos (los referentes del discurso como "compras", "experimento", etc., creencias y concepciones compartidas).
6. El contexto institucional, en particular el contexto escolar.
7. El contexto lingüístico.

El contexto social es una construcción original donde confluyen las características sociales e individuales de los participantes (su experiencia escolar y extraescolar, la edad, su escolaridad, sus características culturales y sociales), el entorno físico, las prácticas que se realizan, la intencionalidad de los participantes y los supuestos compartidos. ***El contexto es una totalidad que da significado a las partes***. En este sentido nuestra concepción de contexto social sucede a la noción de contextos de significación planteada por Cantoral (2001): Reconocemos tres niveles o estadios de evolución de los contextos en los que tal noción se expresa o se significa. En este sentido para nosotros contexto social es una totalidad que da significado a las partes. Entonces estudiamos fenómenos de la construcción de conocimiento en contextos sociales donde las construcciones histórico-culturalmente constituidas, reconstruidas, adquieren particular significado.

En resumen, utilizamos el término contexto social para referirnos a todo lo que conocen y comprenden los participantes en su actuar – por encima de lo que hay de explícito en cuanto dicen -, a lo que les ayuda, físico o mental, a dar sentido a lo que se dice y hace, a lo referente a su historia e intenciones.

2.1.3 El contexto y las prácticas sociales

El contexto viene a ser una componente inseparable de las prácticas porque los participantes ejercen las actividades que han de llevar a cabo de acuerdo al contexto dado; y las prácticas son inseparables a las herramientas. Esta inseparabilidad entre contexto, prácticas y herramientas esta en contraste con el papel asignado por las investigaciones cognitivas a los factores contextuales, las condiciones que facilitan o alteran las acciones.

En los contextos sociales, donde se ejercen prácticas sociales, se presenta un todo complejo, aunque a veces haya diferencia entre lo que decimos, lo que pensamos y lo que hacemos, aquello a lo que aspiramos y aquello con lo que nos conformamos, lo que sabemos y lo que podemos manifestar.

Como ya hemos dicho, el concepto de "práctica" connota hacer algo pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido, la práctica siempre es una práctica social.

Este concepto de práctica incluye tanto los aspectos explícitos como los implícitos. Incluye lo que se dice y lo que se calla. Lo que se presenta y lo que se da por supuesto. Incluye el lenguaje, los instrumentos, los documentos las imágenes, los símbolos, los roles definidos, los criterios especificados, los procedimientos codificados, las regulaciones y los contratos que las diversas prácticas determinan para una variedad de propósitos.

El empleo que se hace del concepto de práctica no pertenece a ninguno de los dos lados de las dicotomías tradicionales que separan la acción del conocimiento, lo manual de lo mental, lo concreto de lo abstracto lo práctico de lo teórico, los ideales de la realidad o el hablar del hacer. El proceso de participar en una práctica siempre implica a toda la persona actuando y conociendo al mismo tiempo. En la práctica, la llamada actividad manual no es irreflexiva y la actividad mental no es incorpórea. Y ninguna de ellas es lo concreto, sólidamente evidente, ni lo abstracto, trascendentalmente general: las dos obtienen su significado dentro la perspectiva de prácticas específicas y, en consecuencia, pueden conseguir una gran variedad de interpretaciones.

Mediante las prácticas ejercidas en la interacción los actores sociales constituyen un cuerpo de conocimiento común que se convierte en la base contextual para la acción y comunicación posterior. El contexto no es una construcción acabada, este constituye un punto de partida, donde, a través de la acción de los participantes, crean nuevos contextos que han de servir para el ejercicio de nuevas prácticas. En este sentido existe continuidad. Los mensajes abiertos, las cosas que realmente se dicen, son sólo una pequeña parte del conjunto de la comunicación, el contexto y su continuidad son más complejos. Por eso el contexto y la continuidad son consideraciones esenciales en el análisis del discurso.

Así mismo, las construcciones realizadas en un contexto social modifican a los actores, modifica las capacidades, las perspectivas, sus intereses y motivos, pero también modifican el contexto, presentando una nueva base para la acción. Existe una relación unitaria, no escindida entre el contexto y quienes participan en él, entre las prácticas que se ejercen y las herramientas que se emplean, entre el conocimiento y sus constructores, entre lo que son (su formación sociocultural) y en lo que se transformaran.

Las prácticas sociales a que nos referimos, se refieren a un amplio marco de contextos. En este sentido podemos hablar de prácticas sociales de predecir en diferentes contextos, así como al ejercicio de la tendenciación de funciones y al análisis de su comportamiento. De esta forma no nos interesan exclusivamente las categorías sino, sobre todo, los contextos sociales donde estas categorías son un elemento para su análisis. La estructura está sujeta al ejercicio de las prácticas.

2.1.4 La formación sociocultural

Como hemos dicho el contexto de una actividad no es sólo una descripción externa, objetiva, de las condiciones materiales de la actividad; también incluye componentes subjetivas como la historia personal de los participantes, las concepciones y las relaciones sociales.

El actuar depende entre otras cosas de la formación cultural y social del participante, de sus creencias y concepciones, en particular de lo que son las matemáticas y su papel en la sociedad; es, de esta forma, que la formación académica, el trabajo de los padres y sus prácticas no escolares influyen en la participación. Por ejemplo, las concepciones que tienen acerca de las matemáticas en determinadas microculturas son importantes.

No es posible seguir viendo los participantes en las actividades diseñadas como sujetos sin historia y genéricos (estudiantes de 16 años, por ejemplo). Es por esto que, en un intento por presentar a los participantes en los diseños de aprendizaje, no como sujetos genéricos, sino agentes sociales, personas "de carne y hueso", se explora acerca de su posición económico-social, sus creencias y la de la gente cercana a él (maestros y padres). Sin embargo, la forma y el lugar que estos análisis deben tomar en las investigaciones en nuestra disciplina, aún no son claros. Las formas de cómo estas influyen, tendrían que ser abordados en posteriores estudios. De alguna forma, el discurso está influido por nuestra posición filosófica de lo que somos como entes humanos y su actuar.

2.2 La existencia en un entorno, el Dasein

La posición que hemos asumido sobre el aprendizaje corresponde a una posición filosófica con respecto a lo que somos y a nuestro devenir.

En la problemática que abordamos el hombre ocupa el lugar central, no como objeto biológico, sino a través de su actuar (sus prácticas), los elementos con los que actúa (herramientas) y sus producciones. Esta creación transcurre en el tiempo, sufre un desarrollo, está subordinada a las más diversas transformaciones y regresiones, recibe lo que lo antecede para elaborarlo más o para impugnarlo. Esta creación cultural se realiza por el hombre, dentro de y en cooperación con las asociaciones y organizaciones igualmente creadas por él, las comunidades.

Esto significa pensar acerca de lo que es ser humano. Pensar en el humano, no desde un punto de vista reduccionista que supone al ser humano como un cuerpo biológico, como una mente, como un actor social, como un factor económico o como una conciencia.

Nuestra posición con respecto a lo que es ser, se refiere a lo que Heidegger (1927/1999) plantea:

> El hombre está en el mundo siempre como ente referido a sus posibilidades propias, es decir, como alguien que proyecta; y encuentra las cosas, en primer lugar, incluyéndolas en un proyecto, es decir, asumiéndolas, en un sentido amplio, como instrumentos. Instrumento en este sentido es también la luna, que al iluminar un paisaje nos sume en un estado de ánimo melancólico; y en general también la contemplación "desinteresada" de la naturaleza coloca siempre a ésta en un contexto de referencias, por ejemplo, de recuerdos, de sentimientos o por lo menos de analogías con el hombre y sus obras.

Así, desde nuestra perspectiva, el ser del humano consiste en estar referido a posibilidades; pero concretamente este referirse se efectúa no en un coloquio abstracto consigo mismo, sino como existir concretamente en un mundo de cosas y de otras personas. El modo de ser medio y cotidiano del hombre, del cual decidimos partir, se presenta ante todo como ser en el mundo. El término alemán para designar "existencia" es Dasein, literalmente "ser o estar aquí o ahí". El término expresa bien el hecho de que la existencia está siempre situada, está aquí. Existencia, Dasein, ser en el mundo, son pues sinónimos (Vattimo, 1987).

Todo esto es muy importante, porque, pensándolo a fondo, *nos lleva a cuestionar el concepto mismo de realidad como simple presencia.* La filosofía y la mentalidad común piensan desde hace siglos que la realidad verdadera de las cosas es la que se aprehende "objetivamente" con una mirada desinteresada que es, por excelencia, la mirada de la ciencia y de sus mediciones matemáticas.

Entonces las cosas antes que ser simples presencias, realidades provistas de una existencia "objetiva", las cosas son para nosotros *herramientas. La utilizabilidad* de las cosas o en general su significado en relación con nuestra vida no es algo que se agregue a la "objetividad" de las cosas sino que es su modo de darse más originario, el modo en que en primer lugar se presentan en nuestra experiencia.

Que las cosas, sean ante todo, *herramientas*, no quiere decir, que sean todas *medios que empleemos efectivamente,* sino que las cosas *se presentan a nosotros ante todo provistas de cierta significación respecto de nuestra vida y de nuestros fines.*

En palabras de Heidegger (1927/1999) las cosas son, ante todo, instrumentos; pero el instrumento nunca está aislado, siempre es instrumento para algo. Lo cual significa que el instrumento, por ser tal, exige que esté dada en una totalidad de instrumentos dentro de la cual él se define, "antes del medio individual está ya descubierta una totalidad de medios".

Por otra parte, la totalidad de los instrumentos se da sólo en cuanto existe alguien que los emplea o puede emplearlos como tales, en cuanto esté el Dasein, para el cual los instrumentos tienen su sentido, su utilidad. "Primero" que el mundo, o en la raíz del darse del mundo como totalidad instrumental, está el Dasein. No hay mundo si no hay Dasein. Es también cierto que a su vez el Dasein no es sino en cuanto ser en el mundo; pero la mundanidad del mundo se funda sólo sobre la base del Dasein y no viceversa (Vattimo, 1987).

Así, el mundo no le es dado primariamente al ser como un conjunto de "objetos" con los cuales en un segundo momento se pondría en relación al atribuirle sus significados y funciones. Las cosas se le dan ya siempre provistas de una función, esto es, de un significado; y se le pueden manifestar como cosas únicamente en cuanto se insertan en una totalidad de significados de la cual el ser ya dispone.

El ser en el mundo no tiene nada del "sujeto" de que habla mucha filosofía moderna, porque esta noción presupone, precisamente, que el sujeto es algo que se contrapone a un "objeto" entendido como simple presencia. El humano nunca es algo cerrado de lo que se deba salir para ir al mundo; el ser humano es ya siempre y constitutivamente, relación con el mundo, antes de toda artificiosa distinción entre sujeto y objeto.

La oposición entre la mente y la naturaleza ha sido discutida desde antaño.

Es importante advertir que la confrontación entre sujeto y objeto no está dada de antemano; es una idea que pertenece a la historia humana de la mente y la naturaleza. Por ejemplo, antes de Descartes el término "idea" se usaba sólo para el contenido de la mente de Dios; Descartes fue uno de los primeros en tomar ese término y aplicarlo al funcionamiento de la mente humana. Este desplazamiento lingüístico y conceptual es un aspecto de lo que Richard Rorty describe como "la investigación de la mente como espejo de la naturaleza", un invento que fue resultado de amalgamar imágenes, concepciones y uso lingüísticos heterogéneos (Varela, Thompson y Rosch, 1997).

El conocimiento no es un ir del sujeto hacia un "objeto" simplemente presente o, viceversa, la interiorización de un objeto (originariamente separado) por parte de un sujeto originariamente vacío. El conocimiento es, más bien, la articulación de una comprensión originaria en la cual las cosas están ya descubiertas. No tiene sentido hacer la observación de que, de esta manera, el conocimiento es sólo un movimiento del sujeto en el interior de la propia "imagen del mundo" ya dada (Heidegger, 1927/1999).

El modo de presentarse originario de las cosas en nuestra experiencia no es aparecer como *"objetos" independientes* de nosotros sino que se dan como herramientas, queda abierto el camino para reconocer la objetividad misma de las cosas como un modo de determinarse particular de la instrumentalidad.

El Dasein pues, nunca es *tabula rasa* sobre la cual van a grabarse las imágenes y los conceptos de las cosas. Ni siquiera se puede pensar que el Dasein sea un sujeto provisto desde el comienzo (por ejemplo, en virtud de herencia biológica o cultural) de ciertas "hipótesis" sobre el mundo y sobre las cosas que puede verificar o rechazar al encontrarse directamente con las cosas, como querría una teoría del prejuicio de origen iluminista. Esto, en efecto, supone que sea posible un cotejo entre las cosas "en sí" y nuestros prejuicios sobre ellas. Pero la idea de que se deben abandonar los prejuicios para encontrar las cosas como son "en si" presupone, precisamente, que se vean las cosas como simples presencias, como "objetos". Si, como vimos, las cosas no son, ante todo, esas simples presencias entonces ni siquiera se puede pensar en salir de la comprensión (o precomprensión) del mundo que originariamente nos constituye para encontrar directamente las cosas y verificar si las ideas que tenemos de ellas son válidas, o no.

Esto no significa que el Dasein disponga desde el comienzo de un conocimiento completo y concluso del mundo. No hay que olvidar nunca el vínculo de la noción de significado con la de instrumentalidad (Vattimo, 1987).

Los significados de las cosas no son sino sus posibles usos para nuestros fines (Heidegger, 1927/1999).

2.3 Los contextos argumentativos

Desde diferentes ópticas se ha abordado el papel que juega el contexto en las interacciones sociales. Por ejemplo en Cooper, (1976), Edwards y Furlong, (1978) y Mehan, (1979) (citados por Edwards y Mercer, 1994) se destaca la dependencia del habla en el aula con respecto a un contexto determinado de experiencia compartida, actividad, entorno físico y charla en sí.

Como ya hemos dicho el contexto social incluye diferentes aspectos, entre ellos los aspectos externos, físicos. Sin embargo, es con el discurso como surgen estos aspectos externos y se vuelven relevantes en calidad de bases y recursos para la elaboración del conocimiento.

Las cosas de "ahí fuera" se hacen contextuales sólo cuando son invocadas, es decir, cuando se hace referencias a ellas, se supone o se insinúan en la comunicación. El mismo acto de nombrar las cosas, o de suponer comprensiones compartidas de las mismas, convierte, para los comunicantes, su realidad, en una realidad social y conceptual más que una simple existencia física en el mundo de alrededor. El contexto es el conocimiento común de los hablantes invocado por el discurso.

La dependencia de las producciones discursivas al contexto si bien es destacable los aspectos relevantes del mismo no surgen sino en el mismo discurso.

2.3.1 Los contextos argumentativos propuestos

Como ya hemos dicho, la didáctica, ante todo, es intervención. Esta intervención está guiada por la reproducción de las prácticas socialmente validadas histórica y culturalmente. Es decir, por la producción y reproducción de prácticas a lo largo de la humanidad, con una intencionalidad y situación especificas. En este sentido, se investigan contextos argumentativos ricos a lo largo de la historia y se analizan las prácticas que intervinieron en éstos y sobre todo la permanencia de dichas prácticas en el entorno social y la pertinencia de ser propuestas en el aula.

Pero, ¿en qué consiste la intervención? ¿Cómo es que se proponen contextos argumentativos?

El salón de clases puede ser visto como un contexto social en el que el conocimiento matemático es negociado y construido (Bauersfeld, 1992; Cobb, 1986). Al mismo tiempo, el profesor y los estudiantes son construidos y posicionados con respecto a este conocimiento (Atweh, Bleicher y Cooper 1998).

Un contexto argumentativo propuesto es un diseño propuesto para desarrollar prácticas a un grupo social. Esta propuesta es un diseño que contempla un análisis cognitivo, didáctico y epistemológico.

El análisis cognitivo abarca las condiciones socioculturales de los participantes, el análisis epistemológico proporciona sustento a las intencionalidades mediante el estudio de la constitución y reproducción de prácticas histórico, culturalmente y socialmente validadas, mientras que el didáctico analiza las formas de concretar las intencionalidades.

Los contextos propuestos incluyen los "materiales" e "instrucciones" que se les da a los participantes para guiar la interacción. Estos contextos propuestos difieren del diseño de situaciones "altamente controladas" donde los participantes son vistos como pequeños científicos que interpretan el mundo por sí solos. Por el contrario, se trata de que el contexto sea un lugar donde los participantes interaccionen entre ellos y lo que los rodea, así, estas participaciones son analizadas, en un contexto complejo, teniendo en cuenta entre otras cosas, las intenciones y el papel de los otros. No es sólo el contenido lo que tiene que aprender el actor. También debe de aprender el motivo, es decir, se tiene que compartir la intencionalidad. De esta forma la aceptación de los contextos no necesariamente significa compartir las mismas intenciones, significa negociarlas.

En el contexto se negocian las intenciones aceptando de alguna forma particular la participación en los contextos propuestos.

Entonces, nuestra intervención *no empieza con un conjunto de presuposiciones de que es cierto, o falso, en algún contexto social particular y luego trata de averiguar que ha conducido a algunas personas a caer en el error.* Al contrario, nuestra participación será indiferente al hecho de que algún conjunto de afirmaciones sea tratado ampliamente por los participantes como verdadero o falso.

La verdad y falsedad se puede estudiar como intervenciones en una partida retórica y se tratarán como tales y no como recursos previos que gobiernan el análisis, evitando que el investigador se subordine a la ortodoxia científica del momento (Edwards y Mercer, 1994).

Los contextos argumentativos propuestos no tienen nada que ver con los problemas contextualizados propuestos en algunos libros de texto, donde los conocimientos han sido artificialmente contextualizados.

Desde este punto de vista compartimos nuestra posición con lo expresado por Slisko[1], en el sentido de que no sólo se trata de proponer un ambiente familiar o una simplificación de los problemas, las actividades en contextos argumentativos propuestos implican trabajar en situaciones complejas.

No es simplemente cuestión de hacer que las cosas resulten familiares por el uso de un lenguaje comprensible, sino garantizar que el discurso sea una práctica rica en argumentos y construcciones.

[1] Josip Slisko, "La modelación matemática en el aprendizaje de la física escolar: ¿Es un obstáculo epistemológico o una estimulante actividad cognitiva?", curso por invitación en la V Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas Oaxaca, Oaxaca, 2001.

2.4 La verdad contextual

La relación del conocimiento científico con la verdad resulta especialmente relevante para el discurso de la ciencia ya que este domina el enfoque paradigmático que se orienta hacia el conocimiento de la verdad. Este enfoque contrasta con otras maneras de construir discursivamente la realidad, como es la modalidad narrativa (relatos, novelas) que se basa en cómo llegamos a darle significado a la experiencia más que en la búsqueda de la verdad (Bruner, 1988).

Como ya hemos dicho, la verdad y falsedad se puede estudiar como intervenciones en una partida retórica y se tratarán como tales y no como recursos previos.

Así por ejemplo en una clase de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Acapulco, el profesor plantea al grupo la paradoja de Zenón sobre la carrera entre Aquiles y la tortuga como introducción al tema de series de potencias. Después se pregunta ¿Aquiles alcanzará a la tortuga? Los estudiantes plantean sus versiones y dan argumentos alrededor de estas. Un fragmento de esta interacción es el siguiente:

En la vida real sí pero en la escuela no.

Emilio: "Aquiles no alcanza a la tortuga porque siempre le faltará algo".

Raquel: "Si, pero cada vez le falta algo más pequeño".

Emilio: "Pequeño pero le falta algo".

Raquel: "Pero es muy pequeño, menos que un pedacito de paso, pero que no ves que si corremos y yo corro más rápido te alcanzo".

Emilio: “Bueno ya, en la vida real, Aquiles alcanza a la tortuga, pero aquí en la escuela no”.

Para Emilio pueden pasar dos cosas opuestas (la alcanza y no la alcanza) sin ningún problema. El que suceda una cosa en la “vida real” y suceda lo contrario “en la escuela” no le significa contradicción alguna. Esto muestra que hay una separación de lo que existe en la escuela y fuera de la escuela. La verdad depende del lugar donde estemos situados. Esto es lo que llamamos la verdad contextual, es “verdad” para los participantes referentes a un contexto.

Pero no sólo encontramos lo que llamamos verdad contextual, sino que las estrategias para resolver algún problema están en dependencia de los contextos.

2.5 Los contextos y las estrategias ante un problema

Planteamos que en la resolución de problemas con una misma estructura matemática los estudiantes y profesores operan con diferentes estrategias, de acuerdo al contexto.

Para mostrar evidencias empíricas de esta tesis, hemos realizado diversas exploraciones entre profesores y alumnos. De las cuáles, exponemos a continuación una experiencia que desarrollamos con profesores de preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Escogimos un problema y lo presentamos en tres contextos lingüísticos diferentes, posteriormente analizamos los procedimientos de resolución.

La estructura matemática del problema a tratar es la siguiente:

x y y mantienen una relación afín.
Sí $x = 0$, $y = 130$ y sí $x = 40$, $y = 210$
¿Cuál es el valor de y sí $x = 90$?

Estructura matemática del problema

Los contextos en que se presento el problema a resolver fueron tres:

- Contexto "experimental"
- Contexto de "compras"
- Contexto "gráfico"

Refiriéndose al arreglo de la figura 2.1. Cuando el portapesas no tiene peso el indicador de la regla se encuentra en 130 *mm*; después de colocarle 40 *g* el indicador indica 210 *mm*, ¿cual será el lugar del indicador sí se colocan 90 *g* en el portapesas?

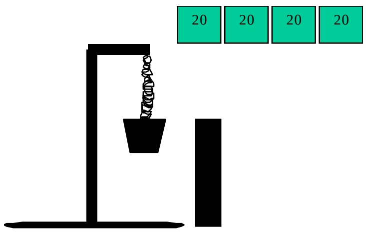


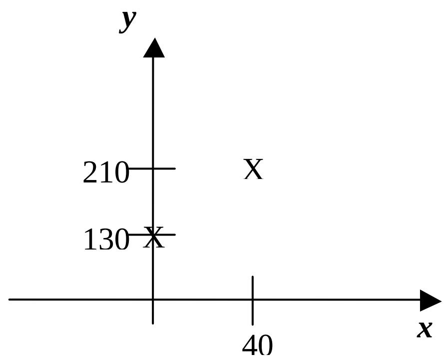
Figura 2.1

Contexto A: Contexto "experimental"

Para comprar en Sams necesito sacar una credencial que me cuesta \$130.00; sí compro 40 libretas me cuestan con todo y credencial \$210.00. Deseo comprar 90 libretas, ¿Cuánto me costarán?

Contexto B: Contexto de "compras".

De acuerdo a la siguiente gráfica encuentre el valor de y cuando x = 90.



Contexto C: Contexto "gráfico".

Se trabajó con un grupo de 36 profesores, se presentó el problema en el contexto (A) a doce profesores para que lo resolvieran individualmente, a doce profesores se les repartió el problema en el contexto (B) y a los doce restantes en el (C). Se les dieron cinco minutos para resolver el problema.

Posteriormente se formaron tres equipos donde analizaron las estrategias seguidas en la resolución del problema. Pudimos distinguir diferentes estrategias empleadas por los profesores al resolver los problemas.

Estrategia 1: Utiliza regla de tres. Se remite a la experiencia de la escuela, "los problemas se resuelven con regla de tres". En la mayoría de los casos aplican mal la regla de tres 40 es a 210 como 90 es a x.

Estrategia 2: Buscan el precio de cada libreta y lo multiplican por 90 y después le agregan 130 pesos. Se remiten a la experiencia en el mercado; buscan el precio de un artículo y lo multiplican por el número de los artículos a comprar.

Estrategia 3: Intentan encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, 130) y (40, 210), después intentan encontrar el valor de y cuando $x = 90$ usando la ecuación.

El resultado de este análisis muestra que los 12 profesores que resolvieron el problema en el contexto (A) lo resolvieron utilizando regla de tres, de los cuales seis la aplicaron incorrectamente (40 es a 210 como 90 es a x, luego multiplicaron 210 por 90 y el resultado lo dividieron entre 40). De los doce profesores que resolvieron el problema (B) seis lo resolvieron utilizando regla de tres y los otros seis restantes encontraron el precio de una libreta lo multiplicaron por el número de libretas y le sumaron el costo de la credencial. De los doce profesores que resolvieron el problema (C) todos intentaron encontrar la fórmula de la recta que pasa por los dos puntos dados para posteriormente encontrar el valor pedido, siete profesores no terminaron el problema, tres lo resolvieron mal y sólo dos lo resolvieron bien.

En la resolución de problemas con una misma estructura matemática los profesores operaron con diferentes estrategias, de acuerdo al contexto en el que fue abordado.

2.6 Los argumentos contextuales

Al abordar diversas situaciones los estudiantes y profesores utilizan argumentos que corresponden al contexto específico, nosotros los hemos llamado argumentos contextuales.

Es decir, en la construcción discursiva del conocimiento matemático, se emplean argumentos "no usados en la ciencia matemática", pero que de alguna forma juegan un papel relevante.

¿Qué papel juegan los argumentos contextuales en la construcción del conocimiento?

Una exploración con estudiantes de un curso propedéutico para el ingreso a las licenciaturas que ofrece el Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE), nos muestra que en la resolución de problemas se recurren a argumentos contextuales, para validar sus respuestas.

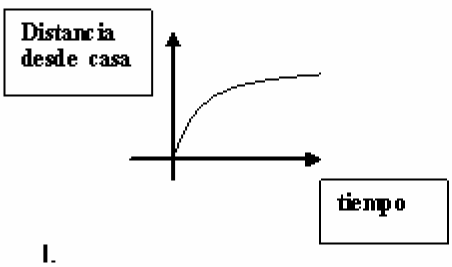
A continuación presentamos dos problemas y la forma de cómo los resolvieron.

1. Relacione cada uno de los enunciados con una gráfica y escriba el enunciado de la gráfica restante.

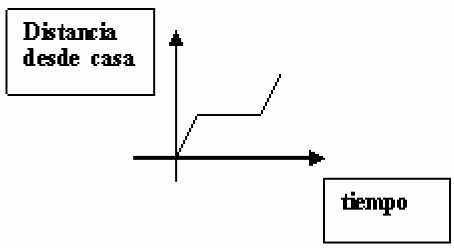
    a. Acababa de salir de mi casa cuando me percaté que había olvidado mis libros, así que regresé para recogerlos.

    b. Las cosas marchaban bien hasta que se me ponchó una llanta.

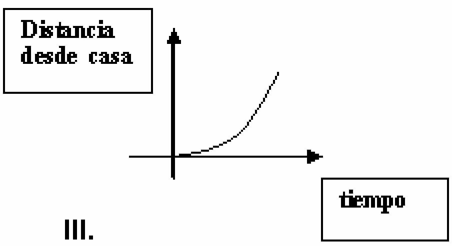
    c. Arranqué con calma pero aceleré cuando me di cuenta que llegaría tarde.



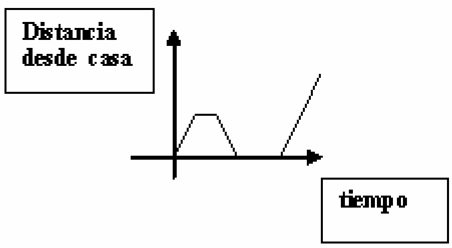
I.



II.



III.

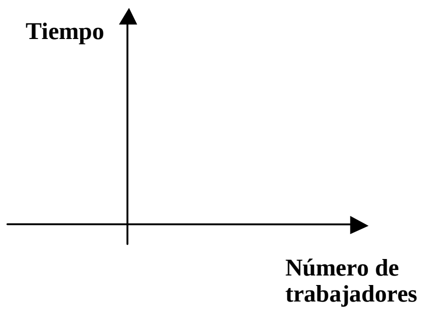


IV.

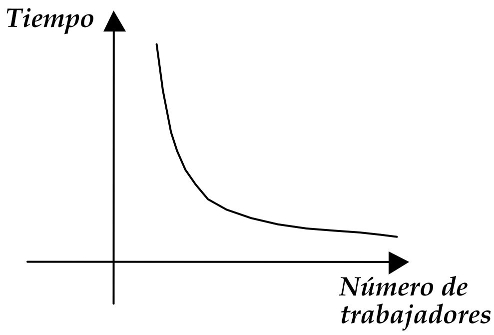
Aquí al abordar el inciso (b) hubo dos versiones, una que sostenía que la respuesta era la gráfica II, "porque sale de su casa, avanza, se le poncha la llanta y, después, continúa hasta llegar a su trabajo". La otra sostenía que era la gráfica I, "porque sale de su casa, se le poncha la llanta y tiene que bajar la velocidad, se va despacio hasta llegar al trabajo, no cambia la llanta". Toman argumentos del contexto para validar su versión.

Un segundo problema es el siguiente:

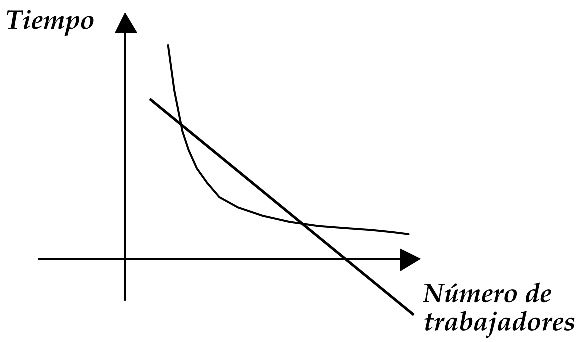
2. Para construir una casa se contratan un determinado número de trabajadores. Se sabe que si se contratan 20 trabajadores la construcción se realizará en 90 días. Trace una posible gráfica del número de trabajadores con respecto del tiempo que se tardarán en realizar la construcción.



Los estudiantes intentaron primero presentar la gráfica utilizando la regla de tres, la desechan utilizando argumentos del contexto: "no puede ser que con más trabajadores se tarden mas tiempo". Proponen una gráfica como la siguiente:



El maestro entonces, trazando una recta, pregunta: "¿Y por qué no una gráfica como esta?"



Los estudiantes argumentan contextualmente de la siguiente manera:

"Porque tendríamos que sí contratamos 2000 trabajadores la casa se hubiera construido desde hace un mes".

Así, nosotros sostenemos que las actividades matemáticas no son "neutras", (neutras entre comillas porque desde el momento en que se decide "aislar del contexto" se establece un contexto) **dependen del contexto social** donde se aborda. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores escolares o no escolares, además, es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad.

El contexto hace referencia a las experiencias vividas, los estudiantes no son *tabula rasa* al enfrentar una situación; se remiten a experiencias vividas anteriormente en contextos escolares o de otro tipo.

En nuestra propuesta, aprender no sólo significa que los alumnos en su etapa escolar saben tal definición o saben deducir algún teorema o pueden resolver problemas de "aplicaciones" que plantean los libros, la importancia radica en la forma que el conocimiento, construido por el humano, vive, es movilizado en las interacciones sociales. Desde este punto de vista, no sólo es importante que un estudiante construya el concepto de derivada, sino que, fundamentalmente, nos interesa cómo es movilizado en sus interacciones sociales, las formas en que viven los conocimientos construidos, cómo son movilizados como argumentos o cómo se emplean como herramienta para intervenir en su entorno.

Capítulo III

La modelación como práctica social de matemátización en el aula

Resumen

En este capítulo pretendemos argumentar sobre la pertinencia de tomar las prácticas sociales de modelación como base epistemológica en el diseño de secuencias de aprendizaje. Estos diseños se centran, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por los participantes utilizando herramientas y situadas en un contexto social; en este caso en las prácticas sociales de modelación.

Las prácticas de modelación que se han elegido y se enfocan en prácticas que se desarrollan en interacción con fenómenos (físicos, químicos o sociales), conjeturando y realizando predicciones acerca de ellos utilizando modelos. Estas prácticas no sólo se han ejercido históricamente, en el plano profesional y de los problemas cotidianos actuales esa práctica es ejercida.

De esta forma nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños.

Esto significa que la epistemología debería reconocer la actividad humana como una organización social y una fuente donde se construye conocimiento (Cordero, 2001).

Se diseñan secuencias bajo esta perspectiva teórica de las cuales podemos destacar tres aspectos, la selección del lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos, el carácter discursivo de la construcción social del conocimiento y las interacciones en el aula.

En la secuencia la estructuración discursiva entre las herramientas, los modelos y las realidades viene a ser central. El otro eje gira en torno a la tesis de que en el ejercicio de ciertas prácticas sociales, usando herramientas, es donde aparecen, se estructuran y se movilizan, como argumento, ciertas nociones matemáticas; como por ejemplo los modelos gráficos distancia–tiempo y velocidad-tiempo.

En este sentido coincidimos con lo señalado en (Cordero, 1998; Confrey y Costa, 1996) cuando afirman que seleccionar el lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos viene a señalar una clara relación entre la actividad matemática y la actividad humana. Nosotros agregaríamos, que seleccionar el lenguaje de las herramientas nos lleva a replantearnos a las prácticas como base epistemológica para entender las diversas construcciones de los humanos, entre ellas, la ciencia.

3.1 Las prácticas de aprendizaje en interacción con los fenómenos

La historia del conocimiento muestra que en numerosas ocasiones, diversas nociones y procedimientos matemáticos han surgido del proceso de comprender y transformar diversos fenómenos naturales o sociales.

Los estudios y propuestas de aprendizaje en el aula de matemáticas, donde se incorporan diversos fenómenos, se han presentado desde diferentes ópticas.

Existen investigaciones que incorporan los fenómenos *para fijar los contenidos matemáticos*; por ejemplo, en estudios relativos al campo de las matemáticas para las ciencias sociales, (Malaspina, 1998) menciona que conocer conceptos de otros campos del saber y modelos matemáticos de la realidad, contribuye en alguna medida a desarrollar ideas para visualizar conceptos matemáticos y reforzar así su comprensión y manejo y facilitar, en consecuencia, una intuición de lo abstracto.

Algunos estudios en una reflexión mas profunda se refieren a matemáticas en contexto, como las que en (Hitt, 1996) se mencionan, donde se afirma que en los últimos años ha habido un movimiento con relación a la presentación de la matemática en contexto; tal acercamiento ha sido promovido por diversas escuelas (Bell, 1990, Brousseau, 1986, Dekker, 1995, entre muchos otros). Brousseau (1986) analiza el papel del profesor en el proceso de la enseñanza, él señala que una de las tareas del profesor es la que tiene que ver con la recontextualización de la matemática. Es decir, los conceptos matemáticos surgen en ciertos contextos y el proceso de formalización de la matemática los descontextualiza. Así, una de las tareas del profesor es la recontextualización de los contenidos matemáticos que se encuentran en los libros de texto, para su presentación en el aula; otra tarea es la de repersonalizar los problemas tratados; en otras palabras, el profesor intenta que el alumno tome como suyo el problema. Brousseau añade que para que el alumno desarrolle un proceso de abstracción sobre los conceptos en juego debe realizar un proceso inverso a los procesos de despersonalización y descontextualización.

En esta dirección se encuentran trabajos como el de (Hitt, 1996), donde examina la posible articulación que un grupo de profesores hiciera entre el sistema semiótico de la representación gráfica con un contexto real como pudiera ser el dibujo de un recipiente y su eventual e hipotético llenado.

Otras investigaciones analizan la incorporación de fenómenos desde una perspectiva constructivista como en (Kaput, 1991) quien plantea, en un trabajo acerca de notaciones y representaciones, lo siguiente: ... conocer una idea matemática "abstractamente", significa tener un conjunto de estructuras mentales lo suficientemente rico como para tratar con la idea sobre la base de unas cuantas características relevantes ya sea en una notación o en una situación que se va a modelar. En este escrito declara la necesidad de contar con algunas formas materiales, ya sea al nivel notacional, o disponer de una situación para modelar, que permita la comprensión matemática. Ello es debido a que en la medida en que las características operantes de dos notaciones particulares están disponibles perceptual y cognitivamente en el sujeto (es decir, cómo selecciona y coordina esas características), su propiedad icónica (su representación física) también le está disponible.

Mientras que algunos trabajos centran su atención en la resolución de problemas, así Reif (1987) señala que la habilidad para interpretar y usar conceptos especiales como aceleración, velocidad, campo eléctrico, etc., es un prerrequisito para la resolución de problemas tanto de la ciencia como de las matemáticas.

Sin duda son importantes los aportes de investigaciones realizadas por grupos internacionales de investigación referentes a la modelación en ambientes simulados, como en el reportado en (Sutherland, Mochón, Jinich, Rojano, 1996) que versa sobre el papel mediatizador de la hoja de cálculo para expresar y resolver problemas matemáticos de modelación en diversos campos del conocimiento como biología, química o física. En ese estudio se reporta que a través de un caso se muestra la factibilidad de modificar las actuales prácticas matemáticas en el salón de clases de materias de esas científicas. Se concluye que la modelación matemática en un medio computacional como el de las hojas electrónicas de cálculo permite al estudiante crear un mundo propio, un mundo artificial, en el cual explora fenómenos del mundo físico y logra hacer conceptualizaciones a partir de esta experiencia. El soporte teórico del proyecto es el planteado por los teóricos de la cognición en práctica y de la psicología de exteriores (Lave, 1992) cuyo enfoque permite enfatizar el estudio de las continuidades y discontinuidades de la práctica matemática en una variedad de materias científicas, desde las clases de matemáticas hacia las demás materias escolares.

En este sentido, estamos planteando una distinción con la literatura contemporánea, pues nuestro enfoque de aprendizaje nos conduce al ejercicio de prácticas humanas en interacción con los fenómenos de la naturaleza en contextos sociales, es decir al ejercicio de prácticas humanas realizada en un lugar, en un tiempo y con una comunidad. En consecuencia el estudio de las interacciones de los actores al ejercer prácticas en contextos sociales, las herramientas utilizadas y sus construcciones, nos brinda la oportunidad de caracterizar prácticas de construcción del conocimiento matemático cuando se trata con fenómenos. Prácticas referentes a la construcción de herramientas matemáticas utilizadas por comunidades interviniendo en los fenómenos de la naturaleza.

Consideramos que en determinadas circunstancias los estudiantes desarrollan, en interacción con los fenómenos, procesos de matematización; sin embargo, este proceso no es de forma automática pues el estudiante puede manejar y hacer algunas predicciones o transformaciones sobre el fenómeno pero no necesariamente ejercen prácticas de matematización. Sin embargo subrayamos la importancia de desarrollar procesos de matematización en la interacción con fenómenos de la naturaleza.

Las actividades que ponemos en funcionamiento se basan en la experimentación y en la reflexión. Estas actividades consisten en una verdadera reflexión sobre el paso de las características físicas de los fenómenos a los símbolos (tablas, gráficas, expresiones algebraicas, etc.) y de éstos a los fenómenos.

Así que quisiéramos obtener una connotación acorde a lo planteado en (Cordero, 1998), hay epistemologías que enfocan categorías que llevan a pensar a la matemática como una herramienta para modelar en tanto que no se asignan objetos matemáticos a una realidad separada, más bien, se reconoce que hacer distinciones y formar construcciones es una parte esencial de la modelación. En este sentido coincidimos con lo señalado en (Confrey y Costa, 1996) cuando afirman que seleccionar el lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos viene a señalar una clara relación entre la actividad matemática y la actividad humana. Nosotros agregaríamos, que seleccionar el lenguaje de las herramientas nos lleva a replantearnos a las prácticas como base epistemológica para entender las diversas construcciones de los humanos, entre ellas la ciencia.

3.2 La ciencia en el aula como producto de la retórica

> *La ciencia que se construye discursivamente en el aula es, al menos en parte, una ciencia caliente, una ciencia en construcción y no una ciencia fría (terminada) donde las verdades ya estén establecidas y no haya más que retomarlas. Esta ciencia retórica es la que puede relacionarse con una actividad emancipadora, no autoritaria, aunque tampoco anárquica.*
>
> ***Antonia Candela. Ciencia en el aula***

En este acercamiento, socioepistemológico, la naturaleza social del conocimiento es central, se cuestiona la pretensión de caracterizar de una manera definitiva a la ciencia como un sistema objetivo de conocimiento o como un sistema cultural interpretativo, ya sea a partir de los productos científicos o del quehacer cotidiano de los científicos, visto por ellos mismos o por observadores etnográficos.

Se concibe al conocimiento científico como una construcción social sujeta a ciertos procesos discursivos específicos que incluyen tanto las versiones sobre ciertos temas como la organización del discurso, las maneras de hablar, de argumentar, de analizar, de observar, de construir con palabras el resultado de la experiencia, de validar un conocimiento y de establecer una verdad, así las propias investigaciones son consideradas piezas del discurso textual y argumentativo (Candela, 1999).

La verdad es lo que los científicos tratan como verdad en el discurso; no se estudia la verdad científica analizando los productos de la ciencia y su relación con una realidad objetiva preexistente (Potter, 1996).

En este trabajo, como parte de la dimensión social, consideramos necesario que los alumnos construyan el conocimiento, las actitudes y los valores en una comunidad como la que se forma en el medio sociocultural de la familia y la escuela (Vigotsky, 1984).

Consideramos que el conocimiento matemático en el aula es construido en la interacción entre profesor y alumnos, confrontando y argumentando diferentes versiones dentro de un contexto social específico. Sostenemos que la matemática no es "neutra", depende del contexto social en donde se aborda. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores escolares o no escolares, este contexto social es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad.

En cuanto a la dimensión didáctica privilegiamos el papel de las interacciones en el aula, de tal forma que coincidimos con lo planteado por Erickson (1989) cuando afirma que la investigación sobre la enseñanza no pretende conocer qué conductas del maestro hacen aprender más a los alumnos porque éstas no son acciones causales ni se pueden controlar en una interacción entre sujetos con voluntad. Se pretende investigar qué prácticas se ejercen en un contexto discursivo propuesto, las herramientas que utilizan y qué condiciones de significación se crean colectivamente.

En nuestra aproximación se toman a las interacciones como centrales para la construcción del conocimiento. En lugar de centrarse sólo en los expertos y en la definición de las metas de la instrucción se enfoca en la negociación del significado a través de las interacciones en el salón de clases. Un profesor experto, en contraste con un matemático experto, permitirá que las interacciones entre los estudiantes generen discusiones, demostraciones y argumentos. El trabajo individual no se evita, sino que se sitúa en un contexto de progreso grupal. Esta aproximación no disminuye la importancia del conocimiento experto por parte del maestro, sino que, de hecho, requiere un entendimiento matemático más profundo y más flexible.

Así, el estudio de la forma en que los alumnos participan en la interacción discursiva nos ayuda a entender qué condiciones de significación se crean en la interacción para propiciar su contribución en la tarea de elaborar el conocimiento científico y las reglas de interacción social.

Compartir, confrontar y por tanto construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente, que en este trabajo describiremos como discurso. El discurso incluye tanto la comunicación oral como la escrita entre los participantes. Se entiende al lenguaje como sistema de recursos para construir significados (Candela, 1999), no sólo un instrumento para la transmisión de información, sino un medio dinámico para la acción social.

Dentro de la dimensión cognitiva consideramos qué parte del interés del análisis del habla como *acción social es que produce versiones diferentes del mismo fenómeno, según los contextos para los que se construye.* Las variaciones revelan el carácter situacional y funcional de las versiones. Se distingue así de los estudios de la psicología cognoscitiva que se interesan por el habla como representación de concepciones mentales. El análisis retórico demuestra que para entender la naturaleza y función de las distintas versiones sobre un hecho es necesario considerar las versiones alternativas como argumentos. Por eso las *versiones son construcciones situacionales para el debate y no manifestaciones de ideas preconcebidas.*

En psicología cognoscitiva, y especialmente en psicología genética, el lenguaje se concibe, sobre todo, como un vehículo para expresar el pensamiento, para expresar lar representaciones que el individuo ha construido en su relación con el mundo físico. En cambio, algunas posturas dentro de la psicología social e histórico-cultural (Vigotsky, 1984; Wertsch, 1993) consideran que el lenguaje es un medio para desarrollar el pensamiento. Para Vigotsky la comprensión del mundo físico está fuertemente influida por categorizaciones sociales que se interiorizan de cierto contexto cultural. Desde nuestra perspectiva no se estudian las representaciones que se expresan en el habla como si éstas fueran un reflejo de la realidad o una verbalización de nociones cognoscitivas y significados ***preexistentes***; por el contrario, consideramos, y de esta forma coincidimos con Edwards y Potter (1992), que el *habla como acción situada en un contexto discursivo construye el significado, la realidad e incluso la misma cognición.*

En suma, *la ciencia no es entendida como constituida sólo por hechos científicos sino, sobre todo, como recursos argumentativos* que establecen los hechos científicos y la experimentación y los datos empíricos como un recurso para argumentar.

3.3 Problemática que atiende la investigación

> *El tener que hacer con cosas de un modo inteligente produce conocimiento o familiaridad con ellas. Las cosas que mejor conocemos son aquellas que usamos más frecuentemente... Diferenciándose en objetos más especiales, según las ocupaciones de una persona en la vida.*
>
> ***John Dewey. Democracia y educación***

La base de esta investigación supone la factibilidad de generar universos ricos de significantes y de recursos argumentativos a partir de la propia actividad humana, en el que la actividad matemática sólo es una parte, que funcionen como herramientas para la intervención en la naturaleza, en la sociedad y en la definición de su identidad.

La problemática propuesta corresponde a un esquema donde se plantea como base la actividad humana, donde se hace la distinción de tres esferas de actividades, la de las actividades matemáticas científicas, la esfera de las actividades matemáticas escolares y las del uso de las matemáticas.

Entendiendo por esferas de actividades como el conjunto de prácticas sociales identificadas por su intencionalidad. No es el planteamiento de conjuntos de individuos o de instituciones o de conocimientos (independientes de las prácticas), sino, más bien, el conjunto de prácticas humanas en una sociedad determinada. Se entiende a los individuos, a las instituciones y al conocimiento como entes ocupando sitios en la sociedad definidos por las actividades que desempeñan.

Las actividades matemáticas científicas están ligadas con la reproducción y ampliación de la ciencia matemática. Entendiendo por ciencia como un campo de la cultura humana que se estructura sobre la base de grandes debates acerca de lo que son los hechos y fenómenos y la explicación de su causa (Candela, 1999).

La intención de estas actividades la constituye el hacer, reproducir y comunicar el conocimiento matemático científico.

En la esfera del uso de las matemáticas la intencionalidad fundamental no es la de enseñar matemáticas, tampoco el de crear matemáticas, es la de usarlas en prácticas sociales fuera de la ciencia matemática, en otras ciencias, en el desarrollo de tecnología, en la experiencia profesional o en los problemas cotidianos. Estas prácticas viven en comunidades de profesionistas, de comerciantes, de investigadores, etc.

Las actividades referentes a la actividad matemática escolar, de alguna manera, intenta reproducir las prácticas de la creación de la matemática y su uso; sin embargo, la escuela tiene reglas definidas de interacción social y en ella se aprenden maneras particulares de describir al mundo que nos rodea, desarrolla teorías y define los papeles que las actividades matemáticas juegan en estos procesos.

La separación de éstas en el siguiente diagrama atiende a la presentación, exclusivamente. Son esferas donde las intersecciones, su separación y fronteras no están claramente definidas. Existiendo, además, otras esferas como la de las actividades matemáticas estéticas.

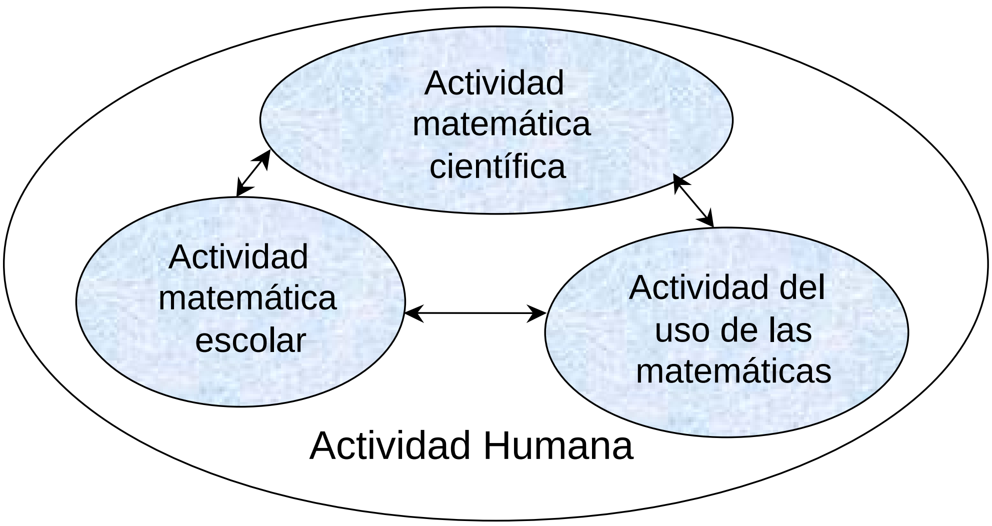


Figura 3.1. La problemática que atiende la investigación

La relación entre estructura matemática, obra científica, saber erudito o ciencia matemática y la matemática escolar ha sido presentada en diferentes perspectivas; por ejemplo, a partir de la teoría de la transposición didáctica, propia de la tradición francesa, mediante la cual se describe el proceso ineludible y las variables que intervienen en el tránsito del conocimiento científico a conocimiento susceptible de ser enseñable y enseñado realmente; o, por ejemplo, desde lo que la tradición alemana llama con el concepto de elementarizar, esto es, la transformación activa del contenido matemático a formas más elementales con una doble significación, ser fundamental y accesible para los grupos de estudiantes que lo reciben (Biehler et al 1994, citado en Farfán, 1997).

La relación entre matemática escolar y problemas cotidianos ha sido tratada desde un enfoque cognitivo, entre otros, por (Lave, 1992, Evans, 1996, Saxe, 1991, Carraher, 1991, Rojano, et al, 1996) que discurren sobre la pertinencia de la transferencia del conocimiento escolar a la resolución de problemas cotidianos.

Sierpinska, citando a Lave y a Walkerdine en (Sierpinska, 1995), señala que la comprensión y procedimientos mentales cotidianos que precisan ciertas operaciones y relaciones matemáticas elementales suelen ser sensiblemente diferentes de aquellas que se esperan de los estudiantes, tanto en sus actividades escolares como en sus prácticas experimentales, aún a pesar de que éstas traten con las mismas operaciones y relaciones. Esta situación plantea la imposibilidad de la transferencia del conocimiento desde el conocimiento escolar hacia la resolución de problemas cotidianos. Planteando una distinción entre la matemática escolar y la matemática de uso.

Lave (1992) plantea que la cognición es situada en contextos y si queremos que los estudiantes aprendan algunas cosas transferibles estos contextos deben ser cercanos a aquellos en los cuales los estudiantes vivirán y trabajarán en su vida de adulto.

Mientras que Evans (1996) propone, una transferencia en "dirección opuesta" de prácticas no escolares al uso en contextos escolares, en ese sentido la transferencia es bidireccional.

En otra dirección, diversos acercamientos (Lesh, 1985; Kaput, 1994) consideran las aplicaciones como una meta en sí misma y como un pretexto para elaborar cada vez más matemática

Así mismo, Cantoral (1997) menciona que localizamos una incesante relación entre le pensamiento físico y el pensamiento matemático, lo cual nos brinda la oportunidad de contar con elementos ausentes en la matemática escolar contemporánea, aunque presentes y protagónicos en la de otros períodos. En nuestro acercamiento, el estudio de esta relación, desde una perspectiva socioepistemológica, sistémica, deviene a ser central en la presente investigación. Es decir ***la problemática que es atendida en esta investigación es la tensión entre las esferas de las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares***.

3.4 Epistemologías basadas en prácticas del uso de las matemáticas

Los objetos matemáticos son entes fundamentales en la esfera de las actividades matemáticas científicas, mientras que en la del uso de las matemáticas son las herramientas; sin embargo, este planteamiento no sostiene la separación entre objeto y herramienta, sino el lugar protagónico que ocupan en cada esfera derivado de la intencionalidad de las actividades; mientras que, para ciertas actividades, la intencionalidad es el desarrollo mismo de las matemáticas, para otras, es el uso de las matemáticas con diferentes fines.

En nuestra investigación, como ya hemos dicho, seleccionamos el lenguaje de las herramientas, sobre el lenguaje de los objetos.

Por otra parte, Cantoral y Farfán (1998) afirman que es posible extraer, del estudio de las diversas revisiones sobre las investigaciones que tratan sobre didáctica del análisis, coincidencias, entre otras, es el hecho de que las investigaciones reportadas se han centrado en las problemáticas que se ocupan de la matemática relevante en la enseñanza superior, asumiendo que la matemática interviene en ese nivel casi exclusivamente como disciplina principal de enseñanza olvidando un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior; también y quizá con mayor fuerza, la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación.

En opinión de Cantoral y Farfán (1998a), existen nociones que se construyen socialmente a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales, por ejemplo, la noción de predicción. La presente investigación *toma epistemologías de las prácticas relacionadas con el uso de la matemática* como base para el diseño de situaciones didácticas.

En este sentido hemos rescatado *prácticas que combinan la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática*. A la estructuración discursiva de estas prácticas en el aula es lo que llamamos *modelación como proceso de matematización en el aula*.

Así, la modelación como actividad humana, en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, la consideramos como fuente que desarrolla procesos de matematización, donde el alumno construye argumentos, significados, herramientas y nociones relacionados con las matemáticas en la intervención con los fenómenos de la naturaleza.

Las actividades de modelación las distinguimos de quienes usan la modelación para fines de enseñar a modelar, a desarrollar teorías de modelación o hacer uso de ésta.

Reproducimos prácticas de modelación con la intencionalidad explícita de desarrollar procesos de matematización en el aula.

Concebimos la modelación como proceso de matematización en el aula como actividades que desarrollan interactivamente docentes y alumnos en un salón de clases, usando las matemáticas para interpretar y transformar un fenómeno de la naturaleza (comprendidos los fenómenos sociales o económicos) confrontando y argumentado diferentes versiones.

3.5 La modelación como práctica social

En los últimos años, numerosas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la ciencia han llevado a destacar algunos aspectos como fundamentales para ser tomados en cuenta dentro del currículo. Por ejemplo, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) recomienda para el Bachillerato lo siguiente: El desplazamiento del centro de interés desde un currículo dominado por la memorización de hechos y procedimientos aislados y por la suficiencia en destrezas con papel y lápiz, a uno que haga énfasis en las estructuras conceptuales, las representaciones y las conexiones múltiples, la creación de modelos matemáticos y la resolución de problemas. A su vez en (NCTM, 2000) se recomienda incluir en el currículo métodos de resolución de problemas para *que todos los estudiantes puedan aplicar procesos de modelación matemática a problemas del mundo real*.

Sin embargo, existen diferentes significados de modelación en nuestra disciplina. En esta sección quisiéramos esclarecer nuestra posición sobre lo que consideramos modelación desde nuestra perspectiva.

En el ámbito escolar existe una concepción tradicional de lo que es modelación matemática y de lo que es un modelo matemático. De estas queremos destacar dos aspectos importantes, uno referente a que modelación es referida a establecer vínculos entre fenómenos, situaciones o problemas y otras construcciones, llamadas modelos, para diferentes fines, por ejemplo para Slisko[2] la modelación matemática proporciona la cuantificación de las ideas y la posibilidad de la comparación de las ideas y las cosas (Slisko, 2002, 2000), mientras que Confrey (1999) hace énfasis en los fines de los modelos, es un mecanismo para hacer predicciones que

[2] Josip Slisko, "La modelación matemática en el aprendizaje de la física escolar: ¿Es un obstáculo epistemológico o una estimulante actividad cognitiva?", curso por invitación en la V Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas Oaxaca, Oaxaca, 2001.

utiliza un conjunto de datos previos y produce con cierto grado de veracidad un nuevo conjunto; el otro aspecto que destacamos es que el modelo matemático, generalmente, se concibe como una ecuación o un sistema de ecuaciones, por ejemplo en (Camarena 2001-b) un modelo matemático es considerado como la representación de un problema dado a través de relaciones matemáticas, como lo son las ecuaciones o sistemas de ecuaciones, distribuciones, etc.. La idea que identifica los modelos matemáticos con las ecuaciones, es ampliamente difundida en los medios escolares.

3.5.1 La "ley" como origen de la concepción de modelo como ecuación

A lo largo de la historia, han existido diferentes patrones de explicación científica, diferentes formas de argumentar y de explicar los hechos y teorías que se han considerado científicas. Existe una amplia literatura filosófica al respecto pero no es nuestra intención repasarla y revisarla, más bien, mostrar algunas de estas formas en sus contextos históricos. Y mostrar el impacto que su utilización ha tenido en las discusiones epistemológicas.

El modelo considerado como "la representación de un problema a través de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, distribuciones, etc." (Camarena, 2001-a), debe su base epistemológica a un patrón de explicación científica: la explicación por leyes de la naturaleza. Desde esta perspectiva los modelos muestran la ley (la ecuación diferencial o algebraica) que rige el fenómeno.

En el siglo XVII reconocer que el experimento constituía una fuente de conocimiento entraba en conflicto con la tradición teórica de la ciencia griega sobre lo que era conocimiento, donde según esta tradición el conocimiento es conocimiento por demostración a partir de primeros principios y, por lo tanto, es cierto o absoluto; esto es, *episteme* en el sentido de Aristóteles.

En opinión de Martínez (1997) dos alternativas para resolver esta tensión consisten en la que Descartes y en buena medida Galileo y Newton exploraron, consistente en relajar el concepto de demostración de manera tal que permitiera *inferir de los conocimientos de los efectos que dan los experimentos conocimiento cierto de las causas*. La otra alternativa consistiría en abandonar el requisito de que, para que sea científico, el conocimiento tiene que ser demostrativo, cierto o absoluto. Esta segunda alternativa sólo empezó a articularse filosóficamente por medio del desarrollo del concepto de probabilidad, implícito en una serie de aplicaciones de éste en diferentes áreas de la ciencia y en la filosofía empirista de Loocke y, sobre todo, de Hume.

Heidegger (1927/1999) afirma que en este nuevo método reside, por tanto, una doble particularidad, por una parte se afirma una suposición o hipótesis (*Annahme*) que permite, en general, comprender los fenómenos de un determinado ámbito, por ejemplo, los fenómenos del movimiento; mientras que, por otra parte, la suposición o hipótesis no afirma, de ningún modo, una cualidad oculta como la causa explicativa de los fenómenos, sino que contiene relaciones matemáticamente comprensibles, es decir, medibles entre los momentos del fenómeno concebidos idealmente.

Este modo de formulación del problema, que Galileo por primera vez llevó a la práctica conscientemente, logra el predominio con el correr del tiempo en las ramas especiales de la Física (Mecánica, Acústica, Doctrina del Calor, Óptica, Doctrina del Magnetismo y Electricidad). En cada uno de estos campos aspira la física a ecuaciones en las cuales son formuladas relaciones muy generales con respecto a los hechos del campo respectivo.

Con Descartes, Galileo y Newton se desarrolló la idea de que el verdadero conocimiento es conocimiento de algo que está más allá de los fenómenos, que tiene una estructura definida y caracterizable matemáticamente (Martínez, 1997)

Mientras que, por ejemplo, lo que explica el movimiento de caída libre en la tradición aristotélica era la presencia de una cualidad formal llamada "gravedad" (y en última instancia la explicación descansa en la existencia de un oren cósmico), para Galileo la gravedad consistía en una propiedad constitutiva de la materia que era el objeto de una teoría matemática. Esta teoría es un marco conceptual en el que, por ejemplo, el movimiento uniforme se vuelve algo real, algo existente como un objeto espacio – temporal.

Decir que la realidad tiene una estructura que no esta constituida por sustancia y, en particular, identificar la realidad con una estructura matemática de los fenómenos (como lo señalaron Galileo y Newton), nos permite formular la idea de que, si bien la realidad última, el origen de la estructura, esta fuera del alcance de nuestras capacidades cognoscitivas, sí podemos tener conocimiento cierto de esa estructura. Esto es conocimiento de la estructura matemática de los fenómenos.

Las formas más acabadas, en esos tiempos, para conocer esta estructura matemática de los fenómenos lo constituyen las ecuaciones. De aquí la idea de que un modelo es la ecuación (algebraica o diferencial) que nos dice el comportamiento de las variables que intervienen en un fenómeno.

Desde nuestro enfoque los modelos matemáticos son algo más que ecuaciones, lo son también las gráficas y las tablas numéricas, por mencionar algunos, y la interacción con estos a lo largo de la historia ha sido una práctica que frecuentemente esta ligada a la construcción social del conocimiento.

"La modelación como prácticas sociales de matematización en el aula", recoge la tradición de las prácticas que han estado presentes, entre otros lugares, en el quehacer científico del siglo XVII, y que Cantoral (2001) documenta como una incesante relación entre le pensamiento físico y el pensamiento matemático. El estudio de esta relación, desde una perspectiva socioepistemológica, sistémica, deviene a ser central en la presente investigación.

En estas prácticas de modelación, que las hemos caracterizadas *por la conjunción de la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática*, son usadas herramientas, los modelos. Estos modelos son herramientas que incluyen las ecuaciones, las gráficas o las tablas numéricas, entre otras. Pero la principal distinción con otras perspectivas lo constituye la intención, los modelos son usados como herramientas para argumentar.

3.5.2 A qué nos referimos con especulación matemática

La filosofía de la naturaleza antigua y medieval procuraba investigar la esencia metafísica de los fenómenos inherentes a la realidad inmediata y sus causas ocultas. En oposición a esta especulación metafísica sobre la naturaleza, la ciencia de Galileo significa metodológicamente algo completamente nuevo. Esta pretende ejercer el dominio sobre la diversificación de los fenómenos a través de la ley y su logro nuevo y particular consiste en determinar cómo llega a la ley. Como a partir de este método del conocimiento de la ley se puede ver más claramente la tendencia fundamental de la física, lo aclaramos con un ejemplo clásico: el hallazgo de Galileo de la ley de la caída de los graves.

Galileo no comienza con la consideración de fenómenos de caída aislados, sino con una suposición en general (hipótesis) que reza: "Los cuerpos caen, privados de su sostén, de tal forma que su velocidad aumenta proporcionalmente al tiempo, ($v = gt$) es decir que los cuerpos caen con un movimiento uniformemente acelerado". La velocidad al comienzo es *0*, la velocidad final $v = gt$. Tomemos la velocidad media $\frac{g}{2}t$, entonces tenemos un movimiento uniforme; para éste reza la fórmula primitiva $e = ct$: el espacio recorrido es igual al producto de la velocidad por el tiempo. En nuestro caso es $c = \frac{g}{2}t$, este valor, sustituido en la fórmula precedente da por resultado: $e = \frac{g}{2}t \cdot t$.

Esta ecuación la prueba Galileo (1981) en casos concretos, y es confirmada por ellos:

> En un listón o, lo que es lo mismo, en un tablón de una longitud aproximada de doce codos, de medio codo de anchura más o menos y en espesor de tres dedos, hicimos una cavidad o pequeño canal a lo largo de la cara menor, de una anchura de poco mas de un dedo. Este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso colocando dentro de un papel de pergamino lustrado al máximo. Después, hacíamos descender por él una bola de bronce muy dura, bien redonda y pulida.
>
> Habiendo colocado dicho listón de forma inclinada se elevaba sobre la horizontal una de sus extremidades hasta la altura de uno o dos codos, según pareciera, y se dejaba caer (como he dicho) la bola por dicho canal, tomando en cuenta como enseguida he de decir el tiempo que tardaba en recorrerlo todo.
>
> Repetimos el mismo experimento muchas veces para asegurarnos bien de la cantidad de tiempo y pudimos constatar que no se hallaba nunca una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación. Establecida exactamente esta operación, hicimos que esa misma bola descendiese solamente por una cuarta parte de la longitud del canal en cuestión. Medido el tiempo de la caída, resulta ser siempre, del modo más exacto, precisamente la mitad del otro.
>
> Haciendo después el experimento con otras partes, bien el tiempo de la longitud completa con el tiempo de la mitad, con el tiempo de dos tercios, con el tiempo de tres cuartos o con cualquier otra fracción llegábamos a la conclusión, después de repetir tales pruebas una y mil veces, que los espacios recorridos estaban entre sí como los cuadrados de sus tiempos.

> Esto se podría aplicar a todas las inclinaciones del plano, es decir, del canal a través del cual se hacia descender la bola. Observamos también que los tiempos de las caídas por diversas inclinaciones del plano guarden entre sí de modo riguroso una proporción que es. . . la que les asigno y demostró el autor.
>
> En lo que a la medida del tiempo se refiere, empleamos una vasija grande llena de agua, sostenida a una buena altura y que, a través de un pequeño canal muy fino, iba vertiendo un hilillo de agua, siendo recogido en un vaso pequeño durante todo el tiempo en que la bola descendía, bien por todo el canal o sólo por alguna de sus partes. Se iban pesando después en una balanza muy precisa aquellas partículas de agua recogidas del modo descrito, con lo que las diferencias y proporciones de los pesos nos iban dando las diferencias y las proporciones de los tiempos. Ocurría esto con tal exactitud, como he indicado, tales operaciones repetidas muchísimas veces, jamás diferían de una manera sensible. Galileo Galilei *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.*

Por lo tanto es válida la antedicha suposición, pero esta ley fue obtenida en un constante observar, experimentar, especular, conjeturar, corroborar y verificar. La suposición $v = gt$ que, a través de la conclusión y a partir del experimento verificante se vuelve ley, es una suposición general sobre los cuerpos en general.

Con estos pasajes del trabajo de Galileo, intento mostrar las prácticas a las que me refiero con *prácticas donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática*, interactuar con los fenómenos, construir versiones (hipótesis), argumentar sobre su validez, donde algunos de estos argumentos son las evidencias de experimentos, reformular las versiones (hipótesis) y, tal vez, construir, en esta interacción discursiva, consensos.

La “inducción” en este proceso de construcción de versiones y argumentos es una práctica de principal interés. Más aún, reconocer la “inducción” como práctica social no es situarse en el reconocimiento de la "validación del conocimiento", sino reconocer que estas prácticas se sitúan el terreno de la vida profesional y cotidiana de los humanos; es reconocer que muchos de nuestros actos están basados en este tipo de prácticas y que el ejercerlas nos lleva desempeñarnos mejor en nuestras vidas.

3.5.3 La inducción como práctica

> *Mi propósito es exponer una ciencia muy nueva que se ocupa de un asunto muy antiguo. No hay, quizá, en la naturaleza nada más viejo que el movimiento, con respecto al cual los libros escritos por los filósofos no son pocos ni pequeños, sin embargo, he descubierto experimentalmente algunas propiedades de él que vale la pena conocer y que no han sido hasta aquí observadas ni demostradas.*
>
> ***Galileo Galilei, Diálogos concernientes a dos nuevas ciencias.***

Los trabajos de Copérnico, Kepler, Descartes, Galileo y Pascal demostraron, de manera efectiva, que algunos fenómenos de la naturaleza acontecían de acuerdo a las leyes matemáticas y estaban convencidos que el pensamiento matemático de los hombres estaba de acuerdo con la naturaleza. Pero lo que parece más interesante es la forma, de acuerdo a ellos, de cómo llegaron a estas leyes.

Mientras que Newton señala en su famosa carta de Newton a Cotes: En la Filosofía experimental, las proposiciones se deducen de los fenómenos, y después se generalizan por inducción (Newton, 1713). Galileo establece: "Tengo por cierto que en primer lugar se actúa por medio de los sentidos, experimentos y observaciones, para asegurarse, tanto como fuera posible, de sus conclusiones. Después procuró hacerlas demostrables. Esto es lo que se hace en la mayor parte de las ciencias demostrativas".

En el terreno de las matemáticas en (Confrey y Dennis, 2000) se menciona que Wallis practicaba la inducción y, por esta palabra, no se refiere a la inducción matemática formal, sino a la inducción informal o científica. Esto es, él visualizaba un patrón, verificaba una serie de ejemplos y después asumía que su regla era valida en tanto "no encontrara una sospecha por la que podía fallar".

3.5.4 Los procesos de constitución de "relaciones entre variables" como herramienta

El establecimiento de la relación entre variables no se hace dependiente de otros procesos, se constituye en cuanto indaga las formas que esta relación adopta. Es decir, no se constituyen como herramientas las relaciones entre variables para después estudiar sus formas, se hace en un mismo proceso, se constituye estableciendo las formas.

De esta forma, lo lineal, lo cuadrático, lo periódico y lo exponencial son herramientas usadas en el ejercicio de prácticas de modelación; por ejemplo, en prácticas como "la figuración del devenir de las cualidades" y "la numerización de los fenómenos". Así, la linealidad, lo cuadrático, lo periódico y lo exponencial tienen su concreción y significados en cada escenario donde se ejercen prácticas de modelación. Por ejemplo, la linealidad significa, antes que nada, líneas rectas, cuando se ejercen prácticas de figuración del devenir de las cualidades. Esto es poner en el centro los modelos gráficos; en este caso, líneas rectas y, a partir de ellos, se construyen diferentes argumentos, significados y herramientas de lo que es la linealidad. En la siguiente tabla se da un ejemplo de cómo las prácticas determinan la concreción y significados de las herramientas, estas no son únicas y se presenta la tabla a manera de ejemplo.

Prácticas y herramientas de modelación

Las herramientas / Los modelos — Las prácticas / La modelación	Lo lineal	Lo cuadrático	Lo exponencial	Lo periódico
La figuración del devenir de las cualidades	Las rectas	Las parábolas	Las curvas exponenciales	Las senosoidales (entre otras)
La numerización de los fenómenos	Tablas con razón de cambio constante	Tablas con segunda razón de cambio constante	Tablas con razón de cambio proporcional a la variable dependiente	Tablas con ciclos repetidos
La analiticidad de los fenómenos	$y = ax + b$	$y = a(x-b)^2 + c$	$y = ab^x + c$	$y = asen(bx + c) + d$

Tabla 3.1 Relación entre las herramientas y las prácticas. Entre los modelos y la modelación

3.5.5 Las prácticas determinan las herramientas a usar

La modelación, como actividad humana, es una forma particular de participar en el mundo, es una forma de interacción con los otros, y con los acontecimientos. De esta forma, lo lineal, lo cuadrático, lo exponencial, lo periódico, lo inversamente proporcional, entre otras, son herramientas, son artefactos utilizados en las prácticas sociales de modelación ejercidas en contextos sociales.

Derivado de lo anterior la unidad de análisis es desplazada desde las producciones o construcciones de los participantes en las secuencias a las prácticas sociales ejercidas utilizando herramientas y situada en contextos sociales. A esta unidad de análisis le hemos llamado prácticas – con –en.

Nosotros concebimos a la modelación como prácticas sociales, prácticas – con – en, prácticas sociales utilizando herramientas en contextos sociales. De las prácticas de modelación hemos elegido para el diseño de los contextos discursivos propuestos dos prácticas en particular: “la figuración del devenir de las cualidades” y “la numerización de los fenómenos”.

3.6 Dos tipos de diseños de modelación desde nuestra perspectiva

Haremos referencia, principalmente, al diseño e implementación de dos tipos de secuencia, uno centrado en las prácticas sociales que les hemos llamado “la figuración del devenir de las cualidades” y el otro basado en las prácticas que les hemos llamado “la numerización de los fenómenos”.

Ambos tipos de secuencias plantean la tesis de que la matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores escolares, o no escolares, este contexto social es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad.

Además, muestran que los estudiantes construyen diferentes versiones de los fenómenos y argumentan, en un contexto discursivo, sobre su validez. Estos argumentos son contextuales, reforzando la idea de que la matemática cobra vida en ellos.

Para el diseño de las secuencias definimos una intencionalidad, establecer un contexto donde, en el ejercicio de las prácticas mencionadas, emerjan las herramientas, procedimientos y nociones matemáticas.

Así, la modelación como práctica social, en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, la consideramos fuente que desarrolla procesos de matematización, donde el alumno construye argumentos, significados, herramientas y nociones relacionados con las matemáticas en la intervención con los fenómenos de la naturaleza.

Identificamos algunas actividades involucradas, dentro de lo que llamamos prácticas sociales de modelación, que son el foco de nuestra atención, a saber:

- Emplear herramientas específicas (las gráficas y/o las tablas numéricas) y formas particulares para describir los hechos (lo lineal, lo cuadrático, etc.), construyendo versiones de éstos.

- Construir argumentos a través de conjeturas y confirmaciones, basadas en la inducción como práctica.
- Argumentar y validar versiones utilizando una coordinación de múltiples herramientas.
- Desarrollar formas de predicción.
- Elaborar descripciones y explicaciones de nuevas experiencias utilizando conocimientos que tienen, derivados de otros contextos y frente a otras experiencias.

3.6.1 Metodología. Ingeniería didáctica

Hemos acudido al diseño de ingenierías siguiendo la metodología de ingeniería didáctica. Diseñamos e implementamos una serie de secuencias didácticas como montajes de ingeniería didáctica de modelación con las características descritas anteriormente.

Destacamos brevemente algunos aspectos que consideramos relevantes de esta metodología de acuerdo a la adaptabilidad de nuestra perspectiva.

La Ingeniería Didáctica consta de tres fases.

El análisis *a priori* se hace con base en un conjunto de hipótesis descriptivas y predictorias, centrándose, en nuestro caso, en las características de las prácticas que se pretende sean ejercidas por los estudiantes. Por lo tanto, comprende una parte descriptiva que incluye las fases de la secuencia.

A la puesta en práctica de los propósitos del diseño le sigue un análisis *a posteriori* que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias didácticas, al igual que las producciones de trabajo de los estudiantes en clase o fuera de ella. Debe recordarse que es en la confrontación de este análisis con el análisis *a priori* donde se fundamenta, en esencia, la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

De acuerdo con la metodología que utilizamos, la experimentación, el análisis *a posteriori*, la validación interna y las conclusiones, constituyen la fase final para la conclusión de la investigación.

Las adecuaciones de esta metodología a nuestra perspectiva incluyen las adecuaciones producto de que no se toman elementos de la obra matemática como base de los diseños sino a las prácticas sociales.

De la misma manera, el análisis *a posteriori* y las conclusiones se determinan adecuándose a las características de la investigación.

Por ejemplo, los diseños que se presentan han sido puestos en escena en diferentes escenarios. En ellas han participado tanto profesores como estudiantes de diferentes niveles. En éstas queremos destacar la participación de estudiantes de nivel medio superior, de preparatorias de la U. A. G, del Conalep Acapulco-2, estudiantes del curso propedéutico del CIDE, de las carreras de ISC, LAET e IBQ del ITA. También han participado profesores de las preparatorias de la BUAP, de preparatoria de la UAG, de Ciencias Básicas y IEM del ITA, del Colegio de Ciencias y Humanidades Sur de la UNAM, del nivel medio superior de Veracruz, profesores de la Universidad Católica de Lima Perú, de los diferentes planteles del CET-mar del país y del nivel medio superior del programa de Formación Pertinente de la SEP. En diferentes eventos, los diseños presentados en esta investigación se trabajaron como taller y/o se presentaron como reportes de investigación. Destacamos Relme-XV y Relme-XVI en Buenos Aires, Argentina y la Habana, Cuba, el Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas en Saltillo Coahuila y México, D. F., las V y VI Escuelas de Invierno y Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas, en Oaxaca y Tuxtla respectivamente.

De tal forma que los diseños presentados en esta investigación se "han venido estabilizando", es decir, se confrontaron el análisis de las puestas en escena y el análisis predictivo. Como resultado se han hecho modificaciones a los diseños, en el sentido planteado por Cordero (1998a) $E_0 \to S_0 \to E_1 \to S_1 \to \ldots$, epistemología inicial, puesta en escena, modificación de la epistemología inicial, puesta en escena... De esta manera, en general, el análisis de la puesta en escena esta de acuerdeo con el análisis predictivo; sin embargo, cada puesta en escena tiene diferentes particularidades. Por esto, el análisis de la puesta en escena de los diseños reportados aquí se hace atendiendo más a estas particularidades; es decir, no atendiendo en forma genérica si coincidió con lo planteado en el análisis predictivo, sino con las formas particulares que adquieren las confrontaciones de las participaciones de los actores con el análisis predictivo.

De esta manera, el análisis de los datos empíricos, lo hacemos considerando el análisis predictivo; sin embargo, éste no lo hacemos de forma puntual con respecto a dichas predicciones del diseño; lo que significa que haremos una selección de los episodios de acuerdo al análisis predictivo, pero también con el interés teórico desde nuestra perspectiva, al interés de mostrar datos que sustenten el acercamiento teórico que adoptamos en la disciplina.

Los episodios se han elegido de acuerdo con los siguientes criterios:

- Muestra elementos sobre el análisis predictivo
- Se establece un contexto discursivo rico en la producción de argumentos
- Muestra evidencias, o se establecen, como argumento de las afirmaciones teóricas.

Por razones técnicas es muy difícil hacer un análisis conversacional de secuencias de interacción largas. El enfoque del análisis conversacional, por tanto, es de gran potencialidad para estudiar fenómenos discursivos puntuales que no requieren una secuencia muy larga. Resulta de menos utilidad para estudiar fenómenos didácticos, como puede ser la evaluación del conocimiento o la forma de presentación de cierta temática curricular (Candela, 1999).

En nuestro caso, el enfoque es de mirada amplia, no sólo nos interesamos por el análisis de parte de una interacción sino por el desarrollo de las interacciones diseñadas con secuencias muy largas; por esto nuestro esfuerzo se dirige a analizar secuencias largas. Nuestro centro no es una conversación o una clase en el aula, no es un estudio etnográfico, es el discurso de la puesta en escena de diseños de aprendizaje.

En este sentido, el estudio del discurso de las puestas en escena de los diseños propuestos nos ofreció múltiples experiencias en cuanto a las técnicas para su manejo. Por ejemplo, una cuestión importante es la utilización de diferentes medios para el registro de las experiencias como lo son el audio, el video; además, son de especial importancia las notas levantadas presencialmente.

Hemos visto que es recomendable que, después de efectuarse la experiencia, se realice la reconstrucción de ésta para su estudio, pues sólo en ese momento es posible reconstruir de memoria los detalles de la interacción que no se pudieron escribir en el momento. Es conveniente que no pase mucho tiempo para hacer la reconstrucción de los datos, entre ellas, la trascripción de las cintas de video y audio, pues siempre hay información complementaria que dependerá de la memoria. Por ejemplo la puesta en escena de las secuencia de la figuración del devenir de las cualidades se realizó en noviembre del 2001; sin embargo, al no reconstruir la experiencia en breve, se perdieron aspectos valiosos; lo que obligo a repetir la puesta en escena en septiembre-octubre del 2002.

Para realizar el análisis es importante que el investigador haya estado presente en las interacciones que se pretenden analizar, ya que todavía no se cuenta con ningún instrumento técnico comparable a la vivencia que produce la presencia física en el contexto que se va a estudiar. La presencia del investigador en el aula también permite tener la memoria necesaria para reconstruir la trascripción del audio, pues en ocasiones no es fácil escuchar todo lo que se recoge en la grabación. De la misma manera es conveniente la presencia de observadores o colaboradores para la discusión de los hechos.

Entre los dilemas a los que frecuentemente se enfrenta el investigador está el de la dificultad de registrar "todo" lo que ocurre en las interacciones, pues éstas son muy ricas y complejas. El conflicto se sucede entre la conveniencia de recoger el máximo de información para estudiar lo relevante para los actores y la dificultad de hacerlo en la práctica.

Las grabaciones y el video son de gran ayuda, pues permiten completar la información una vez que se hace un primer análisis; además, las notas levantadas en el momento de la interacción ofrecen aspectos de interés. Por esta razón resulta conveniente combinar métodos de grabación, notas etnográficas y video.

Sin embargo, no debe ignorarse el efecto distorcionador de los aparatos al irrumpir en la intimidad del aula, aún cuando resulta sorprendente la velocidad con la que, normalmente, los maestros y los alumnos se acostumbran a la presencia de cámara de video y grabadoras. Por otro lado, no hay que preocuparse demasiado por el efecto distorcionador, ya que es imposible estudiar un proceso social sin afectarlo en alguna forma.

Nuestro acercamiento a la modelación de fenómenos en el aula, hoy es posible, entre otras cosas, a dos cuestiones importantes, al desarrollo de los medios tecnológicos y al desarrollo teórico metodológico en el campo de la matemática educativa sobre la modelación de fenómenos.

3.6.2 El papel de los medios tecnológicos

En las clases de matemáticas se ha privilegiado, en general, las escrituras simbólicas; se ha favorecido, en detrimento de otras formas, las representaciones en el sistema simbólico algebraico, que es visto como el registro de llegada de todo aprendizaje matemático, entre otras razones ¡por ser el más formal! (Hitt, 1996). Una posible causa de esta privilegiación es que para dibujar una considerable cantidad de gráficas con precisión y manipular gran cantidad de datos y operaciones con una tabla de datos, presenta dificultades, tanto para alumnos como para maestros. Realizar estas actividades remite a considerar variables como el tiempo utilizado en realizarlas, las competencias de quien las realiza y la calidad de las realizaciones. Con el uso de medios tecnológicos estas dificultades son transformadas. Compartimos la opinión de Bruner (1972), acerca de la importancia de la variación de la herramienta: en todos los tiempos, los cambios en los utensilios han significado cambios en la cultura y en la organización social. Trabajar con instrumentos adecuados nos permite utilizar las formas gráficas y numéricas con mayor desenvolvimiento.

El desarrollo de los medios tecnológicos con los que se cuenta, nos permite, ahora, tomar, organizar y manejar gráficas y datos en forma óptima y rápida. Ya contamos con instrumentos de medición apropiados y de procesamiento de datos y de gráficas.

De esta forma coincidimos con Confrey (1999) cuando habla de que las herramientas analíticas: calculadoras graficadoras, software para analizar (datadesk, analyzer), ayudan al estudiante a trabajar en una variedad de representaciones para analizar conjuntos de datos o en la exploración dinámica de gráficas.

Sin duda, el papel de los medios tecnológicos es de suma importancia; sin embargo, los instrumentos no pueden desplazar al diseño de las secuencias; es decir, la incorporación de medios electrónicos por sí mismos, no inciden en la resolución de problemas educativos, éstos juegan un papel importante dentro de un proceso donde los actores ejercen el dominio de ellos. Es decir la importancia estriba en el ***para que***, en el ***cómo*** y en el ***quienes*** utilizan los medios tecnológicos. La importancia de los utensilios no son los utensilios en sí, sino el programa que orienta su uso. En este sentido más amplio es cuando los utensilios adquieren un sentido propio como amplificadores de las capacidades humanas e instrumentos de la actividad del hombre.

Planteamos actividades donde el uso de sensores forma parte de la actividad humana. Los sensores potencian los sentidos en el entendido que son herramientas que nos permiten realizar observaciones que sólo con nuestros sentidos no fuera posible. En este sentido Bruner (1972) dice que si consideramos los instrumentos mediadores de la acción humana, como amplificadores, podemos clasificarlos en tres categorías generales, amplificadores de las capacidades sensoriales (microscopios, audífonos, cámara lenta que alarga el tiempo), de las capacidades motrices (dan firmeza a la mano como un compás), y de las racionalizadoras (matemáticas, la lógica y otros más tangibles como el ábaco o la computadora). De esta forma los sensores y las calculadoras son herramientas utilizadas en el ejercicio de las prácticas sociales.

Bruner (1987) enuncia una idea similar al establecer que cuando pensamos en los utensilios como vehículos de la actividad humana, resulta posible pensar en la idea básica de la sustitución; esto es, que los utensilios no son fijos y la "fijación funcional" que encuentran los psicólogos al estudiar la solución de problemas se debe a que al pensar en un instrumento, "un martillo sirve para clavar clavos y para nada más", se llega a "fijar" su uso de manera convencional.

> Werstch (1993) plantea que "es necesario proporcionar alguna explicación sobre por qué en una ocasión determinada se emplea un instrumento mediador entre varios posibles. Ya que se supone que la selección y el uso de los instrumentos mediadores no se deben a la

> casualidad, resulta necesaria alguna explicación sobre la organización de los mismos”. Propone que los elementos del juego de herramientas están organizados de acuerdo con una jerarquía basada en el poder o aplicabilidad y para ello introduce la noción de “privilegiación”, con la cual se referirá al hecho de que un instrumento mediador se concibe como más apropiado o eficaz que otros en un determinado escenario sociocultural (Bruner, J. 1987).

En el devenir de la constitución de la ciencia dan fe algunos investigadores de este esquema. Otte (1993) ubica las raíces de la ciencia moderna durante el renacimiento en la interacción entre ingenieros, artistas y practicantes de medicina. Para artistas, la geometría guiaba construcciones. Para ingenieros, carpinteros, arquitectos, granjeros y comerciantes, la mecánica se formó con base en sus proyectos. Afirma que podemos ver los orígenes de la matemática pura en la especialización y división del trabajo y en el desplazamiento de la geometría y la mecánica a otras nuevas áreas de la realidad empírica.

Uno de los fenómenos esenciales de la Edad Moderna es su ciencia. La técnica mecanizada es otro fenómeno de idéntica importancia y rango. No se debe caer en el error de considerar que esta última es una mera aplicación de la moderna ciencia matemática. La técnica mecanizada es, por sí misma, una transformación autónoma de la práctica, hasta el punto de que ésta es la que exige el uso de la ciencia matemática de la naturaleza.

Más aún, el conocimiento se ha ligado tangiblemente a una tecnología que transforma las prácticas sociales que lo posibilitaron.

Capítulo IV

La figuración del devenir de las cualidades

Resumen

En este capítulo presentamos un estudio de las prácticas que ejercen los actores en dos diseños de aprendizaje puestos en escena en el contexto del aula de matemáticas. Los diseños les hemos llamado "*Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil*" y "*Las matemáticas del movimiento*".

Se describen las secuencias anteriormente señaladas y se analiza las evidencias empíricas de su puesta en escena.

Los diseños referidos se centran, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por los participantes utilizando herramientas, situadas en un contexto social; en este caso, las prácticas sociales de modelación del movimiento de un móvil.

Estas prácticas no solo se han ejercido históricamente, también han sido ejercidas en el plano profesional y de los problemas cotidianos actuales.

De esta forma nuestra perspectiva asume las prácticas sociales como la base de nuestros diseños; en particular, tomamos como base las prácticas centradas en los modelos gráficos de fenómenos que hemos llamado la figuración del devenir de las cualidades, con referencia a los trabajos de Oresme.

Se establece que las diferentes formas gráficas para comunicar el movimiento de un móvil no son inmediatas y nuestro interés se centra en investigar las condiciones en que éstas aparecen como argumentos. Para ello se diseña una secuencia bajo una perspectiva teórica de la que se pueden destacar tres aspectos, la selección del lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos, el carácter discursivo de la construcción social del conocimiento y las interacciones en el aula.

En la secuencia la estructuración discursiva entre las herramientas, los modelos y las realidades viene a ser central. El otro eje gira en torno a la tesis de que en el ejercicio de ciertas prácticas sociales, usando herramientas, es donde aparecen, se estructuran y se movilizan como argumento ciertas nociones matemáticas, como los modelos gráficos distancia–tiempo y velocidad-tiempo.

4.1 La práctica social: La figuración del devenir de las cualidades

Nuestras intenciones en este capítulo están en la dirección de presentar un estudio de las prácticas que ejercen los actores en dos diseños de aprendizaje puestos en escena en el contexto del aula de matemáticas. A estos diseños les hemos llamado "*Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil*" y "*Las matemáticas del movimiento*".

La idea fundamental para el diseño de las secuencias propuestas es construir un contexto argumentativo donde los estudiantes y el profesor, interactivamente, en el aula, construyan argumentos, herramientas y significados a partir de la interacción con un fenómeno.

Los diseños desarrollados se centran, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por los participantes utilizando herramientas situadas en un contexto social; en este caso las prácticas sociales de modelación del movimiento de un móvil, a las que hemos llamado la figuración del devenir de las cualidades, con referencia a los trabajos de Oresme.

Esta forma de proceder se diferencia de actividades donde ponen en el centro los modelos algebraicos (las fórmulas), es más en algunos casos se concibe que el modelo de un fenómeno es la fórmula algebraica que lo describe. Las prácticas sociales de utilizar modelos gráficos para argumentar versiones de los hechos son medulares en los dos diseños que analizaremos en este capítulo.

Las prácticas de modelación que se han elegido se enfocan en prácticas que se desarrollan en interacción con fenómenos (físicos, químicos o sociales), en este caso del movimiento de un móvil, centrándose en la interpretación y predicción de los fenómenos utilizando modelos.

Estas prácticas no solo se han ejercido históricamente, en el plano profesional y de los problemas cotidianos actuales, es ejercida, por ejemplo, cuando un médico examina un electrocardiograma lo que hace es estudiar el modelo gráfico del comportamiento del corazón para poder tomar decisiones sobre su paciente, de la misma manera, para determinar la intensidad de un fenómeno (los terremotos entre otros) se recurre a interpretar modelos gráficos. En diferentes áreas de los sectores productivos encontramos manuales que sintetizan, mediante gráficas, la información de un producto, el comportamiento de los mercados, las propiedades de diferentes reactivos químicos, el rendimiento de una maquinaria. De la misma manera, en otras comunidades, por ejemplo las de los investigadores, las gráficas son centrales para mostrar lo que ven, para dar evidencias revelando los patrones de una gráfica (Garfinkel, Lynch y Livingston, 1981; Latour, 1993; Woolgar, 1990). Un análisis reciente encontró más de 420 gráficas cartesianas en 2500 páginas de cinco revistas de investigación en ecología de la más alta clasificación (Roth, Bowen y Mc Ginn, 1999).

Diversos trabajos etnográficos en laboratorios científicos efectuados durante las dos décadas anteriores indican que las gráficas no son usadas solo para interpretar fenómenos, también son empleadas para la demostración de la existencia de fenómenos y, de esta manera, como medios retóricos en publicaciones científicas (Latour, 1987).

En el pasado, diversas investigaciones han tomado una perspectiva cognitiva-psicológica donde se identifican problemas de los estudiantes al leer e interpretar gráficas. Estos problemas se atribuyen a concepciones erróneas (Berg y Phillips, 1994) y a otras deficiencias genéricas (por Preece y Janvier, 1992). Sin embargo, trabajos teóricos más recientes sobre graficación, con una orientación sociocultural, apuntan hacia la graficación como una práctica como alternativa a la orientación hacia las deficiencias de los estudiantes (Roth, 1996; Roth y NcGinn, 1997, 1998). Esta aproximación ha venido a ser más convincente y necesaria, como un reciente estudio entre científicos lo prueba.

Cuando los científicos no están familiarizados con una gráfica, aún cuando esta gráfica sea parte de la introducción de un libro de texto o de su propia disciplina (ecología), frecuentemente no llegan a la interpretación estándar aceptada por la colectividad (Roth, 1996; Roth y Bowen 2001). Algunas de las dificultades que ellos presentan al leer gráficas son del mismo tipo de las que han sido identificadas entre estudiantes de *middle school* y *high school* (nivel medio básico y medio superior). Sin embargo, por su extensa preparación (maestros o doctores en ciencias), por su experiencia (cinco años como mínimo de investigación independiente) y por los éxitos en su trayectoria (muchos han recibido reconocimientos, premios y becas nacionales e internacionales), aceptar que estos científicos poseen concepciones erróneas, tiene deficiencias cognitivas o sufren otras deficiencias, puede ser difícil (Roth y Bowen 2001).

De esta forma nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños, en particular tomamos como base a las prácticas centradas en los modelos gráficos de fenómenos.

En la secuencia la estructuración discursiva entre las herramientas, los modelos y las realidades viene a ser central. El otro eje gira entorno a la tesis de que en el ejercicio de ciertas prácticas sociales usando herramientas es donde aparecen, se estructuran y se movilizan como argumento ciertas nociones matemáticas, como los modelos gráficos distancia–tiempo y velocidad-tiempo.

Enseguida presentamos un esquema de las prácticas referidas.

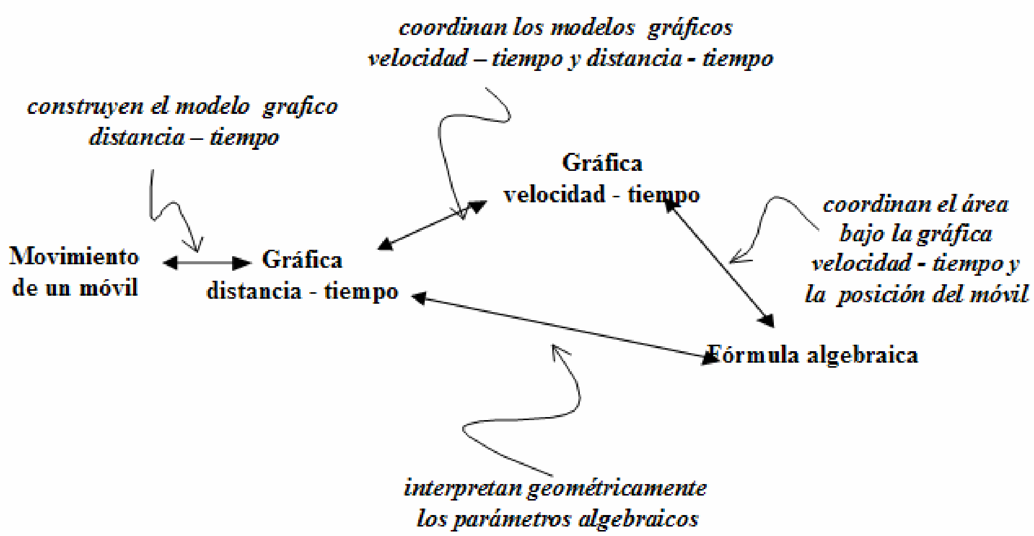


Figura 4.1. Esquema de las prácticas de figuración del devenir de las cualidades

En la figura 4.1 se muestra el esquema de las actividades que se desarrollan en las secuencias. A las prácticas las escribimos en itálicas mientras que los modelos y el fenómeno en negritas. Se intenta establecer una relación entre el movimiento de un móvil, el modelo gráfica distancia – tiempo, el modelo gráfica velocidad – tiempo y fórmulas algebraicas.

4.2 El contexto histórico

La existencia de diferentes patrones de explicación científica a lo largo de la historia ha sido documentada entre otros por Martínez (1997). En los trabajos de Copérnico, Kepler, Oresme, Descartes, Galileo y Pascal se lee un patrón de explicación científica característico de uno de los contextos argumentativos existentes en los siglos XV, XVI y XVII: "los fenómenos de la naturaleza acontecen de acuerdo a leyes". Este patrón de explicación científica hace necesaria la especulación sobre las leyes posibles y los fenómenos.

En particular, en los trabajos de Oresme se localiza esa incesante relación, que plantea Cantoral (1996), entre le pensamiento físico y el pensamiento matemático, lo cual nos brinda la oportunidad de contar con elementos ausentes en la matemática escolar contemporánea, aunque presentes y protagónicos en la de otros períodos. La noción de cualidad y la figuración de su devenir son utilizadas por Oresme como herramientas para argumentar. Escribe sobre lo que llama cualidad:

> "La caridad puede ser una cualidad, del mismo modo que la velocidad o el calor. Una cualidad se caracteriza por su grado, por su intensidad. Un cuerpo no es caliente o frío, sino que es más o menos frío, o, de la misma manera más o menos caliente. ¿Cómo figurar "el devenir" de una cualidad, la manera en que crece o disminuye de instante en instante, o de uno a otro punto?" (Oresme, 1968).

Oresme figurará este devenir con un gráfico de dos dimensiones. La línea horizontal derecha, o longitud, representa una extensión de la cualidad, tiempo o espacio. A partir de cada punto de la línea horizontal se traza un vertical, la latitud; su altura representa la intensidad de la cualidad en ese instante o en ese lugar. La sucesión de las intensidades se traduce en una figura plana.

Entonces, la cantidad de la cualidad tiene como medida la superficie formada por las altitudes que se suceden durante un periodo de tiempo o en un espacio dado.

Oresme hace una clasificación de las cualidades, uniforme, uniforme disforme, disforme disforme; y las relaciona con figuras geométricas.

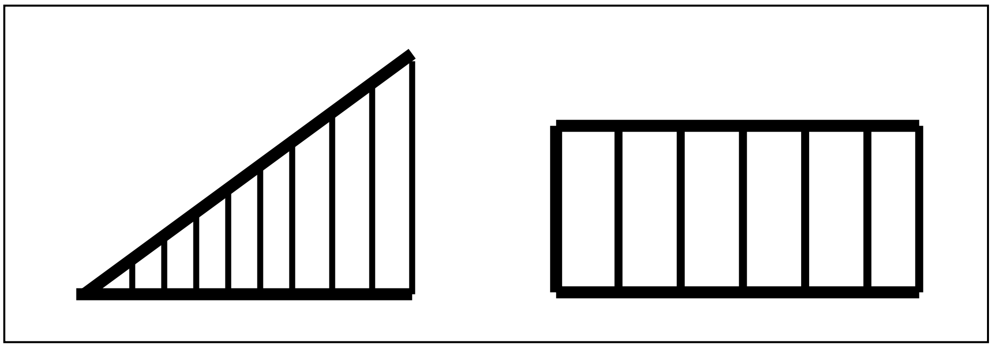


Figura 4.2. Una figura triangular es la figuración de una cualidad "uniformemente disforme", mientras que un rectángulo es la figuración de una cualidad "uniforme"

Así, el devenir de una cualidad uniforme tiene como figuración un rectángulo, una cualidad uniforme disforme un triángulo.

Una de las formas en que es utilizada esta figuración del devenir de las cualidades se hace explícita cuando Oresme argumenta acerca de una regla que los maestros del Merton College de Oxford habían enunciado ya en la primera mita del siglo XIV: Toda cualidad uniformemente disforme tiene la misma cantidad total que si afectase uniformemente al sujeto según el grado de su punto medio.

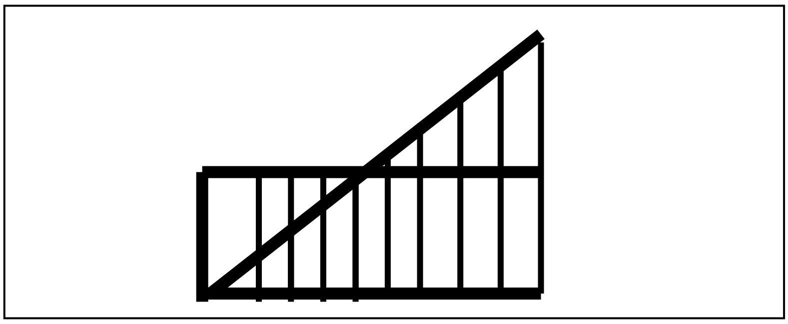


Figura 4.3. Toda cualidad uniformemente disforme tiene la misma cantidad total que si afectase uniformemente al sujeto según el grado de su punto medio

La cantidad de la cualidad tiene como medida la superficie formada por las altitudes que se suceden durante un periodo de tiempo o espacio dado, entonces basta con demostrar que las figuras en cuestión tienen la misma área. La cualidad a la que Oresme se refiere explícitamente no es otra que la velocidad que aumenta o disminuye de manera uniforme en el transcurso del tiempo.

Galileo establece que: El tiempo en el cual un espacio dado es recorrido por un móvil, que parte del reposo con un movimiento uniformemente acelerado, es igual al tiempo en el que aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme cuyo grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado al final del movimiento uniformemente acelerado precedente.

El trabajo de Oresme nos muestra que sería posible establecer una coordinación entre los modelos de la gráfica distancia – tiempo y la gráfica velocidad – tiempo. Nos planteamos, entonces, la posibilidad de diseñar una secuencia donde la articulación entre los movimientos de un móvil, los modelos de la gráfica distancia – tiempo, la gráfica velocidad – tiempo y fórmulas algebraicas se constituyera en un contexto argumentativo apropiado para construir versiones acerca de lo lineal y lo cuadrático como comportamientos.

Nuestras secuencias aluden al comportamiento de las variables que intervienen en el fenómeno, en este caso el movimiento de un móvil, que serían identificadas como las cualidades de distancia y velocidad y la figuración de su devenir serían los modelos a construir, en este caso, entre otros, las gráficas distancia –tiempo y velocidad - tiempo.

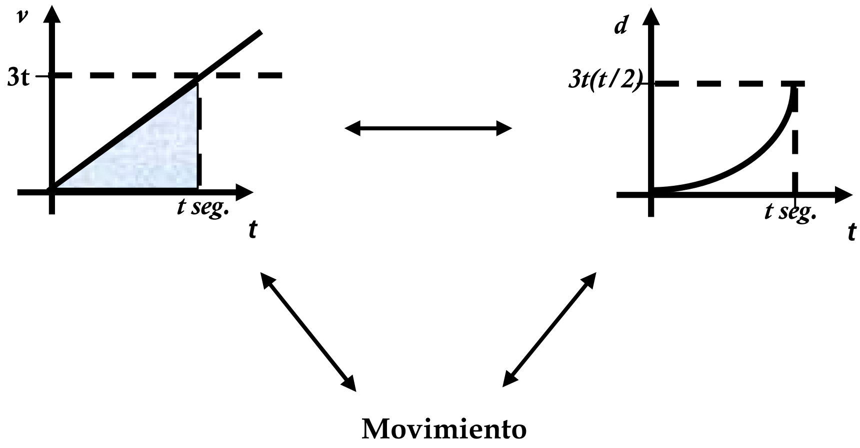


Figura 4.4. Interacción entre los modelos gráficos distancia – tiempo y velocidad -tiempo del movimiento de un móvil

Nos interesa desarrollar la interacción entre los movimientos de un móvil, los modelos de la gráfica distancia – tiempo, la gráfica velocidad – tiempo y fórmulas algebraicas.

Las secuencias tienen la intención de que los estudiantes desarrollen las prácticas de utilizar los modelos gráficos como recursos argumentativos.

4.3 Los participantes en las secuencias

Los participantes en la puesta en escena de las secuencias presentadas en este capítulo fueron dos profesores y diecisiete alumnos de un grupo de tercer semestre de la carrera de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco que se organizaron en tres equipos de cuatro estudiantes y un equipo de cinco.

En la selección de los estudiantes se consideraran las siguientes variables: edad, cursos tomados, semestre escolar que cursa, popularidad y personalidad. Nos interesaba que en los equipos hubiera un ambiente de participación, que no se ejercieran posiciones de liderazgo por alguno de los miembros que inhibieran la participación de los demás integrantes. Por tanto los equipos se integraron con estudiantes del mismo grado, sin grandes diferencias en edades, con calificaciones medias y sin limitaciones para expresar sus ideas.

La edad de los estudiantes que participaron en esta secuencia está entre 17 y 19 años, estudian el tercer semestre de la carrera en Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco.

Los dos profesores participantes pertenecen al I. T. A.; uno imparte matemáticas y está adscrito al departamento de Ciencias Básicas y, el otro, es del departamento de Ingeniería Bioquímica.

Los estudiantes han aprobado los cursos de Matemáticas I y II, cuyos contenidos son Cálculo Diferencial e Integral en una Variable y Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variable respectivamente. Además de un curso de Estática y Dinámica (Física I). En el momento de la puesta en escena de la secuencia ellos cursan Ecuaciones Diferenciales (Matemáticas III) y otro de Electricidad y Magnetismo (Física II). En los cursos de Física no llevan laboratorio.

En cursos de Bioquímica y Química Analítica han tenido prácticas de laboratorio, recogiendo datos y en ocasiones graficándolos en un plano cartesiano.

4.3.1 Los actores

Los estudiantes participaron en estas secuencias como actividades extraclases, la experiencia se efectúa fuera de horario de clases y sin valor en la evaluación de sus materias. Sin embargo no hubo inasistencias y sólo tres retardos.

Los participantes se organizaron en equipos que estuvieron conformados de la misma manera de principio a fin de las actividades.

Equipo 1: Indira, Liliana, Glorient y Guadalupe.

Equipo 2: Luis, Rosalinda, Viridiana y Fernando.

Equipo 3: Carlos, Arturo, Eder y Miguel.

Equipo 4: Derma, Liliana, Luisa, Rosaura y Emilia.

Intentamos incorporar un estudio acerca de la identidad de los actores participantes en los diseños, sin embargo, se trata de una primera aproximación a este planteamiento y será en el transcurso de futuras investigaciones donde se aborden las formas de cómo estos influyen. Se diseñó un cuestionario (Anexo I) para ser aplicado a los estudiantes que participaron en las secuencias.

En este estudio sólo se tomaron en consideración parcialmente tres aspectos, su situación socioeconómica, su desarrollo escolar y sus concepciones acerca de las matemáticas y de su papel social.

Tablas de datos del estudio Socioeconómico que se realizó a los estudiantes del Tecnológico de Acapulco que participaron en las secuencias de "la figuración del devenir de las cualidades"

Tabla 4.1 Edad de los alumnos participantes

Edad	18 años	19 años	20 años	21 años
Número de alumnos	4	10	3	0
Porcentaje	23.5%	58.8%	17.6%	0%

Medios de información y de procesamiento que utiliza

Tabla 4.2 Uso de medios electrónicos

	Utilizan frecuentemente computadora	Utilizan frecuentemente calculadora	Tiene computadora en su casa
Numero de casos	17	17	14
Porcentaje	100%	100%	82.4%

Tabla 4.3 Se lee regularmente un periódico en su casa

	Periódicos locales	Periódicos nacionales	No se leen periódicos	Periódicos locales y nacionales
Número de casos	12	4	3	2
Porcentaje	70.6%	23.5%	17.6%	11.8%

Tabla 4.4 Medios de información que utilizan

	Sólo TV	Sólo radio	TV y periódico	Radio y TV	Radio, TV y periódico	Radio, TV e internet
Número de casos	0	0	5	5	3	4
Porcentaje	0%	0%	29.41%	29.41%	17.6%	23.5%

Tabla 4.5 Tiene teléfono en su casa

	Sí	No
Número de casos	16	1
Porcentaje	94.1%	5.9%

Estabilidad familiar

Tabla 4.6 Escolaridad de los padres

	Superior	Carrera comercial	Medio superior	Secundaria	Primaria	Analfabeta	Otros
Padre	12		3	1	1	0	0
Madre	4	2	3	2	5	0	1

Tabla 4.7 Trabajan los padres

	Sólo padre	Sólo madre	Ambos	Trabaja solo uno	Otros
Número de casos	7	0	10	7	0
Porcentaje	41.2%	0%	58.8%	41.2 %	0%

Tabla 4.8 Tiempo de habitar en su domicilio (en años)

	De uno a cinco	De seis a diez	Más de diez	Tiene casa propia
Número de casos	3	5	9	15
Porcentaje	17.6%	29.4%	52.9%	88.2%

Tabla 4.9 Viven con sus padres

	Con padre y madre	Sólo con madre	Sólo	Con familiares
Número de casos	15	2	1	0
Porcentaje	88.2%	11.8%	5.9%	0%

Tabla 4.10 Lugar de nacimiento

	Acapulco	En otra parte de Guerrero	En otra parte del país
Número de casos	12	3	2
Porcentaje	70.6%	17.6%	11.8%

Tabla 4.11 Lugar de origen de los abuelos

	De Acapulco	De otra parte de Guerrero	De otra parte del país
Abuelo paterno	7	8	2
Abuela paterna	4	11	2
Abuelo materno	6	9	2
Abuela materna	4	11	2

Tabla 4.12 Número de hermanos

	0	1	2	3	4	5
Número de casos	2	8	6	0	1	0
Porcentaje	11.8%	47%	35.3%	0%	5.9%	0%

Tabla 4.13 Edad de sus padres

	35-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Padre	2	3	5	5	2
Madre	7	6	3	1	

Acerca de su desarrollo escolar

Tabla 4.14 Han reprobado alguna asignatura

	Ha reprobado materias	No ha reprobado materias	Ha reprobado matemáticas	No ha reprobado matemáticas
Número de casos	12	5	9	8
Porcentaje	70.6%	29.4%	52.9%	47%

Tabla 4.15 Promedio escolar

	7-7.9	8-8.9	9-10
Primaria	1	4	12
Secundaria	0	9	8
Bachillerato	1	10	6

Tabla 4.16 Tipo de escuela: privada o pública

	Privada	Pública
Primaria	7	10
Secundaria	4	13
Bachillerato	2	15

Tabla 4.17 Escuela donde cursó el bachillerato

	Cebetis 14	Cebetis 116	Cobach 2	Cobach 16	Privada	Preparatoria	Otras
Número de casos	5	3	4	1	2	1	1
	Cebetis		Cobach		Otras		
	8		5		4		
Porcentaje	47%		29.4%		23.5%		

Acerca de sus concepciones acerca de las matemáticas y de su papel social

Tabla 4.18 Creencias de por qué los estudiantes reprueban matemáticas

	Razones atribuibles a los alumnos	Razones atribuibles a los profesores	Razones atribuibles al contenido	Total de menciones
Número de casos	15	6	4	25
Porcentajes	60%	24%	16 %	100%

	Sólo a alumnos	Sólo a profesores	Sólo a contenidos	A profesores y alumnos	A profesores y contenido	A contenido y alumnos
Número de casos	8	0	1	5	1	2
Porcentajes	47%	0%	5.9%	29.4%	5.9%	11.8%

Tabla 4.19 ¿Por qué estudian?

	Porque me gusta	Por compromiso con su familia	Para ayudar a la familia	Para obtener un buen empleo	Para saber	Para ganar dinero
Número de casos	4	4	4	8	7	8
Porcentaje	4.65%	6.98%	11.63%	13.95%	18.6%	11.63%

	Por el país	Para ser alguien en la vida	Por la sociedad	Para enseñar	Para obtener un documento
Número de casos	1	7	2	2	3
Porcentaje	4.65%	16.28%	2.33%	2.33%	6.98%

Tabla 4.20 Que materia prefiere

	Física	Biología	Química	Matemáticas	Español	Total de menciones
Número de casos	3	8	12	14	1	38
Porcentaje	7.9%	21%	31.6%	36.8%	2.6%	100%

Tabla 4.21 Le gustan las matemáticas

	Si	No	Ni si, ni no
Número de casos	9	7	1
Porcentaje	52.9%	41.1%	5.9%

Tabla 4.22 Motivos por los que les gustan las matemáticas

	Porque se me hacen fácil	Porque sirven para todo	Porque me gusta resolver problemas	Porque enseñan a razonar	Porque sirven para investigar	Porque sirven para el mejor desempeño profesional
Número de menciones (25)	4	7	3	3	1	4
Porcentaje	16%	28%	12%	12%	4%	16%

Tabla 4.23 Motivos por los que no les gustan las matemáticas

	Porque son difíciles	No tengo motivos	Porque son aburridas	Porque se tienen que estudiar mucho	Porque no encuentra aplicaciones	Porque no las entiendo
Número de menciones (28)	10	2	4	3	3	6
Porcentaje	35.7%	7.1%	14.3%	10.7%	10.7%	21.4%

Tabla 4.24 Motivos por lo que son importantes las matemáticas

	Para la vida diaria	Para todo	Para aprender a razonar	Sólo para hacer cuentas	Para el trabajo	Sirven en ingeniería	Como base para las otras ciencias
Número de menciones (34)	8	9	3	2	5	3	4
Porcentaje	23.5.58%	36.5%	8.8%	5.9%	14.7%	8.8%	11.8%

4.3.2 Las secuencias puestas en escena

La puesta en escena de las secuencias diseñadas se presenta en la siguiente tabla.

Sesión	Secuencia	Duración	Fecha (2002)
Primera	Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil	Dos horas y media	24 de septiembre
Segunda	Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil	Dos horas y media	25 de septiembre
Tercera	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme	Dos horas y media	2 de octubre
Cuarta	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme	Tres horas	3 de octubre
Quinta	Exploraciones	Tres horas	4 de octubre
Sexta	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme disforme	Tres horas	7 de octubre
Séptima	Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme disforme	Tres horas	8 de octubre
Octava	Exploraciones	Tres horas	9 de octubre

Tabla 4.25. Tabla de las secuencias puestas en escena

4.4 Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil

En esta sección presentaremos el desarrollo y puesta en escena del diseño que hemos llamado "Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil".

En esta secuencia concebimos que la comunicación no consiste sólo en la transferencia de información del emisor al receptor, la comunicación se convierte en la modelación compartida de un fenómeno a través de una acción conjunta; el acto social del lenguaje da existencia a nuestra realidad, a nuestra cognición y por ende a nuestras herramientas.

Consideramos la comunicación y el lenguaje en sentido amplio, donde se incluye el lenguaje natural, escrito y hablado; las gráficas utilizadas; los gestos y señas; y los movimientos que se reproducen.

4.4.1 Objetivos

La secuencia persigue dos objetivos, por una parte, investigar las prácticas de construcción de instrumentos gráficos de comunicación, comunicar el movimiento de un móvil y, por otras, establecer los modelos gráficos "iniciales" que los participantes utilizan en esta actividad.

En el diseño sólo se contempla el movimiento en una sola dirección.

Se establece que las diferentes formas gráficas para comunicar el movimiento de un móvil no son inmediatas y nuestro interés se centra en investigar las condiciones en que éstas aparecen como argumentos. Para ello se diseñó una secuencia bajo nuestra perspectiva teórica de la que se pueden destacar tres aspectos, la selección del lenguaje, esto es, las herramientas sobre el lenguaje de los objetos; el carácter discursivo de la construcción social del conocimiento; y las interacciones en el aula.

4.4.2 Análisis preliminar

Partimos de algunos supuestos, las primeras formas de comunicación son las del lenguaje natural. Para el desarrollo de instrumentos gráficos para comunicar el movimiento de un móvil es necesario reflejar en estos instrumentos los cuatro puntos que enumeramos enseguida. Los participantes

1. hacen referencia a una posición inicial del objeto;
2. establecen formas para comunicar la dirección del movimiento;
3. establecen formas de comunicar cuantitativamente las distancias recorridas por el móvil; y
4. buscan formas para comunicar la evolución del móvil estableciendo alguna medida del tiempo y coordinándolas con las distancias recorridas.

Algunas dificultades de los estudiantes en la constitución del modelo distancia – tiempo son las siguientes:

1. Confunden la trayectoria del móvil con la gráfica distancia – tiempo. La trayectoria del móvil no permite mostrar la evolución en el tiempo del movimiento. La gráfica de la trayectoria de un móvil está imposibilitada para presentar la evolución, en el tiempo, del movimiento.
2. No es inmediato el uso del sistema de referencia donde un eje tiene unas unidades (tiempo) y, el otro, diferentes unidades (distancia).
3. Confunden el origen del sistema de referencias y el origen físico (el lugar de donde parte el móvil).
4. No perciben la imposibilidad de tener gráficas donde a una ordenada le corresponden dos abscisas; por ejemplo, un círculo como una descripción del movimiento de un móvil.

5. Tienen dificultades para leer puntos de la gráfica distancia – tiempo.
6. Se presenta confusión al leer una gráfica de un cuerpo que no se mueve (línea recta horizontal, paralela al eje del tiempo). Los estudiantes interpretan una gráfica de este tipo como un cuerpo en movimiento.

4.4.3 La dinámica

Dos equipos (el II y el IV) se tapan los ojos, los dos equipos restantes (el I y el III) observan cómo se mueve el profesor. Estos equipos discuten la forma de comunicar la acción del profesor (por escrito) a los dos equipos restantes, el equipo I le comunica al II y el equipo III al IV. Los equipos II y IV tendrán que reproducir el movimiento del profesor. Se debatirá acerca de estas reproducciones. Los estudiantes podrían pensar que sus descripciones son exactas y al descubrir que sus compañeros de clases pueden interpretar estas descripciones de más de una forma, o que no pueden ejecutarlas, conducirá, en nuestra opinión, a la construcción de argumentos para establecer los puntos señalados en el análisis predictivo.

La secuencia se desarrolló en dos sesiones de dos horas y media cada una.

El montaje experimental que se implementó es el descrito en la siguiente figura.

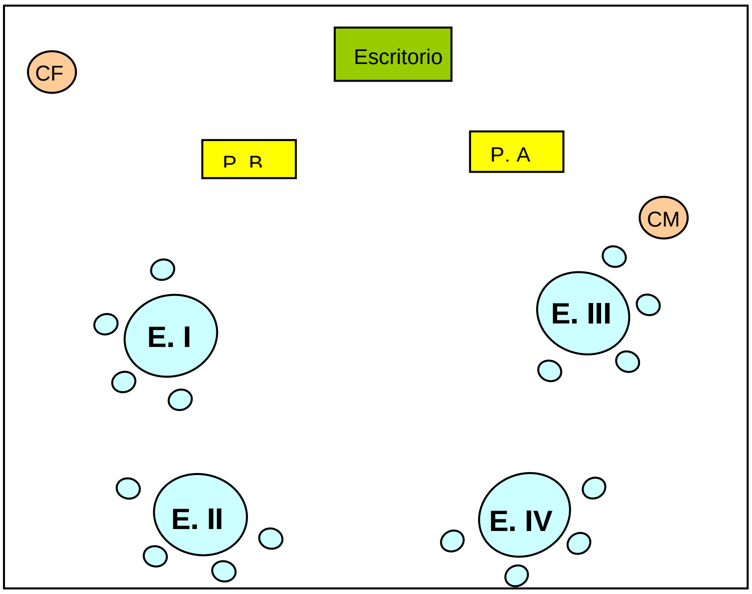


Figura 4.5. Montaje experimental

El montaje experimental se realiza en una aula; participan dos profesores, el profesor A y el B y cuatro equipos de cuatro alumnos, Equipo I, II, III y IV. En cada mesa se instala una grabadora que recoge las conversaciones de cada equipo, además se tiene una cámara fija (CF) que capta el panorama general y otra móvil (CM) que capta las particularidades del desarrollo de la experimentación.

4.4.4 Fases de la secuencia

Las fases son establecidas por los movimientos que se intentan comunicar.

- Movimiento con tiempos de espera constantes y distancias recorridas constantes con la "misma velocidad constante". El movimiento se realiza en una sola dirección. En la comunicación de este movimiento se espera que se establezcan un sistema de referencia y la dirección del movimiento. No es necesario que establezcan la cantidad de movimiento y la cantidad de tiempo de espera.

- Movimientos con tiempos de espera constantes y distancias recorridas variables se hace necesario establecer las cantidades de movimiento. El movimiento se realiza en una sola dirección.

- Movimientos con tiempo de espera constantes y distancias recorridas variables en dos direcciones (avance y retroceso). Se intenta romper el modelo gráfico de la trayectoria del móvil. Este movimiento no es posible comunicar con una gráfica de la trayectoria del móvil puesto que tendría que pasar por algunos lugares varias veces; sin embargo, no se rompe del todo el modelo de trayectoria de un móvil, se adapta.
- Movimientos con tiempos de espera y distancias recorridas variables. En esta actividad se hace necesario cuantificar los desplazamientos y los intervalos de tiempo de permanencia en las posiciones, puesto que no son iguales; aún más, es necesario la coordinación de éstas para comunicarlas.
- Movimientos con velocidad constante. Los estudiantes tendrán dificultades para comunicar un movimiento continuo; no comunican posiciones en intervalos de tiempo.

4.4.5 Descripción de la secuencia

La descripción de la secuencia es sólo una guía para la actuación de quien dirige la puesta en escena, esto no quiere decir que es un guión del que no se apartan los actores.

La secuencia tiene dos partes, una donde la comunicación (por escrito) se realiza utilizando lenguaje natural y, la otra, donde se pide a los estudiantes que se comuniquen sin utilizar el lenguaje natural.

Para poder describir la secuencia tomamos un punto del escritorio como referencia, éste es el lugar donde colocamos el sensor de movimiento; este lugar lo llamamos *R*.

- ❖ Se coloca el *profesor* A a dos metros de *R*, se espera tres segundos. Después se desplaza dos metros alejándose de R y permanece allí tres segundos. Por último, se desplaza dos metros, alejándose de R, y permanece en ese sitio tres segundos. El profesor B se encuentra a medio metro del sensor y permanece en esta posición hasta que los equipos elaboran su descripción, posteriormente, cambia de posición.

Predicción. Los estudiantes tendrán que hacer uso de una referencia para poder comunicar la posición inicial del profesor y la dirección en la que se mueve. Tal vez los alumnos tomen como referencia al profesor B y, al moverse, complicará la reproducción del movimiento y tendrán que recurrir a tomar una referencia que no cambie de posición. El tiempo no es importante porque los intervalos de tiempo son constantes. Los comunicados no necesariamente incluyen la cantidad de metros que se mueven hacia adelante o hacia atrás. Se esperan expresiones como la siguiente: se mueve hacia delante y luego se mueve otra vez hacia delante. En sus comunicaciones los estudiantes incluirán elementos que no son necesarios para reproducir el movimiento.

- ❖ Se coloca el profesor a seis metros de *R*, permanece dos segundos; avanza hacia R dos metros, permanece dos segundos; avanza hacia R medio metro, permanece dos segundos; avanza un metro, permanece dos segundos; y, por último, avanza dos metros más y permanece dos segundos.

Predicción. En esta actividad se hace necesario para la comunicación decir cuánto se desplaza para que se pueda reproducir el movimiento. Esta necesidad se presenta porque los desplazamientos no tienen la misma longitud. Se hace necesario, por tanto, decir el tamaño de los desplazamientos.

- ❖ Se coloca el profesor a un metro de *R*, permanece allí dos segundos; se aleja de R cuatro metros, permanece dos segundos; se aleja un metro, permanece dos segundos; se acerca dos metros permanece dos segundos; se acerca un metro, permanece dos segundos; y, por último, se aleja tres metros y permanece dos segundos.

Predicción. En esta actividad se hace necesario, para poder comunicar el movimiento del profesor, decir cuánto se aleja y/o cuánto se acerca, para que el movimiento pueda ser reproducido. Esta necesidad se presenta en tres momentos, el primero, cuando se aleja cuatro metros y después de dos segundos se aleja un metro más, como los desplazamientos no tienen la misma longitud se hace necesario decir el tamaño de los retrocesos; el segundo, cuando el profesor se acerca dos metros, se hace necesario decir que la nueva posición está entre la primera y la segunda que ha ocupado el profesor, por eso es necesario decir la cantidad del avance; y, por último, cuando el profesor avanza un metro y, posteriormente, retrocede tres metros, no es posible comunicar este movimiento con una gráfica de la trayectoria del móvil puesto que tendría que pasar por algunos lugares varias veces.

- ❖ Se desarrolla una caminata donde los intervalos de tiempo de permanencia en una posición no son constantes. Se coloca el profesor a tres metros de *R*, permanece dos segundos; se acerca un metro, permanece cuatro segundos; se aleja dos metros, permanece un segundo; se acerca cuatro metros, permanece tres segundos; se aleja un metro, permanece cinco segundos; y, por último, se aleja cuatro metros permanece dos segundos.

Predicción. En esta actividad se hace necesario considerar no sólo cuantificar los desplazamientos sino también cuantificar los intervalos de tiempo de permanencia en las posiciones, puesto que no son iguales. Es necesario la coordinación de estas para poderlas comunicar.

- ❖ El profesor parte desde una posición, a un metro del sensor; se aleja con velocidad constante a seis metros del sensor.

Predicción. Los estudiantes tendrán dificultades para comunicar un movimiento continuo; no comunican posiciones en intervalos de tiempo.

4.4.6 Puntos de Discusión

La secuencia se desarrolló, en general, de acuerdo al análisis predictivo; sin embargo, quisiéramos destacar algunos puntos de discusión importantes en la puesta en escena y presentar algunos episodios de esta.

4.4.6.1 Las formas de comunicar la posición de un objeto

- Los participantes utilizan símbolos para comunicar la posición donde el objeto es localizado. Mapas. El tiempo no es considerado.
- Las formas icónicas prevalecen en las comunicaciones.
- Los participantes intentan descripciones que piensen que son completas, solamente, descubriendo que sus compañeros de clases interpretan estas descripciones de más de una forma, intentan una mejor descripción.
- Los participantes no descubren inmediatamente la necesidad de un punto de referencia.
- Los participantes usan objetos movibles como punto de referencia.
- Los participantes usan símbolos no consistentes (que no usan consistentemente o que sus compañeros los usan con otro significado).

4.4.6.2 Los participantes utilizan los ejes coordenados y sistemas de unidades de tiempo y distancia en sus comunicaciones

- Tienen dificultades en las escalas de los ejes coordenados. La escala para las unidades del eje vertical es diferente de la escala de las unidades del eje horizontal.
- Confunden la gráfica de la trayectoria del móvil con la gráfica distancia - tiempo. Una línea recta con pendiente no cero, en algunos casos, es interpretada como un objeto moviéndose con algún ángulo.
- No asocian una gráfica horizontal con un objeto estacionario.

- No interpretan que cuando la posición de la gráfica retorna al eje horizontal, el objeto retorna al origen físico.
- Confunden el origen físico con el origen de la gráfica distancia – tiempo.
- Causa confusión la elección de la dirección positiva.
- Tienen dificultades en interpretar una gráfica con puntos debajo del eje horizontal (desplazamientos negativos).

4.4.7 Algunos episodios de la puesta en escena de la secuencia

La experimentación se efectuó en ocho sesiones con una duración entre dos y tres horas. Se transcribieron cada una de las grabaciones de audio (una grabación por equipo) y las grabaciones de video.

Los episodios se han elegido de acuerdo a los siguientes criterios:

- Muestran elementos acerca del análisis predictivo
- Se establece un contexto discursivo rico en la producción de argumentos
- Muestran evidencias o se establecen como argumento de las afirmaciones teóricas.

Episodio. 4.1.1 ***Los estudiantes buscan las intenciones***

Los estudiantes se cuestionan sobre las intenciones de la secuencia y de los que dirigen la puesta en escena, que no necesariamente es compartida.

Rosalinda: ¿Para qué es esto que hacemos?

Viridiana: Ellos quieren buscar cómo aprendemos mejor.

Rosalinda: Quieren ver la capacidad que tienen para comunicar y para entender.

Fernando: Sí, comunicar.

Rosalinda: Comunicarse y captar lo que está escrito.

...

Luis: Maestro, ¿cuándo vamos a empezar a ver las funciones?

Maestro: ¿Tú crees que las gráficas que trabajaron no son funciones?

Luis: No, las funciones son,… son como fórmulas. Los profesores empiezan por las funciones ustedes quieren cambiar las cosas quieren empezar con los problemas y luego llegar a las funciones.

....

Posterior a los dos primeros comunicados, los estudiantes del equipo 1 retoman la discusión.

Viridiana: Sí, tenías razón de lo que se trata es de comunicar y entender.

Fernando: Pero el movimiento nada más.

Luis: ¡Aja!, no importa lo que ponen ustedes, hay que encontrar una función.

Rosalinda: Nó, sólo hay que comunicar lo que interesa del movimiento, no se necesita utilizar funciones.

Los estudiantes del equipo 2 quieren saber cuál es el fin que se persigue y llegan a un consenso, se quiere "ver la capacidad... para comunicar y para entender". Además quieren saber qué es lo que vamos a ver después. De acuerdo a Luis la intención final es "ver las funciones", donde "las funciones como fórmulas son lo mejor, las gráficas no son tanto".

Episodio 4.1.2 ***Lo que rodea al movimiento del profesor***

Aislar el movimiento en una dirección del profesor del contexto y de todas las demás acciones de él no es inmediato, las comunicaciones en lenguaje natural o empleando gráficos incluyen detalles del contexto.

Enseguida se presenta un episodio donde el equipo 1 discute el comunicado que enviará, utiliza el lenguaje natural

Glorient: ¡Aja!, como esperando a alguien, ponle ahí, sospechando algo, como resolviendo un problema.

Liliana: Observando caminó, bueno, ponle que nó, sigilosamente cuando se detiene en el centro, da cinco pasos se detiene tantito, gira hacia los lados sigilosamente y luego hacia el centro, no pero, cinco pasos se detuvo; o sea, aquí cuando se detiene es donde regresa; ya después da cinco pasos, se fue hasta allá, se dio la vuelta pero rápido, miró hacia el frente como sospechando algo, se detiene nuevamente; ahí se da la vuelta, mira hacia los lados; pero allá no mira a los lados, miró a los lados cuando estaba aquí; empezó de cinco, cuando llega al centro mira hacia los lados, hizo señas con las manos, como diciendo ¿hay algún problema?

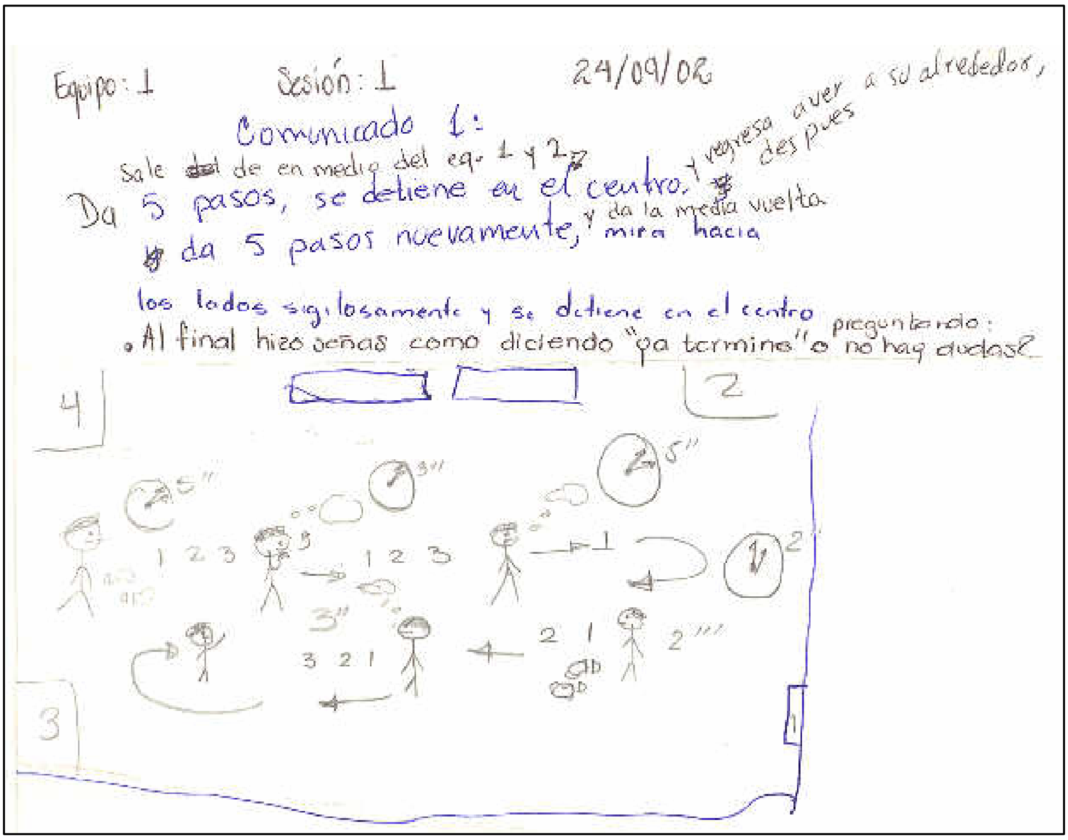


Figura 4.6 comunicado con lenguaje natural y un modelo icónico del equipo 1 donde incluyen elementos del contexto "externos al movimiento en una dirección"

Hablan a la vez.

Guadalupe: ¿Si había algún problema?, ¿nó? le hizo así. (*Guadalupe escribe*).

Hablan a la vez.

Liliana: Pon que observó hacia acá.

Glorient: Nó.

Liliana: ¿Dónde estaba primero?, pero el también dijo así como mirando a una persona, pero no la reconoció, la quería conocer.

Hablan a la vez.

Indira: Giró al centro y regresó a ver.

Se presenta un extracto donde el equipo 1 discute el comunicado que enviará, utilizando gráficos.

Liliana: Pero, sabes qué, mira, hay que distinguir con la cabeza algo; por qué no lo ponemos más grande para distinguir si está viendo hacia enfrente y le dibujamos algo en la cabeza, para ver si está moviendo algo; no sé, algo en la cabeza, para que distinga hacia el frente.

Indira: Para saber hacia dónde se dirige dibújalo con una gorra, dibújalo con una gorra, el cabello, cabello, también nos servirá para poner hacia dónde voltea.

Hablan a la vez.

Liliana: Si, sí, está bien, ponle nada más los ojos, ponle otro paso acá adelante, ya fue el último.

Glorient: Ya saben cualquier paso es, ya cuando lo vuelvas a hacer otra vez, otro monito y, ahora sí, el ojo.

Indira: Ponle una flechita hacia arriba.

Liliana: No, pero ahí ponle esto, ahí ponle que está, que estaba pensando y regresando a ver hacia allá y el ojo un poco mas hacia arriba.

Indira: No, ponle que estaba pensando.

Es inaudible.

Glorient: Nada más que el ojo ponlo un poquito más arriba.

Liliana: Ponle la mirada hacia el lado izquierdo.

Glorient: Ponle un ojo más, nada más ponle la flechita.

Indira: ¡Híjole!, la mano ponle así como que se agarra la barbilla con la mano izquierda.

....

En este episodio se muestra la construcción de los primeros modelos para comunicar el movimiento de un móvil en una dirección.

Los primeros modelos son icónicos e incluyen elementos que no son necesarios para modelar el"movimiento de un móvil en una dirección".

Entre los elementos icónicos para expresar algunos detalles se destacan:

- La dirección del caminante lo indican las flechas, pero también por los ojos, el pelo y la posición de la figura; además, esta figura expresa otros detalles, por ejemplo, hacia dónde mira y "la actitud del caminante".
- Los tiempos de espera los indican a través de un "reloj" puesto arriba de la trayectoria.
- El número de pasos lo modelan a través de números sobre la trayectoria.
- Para indicar la ubicación del caminante, donde empieza y donde termina, utilizan los números 1, 2, 3 y 4, delimitados por un semicuadro, que indican la posición de los equipos.

Otro ejemplo de comunicar verbalmente con elementos "externos" al movimiento es el comunicado 1 del equipo 3 presentado en la figura 4.7.

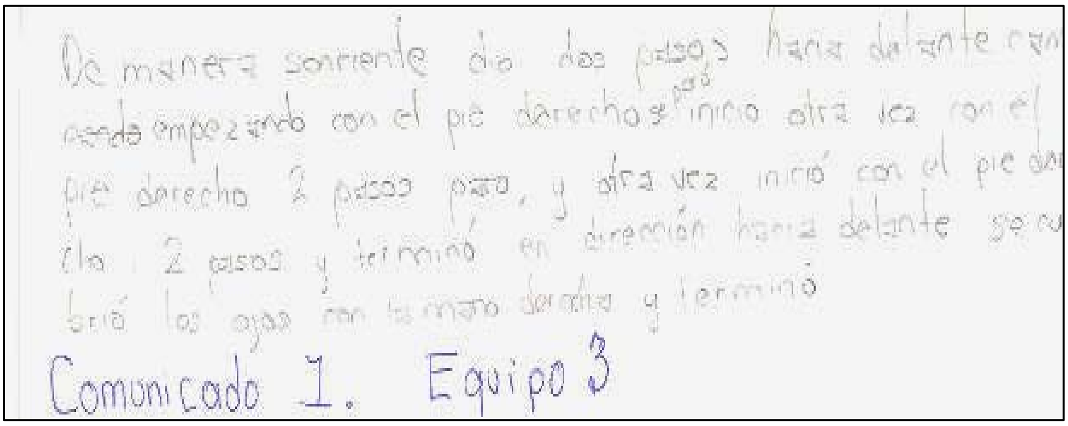
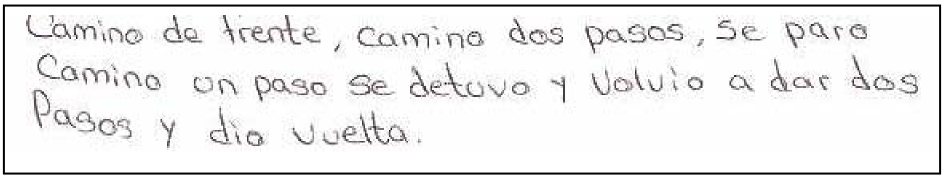

De manera sonriente dio dos pasos hacia delante con
empezando con el pie derecho se inicio otra vez con el
pie derecho 2 pasos para, y otra vez inició con el pie de
2 pasos y terminó en dirección hacia delante se cu
brió los ojos con la mano derecha y terminó
Comunicado 1. Equipo 3

Figura 4.7 Comunicado verbal con elementos "externos al movimiento": "De manera sonriente dio dos pasos hacia delante (borrón) empezando con el pie derecho (encimado) se para inicia otra vez con el pie derecho 2 pasos para, y otra vez inició con el pie derecho 2 pasos y terminó en dirección hacia delante se cubrió los ojos con la mano derecha y terminó".

Otros comunicados son más escuetos y mencionan sólo la cantidad de pasos que camina y la dirección, por ejemplo el de la figura 4.8.



Camino de frente, camino dos pasos, se paro
Camino un paso se detuvo y Volvio a dar dos
Pasos y dio vuelta.

Figura 4.8 Comunicado donde solo establece la cantidad de pasos que camina y la dirección

Episodio 4.1.3 *¿Y como le haría álguien que no vio el salón de clases?*

Los diagramas que elaboran son icónicos donde se describe la trayectoria, utilizando, en lugar de un punto de referencia, diversos referentes; es decir, utilizan mapas donde dibujan la trayectoria. Elaboran diagramas y puntos de referencia que sirven exclusivamente para el momento. Por ejemplo, no es posible reproducir el movimiento del profesor por un grupo de alumnos que no tiene la configuración que refleja el diagrama. Otro aspecto es que tienen la necesidad de decir cuánto avanzó y cuánto se detuvo.

Se analiza la interacción en el equipo 1.

Indira: Entonces de ahí (*señala el equipo* 2) caminó tres pasos, ponle una ruedita aquí.

Liliana: Pero en tres segundos llegó a ahí (*escribe un circulo en su mapa*).

Glorient: Se llevó cuatro segundos ahí.

Liliana: Por eso.

Glorient: En cada paso medio segundo. ¿Cómo le vas a poner eso?

Indira: ¿Y de ahí?

Liliana: Estuvo ahí y dio otros dos pasos más.

...

Indira: Como que fueron cincuenta y cuatro centímetros de cada paso, llegó a cuatro metros, ¿no?

Glorient: Y ¿cómo dices cincuenta y cuatro?, son como cincuenta centímetros por paso, pero ha de ser como medio metro, tardó unos tres segundos, no. ¿Cómo le vas a poner esto?

Liliana: Ya aquí le pusimos dos.

Indira: Después dio vuelta y dio tres pasos.

Liliana: Aquí me da… para que llegue y no le falte mucho.

Glorient: ¡Mjmmm!

Indira: Pero dio tres pasos, que equivalen a metro y medio.

Glorient: Pero a cuatro segundos. Es lo que te estoy diciendo, ahí le pones los metros que avanza pero no el tiempo que se tarda. Ponle un relojito arriba.

Liliana: Entonces también en los otros.

Indira: Y ya quedó así.

...

Liliana: Aquí dio la vuelta y dio tres pasos.

Indira: Pero en la vuelta avanza mucho, la vuelta queda como aquí.

Hablan todos a la vez.

Liliana: No tanto la vuelta.

Indira: Retrocedió.

Guadalupe: Pero si debería haber llegado hasta por aquí, quedó como a dos metros.

Indira: ¿A dos metros de donde?

Guadalupe: Del punto de referencia.

Liliana: No, pero eso no importa. Ya estamos poniendo cómo están los equipos y dónde caminó el profesor.

Guadalupe: Pero cómo le haría álguien que no vio cómo estaba el salón de clases.

Liliana: Ya Lupe, ellos están aquí, serían unos tontos si no descifran esto.

Episodio 4.1.4 *Los modelos icónicos*

Los modelos gráficos que fueron construidos por los equipos se refieren a modelos donde se encuentran elementos icónicos (figuras, relojes, etc.) y presentando la idea de una trayectoria, reproducen la idea de un mapa. Ejemplos de estos modelos son los presentados en las figuras 4.9, 4.10 y 4.11.

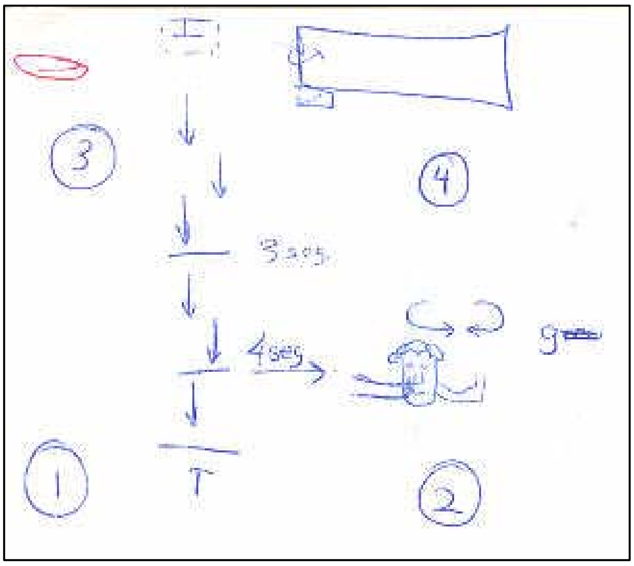


Figura 4.9. Gráfica – trayectoria del equipo 1, donde aparecen elementos icónicos.

Los comunicados contienen elementos del contexto. Aún cuando el equipo ya ha acordado no tomarlos en cuenta Liliana insiste en incluir los gestos del maestro.

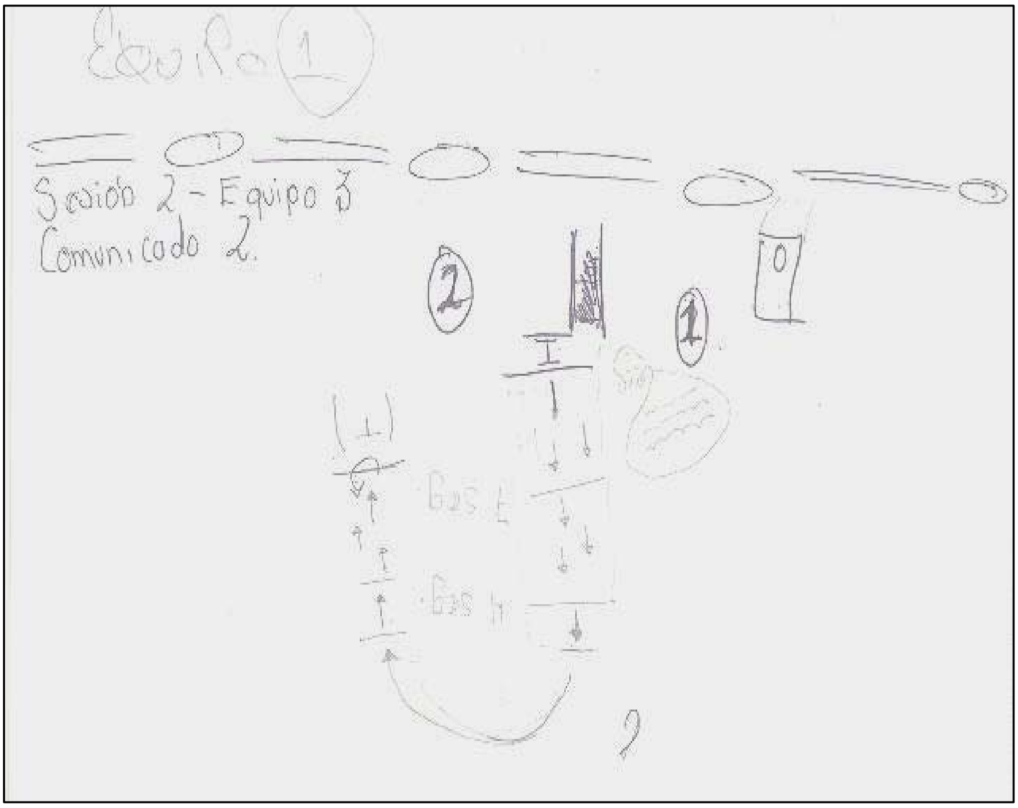


Figura 4.10. Gráfica – trayectoria del equipo 3, donde aparecen elementos icónicos

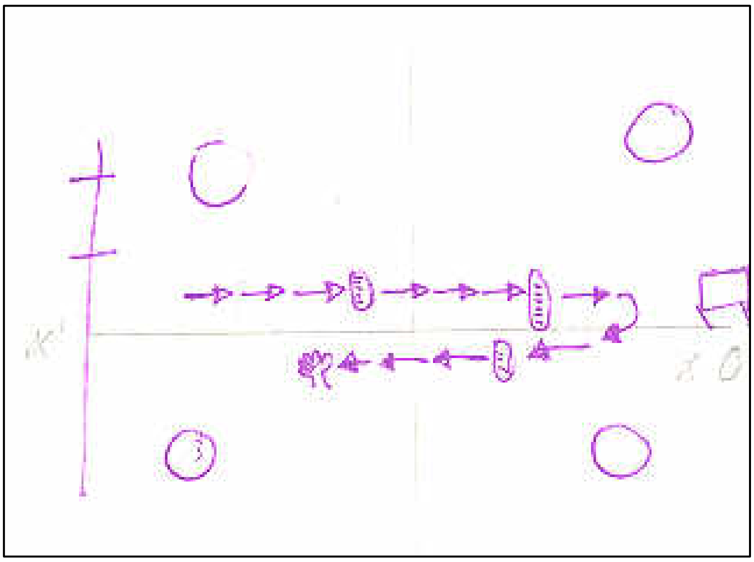


Figura 4.11. Gráfica – trayectoria del equipo 3, donde aparecen ya "los ejes coordenados".

Episodio 4.1.5 *La variedad de modelos gráficos propuestos*

Diversos modelos gráficos no cartesianos fueron construidos; entre ellos cabe destacar los que se muestran en las figuras 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15.

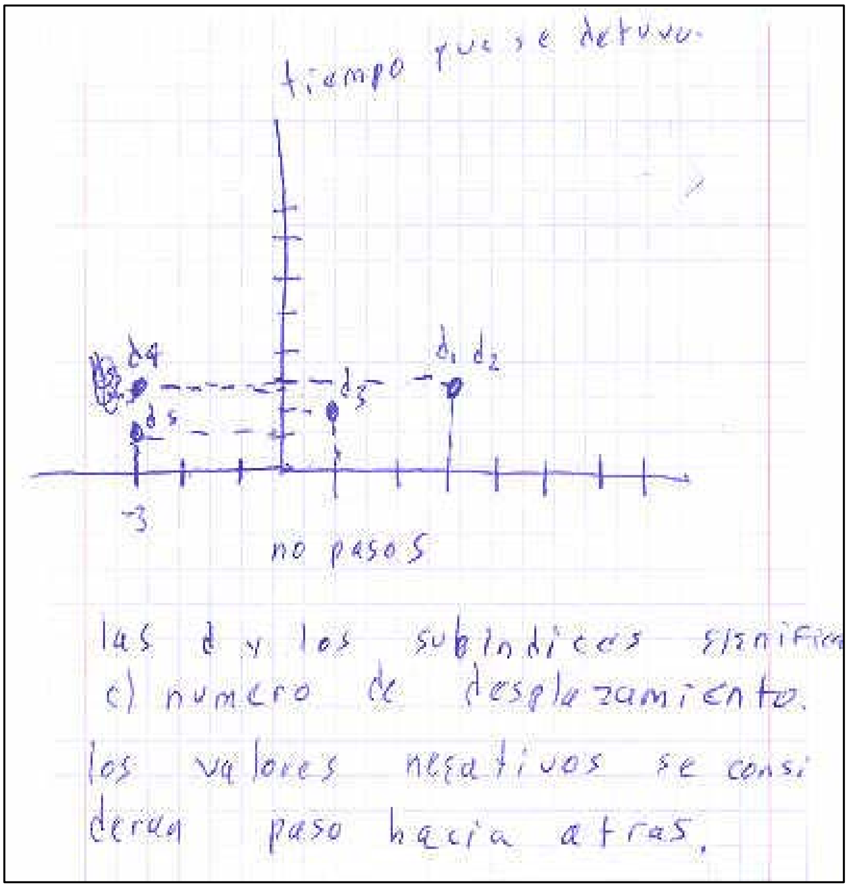


Figura 4.12. En esta gráfica el movimiento se modela por una secuencia de desplazamientos

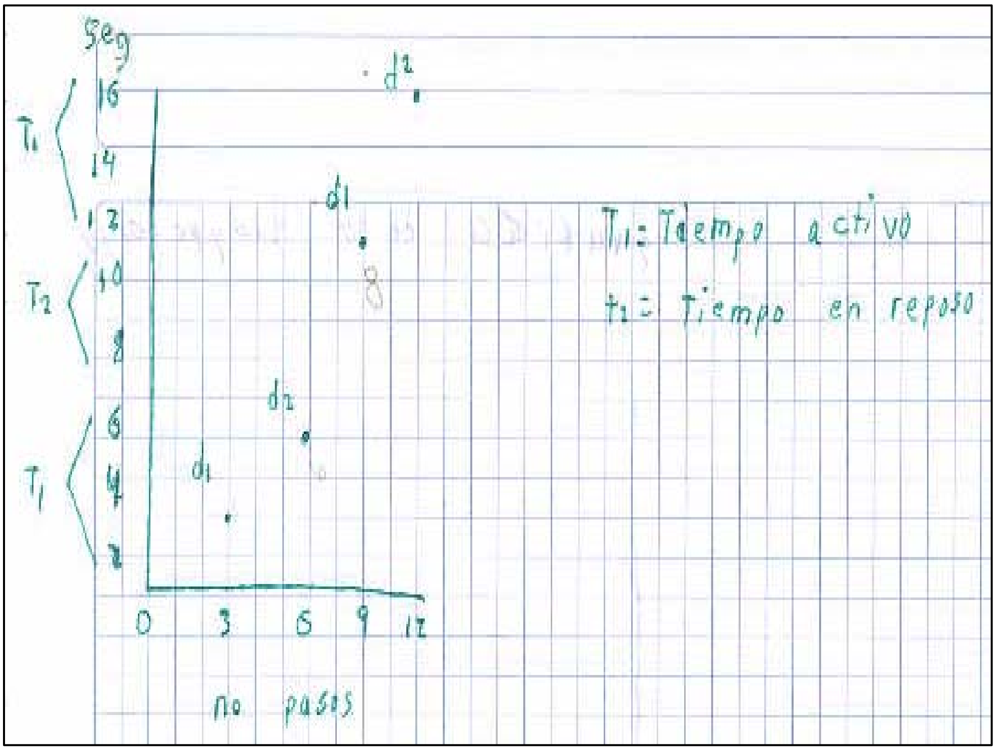


Figura 4.13. En esta gráfica se presentan dos tipos de tiempos, "los tiempos activos y los pasivos". La gráfica es una sucesión de tiempos y distancias

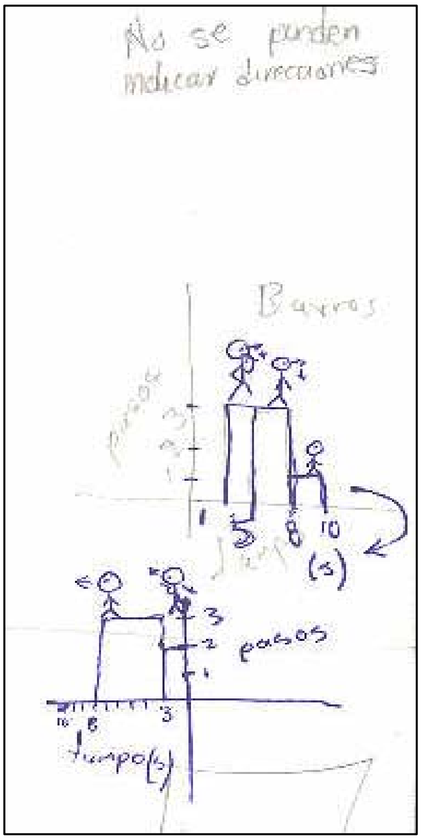


Figura 4.14. Este modelo se remite a las gráficas por barras. Ellos en la parte superior indican que este modelo no puede indicar direcciones. Sin embargo parece ser que intentan resolver este problema colocando barras a la izquierda del origen.

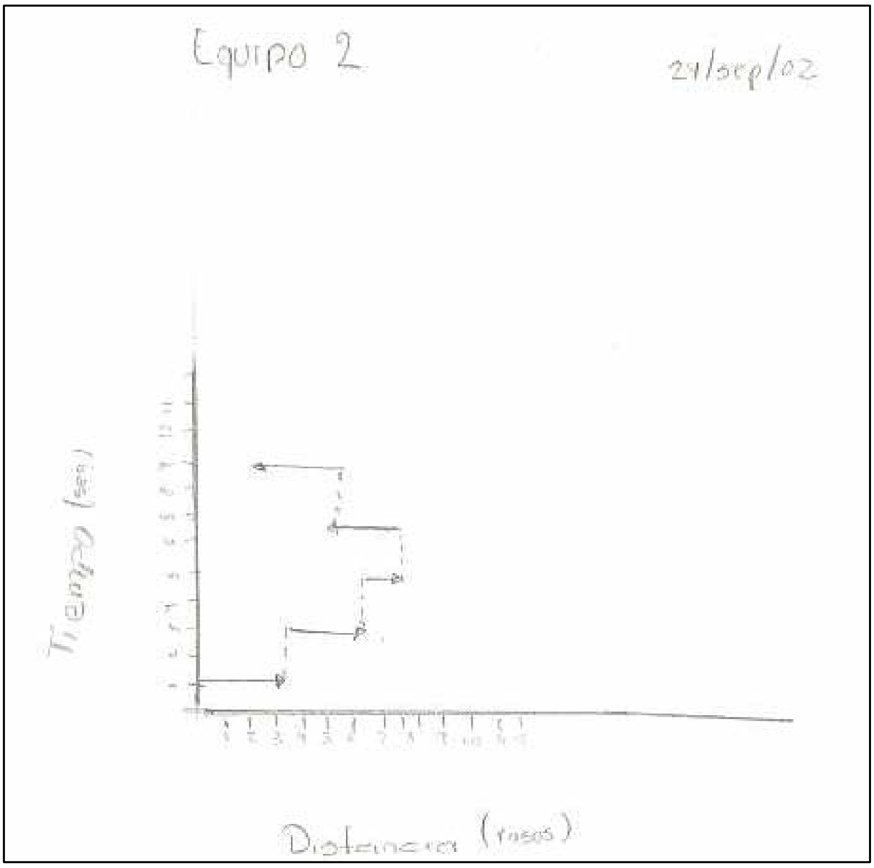


Figura 4.15. En esta gráfica se establecen los tiempos de espera y los pasos que se recorren sin embargo la velocidad no es posible indicar.

Episodio 4.1.6 *Modelos "cuasi cartesianos"*

Existe una gran variedad de modelos propuestos para la comunicación de un móvil. En estos incluyen aspectos icónicos, de una trayectoria y de una gráfica cartesiana, ***estos aspectos se entrelazan e intentan suplir las carencias que perciben en un modelo con otros elementos.***

En las figuras 4.16 y 4.17 se presentan modelos donde los equipos mezclan una gráfica cartesiana con elementos de una trayectoria para ubicar el movimiento. La posición de los equipos es modelada por círculos con números intentando ubicar el movimiento del caminante. Los equipos consideran que su gráfica no refleja la posición del caminante.

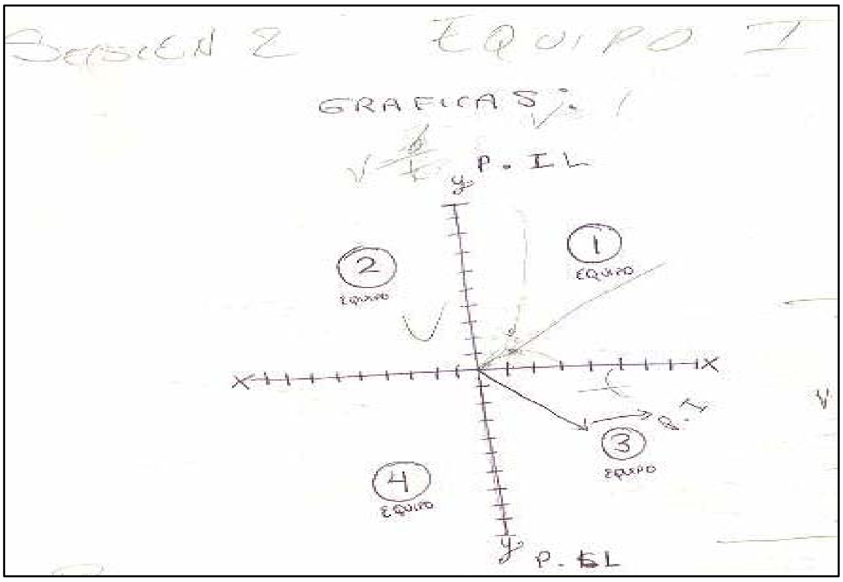


Figura 4.16. Gráfica "cuasi cartesiana" del equipo 1, donde aparecen elementos de una trayectoria.

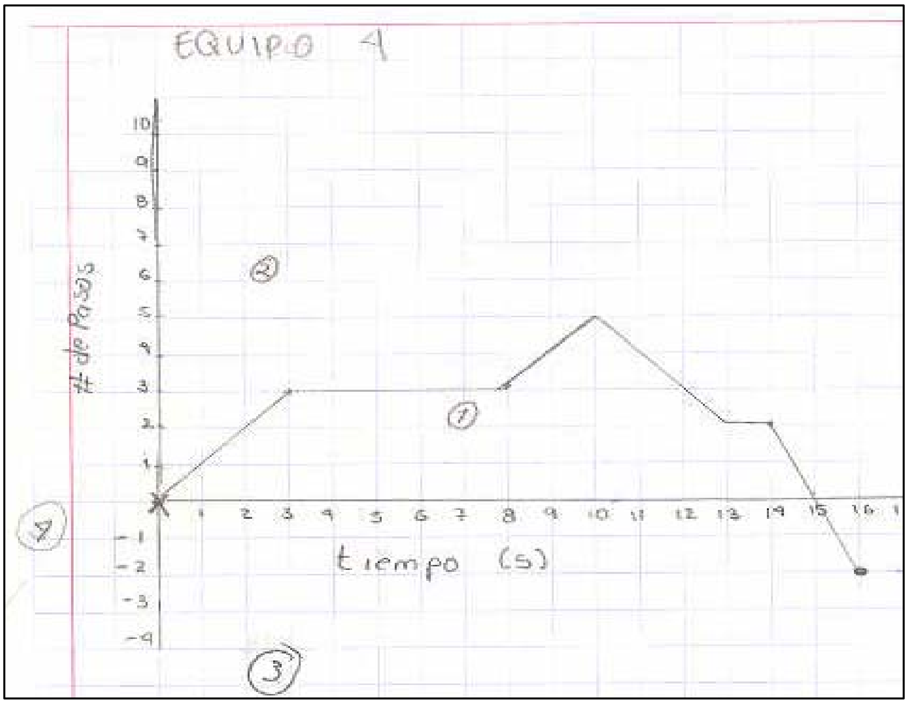


Figura 4.17. Gráfica "cuasi cartesiana" del equipo 4, donde aparecen elementos de una trayectoria

De la misma forma los comunicados de las figuras 4.18, 4.19, 4.20 y 4.21 son gráficas cartesianas que incluye elementos de una trayectoria. En las figuras 4.1.8 y 4.19 se incluyen números arriba de los segmentos para indicar la longitud que esta recorriendo el caminante. Han establecido previamente que un paso 69 son centímetros aproximadamente. En la figura 4.20 se agregan números arriba de algunos segmentos para indicar el tiempo de espera en cada caso. En ambos casos los estudiantes han incluido elementos de una trayectoria a las gráficas cartesianas para compensar las deficiencias que consideran. En la figura 4.21 el equipo 1 incluye un elemento icónico al dibujar arriba de un segmento una figura que esta dando vuelta para poder expresar que es en ese, momento que el maestro se da vuelta; además, no esta sobre un segmento recto, es un segmento que indica que el profesor no esta quieto.

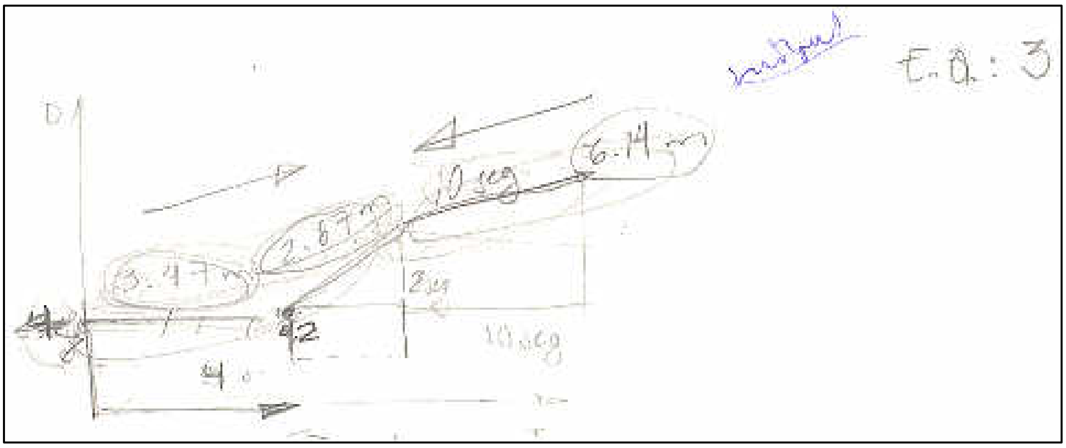


Figura 4.18. Gráfica del equipo 3, las flechas indican la dirección del movimiento y los números arriba de los segmentos la longitud de los movimientos

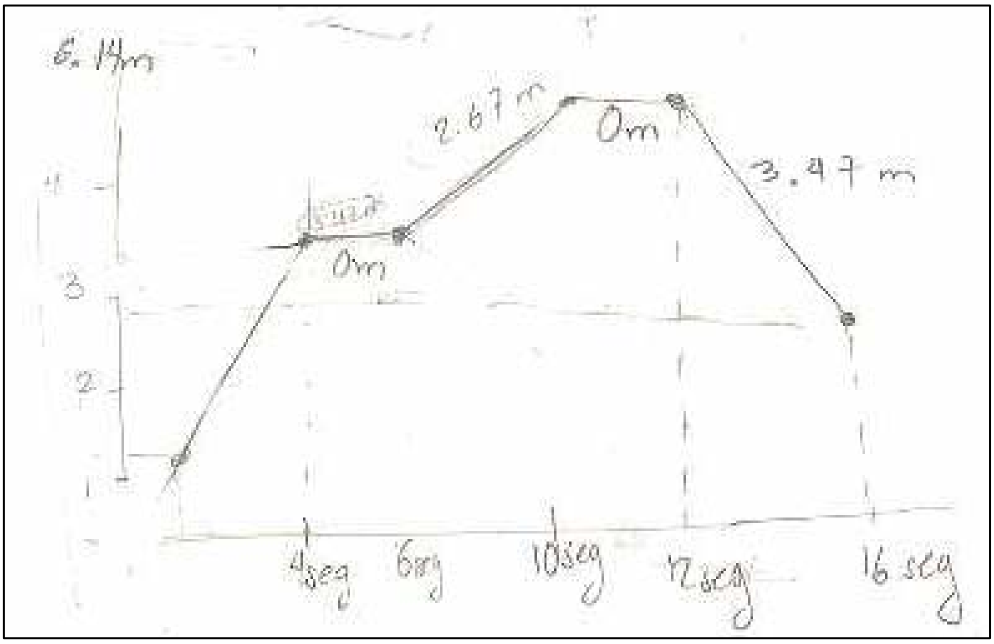


Figura 4.19. La gráfica es una evolución de la gráfica de la figura 4.18 del equipo 3, en ella ya no incluyen las flechas para indicar la dirección del movimiento, pero aún conservan los números arriba de los segmentos para indicar la distancia recorrida. Para ellos la distancia recorrida es indicada por la longitud del segmento que une los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2) y no por la distancia entre x_1 y x_2

Ambas gráficas son elaboradas por el equipo 3 e incluyen la longitud de la distancia recorrida arriba de los segmentos. En la primera se indica la dirección del movimiento con flechas.

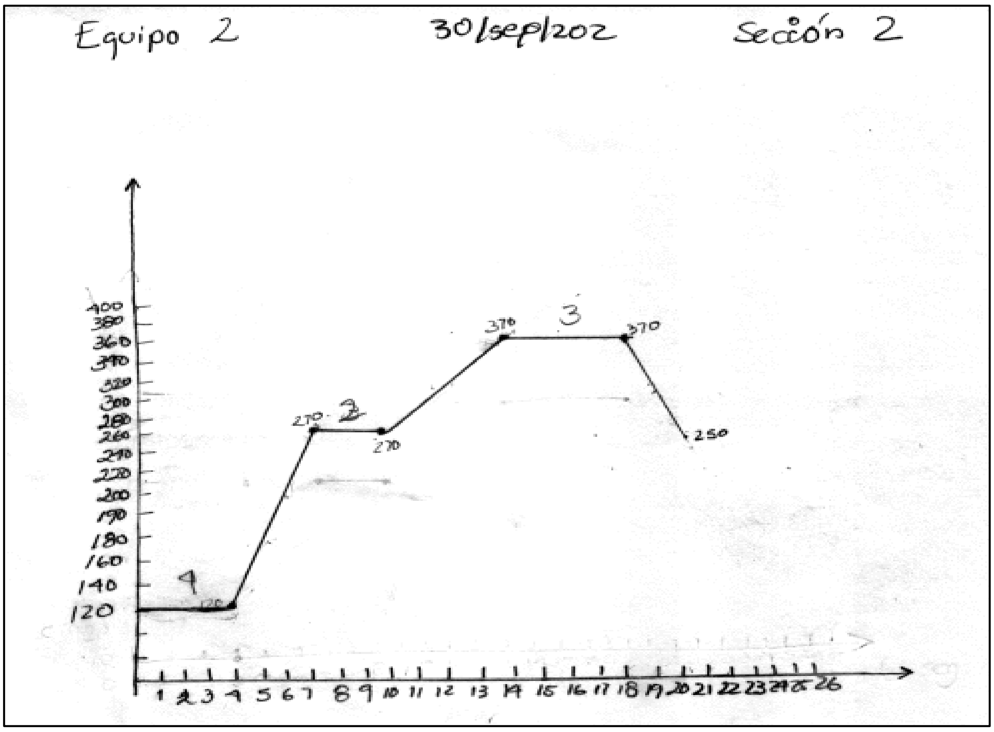


Figura 4.20. Gráfica del equipo 2, donde incluyen los segundos de demora y en los vértices la posición del móvil.

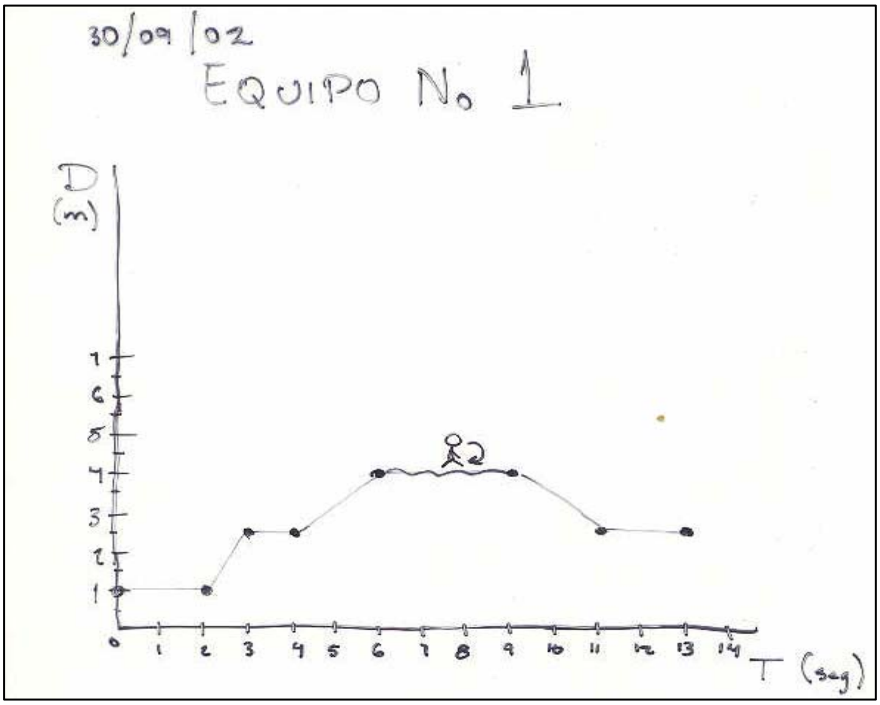


Figura 4.21. Gráfica del equipo 1, donde agregan un elemento icónico para expresar que el caminante da vuelta.

Episodio 4.1.7 ***Los modelos "algebraicos"***

Los esfuerzos que intentan proporcionar un modelo numérico o algebraico se presentan en as figuras 4.22 y 4.23.

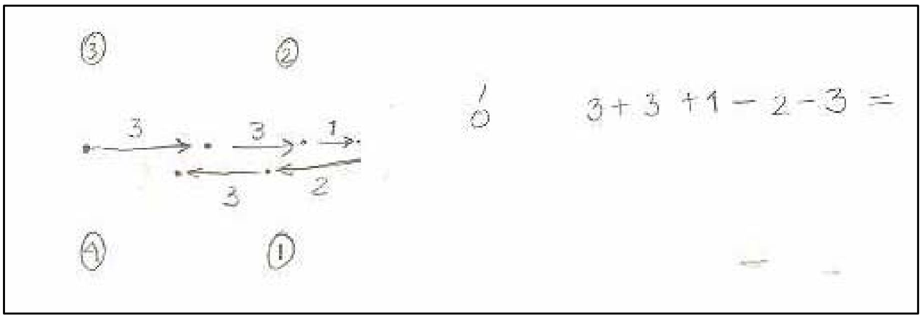


Figura 4.22. Modelo trayectoria-numérico del equipo 3.

En el modelo "numérico" del a figura 4.22 sólo se expresa la dirección del movimiento a través de los signos y el número de pasos que se dan, sin embargo es combinado con un modelo icónico para ubicar la trayectoria del móvil.

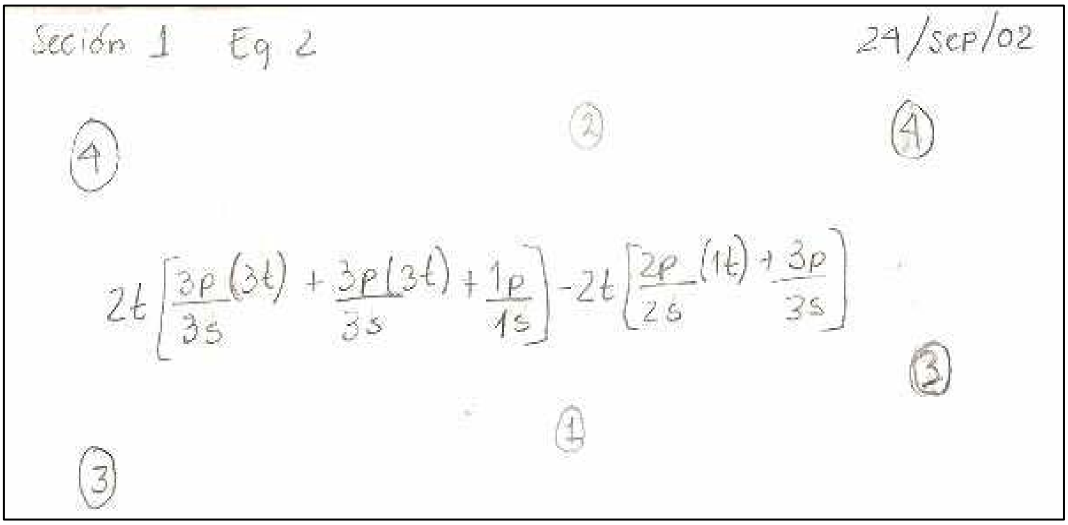


Figura 4.23. Modelo algebraico del equipo 2.

En el modelo de la figura 4.23 Fernando (del equipo 2) intenta buscar una fórmula que describa el movimiento. En el modelo logra establecer lo siguiente:

- la dirección del caminante, los signos negativo y positivo indican el sentido del movimiento;
- la ubicación del movimiento, estableciendo la posición de los equipos con números dentro de círculos;

- la velocidad de los pasos, con $\frac{3p}{3s}$, por ejemplo, indica que se avanzará tres pasos en tres segundos;
- los tiempos de espera, con $3t$ colocado después de $\frac{3p}{3s}$ indica que esperará tres segundos después de caminar tres pasos en tres segundos.

Sin embargo, no se dan argumentos alrededor de este modelo. Sólo "nos está pidiendo un comunicado con gráficas".

Episodio 4.1.8 *Modelos gráficos finales*

Los modelos gráficos que presentan los equipos al final de la puesta en escena son gráficas cartesianas. Sin embargo, la gráfica del equipo 1 presenta aún elementos de una trayectoria. La diferencia entre las graficas del equipo 2 y 3 estriba en la consideración del inicio de la gráfica, mientras que para el equipo 2 inicia cuando su compañero se encuentra caminando, para el equipo 3 inicia cuando el caminante esta en reposo. La gráfica del equipo 4 contiene elementos icónicos y utiliza el eje vertical como el tiempo y el horizontal como los pasos.

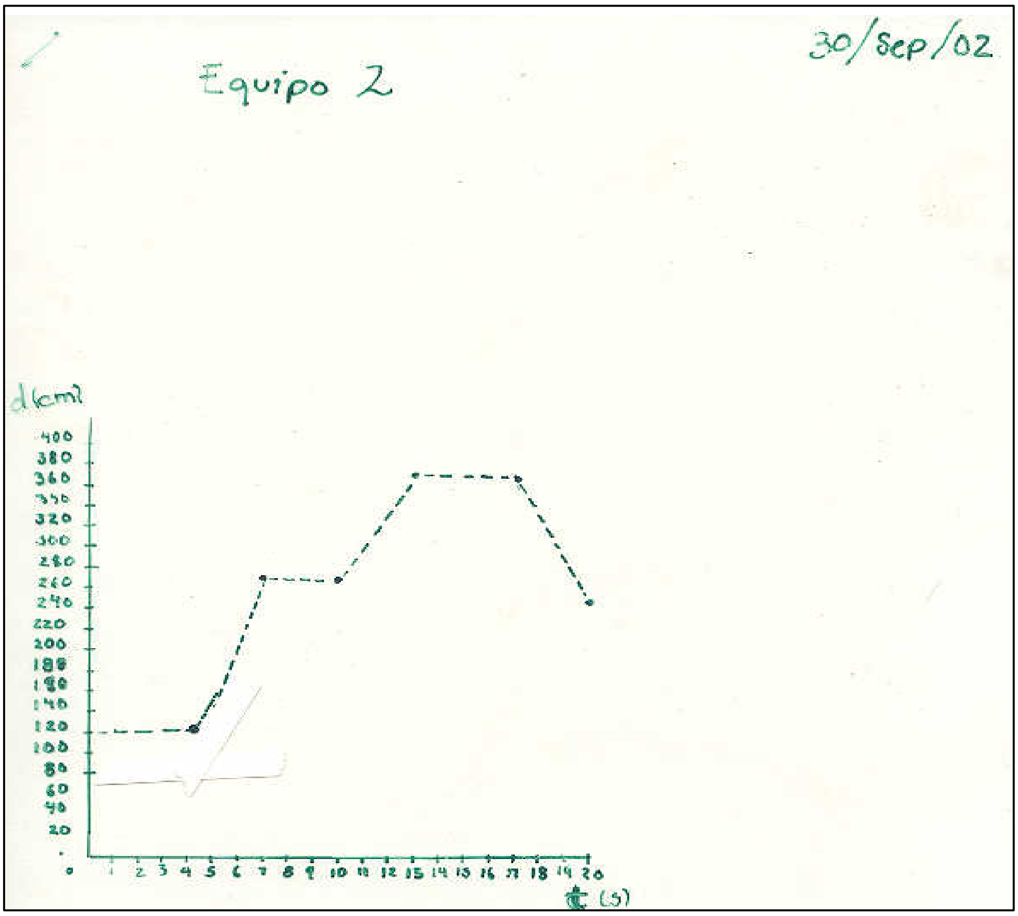


Figura 4.24. Gráfica final del equipo 2.

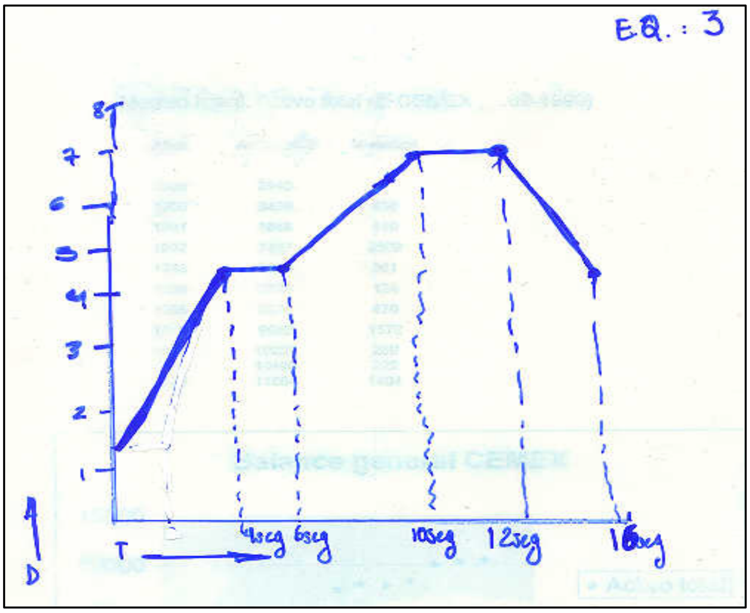


Figura 4.25. Gráfica final del equipo 3

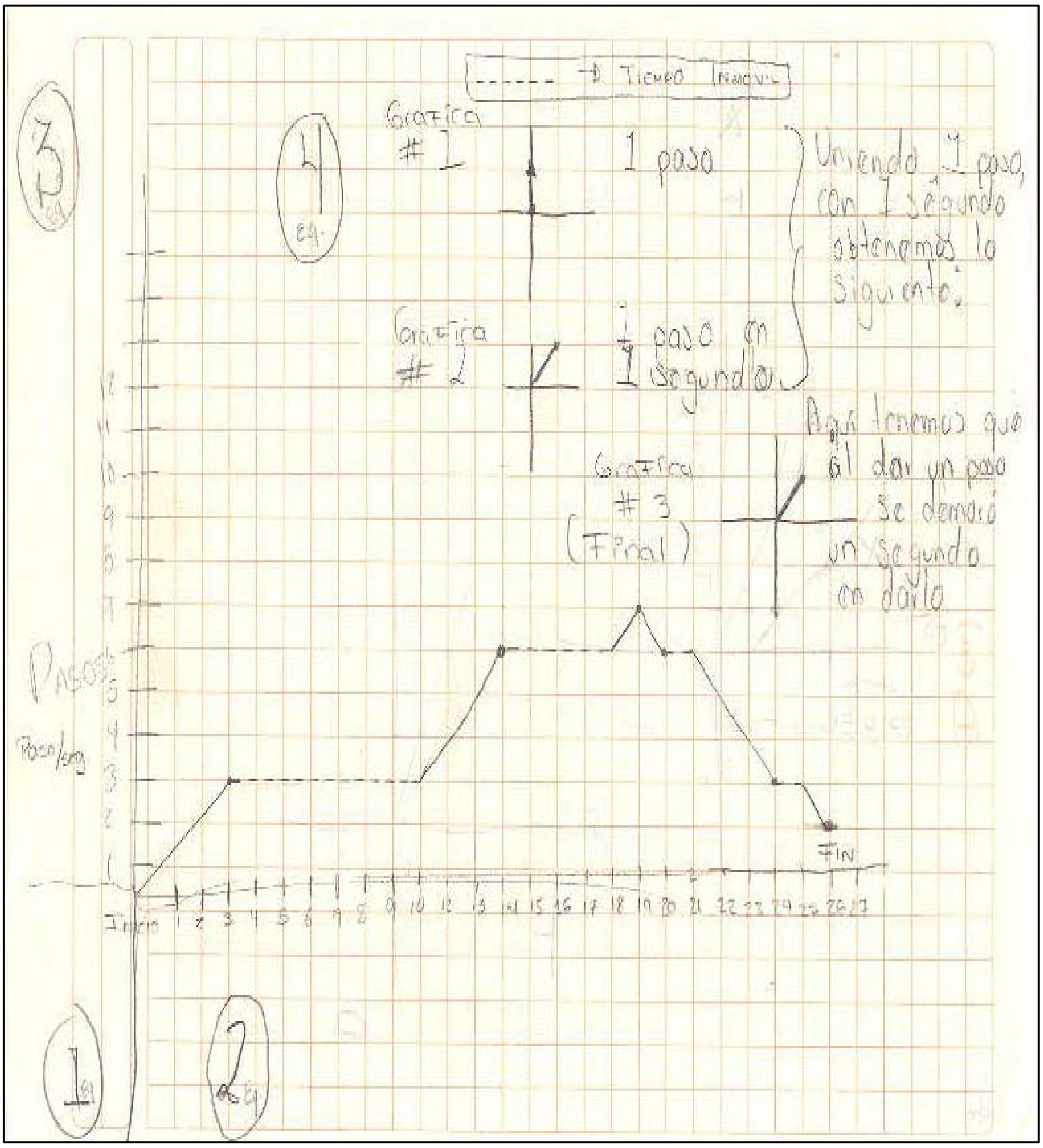


Figura 4.26. Gráfica final del equipo 1.

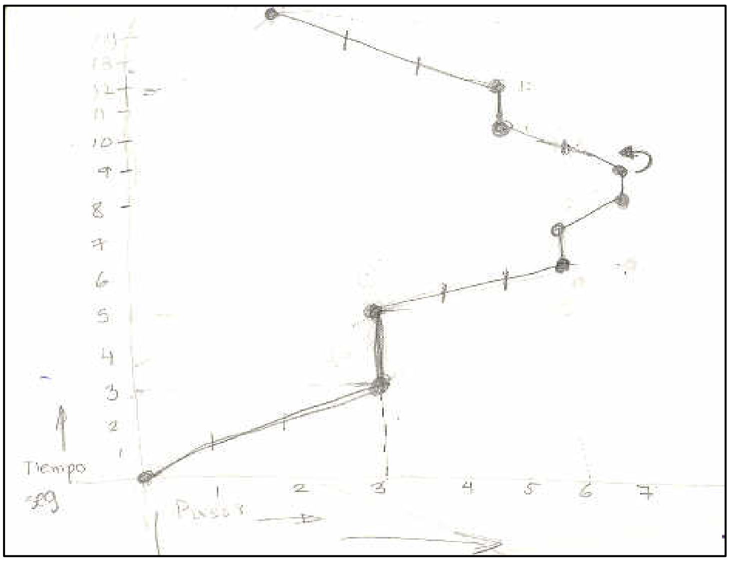


Figura 4.27. Gráfica final del equipo 4.

Episodio 4.1.9. *Las características de los comunicados*

A sugerencia del profesor los equipos discuten cuáles son las características que debe contener un modelo gráfico del movimiento en una dirección, esta discusión se efectúa en el intermedio de la sesión 1. Éstos coinciden en que los comunicados gráficos requieren especificar la dirección, el punto de partida, el tamaño de los movimientos y de los tiempos de espera. Es de hacer notar el equipo que incluye la velocidad. Las figuras 4.28, 4.29, 4.30 y 4.31 muestran las conclusiones por equipo para ser expuestas por sus representantes al grupo.

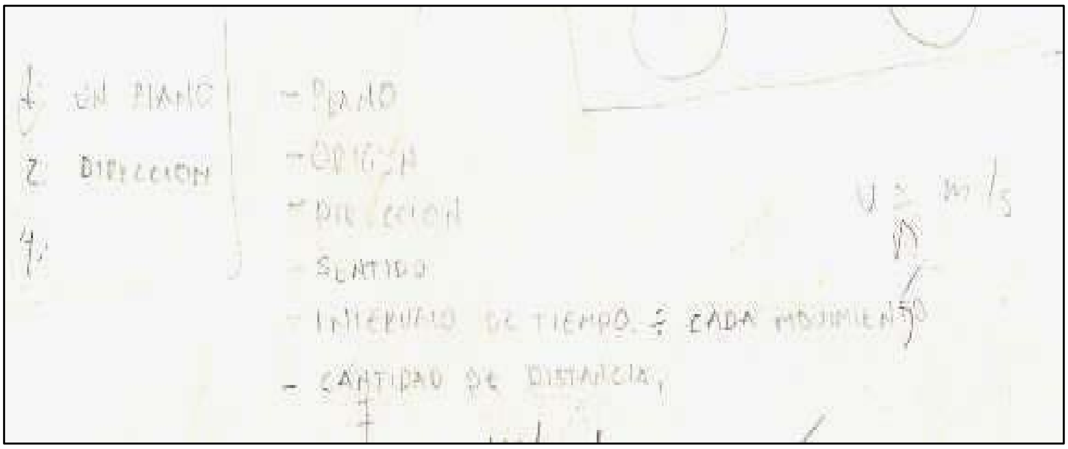


Figura 4.28 Características que platea el equipo 2: Plano, origen, dirección, sentido, intervalo de tiempo entre cada movimiento (con una flecha indican $v \quad \frac{m}{s}$) y cantidad de distancia.

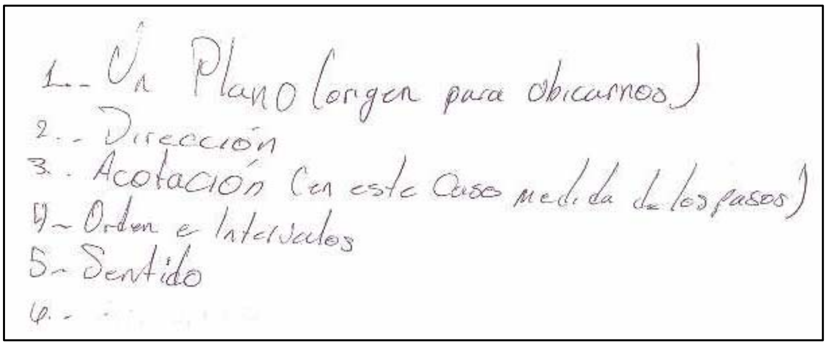


Figura 4.29 Características que platea el equipo 1: Un plano (origen para ubicarnos), dirección, acotación (en este caso medida de los pasos) y sentido.

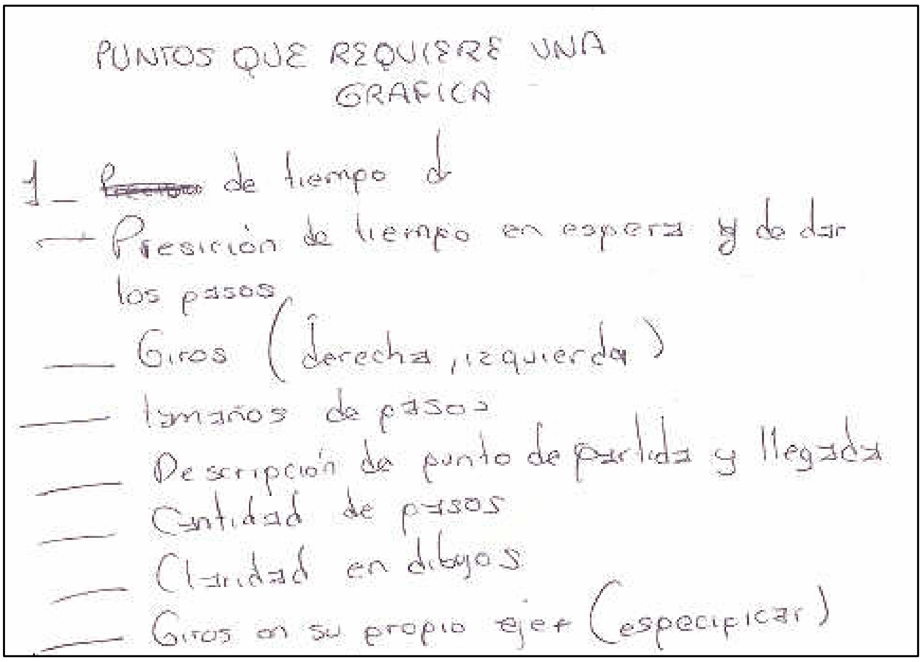


Figura 4.30 Características que platea el equipo 3: Preescisión de tiempo en espera y de dar los pasos, giros (derecha, izquierda), tamaños de pasos, descripción de punto de partida y llegada, cantidad de pasos, claridad en dibujos y giros en su propio eje.

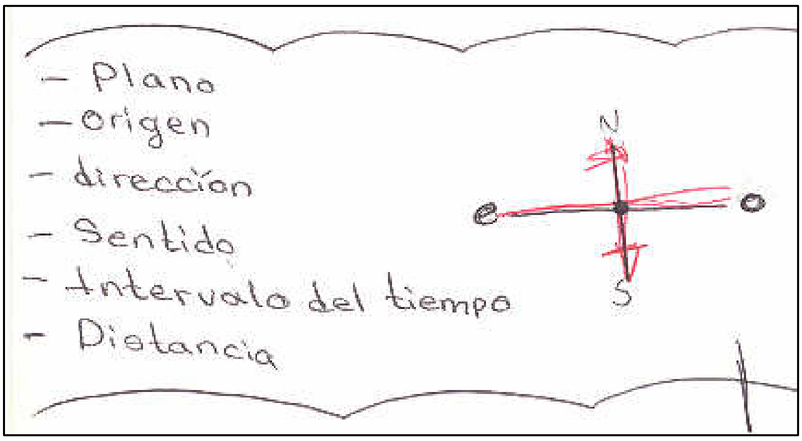


Figura 4.31 Características que platea el equipo 4: Plano, origen, dirección, sentido, intervalo del tiempo y distancia.

4.5 Las matemáticas del movimiento

4.5.1 Condiciones experimentales

El arreglo experimental, contemplo una cámara móvil (captó los detalles de la interacción en el grupo y de las discusiones en los equipos), una cámara fija (captó el panorama general del aula), una grabadora por equipo (registró las discusiones en los equipos) y material del aula (pizarrón, retroproyector, sensor de movimiento y calculadoras graficadoras en la última parte de la secuencia).

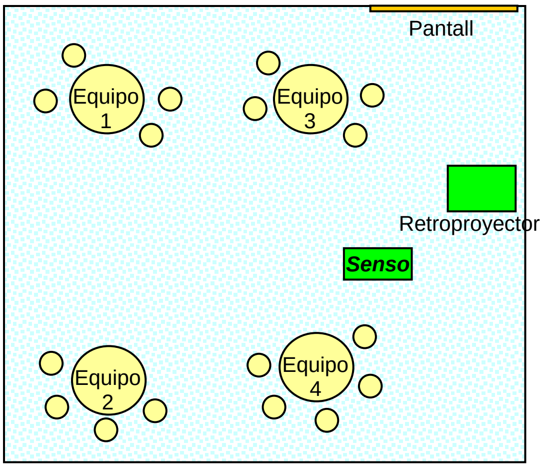


Figura 4.32. Arreglo experimental

4.5.2 Condiciones de las interacciones

Nuestro interés se centró en la interacción a diferentes niveles. Los estudiantes interactúan en su equipo, interactúan con los demás equipos y con el profesor.

La dinámica de la actividad es la siguiente: Se plantea una cuestión, los equipos construyen una posición al respecto, argumentando ampliamente y, si es posible por escrito, el equipo "manda" un representante a ejecutar lo acordado; se debate previo a la ejecución de la acción acordada por los equipos sobre las diferentes posiciones, utilizando los argumentos que se construyen en torno a la acción a desarrollar.

4.5.3 Análisis predictivo

Los estudiantes construyen diferentes versiones de los hechos, en este caso, sobre las diferentes situaciones de movimiento de un móvil.

Los estudiantes construyen una versión gráfica del devenir de las distancias y del devenir de las velocidades. La velocidad está presente como parte del discurso escolar, más no es movilizada como una herramienta para explicar el movimiento. La aceleración es más carente de significados.

Los estudiantes establecen una articulación entre el movimiento y las gráficas tiempo – distancia y tiempo – velocidad. La modelación como un recurso argumentativo consiste en articular diferentes modelos con la experimentación, como un instrumento de validación de las diferentes versiones en competencia.

Los estudiantes establecen la relación entre el área bajo la recta velocidad – tiempo con la gráfica distancia – tiempo. Este es el argumento principal para establecer el hecho de que la distancia varía como el cuadrado del tiempo en un movimiento uniforme disforme.

La secuencia consta de tres fases determinadas por los objetivos que persiguen,

- La gráfica distancia – tiempo
- El movimiento uniforme
- El movimiento uniforme disforme

4.5.4 Fases de la secuencia

1. La gráfica distancia – tiempo.

   Objetivo. En esta fase los estudiantes se familiarizan con el sensor de movimiento y construyen modelos gráficos del movimiento de un móvil; por ejemplo, la gráfica distancia – tiempo. Utilizan el sensor de movimiento como un instrumento para medir la distancia. Obtienen una connotación física de "variable", la variable distancia y la variable tiempo. Los estudiantes construyen un modelo gráfico del movimiento, la gráfica distancia – tiempo, determinando la posición del móvil en un momento a partir de la gráfica y determinando la gráfica a partir del movimiento del móvil.

Las *prácticas* en esta fase consisten en, *determinar la posición del móvil en determinado momento a partir de la gráfica y determinar la gráfica a partir del movimiento del móvil.*

2. El movimiento uniforme.

   Objetivo. En esta fase los estudiantes construyen la "linealidad" al ejercer las prácticas de modelación del movimiento uniforme. Se centra en la construcción de modelos (la recta, gráfica distancia – tiempo, la gráfica velocidad - tiempo y la ecuación de primer grado) del movimiento de un móvil con velocidad constante y argumentos a partir de coordinar los diferentes parámetros de los modelos con la de las características del fenómeno; en este caso, el movimiento uniforme de un móvil.

3. El movimiento uniforme disforme.

   Objetivo. En esta fase los estudiantes construyen lo "cuadrático" a través de la modelación del movimiento uniforme disforme. Se centra en la construcción de modelos (gráfica distancia – tiempo, la gráfica velocidad tiempo y la ecuación de primer grado) del movimiento de un móvil sin velocidad constante y de argumentos a partir de coordinar los diferentes parámetros de los modelos con la de las características del fenómeno, el movimiento uniforme disforme de un móvil.

4.5.5 Descripción de la secuencia

"Las matemáticas del movimiento"

Fase 1. La gráfica distancia – tiempo

Dos prácticas son centrales en esta fase, a partir del movimiento, construir versiones gráficas; y a partir de la gráfica, dar versiones del movimiento que se realizó.

- Se da una breve explicación sobre el sensor de movimiento.

Predicción. En esta parte de la secuencia se presenta el funcionamiento del sensor y los estudiantes preguntan acerca de ello. Las situaciones donde hay obstrucción de otros objetos o si el objeto que se desea sensar se encuentra fuera del alcance del sensor se discuten en esta parte de la secuencia.

- A partir del movimiento construir versiones gráficas.
  - ❖ "¿Quién quiere pasar a colocarse a una distancia de tres metros del sensor?" "¿Cómo será la gráfica que describa el sensor (distancia – tiempo)?"

Predicción. Aquí se presentan en el debate posiciones que confunden la gráfica distancia – tiempo con gráficas de la trayectoria del objeto en movimiento y, en general, de las dificultades enumeradas en la secuencia anterior. Los estudiantes construyen las rectas horizontales como modelo de un objeto estático. Una recta horizontal es más alta en tanto el objeto está más alejado del sensor. Este modelo es utilizado para determinar la posición de un objeto durante 10 segundos. Interpretan un punto de la gráfica como la posición en un tiempo.

- “Ahora, ¿quién pasa a colocarse dos segundos a un metro, dos segundos a dos metros y dos segundos a cuatro metros? ¿Qué gráfica describirá el sensor?”

Predicción. La situación se diferencia de la anterior en cuanto a que el objeto cambia de posición. Los modelos que se construyen son gráficas escalonadas interpretando a objetos con diferentes posiciones, el intervalo de tiempo y el de la distancia son constantes.

- A partir de la gráfica dar versiones del movimiento que se realizó.
    - Cierran los ojos y alguien pasa a caminar, considerando la gráfica que describió, se pregunta: “¿Pueden explicar como se movió su compañero?”

Predicción. Los estudiantes construyen versiones de los hechos a partir de la gráfica distancia – tiempo. Utilizan argumentos gráficos en el discurso; en este proceso discursivo construyen la gráfica distancia-tiempo como modelo de un objeto en movimiento. Se presentan argumentos como los siguientes: “Aquí esta a una distancia de tres metros, permanece dos segundos y luego se desplaza dos metros hacia atrás,. . . “

Fase 2. La linealidad

2.1 La gráfica distancia - tiempo

Construcción de la línea recta (gráfica distancia – tiempo) como modelo del movimiento de un móvil con velocidad constante.

- Argumentación a partir de coordinar la inclinación de la recta y la velocidad del móvil.
    - El profesor se coloca a medio metro del sensor y camina cinco metros con una velocidad constante, a una velocidad aproximada de 1.5 metros por segundo, el sensor despliega la gráfica distancia - tiempo.

> “¿Cómo debería moverse una persona para que la gráfica que se obtenga sea como la del profesor, pero más horizontal? Pónganse de acuerdo en su equipo y escriban las instrucciones que deberá llevar quién hayan elegido para que el sensor trace una recta más horizontal[3].”

Predicción. Los estudiantes construyen versiones sobre la forma de caminar, los argumentos que esgrimen, en algunos casos, son argumentos que articulan las variables tiempo y distancia, construyendo y movilizando la velocidad del móvil. En algunos casos la coordinación no es explicita y, al parecer, sólo movilizan una variable, por ejemplo, la variable distancia o la variable tiempo.

- ❖ Después que los equipos se ponen de acuerdo en las instrucciones para sus representantes se les pide que las expliquen.

Predicción. Los estudiantes y profesor entablan un debate entre las posiciones de los equipos. El discurso que se establece es de mayor profundidad en tanto se presentan argumentos estructurados previamente en el discurso al nivel de los equipos.

- ❖ ¿Cómo deben de moverse para que la gráfica que resulte sea una línea recta “pero más vertical"?

Predicción. Los estudiantes articulan la inclinación de la recta con la velocidad. Los argumentos presentas son de la forma siguiente: Si se camina más rápido la recta es más vertical, si se camina más lento la recta es más horizontal. Se reflexiona sobre que es la velocidad y se construyen

---

[3] En lo sucesivo usaremos el término “más horizontal” o “más vertical” en concordancia con el lenguaje coloquial de los actores en las secuencias. La expresión “la recta l_1 es más horizontal que la recta l_2” significa que el ángulo que forma la recta l_1 con el eje de las “*x*” es menor que el ángulo que forma la recta l_2 con el eje “*x*”. De forma similar se interpreta la expresión “la recta l_1 es más vertical que la recta l_2”. Esta expresión no es utilizada de forma caprichosa, se aplico un test en el Conalep Acapulco II acerca de las expresiones más utilizadas por los estudiantes para expresar esta forma comparativa entre dos rectas y, entre otras, esta resulto la expresión más utilizada. Como esta expresión utilizaremos expresiones como “una parábola con los brazos más abiertos”, “una recta más alta” o “la parábola se mueve hacia la derecha”.

versiones de ésta, por ejemplo, es la distancia recorrida en determinado tiempo. Este concepto lo han visto en secundaria, en preparatoria y en su curso de Física I en la carrera, sin embargo, no es movilizado como argumento.

- ❖ ¿Cómo debemos caminar para que la gráfica que describa el sensor deba ser una recta inclinada hacia la izquierda?

Predicción. Esta pregunta conducirá a definir con claridad el origen del sistema de coordenadas y a darle significado a los desplazamientos negativos. Los estudiantes tendrán dificultades para concebir la velocidad negativa.

- Argumentación a partir de coordinar la posición inicial del móvil y la "altura de la recta".

  - ❖ "¿Cómo deben caminar para que la recta que obtengamos sea como la de su profesor pero más arriba?"

Predicción. Los estudiantes construyen versiones sobre la forma de caminar, los argumentos que esgrimen, en algunos casos, son argumentos que articulan la posición inicial con la altura de la recta.

- ❖ ¿Cómo deben caminar para que la recta esté más abajo?

Predicción. Al variar la altura de la recta los estudiantes coordinarán la posición inicial del móvil con la altura de la recta.

- ❖ Hagan un resumen de sus conclusiones.

Los estudiantes harán un esquema que articula la velocidad y la posición inicial con los parámetros de la gráfica distancia – tiempo.

2.2 Gráfica velocidad - tiempo

- Construcción del modelo gráfica velocidad - tiempo y argumentos a partir de coordinar la distancia recorrida por el móvil y el "área bajo la curva de la gráfica velocidad - tiempo".

- ¿Calculen la velocidad con la que caminó su profesor?

Predicción. Los estudiantes tendrán dificultades al calcular la velocidad; por ejemplo, dividen la posición final del móvil entre el tiempo transcurrido, sin considerar que la posición inicial del móvil no es la del sensor. En otros casos no saben como hacer este cálculo.

- ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de la caminata de su profesor? (Se proyecta por medio de un acetato la gráfica distancia tiempo de la caminata del profesor).

Predicción. Para poder construir la gráfica velocidad tiempo es necesario que se tenga claro que el movimiento del caminante es con velocidad constante y que la gráfica de una constante es una recta horizontal. Otros argumentos serían de forma puntual; es decir, en cada punto la velocidad es, por ejemplo dos metros por segundo.

- ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de las caminatas que ustedes realizaron? (se proyecta por medio de acetatos las gráficas distancia - tiempo de las caminatas de los estudiantes).

Predicción. Al variar la velocidad de las caminatas los estudiantes articulan la velocidad del móvil con la altura de la recta velocidad – tiempo.

- Describan cómo se movió su compañero de acuerdo a la siguiente gráfica velocidad-tiempo (se presenta a través de un acetato una gráfica velocidad – tiempo).

Predicción. Los estudiantes se darán cuenta que les faltan más datos para poder reproducir el movimiento. Concluirán que la gráfica velocidad - tiempo de dos movimientos, con la misma velocidad, es la misma aún cuando no partan de la misma posición inicial.

2.3 Prediciendo con la gráfica velocidad- tiempo.

- “Teniendo presente la gráfica tiempo - velocidad, ¿Cuál es la distancia recorrida después de 5 segundos? ¿Después de 2 segundos?”

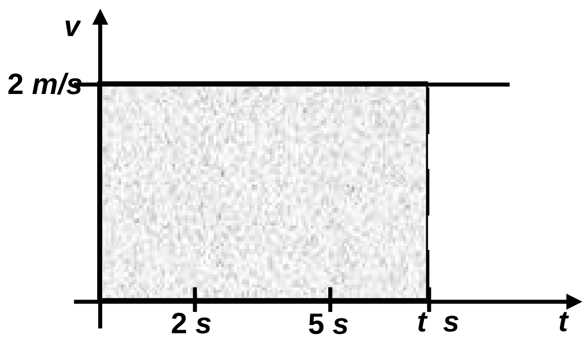
Predicción. Las formas de predicción que se desarrollan son por medio de cálculos; por ejemplo, 2 por 5 nos da 10 metros, porque si en un segundo se avanzan 2 metros en 5 se avanzan 10.

- ¿Cuál es la distancia recorrida después de *t* segundos?

Predicción. Los estudiantes generalizan el resultado anterior: se recorren 2 por *t*, porque se multiplica la velocidad por el tiempo que se camina.

- ¿Hay alguna relación entre la gráfica velocidad – tiempo y la distancia recorrida por el móvil?

Predicción. No es fácil que realicen la coordinación entre área bajo la curva de la gráfica velocidad – tiempo y la distancia recorrida.



***d* = (2 *m/s*) *t seg* =Área sombreada**

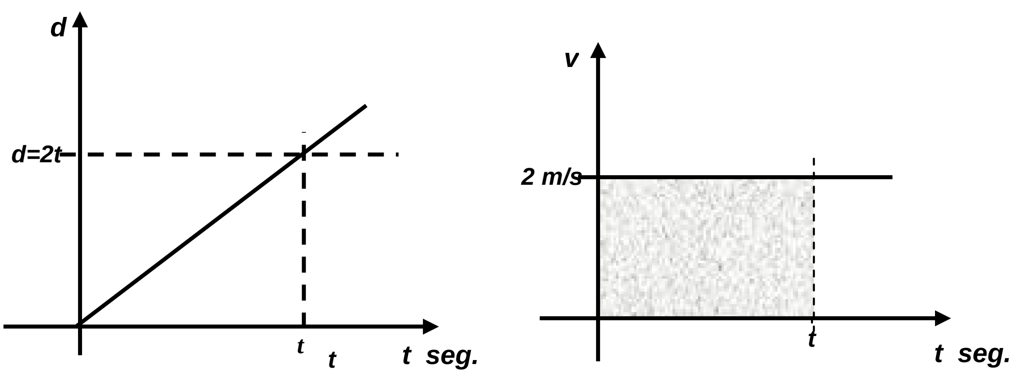


Figura 4.33. Relacionando el área bajo la gráfica velocidad – tiempo y la posición del móvil con movimiento uniforme

2.4 El modelo algebraico.

Construcción de la ecuación $x = vt + x_0$ como modelo algebraico del movimiento uniforme.

- Articulación del modelo gráfico con un modelo algebraico.
    - ❖ Haciendo uso de una calculadora graficadora, graficamos los datos obtenidos de la caminata.
    - ❖ Les indicamos a los estudiantes que: "le vamos a pegar a estos datos una recta que esté lo más cercana posible de los puntos. Para hacerlo, vamos editar la ecuación en esta ventana y luego la graficamos. Por ejemplo, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ y luego graficamos".

Predicción. Los estudiantes actuarán por ensayo y error y a través de la actividad de variar los parámetros *a* y *b* relacionarán la inclinación de la recta con *a* y la altura con *b*.

- ❖ "¿Cuál es la relación que hay entre la ecuación que han encontrado y el movimiento que están modelando?"

Predicción. Se centrará la atención en identificar el parámetro *a* con la velocidad y el parámetro *b* con la posición inicial; sin embargo, esta relación no es inmediata, es decir, actúan con diferentes modelos pero no relacionan un modelo con otro. Se trabaja verticalmente, pero hay dificultades para trabajar horizontalmente.

- ❖ Interpretación de los parámetros.

Predicción. Esta es una pregunta auxiliar que intenta contribuir a lograr lo anterior.

2.5 La articulación entre los modelos y el fenómeno.

- Elaboración de un esquema del movimiento con velocidad constante y de sus diferentes modelos.

❖ "¿Cuál es la relación que hay entre la ecuación que han encontrado, la gráfica distancia – tiempo, la gráfica velocidad – tiempo y el movimiento del profesor?"

Predicción. Los estudiantes elaboran un esquema que articula el movimiento de un móvil con velocidad constante con sus diferentes modelos. El esquema que presentan será un esquema como el siguiente.

	Parámetro	Parámetro	
Movimiento con velocidad constante			
Gráfica distancia - tiempo: la recta			
Gráfica velocidad – tiempo: recta paralela al eje del tiempo.			
Ecuación: $y = mx + b$			

Tabla 4.26. Esquema del movimiento uniforme con los modelos construidos

	Parámetro	Parámetro	Predicción
Movimiento con velocidad constante	Velocidad	Posición inicial	Distancia recorrida después de t segundos.
Gráfica distancia - tiempo: la recta	Inclinación de la recta	Altura de la recta	Coordenada en el eje de la distancia cuando en el eje del tiempo nos colocamos en t
Gráfica velocidad – tiempo: recta paralela al eje del tiempo.	Altura de la recta.		Área bajo la gráfica velocidad – tiempo hasta el tiempo t
Ecuación: $y = mx + b$	m	b	Valor de y cuando sustituimos en la ecuación x por t

Tabla 4.27. Esquema posible del movimiento uniforme con los modelos construidos

Fase 3. Lo cuadrático.

3.1 La gráfica distancia - tiempo

- Construcción de la parábola (gráfica distancia – tiempo) como modelo del movimiento de un móvil uniformemente acelerado.
    - ❖ ¿Cómo deben de moverse para que la gráfica que resulte sea una gráfica como esta  ?

Predicción. Los estudiantes caminan describiendo una trayectoria como la pedida; es decir, confunden la trayectoria de un móvil con la gráfica distancia – tiempo. Esto es así, aún cuando, previamente se ha tratado en la fase 1 y 2. Otra versión que aparece es ir y venir con velocidad constante. Como la gráfica que se describe no es, exactamente, un pico, esta podría ser una posible respuesta. Para debatir esta versión se pregunta sobre la forma que deben tener los brazos, ya que se puede concebir una curva de este tipo como “una pegazón” de un segmento de recta, una curva y otro segmento de recta. La aceleración, o como cambia la velocidad, no es un argumento que movilizan.

- Argumentación a partir de coordinar la posición inicial del móvil y la “altura de la parábola” y argumentación a partir de coordinar el desplazamiento horizontal y el inicio del movimiento.
    - ❖ ¿Cómo debemos caminar para que la gráfica sea una parábola desplazada hacia arriba?

Predicción. Los estudiantes coordinan la altura de la parábola con la posición inicial o con el punto mínimo o máximo de la parábola.

- ❖ ¿Cómo debemos de caminar para que la gráfica sea una parábola desplazada hacia la derecha?

Predicción. Los estudiantes coordinan el desplazamiento horizontal de la parábola con el tiempo inicial, es decir con el momento en que debemos de empezar a caminar. Se darán argumentos como el siguiente: Para que la gráfica se recorra más horizontalmente se debe esperar en el punto de partida un determinado tiempo.

- Argumentación a partir de coordinar la amplitud de la parábola y la aceleración del móvil.
    - ❖ ¿Cómo debemos de caminar para que la gráfica sea una parábola con los brazos más abiertos?

Predicción. El argumento de que la aceleración, o de que la velocidad esta cambiando, no es movilizado para validar versiones. Los argumentos que se movilizan en este caso son parecidos a los de la fase 2; es decir, sólo movilizan bien sea el tiempo ("lo hacen más chico o más grande"), la distancia, o bien, la velocidad; en este caso, no se presentan argumentos que articulen la velocidad con el tiempo.

Después de esta fase se discute sobre ¿qué es la aceleración?

Predicción. Es necesario movilizar como argumento, la aceleración, para poder continuar con la secuencia.

3.2 La gráfica velocidad – tiempo.

- Construcción del modelo gráfica velocidad - tiempo.
    - ❖ "¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de esta forma de moverse?"

Predicción. Para poder dar una gráfica velocidad - tiempo como una recta necesitarán saber que la velocidad cambia uniformemente y que la gráfica es una línea recta, o de otra forma, más difícil argumentos puntuales. Algunas versiones de este tipo de gráficas serán picos, pues no conciben velocidades negativas.

- ❖ ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de una parábola más abierta?

Predicción. Los estudiantes coordinan la inclinación de la recta de la gráfica velocidad – tiempo con la amplitud de la parábola distancia – tiempo y la aceleración del movimiento.

- "¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de una parábola más alta?"

Predicción. Los estudiantes tienen problemas para aceptar que las gráficas velocidad tiempo serán las mismas.

- "¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de una parábola desplazada más a la derecha?"

Predicción. Los estudiantes coordinan la altura de la recta de la gráfica velocidad – tiempo con el desplazamiento de la parábola distancia – tiempo con el tiempo inicial del movimiento.

3.3 Prediciendo con la gráfica velocidad- tiempo.

Argumentación a partir de coordinar la distancia recorrida y el área bajo la curva de la gráfica velocidad - tiempo.

- "Teniendo presente la gráfica de tiempo velocidad, ¿Cuál es la distancia recorrida después de 5 segundos? ¿Después de 2 segundos?"

Predicción. Es muy difícil que los estudiantes trasladen el procedimiento utilizado en la fase dos: el área bajo la curva de la gráfica velocidad – tiempo es la distancia recorrida.

- "¿Cuál es la distancia recorrida después de t segundos?"

Predicción. Los estudiantes generalizaran el procedimiento anterior.

- "¿Hay alguna relación entre la gráfica velocidad – tiempo y la distancia recorrida por el móvil?"

Predicción. Los estudiantes relacionaran el área bajo la curva de la gráfica velocidad – tiempo con la distancia recorrida.

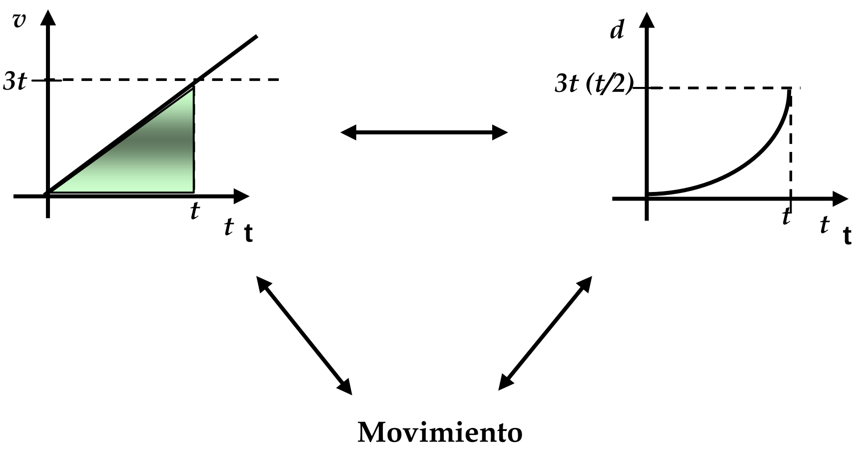


Figura 4.34. Relacionando el área bajo la gráfica velocidad – tiempo y la posición del móvil con movimiento uniforme disforme

3.4 El modelo algebraico.

- Articulación del modelo gráfico con un modelo algebraico.
    - ❖ Haciendo uso de una calculadora graficadora, graficamos los datos obtenidos de la caminata.
    - ❖ Les indicamos a los estudiantes que “le vamos a pegar a estos datos una parábola que este lo más cercana posible de los puntos. Para hacerlo, vamos editar la ecuación en esta ventana y luego la graficamos. Por ejemplo, $y = 3(x-2)^2 + 1$ y luego graficamos”.

Predicción. Los estudiantes actuarán por ensayo y error y, a través de la actividad de variar los parámetros *a*, *b* y *c*, relacionarán la amplitud de la parábola con *a,* el desplazamiento horizontal con *b* y la altura de la parábola con *c*.

- ❖ “¿Cuál es la relación que hay entre la ecuación que han encontrado y el movimiento que están modelando?”

Predicción. Centrarán la atención en identificar el parámetro *a* con la aceleración, el parámetro *b* con el tiempo donde alcanza su máximo o mínimo y c el valor máximo o mínimo de la parábola; sin embargo esta relación no es inmediata; es decir, actúan con diferentes modelos pero no relacionan un modelo con otro. Se trabaja verticalmente, pero hay dificultades para trabajar horizontalmente.

3.5 La articulación de los modelos con el fenómeno

- Elaboración de un esquema del movimiento uniformemente acelerado y sus diferentes modelos

Predicción. Los estudiantes elaboran un esquema que articula el movimiento de un móvil con velocidad constante y sus diferentes modelos. El esquema que presentarán será un esquema como el siguiente.

	Parámetros	Parámetros	Parámetros	
Movimiento uniformemente acelerado				
Gráfica distancia–tiempo: la parábola				
Gráfica Velocidad-tiempo: la recta				
Ecuación: $y = a(x-b)^2 + c$				

Tabla 4.28. Esquema del movimiento uniforme disforme con los modelos construidos

	Parámetros	Parámetros	Parámetros	Predicción
Movimiento uniformemente acelerado	Aceleración	Posición inicial del móvil	Tiempo inicial	Distancia recorrida después de *t* segundos.
Gráfica distancia–tiempo: la parábola	Amplitud de los brazos	Desplazamiento vertical	Desplazamiento horizontal	Coordenada en el eje de la distancia cuando en el eje del tiempo nos colocamos en *t*
Gráfica velocidad-tiempo: la recta	Inclinación de la recta		Altura de la recta	Área bajo la gráfica velocidad – tiempo hasta el tiempo *t*
Ecuación: $y = a(x-b)^2 + c$	a	c	b	Valor de y cuando sustituimos en la ecuación x por t

Tabla 4.29 Esquema posible del movimiento uniforme disforme con los modelos construidos

4.5.6 Puntos de discusión

4.5.6.1 Los participantes utilizan las gráficas distancia- tiempo como modelo del movimiento en una dirección

- Tienen dificultades en las escalas de los ejes coordenados. La escala para las unidades del eje vertical es diferente de la escala de las unidades del eje horizontal.
- Confunden la gráfica de la trayectoria del móvil con la gráfica distancia.- tiempo. Una línea recta con pendiente no cero, en algunos casos es interpretada como un objeto moviéndose en la dirección de algún ángulo.
- Los participantes no asocian una recta horizontal con un objeto estacionario.

- No interpretan que cuando la posición de la gráfica retorna al eje horizontal, el objeto retorna al origen físico.
- Toman el origen de la gráfica distancia – tiempo como el origen físico.
- Causa confusión la elección del sentido positivo del movimiento.
- Tienen dificultades en interpretar una gráfica con puntos debajo del eje horizontal (distancias negativas).

4.5.6.2 Dificultades al relacionar gráficas velocidad-tiempo con gráficas distancia-tiempo

- Los participantes trasladan la experiencia que tienen con gráficas distancia – tiempo; por ejemplo, que una gráfica velocidad-tiempo horizontal es el modelo de un móvil con velocidad cero, o estático.
- Los actores confunden el asignarle una misma gráfica velocidad-tiempo a dos tipos de movimiento (variando la condición inicial). Las gráficas de velocidad tiempo no dependen del punto inicial.
- Tienen dificultades en interpretar velocidades negativas.

4.5.6.3 La interpretación de la aceleración en el movimiento de un móvil

- Confunden, algunos de los participantes, velocidad con aceleración
- Algunos actores piensan que una aceleración positiva significa "velocidad más rápida" y que una aceleración negativa significa una "velocidad más lenta".
- Es difícil que la aceleración sea observada a partir de que un objeto cambia de velocidad entre dos instantes de tiempo.
- Confunden velocidad con aceleración. Piensan que si el objeto esta moviéndose (aún con velocidad constante) entonces se esta acelerando.

4.5.7 Algunos episodios de la puesta en escena de la secuencia

Los criterios para escoger los episodios de la secuencia son los anteriormente descritos.

Episodio 4.2.1 ***"La gráfica empieza cuando se apachurra el botón"***

Es necesario llegar a un consenso sobre cómo fue el movimiento; es más, en ocasiones se tiene que repetir el movimiento, las percepciones son diferentes. A continuación se presenta el debate entre dos posiciones, Carlos dice que el sensor inicia cuando se da el primer paso, Derma le rebate y le dice que el sensor empieza a trabajar cuando se aprieta el botón, no cuando se inicia el movimiento. El episodio es parte de la interacción del grupo en la fase 1 de la secuencia de las matemáticas del movimiento.

Carlos: Cuando empieza a caminar, esta aquí (*señala la gráfica*), luego tiene una velocidad y después,…

Derma: Pero la gráfica del sensor no empieza cuando empieza a caminar, empieza cuando se apachurra el botón.

Liliana: Sí, sí, el sensor agarra a… (*inaudible*) ya caminando, con velocidad, no empieza cuando da el primer paso.

Carlos: Pero está parado y luego toma una velocidad, eso, ni modo que no lo tomes en cuenta, Derma.

Luis: Eso que dice Carlos no lo toma en cuenta el sensor.

Derma: No sé, pero ese aparato empieza cuando se prende, si no esta prendido ¿cómo empieza a graficar?

Carlos: Sí, el aparato empieza cuando se prende, pero el caminante empieza cuando da el primer paso.

Miguel: Ya Carlos, el maestro está preguntando ¿cómo será la grafica que aparecerá en la pared? A ver, si no ¿por qué no empezamos antes? cuando esta parado.

Hay voces de aprobación a lo que dice Miguel.

Episodio 4.2.2 ***"El círculo no se puede hacer porque no se puede regresar el tiempo"***

El siguiente es un extracto de la interacción del equipo tres en la fase 1 de la secuencia de las matemáticas del movimiento.

Maestro: ¿Cómo se deben de mover para que la gráfica despliegue el sensor sea una gráfica igual a la que está allí (*señala el pizarrón donde se tiene graficada una gráfica de una circunferencia*), una circunferencia?

Miguel: Más rápido

Arturo: Se mueve el tiempo.

Eder: Tiene que ser mayor el tiempo.

Carlos: Debe colocarse a una distancia que sea igual al área del círculo.

Se incorpora el maestro al equipo 3.

Maestro: Dice su compañero que debe colocarse a una distancia igual al área del circulo.

Arturo: A un metro ¿nó?

Eder: ¿Es un metro el área del circulo?, nó, es un metro el radio del circulo, un metro está a un segundo

Maestro: ¿Están de acuerdo con esta opinión?

El maestro se aleja del equipo 3.

Eder: Por qué para que dé así tiene que haber mayor distancia, menor tiempo

Arturo: O en el círculo para que sea la mitad ¿cuanto sería?

Hablan todos a la vez.

Eder: Se tiene que regresar cuando llega hasta un metro.

Miguel: ¿Por qué? ¿Cómo, como?

Eder: Pues si camina hasta allá se hace esta mitad de círculo y luego se tiene que regresar para hacer la otra mitad de círculo.

Carlos: Mejor, tienen que ser dos personas moviéndose, una que haga una mitad y otra la otra mitad.

Discusión entre los equipos.

Maestro: ¿Qué opina el equipo tres? ¿Cómo se tiene que caminar para que la gráfica sea una circunferencia?

Eder: Se tiene que avanzar hasta allá y luego se regresa de la misma forma.

Carlos: No, sólo que se tengan dos personas moviéndose. Una parte del círculo lo hace uno y la otra la hace otro.

Hablan todos a la vez.

Maestro: Un momento, un momento, uno a la vez, primero ¿equipo 2 qué opina?

Fernando: El tiempo no se puede regresar, no se puede hacer esa gráfica.

Rosalinda: El círculo no se puede hacer porque no se puede regresar el tiempo.

Indira: No se puede (*se dirige a Carlos*) porque el sensor sólo toma a la persona que está más cerca, no toma a los dos al mismo tiempo.

Derma: Si se mueve uno como dice Eder la gráfica quedaría así (*mientras habla dibuja en el pizarrón la figura* ), se va y después viene y luego se va y luego viene; no se regresa la gráfica, es como dice Fernando, no se regresa el tiempo.

Eder: Si tienen razón.

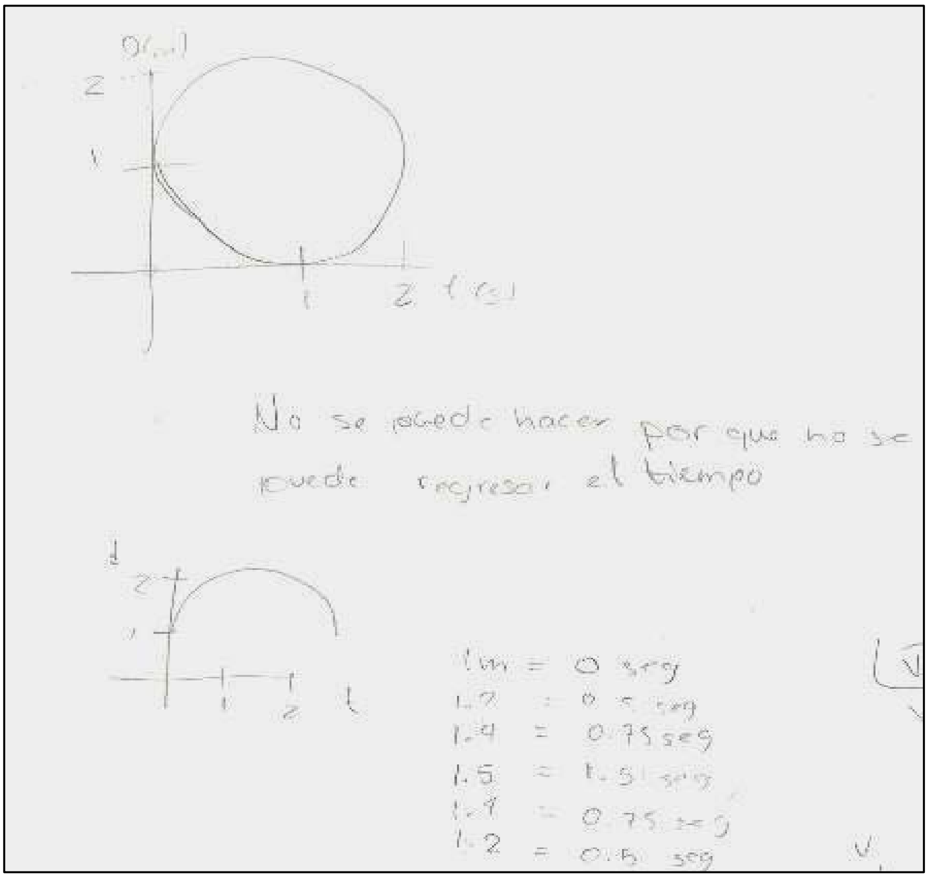


Figura 4.35 No se puede hacer porqué no se puede regresar el tiempo

Los episodios 4.2.1 y 4.2.2 se presentan como una muestra del discurso en torno a las gráficas distancia-tiempo que despliega el sensor de movimiento. Las prácticas ejercidas son dos, a partir de un movimiento construir su gráfica distancia-tiempo (4.2.1) y a partir de la gráfica dar versiones del movimiento que se realizó (4.2.2).

Episodio 4.2.3 ***La articulación entre gráfica velocidad-tiempo, gráfica distancia-tiempo y movimiento***

En este episodio se muestra cómo los participantes en la secuencia realizan articulaciones entre las gráficas distancia – tiempo, velocidad – tiempo, fórmulas y movimiento. Los equipos elaboran los siguientes esquemas que relacionan los parámetros de los diferentes modelos y las características del movimiento uniforme.

Eq. 1 02/OCT/02

	Parámetro	Parámetro
Caminata	Velocidad	Pto. inicial
Gráfica de D. y T	Inclinación	Altura
Ecuación $y=mx+b$	m (pend.)	b
Gráfica V-t	Altura Paralela al eje x	No hay cambio (NO AFECTA)

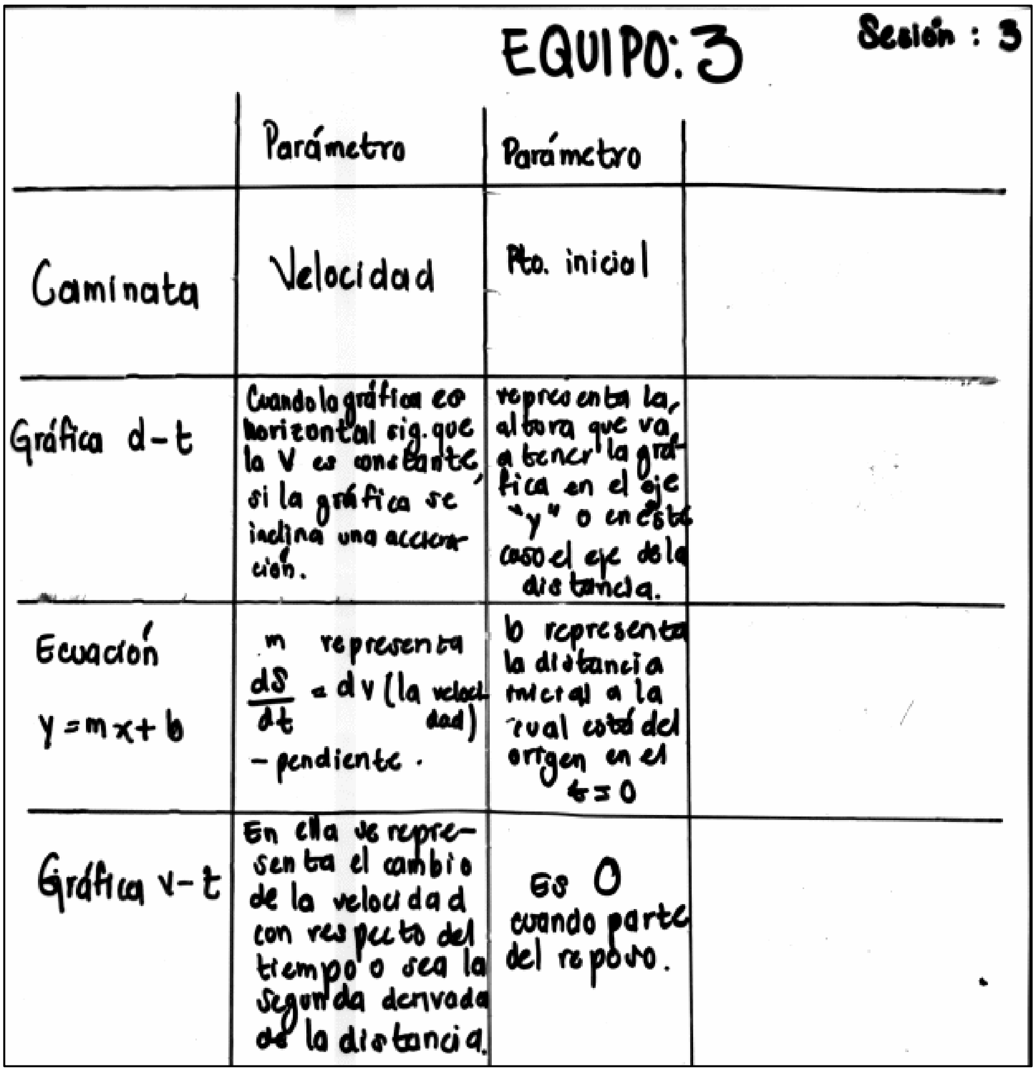
V=(constante)

Figura 4.36 Esquema de los modelos lineales y el movimiento uniforme que propone el equipo 1

Equipo 2. 2/oct/02

	Parametro	Parametro
Caminata	Velocidad	P. inicial
Gráfica d-t recta	Inclinación	Altura
Ecuación $y=mx+b$	m=Inclinac. → velocid. x=tiempo b=P.inicial	b (punto inicial)
Gráfica v-t	Altura	— Nada

Figura 4.37 Esquema de los modelos lineales y el movimiento uniforme que propone el equipo 2



EQUIPO:3 Sesión : 3

	Parámetro	Parámetro
Caminata	Velocidad	Pto. inicial
Gráfica d-t	Cuando la gráfica es horizontal sig. que la V es constante, si la gráfica se inclina una aceleración.	representa la altura que va a tener la gráfica en el eje "y" o en este caso el eje de la distancia.
Ecuación $y=mx+b$	m representa $\frac{dS}{dt}$ = dv (la velocidad) - pendiente.	b representa la distancia inicial a la cual está del origen en el t=0
Gráfica v-t	En ella se representa el cambio de la velocidad con respecto del tiempo o sea la segunda derivada de la distancia.	es 0 cuando parte del reposo.

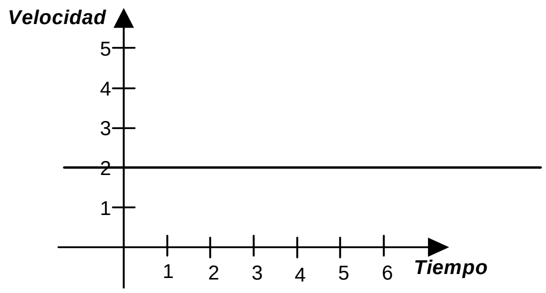
Figura 4.38 Esquema de los modelos lineales y el movimiento uniforme que propone el equipo 3

Los diferentes equipos llegan a consensos en cuanto al esquema. La forma de cómo se llega a acuerdos es importante, aquí, resumir las posiciones y presentarlas para el debate es una práctica del profesor en esta dirección.

Episodio 4.2.4 ***La distancia recorrida como el área bajo la gráfica velocidad - tiempo, el movimiento uniforme***

En este episodio se muestran diferentes extractos de la interacción de los equipos al enfrentar la situación planteada en la figura 4.39.

1. De acuerdo a la gráfica que se da a continuación ¿Qué distancia habrá recorrido su compañero del segundo dos al segundo cinco?



2. ¿Qué distancia habrá recorrido del segundo tres al segundo seis?
   ¿Del segundo cuatro al segundo seis?
   ¿Qué distancia habrá recorrido del segundo cero al segundo ***t***?

Figura 4.39 La situación planteada es predecir la distancia recorrida a partir de la gráfica velocidad – tiempo

Los argumentos que dio el equipo 1 (Indira) al grupo muestran cómo movilizan los diferentes modelos. En su exposición manejó tres tipos de argumentos, un argumento gráfico; otro basado en la velocidad, es decir, la velocidad por el tiempo me da la distancia; y otro basado en la ecuación de la recta distancia - tiempo, le dio un valor arbitrario a *b* y al restar las posiciones se cancela.

Luis: No es posible encontrar la distancia recorrida con esta gráfica (*se refiere a la gráfica velocidad tiempo*). Se necesita saber dónde empieza para poder encontrar la función (*del movimiento*) y luego dar la distancia recorrida.

Maestro: ¿Qué opinan?, ¿el equipo 1 quiere pasar a exponer lo que han hecho?

Indira: Sí, yo paso. La velocidad es 2 metros por segundo y el tiempo de dos a cinco, son tres. Como la velocidad es distancia sobre tiempo, paso para acá el tiempo, la distancia es velocidad por tiempo, o sea, tres por dos nos da seis metros.

Luis: Pero necesitas la posición inicial.

Indira: Eso no importa (*escribe en el pizarrón mientras habla*), mira, la fórmula de la distancia es $x = 2t + b$ porque la velocidad es 2 y ponemos b porque no sabemos la posición inicial. Si tenemos dos segundos entonces la posición es $x = 4 + b$; si tenemos cinco segundos es $x = 10 + b$ y la distancia recorrida es $10 + b - 4 + b = 6$ (Indira *no escribe* $10 + b - 4 - b = 6$ *que debería ser lo correcto*), nos da 6 metros, ves se elimina *b*.

Luis: ¡Ah!, ya entendí, no necesitamos la posición inicial para saber la distancia recorrida, pero sí la necesitamos para saber la posición, aja, es que es diferente la distancia recorrida que la posición.

Indira: Pues sí, mira, si tienes dos rectas (*dibuja en el pizarrón dos parábolas como las de la figura 4.40*) la distancia que recorre éste de aquí a aquí (*señala dos puntos que hemos llamado* P_1 *y* P_2*, de una recta*) es la misma que la que recorre éste de aquí a aquí (*señala dos puntos,* P_3 *y* P_4 *de la otra recta*), no importa la altura.

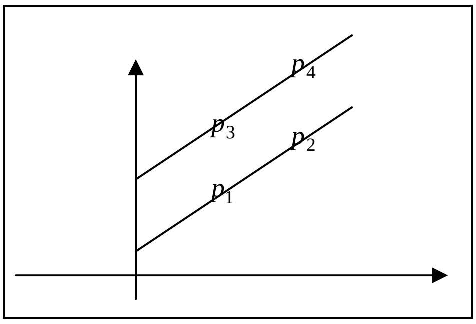


Figura 4.40 Dibujo de Indira en el pizarrón, no le pone etiquetas a los ejes, sin embargo se sobrentiende que es una gráfica distancia – tiempo, los nombres de los puntos son agregados nuestros

Indira: Espérate, espérate, también algo que me dijo el maestro, la velocidad es constante es, metros por segundo, la distancia es 2x3 (*Indira ocupa* x *para expresar multiplicación*), fíjate en este rectángulo, la altura es 2, la velocidad; y la base es tres, el tiempo, o sea, el área del rectángulo es la distancia recorrida, ¿ves?

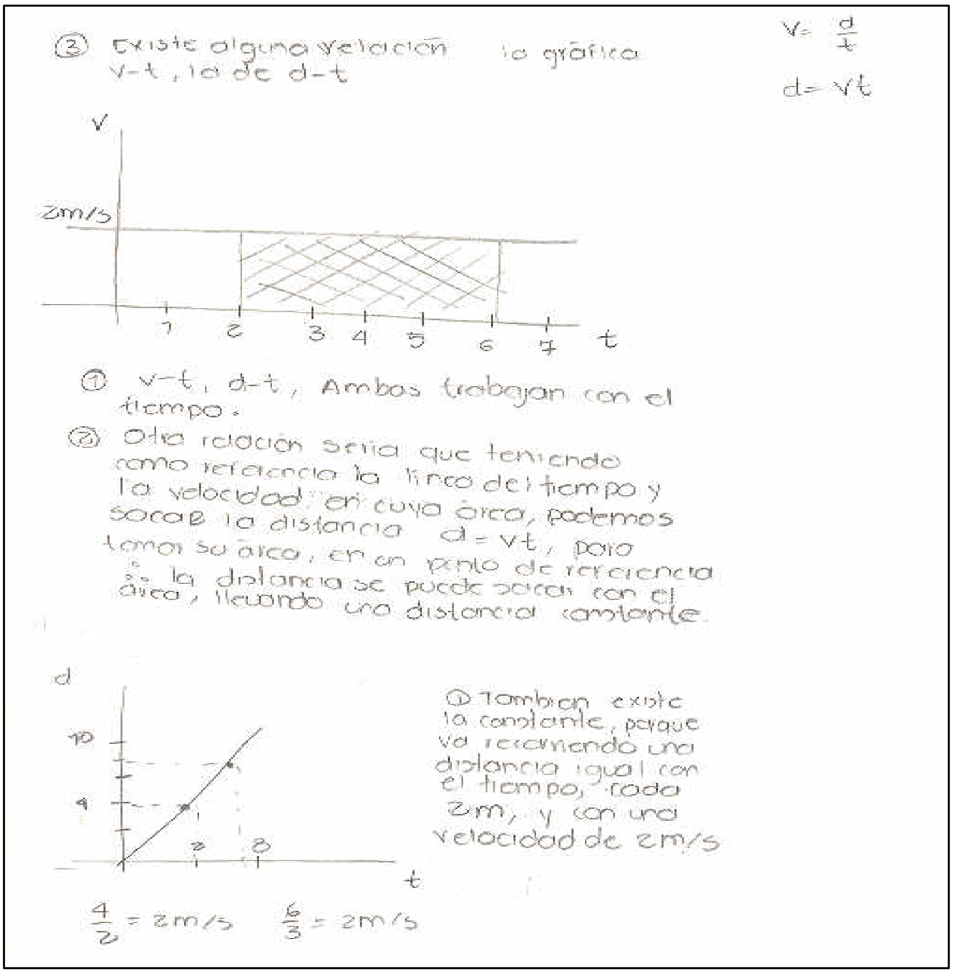


Figura 4.41 Argumentación del equipo 1 para explicar la relación entre las gráficas distancia - tiempo y velocidad – tiempo

La relación entre el área bajo la gráfica velocidad tiempo y la distancia recorrida no surgió como argumento del equipo 1, fue sugerida por el maestro (*¿no ves alguna relación entre el área y la distancia?*), al exponerla, Indira utiliza argumentos propios. El estudiante retoma la posición y construye argumentos para sostenerla.

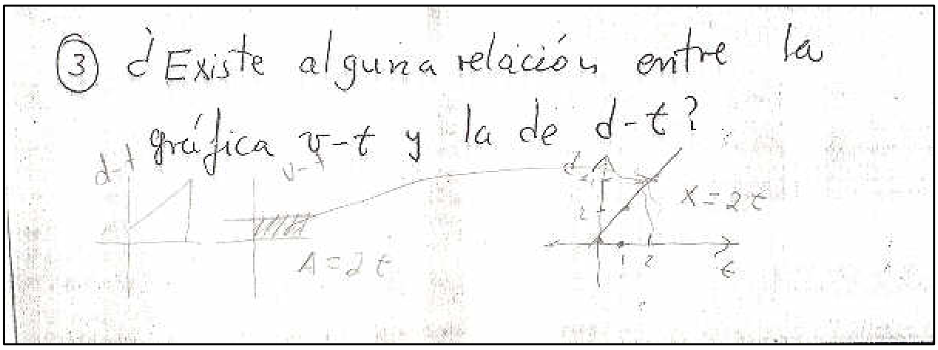


Figura 4.42 Esquema que utiliza Carlos para plantear la relación entre el área bajo la gráfica velocidad - tiempo y la distancia recorrida

Carlos, del equipo 3 da otra argumentación para relacionar el área del rectángulo con la distancia, "La distancia que recorre con un tiempo, ponle *x*; nó, ponle *t*, es 2*t*; o sea, $x = 2t$ que es la gráfica distancia – tiempo. Sin embargo, en el mismo equipo 3, Eder sostiene que "la distancia recorrida del segundo cero al segundo *t* es infinita, no se puede calcular". El equipo 3 no logra llegar a un acuerdo y no expone ninguna posición.

Una estrategia para responder la petición de predecir la distancia recorrida por el móvil a partir del modelo gráfico velocidad – tiempo de un movimiento uniforme es la planteada por Rosalinda, "tenemos la fórmula de velocidad; después, despejé distancia; multipliqué velocidad y tiempo y, de ahí, resté".

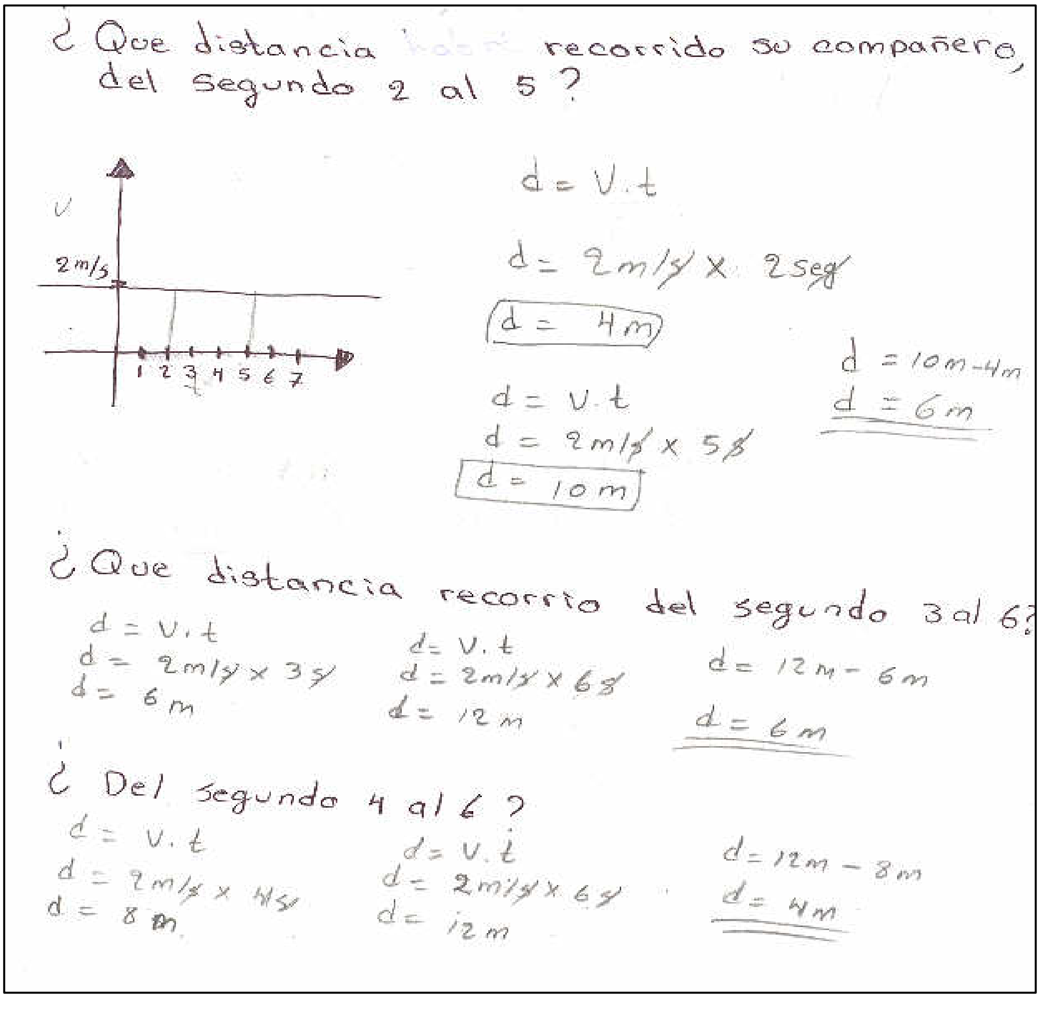
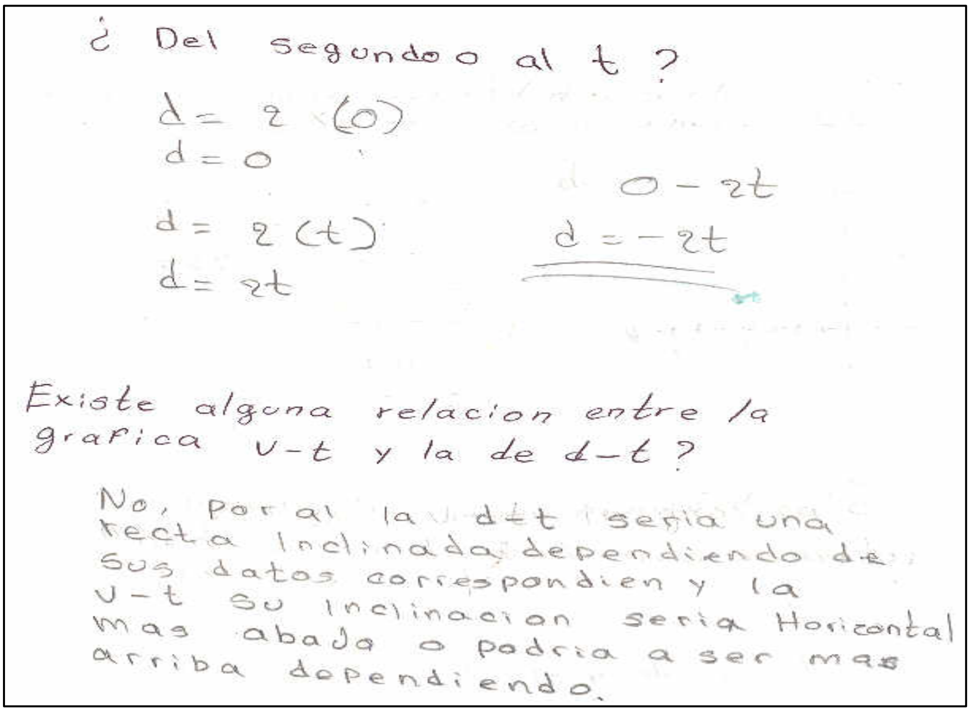


Figura 4.43 Estrategia de Rosalinda para dar la distancia que recorre el móvil a partir de la gráfica velocidad – tiempo.



¿ Del segundo o al t ?

$d = 2(0)$

$d = 0$

$d = 2(t)$

$d = 2t$

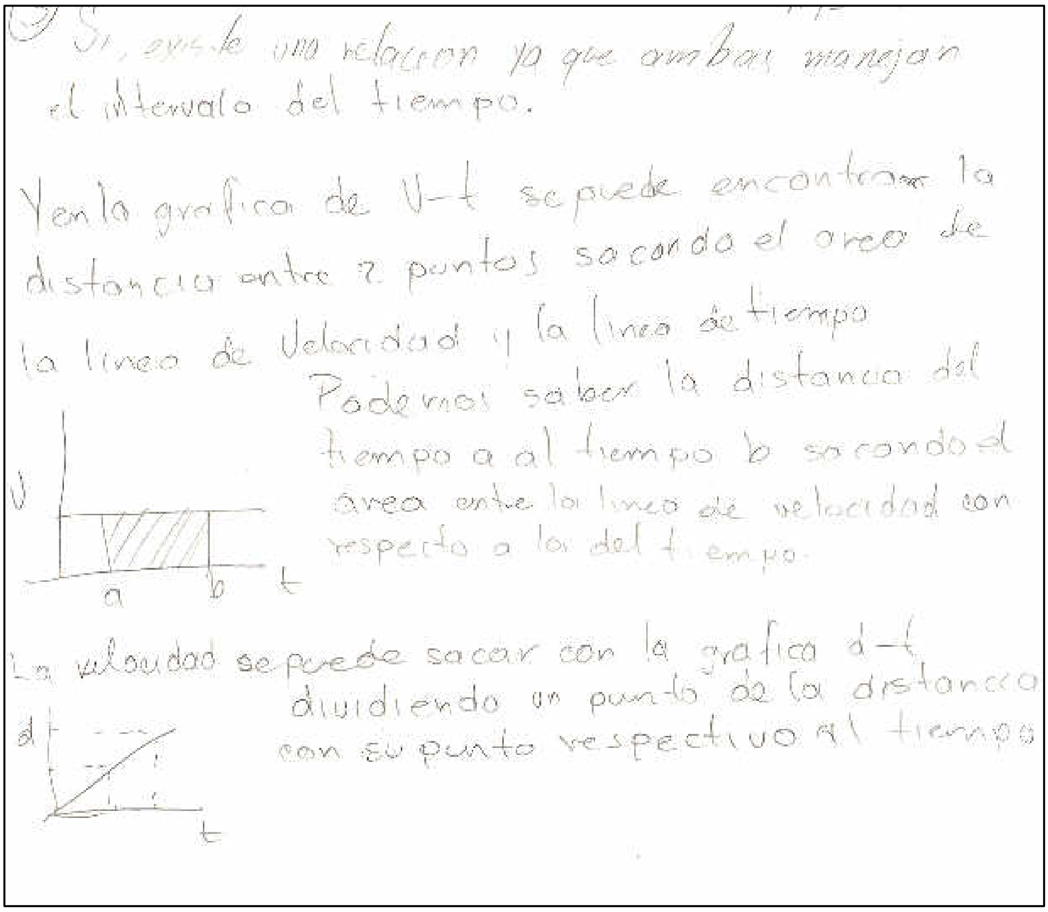
$0 - 2t$

$d = -2t$

Existe alguna relacion entre la grafica v-t y la de d-t ?

No, por al la d±t seria una recta Inclinada dependiendo de sus datos correspondien y la v-t su inclinacion seria Horizontal mas abajo o podria a ser mas arriba dependiendo.

Figura 4.44 Posición del equipo 2 con respecto a la relación entre las gráficas distancia - tiempo y velocidad



Si, existe una relacion ya que ambas manejan el intervalo del tiempo.

Y en la grafica de V-t se puede encontrar la distancia entre 2 puntos sacando el area de la linea de Velocidad y la linea de tiempo

Podemos saber la distancia del tiempo a al tiempo b sacando el area entre la linea de velocidad con respecto a la del tiempo.

La velocidad se puede sacar con la grafica d-t dividiendo un punto de la distancia con su punto respectivo al tiempo

Figura 4.45 Posición del equipo 2 con respecto a la relación entre las gráficas distancia - tiempo y velocidad

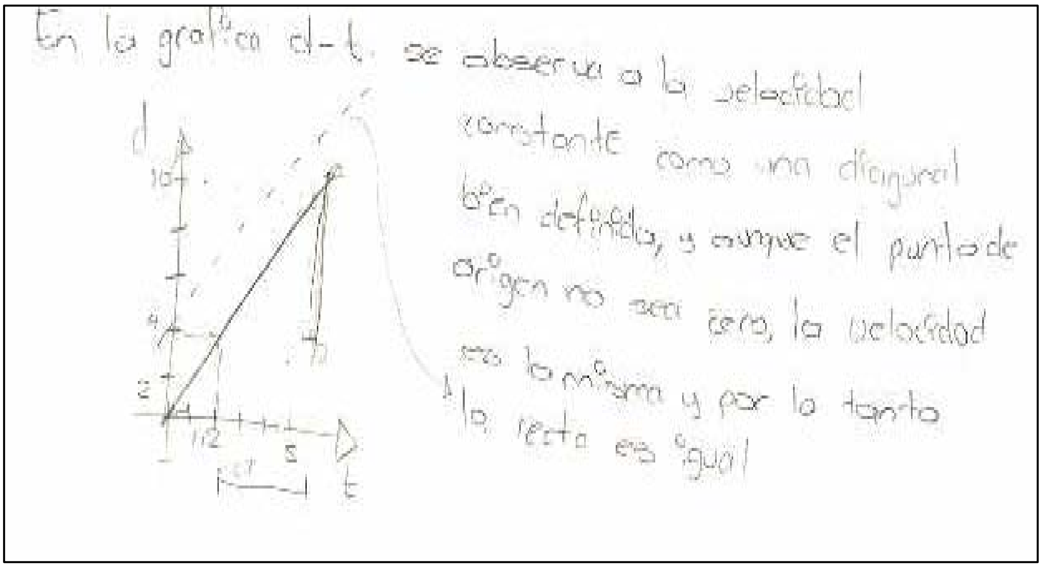


Figura 4.46 Complemento de la argumentación del equipo 2 con respecto a la relación entre las gráficas distancia - tiempo y velocidad

Los episodios 4.2.5 al 4.2.12 se refieren a la secuencia *"Las matemáticas del movimiento: movimiento uniforme disforme"* desarrolladas en la sexta y séptima sesión.

Episodio 4.2.5 ***¿Cómo deben caminar para que el sensor despliegue como gráfica una parábola?***

Aquí se presenta una parte de la interacción del grupo en torno a la pregunta ¿Cómo deben moverse para que la gráfica que resulte sea una gráfica como esta ?

En este episodio marcamos tres partes fases del discurso, una centrado en la trayectoria, otra en una visión particular de la curva que llamamos recta - curva – recta y en el movimiento uniformemente acelerado.

Guadalupe: Me tengo que mover así (*hace un movimiento con la mano*). No sé como explicarme.

Maestro: Pasa, por favor.

Guadalupe pasa y se para frente al sensor y describe un movimiento como el de la figura 4.47.

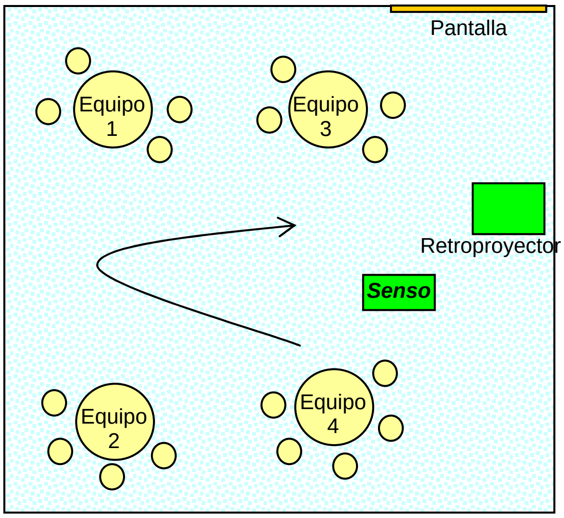


Figura 4.47 trayectoria del movimiento que efectúa Guadalupe

Maestro: ¿Qué opinan?

Diferentes voces hablan ala vez.

Maestro: Uno por uno, Yury.

Yuridia: Cuando va por aquí (*señala un lugar del salón*) ya el sensor no la toma porque se sale de foco, está tomando la pared.

Voces de aprobación.

Glorient: Lupe, no nos pusimos de acuerdo, eso está mal, si tú caminas así el sensor no te va a detectar porque no estas enfrente de él.

Maestro: La trayectoria del móvil es diferente a la gráfica de distancia-tiempo. A ver ya tienen la respuesta ustedes equipo 3

...

El equipo 4 trata de ver la parábola como una "pegazón" entre un segmento de recta, una curva y otro segmento.

Maestro: A ver equipo 4, no ha participado.

Pasa Luisa frente del sensor.

Luisa: Caminar, ni más rápido, ni más lento; o sea, normal y detenerse; y volver con la misma velocidad.

Rosaura: Le faltó a Luisa, se debe caminar con velocidad constante; después, bajar la velocidad voltear; y después, aumentar la velocidad y mantener la velocidad.

Yuridia: Cuando caminamos hacia allá tenemos una recta, entonces para hacer la curva nos vamos parando y volteamos y luego otra vez tomamos la misma velocidad del inicio.

Indira: Ellas ven la parábola como una "pegazón" de una recta, una curva y luego una recta.

Luis: Es que ellas ven que estas partes son rectas y nó, porque desde el inicio va bajando la velocidad, la velocidad no es constante.

....

Otro momento del discurso, al final de la sesión se plantea otra propuesta.

Eder: Para que el sensor grafique una parábola debemos de movernos primero rápido y después ir disminuyendo la velocidad hasta llegar a cero y después regresar aumentando la velocidad.

Luis: Es al revés caminar lento y después aumentar la velocidad, pero aumentar la velocidad por cada unidad de tiempo.

Varias voces: No.

Glorient: Está bien lo que dice Eder.

Maestro: ¿Quién quiere pasar?

Eder: Yo.

Eder se pone al frente del sensor y camina. Después analizan la gráfica que despliega el sensor.

Rosalinda: Ahí empezó rápido y después desacelero.

Rosaura: Si le hubiera hecho como él dijo, sí hubiera salido.

Glorient: Dijo una cosa e hizo otra.

Maestro: Hacen una tabla para poder tener esta forma.

...

Fernando: Debe iniciar con una velocidad y disminuirla después.

Maestro: ¿Equipo 3?

Miguel: Lo mismo

Luisa: Nosotros decimos que la velocidad debe desacelerarse y luego acelerarse.

Episodio 4.2.6 ***"¿Dónde empieza la gráfica?"***

El equipo 2 analiza la gráfica velocidad–tiempo de un movimiento uniformemente acelerado. Ésta es parte de la trascripción de la sesión 6.

El equipo discute dónde debe empezar la gráfica velocidad–tiempo.

Viridiana: Tenemos la parábola, pero de distancia - tiempo.

Rosalinda: Pidió velocidad-tiempo, ¿verdad?

...

Viridiana: Aquí la velocidad empieza en el eje de las "*y*'s".

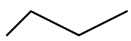
Rosalinda: Lo que estamos observando es una velocidad acelerada.

Viridiana: Entonces siempre inicia con una velocidad acelerada.

Luis: Entonces empieza aquí con una velocidad (*señala un punto en el eje y de la gráfica*), pero tampoco podemos iniciar aquí, porque empieza a caminar Luisa desde que está parada.

Fernando: O sea empezamos de acá (*señala el origen de la gráfica*) para que en este lado cero, se encuentre la velocidad.

Rosalinda: ¡Aja!

Luis: Empieza de aquí luego crece la velocidad (*hace un trazo hacia arriba*) luego baja hasta que llega hasta allá (*señala hasta donde llego Luisa y hace un trazo hacia abajo en la gráfica*), luego vuelve acelerarse (*dibuja la figura* ).

...

Fernando: Pero es que ¿de donde empieza la gráfica? (*se refiere a la gráfica distancia – tiempo*), no empieza desde que esta parada.

Viridiana: Es como decía Derma, la gráfica empieza desde que le apachurras el botón.

Luis: O sea que empezamos aquí (*señala un punto en el eje y, arriba del origen*). Empezamos cuando Luisa ya se aceleró (*risas en el fondo*) y ya tiene una velocidad grande.

Fernando: Esto no lo tomo en cuenta (*señala un segmento de la gráfica que dibujo*), lo que estamos haciendo es dónde está iniciando la velocidad mayor, es lo único; entonces en una velocidad mayor, aquí, va a tardar más,... Si, aquí tardo, no sé, dos segundos en dar un paso, entonces aquí va a tardar unos 6 segundos; o sea, va a seguir dando el mismo paso pero en 6 segundos, el tiempo va ser mayor.

Episodio 4.2.7 ***"Aquí va para allá y aquí va para acá"***

Continúa la interacción en el equipo 2.

Luis: Está bien nuestra gráfica.

Maestro: Nada más una pregunta, ¿aquí tiene la misma velocidad que aquí? (*señala el punto* P_1 *y* P_2 *en la gráfica de la figura 4.48)*

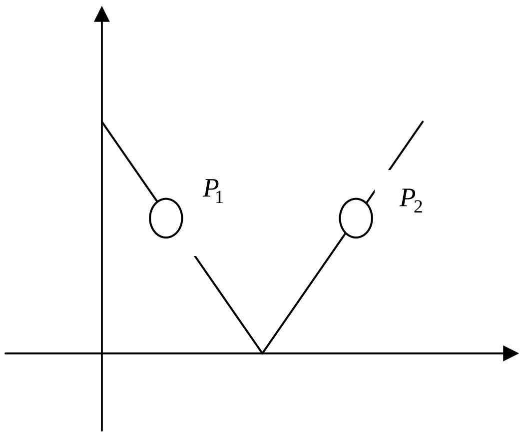


Figura 4.48 Gráfica velocidad – tiempo que propone el equipo 2 para modelar el movimiento uniformemente acelerado

Fernando: Sí, es la misma velocidad.

Luis: Sí, está a la misma altura.

Rosalinda: No, tiene diferente velocidad, aquí va para allá y aquí va para acá.

Luis: Pero son los mismos metros por segundo.

Viridiana: Está bien, es la misma.

Rosalinda: Es diferente, pero no sé cómo ponerla.

Episodio 4.2.8 ***"El signo nos ayuda para decir para dónde va"***

El episodio siguiente es parte de la trascripción que se realizó de la discusión de todo el grupo sobre el mismo punto, la gráfica velocidad–tiempo del movimiento uniformemente acelerado.

Maestro: Vamos a exponer lo que discutimos en cada uno de los equipos. ¿El equipo 4 quiere pasar a exponer sus resultados?

Derma: Es así, va caminando normalmente, luego baja velocidad, se da vuelta y regresa, termina con una velocidad normal (figura 4.49).

Fernando: Derma está poniendo que va con velocidad constante, luego nó y luego sí. Eso ya vimos que no es así.

Indira: Está mal porque ya dijimos que la parábola no es recta luego curva y luego recta.

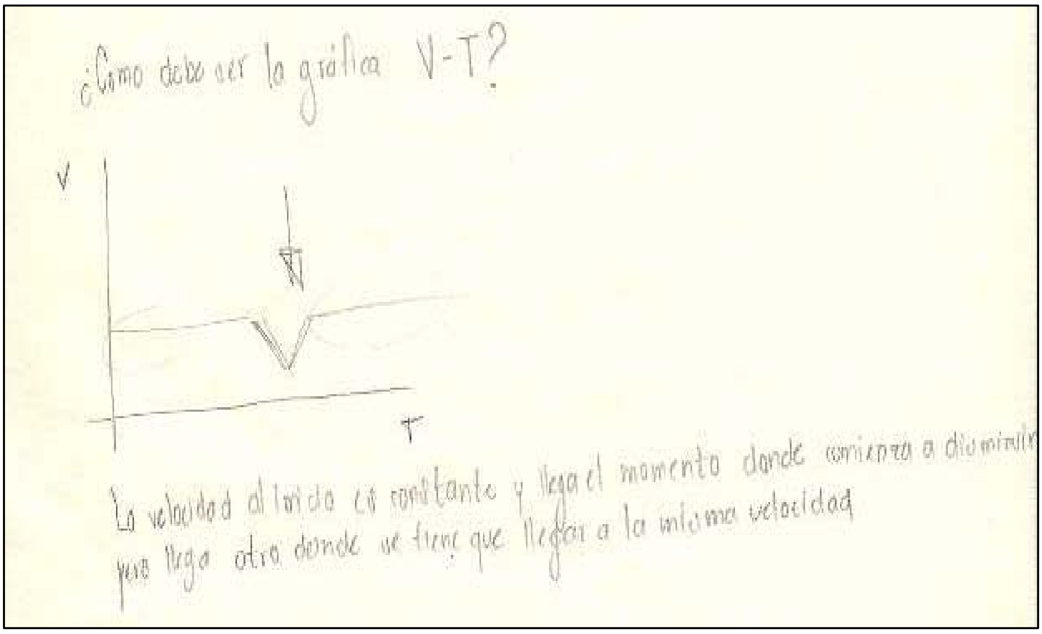


Figura 4.49 Gráfica velocidad – tiempo que propone el equipo 4 para modelar el movimiento uniformemente acelerado. "La velocidad es constante y llega el momento donde empieza a disminuir pero llega otro donde se tiene que llegar ala misma velocidad"

Carlos: Está mal, yo paso

Maestro: Pase el equipo 2.

Luis: Vas Viry.

Viridiana: Bueno.

Pasa Viridiana con los acetatos al frente a exponer sus resultados.

Viridiana: La gráfica velocidad - tiempo será,... empieza aquí (*explica sobre su acetato la gráfica de la figura 4.50*). Empieza ya acelerada, luego va bajando la velocidad (*sigue con el dedo la gráfica*) y llega a cero (*toca el eje x*) y luego empieza a acelerarse, va aumentando su velocidad.

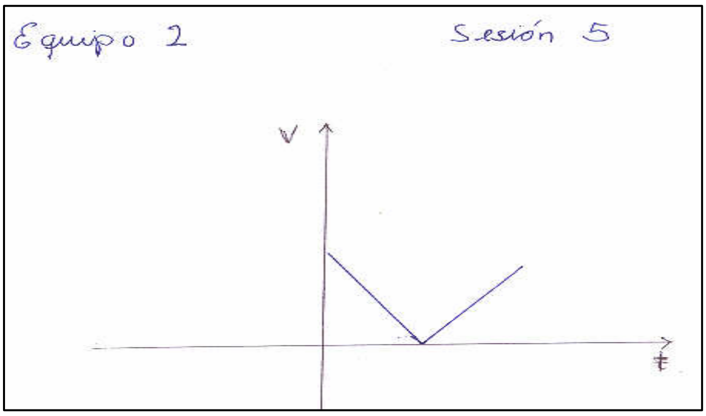


Figura 4.50 Argumentación de Viridiana: "Empieza ya acelerada, luego va bajando la velocidad y llega a cero y luego empieza a acelerarse, va aumentando su velocidad"

Maestro: Bueno, ¿qué opinan?

El equipo 1 da muestras de aprobación

Maestro: ¿No hay opiniones? Bueno, entonces que pase el equipo 3 a explicar sus resultados.

Eder: Ésta es la gráfica que obtuvimos.

La figura que expone en su acetato es la siguiente

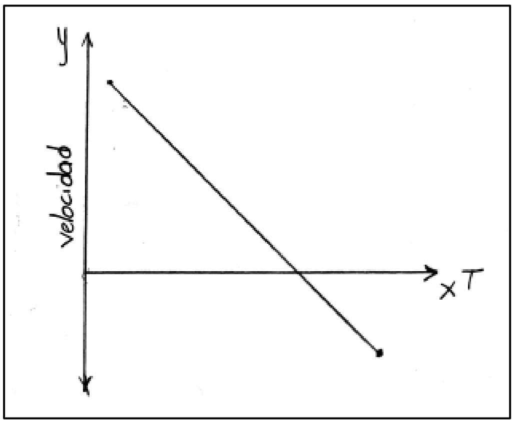


Figura 4.51 Gráfica velocidad – tiempo que propone el equipo 3 para modelar el movimiento uniformemente acelerado.

Eder: Aquí tuvimos una controversia. Carlos dice que empecemos aquí (*señala el origen*), porque dice que Luisa empieza con velocidad cero. Pero la mayoría decimos que debe empezar aquí porque ya Luisa va con una velocidad cuando el sensor empieza.

Luis: Carlos no entiende, sigue en lo mismo (*se dirige a su equipo nada más*).

Eder: A ver, empieza a bajar su velocidad, se para, aquí cuando se para es cero, no se detiene, por eso no seguimos así (*recorre el dedo sobre el eje del tiempo para indicar que la velocidad permanece en cero*) y luego se da la vuelta y empieza a correr (*sigue moviendo el dedo recorriendo la gráfica por debajo del eje del tiempo*).

Viridiana: No, pero no puede pasarse para abajo.

Miguel: Eso es lo que decíamos nosotros, pero nó, esto nos dice que Luisa se esta regresando.

Rosalinda: Eso es lo que decía.

Carlos: Yo decía que la velocidad negativa es cundo se mueven atrás del sensor, pero ellos me convencieron. Si va para allá la distancia que recorre es positiva y si viene para acá la distancia es negativa.

Indira: La distancia siempre es positiva, ¿cómo puede ser una distancia negativa? Es como si debieras una distancia, no, no se puede.

Miguel: El signo nos ayuda para decir para donde va. Si ponemos negativo la distancia es para acá, si es positivo la distancia es para allá.

Fernando: Pero la velocidad siempre es positiva.

Miguel, Eder y Carlos: ¡No! (*juntos*)

Glorient: No puede haber velocidad negativa, no hay velocidad menor que cero

Carlos: Igual si la velocidad es positiva va para allá si la velocidad es negativa viene para acá.

Maestro: El equipo 4 no ha opinado.

Derma: La velocidad es la misma, sea de ida, o de regreso.

Liliana: También pensamos que debía de ponerse hacia donde se dirigía pero no hicimos la gráfica así, pero ahora que la veo creo que está bien.

Derma: Sí, creo que sí tienen razón ellos.

Derma: Cuesta trabajo darles la razón a los hombres (*en voz baja a su equipo*).

Ríen las integrantes del equipo 4.

En la discusión se observan diferentes posiciones con respecto a las "velocidades negativas". La posición de Rosalinda es que "la velocidad es la misma, sea de ida, o de regreso". La de Glorient es "no puede haber velocidad negativa, no hay velocidad menor que cero", que contrasta con la de Carlos "la velocidad negativa es cundo se mueven atrás del sensor". A pesar de realizar operaciones, complejas en algunos casos, con números negativos, en este episodio, para algunos, "la velocidad negativa" no tienen significado.

Episodio 4.2.9 ***"Espérate no digas, deja pensarle tantito"***

Esta parte del episodio es trascripción de la interacción del grupo en la sesión 6.

Maestro: Pongan atención en la pregunta. Tenemos aquí distancia contra tiempo, ésta es una parábola que nosotros trazamos. De acuerdo. Entonces ahora, ¿cómo debo caminar para que la grafica que se obtenga esté trasladada hacia la derecha?

Luis: Ésta es una de las preguntas.

Maestro: ¿Cómo?

Luis: Nada. Hay que dejar pasar más tiempo antes de apretar el botón.

Maestro: El tiempo inicial ¿verdad?, ¿cómo debe ser la gráfica asociada a ésta? (*señala a una parábola desplazada hacia la arriba*)

Indira: Se debe empezar a caminar más alejado del sensor.

Maestro: Y la amplitud debe estar relacionada con la aceleración.

Maestro: Además hemos visto que la gráfica velocidad - tiempo relacionada con este tipo de movimiento es una gráfica como ésta, una recta. ¿Está bien? Bueno, esto es lo que hemos visto antes.

Maestro: Ahora, si ésta es la grafica velocidad-tiempo asociada a la primera parábola, ¿cómo será la grafica velocidad-tiempo de la segunda parábola? (*señala las dos parábolas que se muestran en la figura 4.52*)

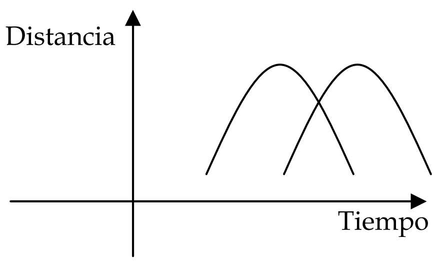


Figura 4.52 Gráficas distancia – tiempo desplazadas horizontalmente.

A continuación es la interacción del equipo 4.

El maestro es solicitado por Ana Luisa...

Ana Luisa: Maestro, si en la primer gráfica,... entonces está más alta si se desplaza a la derecha. ¿Está bien maestro?

Maestro: A mí me gusta tu idea, pero ¿por qué no lo discutes con tus compañeras del equipo?

El maestro se retira interactúa con los participantes de otros equipos, platica con los equipos.

Derma: A ver por qué dices que queda más alta, yo no tengo ni idea.

Yuridia: Espérate, no digas, deja pensarle tantito.

Rosaura: Ya que nos diga, si nó, nos van a ganar los otros equipos.

Luisa: No se trata de eso, lo que importa es que le entiendas.

...

Luisa: ¿Ya?

Derma: Está mi cerebro en blanco.

Rosaura: Yo lo que digo es que si se espera uno un tiempo la parábola se recorre hacia acá (*señala hacia la derecha*), entonces la recta también se traslada.

Luisa: Tú, Emy, casi no hablas.

Emilia: Yo las veo, pero si le entiendo. Bueno, si es como dice Rosaura se traslada hacia el mismo lugar de la parábola; pero al moverla hacia acá (*señala hacia la derecha*) entonces la recta se sube (*hace señas con la mano)*.

Yury: Es lo que yo había pensado.

Luisa: ¡Aja!, ya está. Maestro, ya sabemos.

Equipo 4.2.10 ***"Porque la gráfica es velocidad – tiempo no se ve la distancia"***

Seguimos con la interacción del equipo 4.

Maestro: Bien, para los que ya terminaron aquí tienen otra pregunta. Ahora ya no tengo una parábola desplazada hacia la derecha, tengo una parábola con mayor altitud, ¿cómo queda la grafica?

Derma: ¿Que nos quede más abierta?

Maestro: ¿Más abierta?

Yury: ¿Por qué más abierta si no es una parábola, la gráfica es una recta, la velocidad–tiempo? ¿Queda con mayor velocidad-tiempo?

Luisa: No porque entonces queda más arriba. Espérate.

Rosaura: Más inclinada.

Luisa: Nó, nó, no tiene que ver con la inclinación.

Rosaura: Se fijan que el maestro casi no se sienta con nosotras, te dio el cortón bien feo hace rato.

Luisa: No es que no me haya hecho caso, lo que pasa es que no nos quiere decir la respuesta, quiere que participemos todos.

Derma: Ya chavas. Luisa, ¿qué ponemos?

Yuridia: La altura de la parábola es la distancia inicial, pero aquí (*se refiere a la gráfica velocidad – tiempo*) no tenemos distancia. No sé.

Derma: Ponte a pensar Yury, aja, si empezamos a caminar aquí o allá, de la misma forma, ¿eh?, ¿cómo va a ser?

Rosaura: También va a estar más arriba (*se refiere a la gráfica velocidad – tiempo*).

Yuridia: No Rosy, ya vimos hace un rato que la altura es cuando se desplaza horizontalmente.

Luisa: Es que la velocidad es la misma dondequiera que empieces.

Derma. Pero hace un rato también era el mismo movimiento, la velocidad era la misma.

Emilia: No. Hace un rato era después el movimiento. Es la misma recta.

Luisa: ¿Cómo va a ser la misma?

Derma: No es la misma. ¿Por qué?

Emilia: Porque la gráfica es velocidad – tiempo, no se ve la distancia.

Rosaura: Pero es diferente el movimiento.

Emilia: Ya sé, ve, si caminas rascándote la cabeza y si caminas riéndote la gráfica no lo nota, es la misma.

Rosaura: Ahora sí te pasaste. ¿Eso que tiene que ver?

Luisa: Sí Emy, eso es otra cosa. No sé, llámale al profe.

Rosaura: No va a venir.

Derma: Maestro.

El maestro se acerca.

Derma: ¿No que no?

Maestro: ¿Qué pasó?

Luisa: No le entendemos, ya se nos secó el coco y nada.

Maestro: Tienen alguna idea.

Rosaura: Yo digo que si la parábola se sube también la recta.

Luisa: Pero eso está mal.

Maestro: Vamos a trabajar con la gráfica. Vamos a empezar a graficar (*se refiere a la gráfica 4.53*).

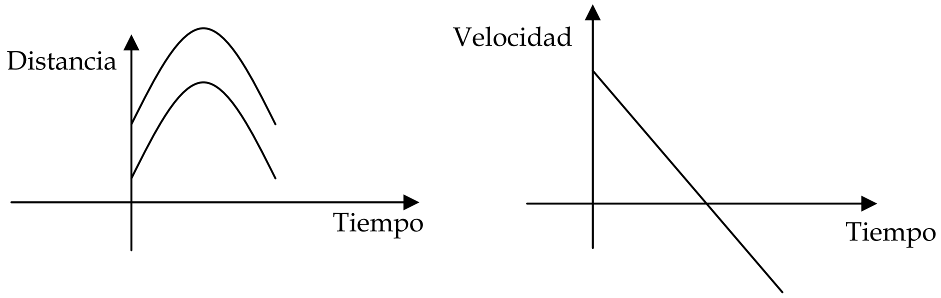


Figura 4.53 Relación entre gráficas distancia – tiempo y velocidad - tiempo

Maestro: ¿Dónde empezamos?, en el segundo cero. Luego, aquí (*señala la parábola más baja*) el móvil tiene una velocidad y, este móvil (*señala la parábola más alta*), ¿qué velocidad tiene?

Luisa: La misma porque es el mismo movimiento.

Maestro: ¿De acuerdo con Luisa? (*voces de aprobación*). Entonces ponemos el punto en la gráfica velocidad – tiempo en el mismo lugar, tiempo cero y misma velocidad.

Luisa: Entonces vamos a tener la misma gráfica.

Rosaura: Espérate, deja que nos explique el profesor.

Maestro: A ver Luisa, tú explica.

Luisa: Aquí en otro punto (*señala la parábola más baja*) tenemos un tiempo y una velocidad, aquí (*señala la parábola más alta*) tenemos la misma velocidad y el mismo tiempo. Ya.

Maestro: Bueno, las dejo. Preparen su exposición.

Episodio 4.2.11 ***"Pero a ¿qué es?"***

Los estudiantes relacionan los parámetros de la ecuación, con los de la gráfica y los del movimiento otorgándoles significados.

El equipo 3 intenta encontrar un modelo algebraico al movimiento uniforme disforme. Tratan de pegarle una parábola, la nube de puntos. Esta es parte de la trascripción de la sesión 7.

Carlos: ¿Cómo encontraste la ecuación?

Eder: De lo que hay que darse cuenta es lo que hace cada una de estas constantes ¿verdad?

¿Cómo las llama el maestro? ..., parámetros.

¿Qué es lo que hace *c*?..., la altura de la parábola, ¿éste? (*señala c*).

Si es más pequeño abre los brazos y si es más grande cierra los brazos (*señala a*).

Arturo: Yo lo hice así, esto es negativo (*señala el término* $a(t-b)^2$) y éste (*señala c*) es la altura de la parábola, entonces te fijas hasta dónde va a llegar Luisa, es tres punto noventa y ocho veintinueve... Éste lo colocas aquí (*señala el lugar de c*).

Miguel: Perdón, ¿cuánto debe valer *b*? ¿Cuánto debe valer?

Eder: ¿Cuál es el chiste del asunto?, saber lo que hace cada uno de las constantes y ya, le mueves.

Carlos: Pero éste es un método empírico.

Arturo: Yo ya sé, aquí (*señala c*) colocas 3.9829 y el tiempo también, es cuatro punto veintinueve treinta y cinco, lo colocas aquí (*señala b pero en lugar de poner 4.2935 coloca 3.9829*). Ya la parábola se te acomoda en este punto (*señala el vértice*) y nada más le muevas *a* para acomodarla.

Miguel: ¿Estos puntos son el vértice? (*señala b y c*)

Carlos: Sí, ¡Aja! Localizas la distancia máxima y el tiempo máximo, lo pones en *b* y *c*. Pero *a* ¿qué es?

Eder. Ya encontré lo que vale *a*, *b* y *c*.

Carlos: Pero no se trata de eso nada más, sino de qué es cada uno de estos parámetros.

Eder: Pues *a* es la amplitud, *c* la altura y *b* la mueve así (*con la mano hace un ademán de recorrer la parábola hacia un lado*)

Carlos: No entiendes, ¿qué es cada uno de estos valores?

Arturo: Carlos, si quieres subirla te vas más para allá (*señala la dirección que indica alejarse del sensor*), si quieres moverla así (*señala desplazamiento horizontal*) te esperas un momento.

Carlos: Sí, eso ya lo sabíamos. Pero ¿qué es *a*?

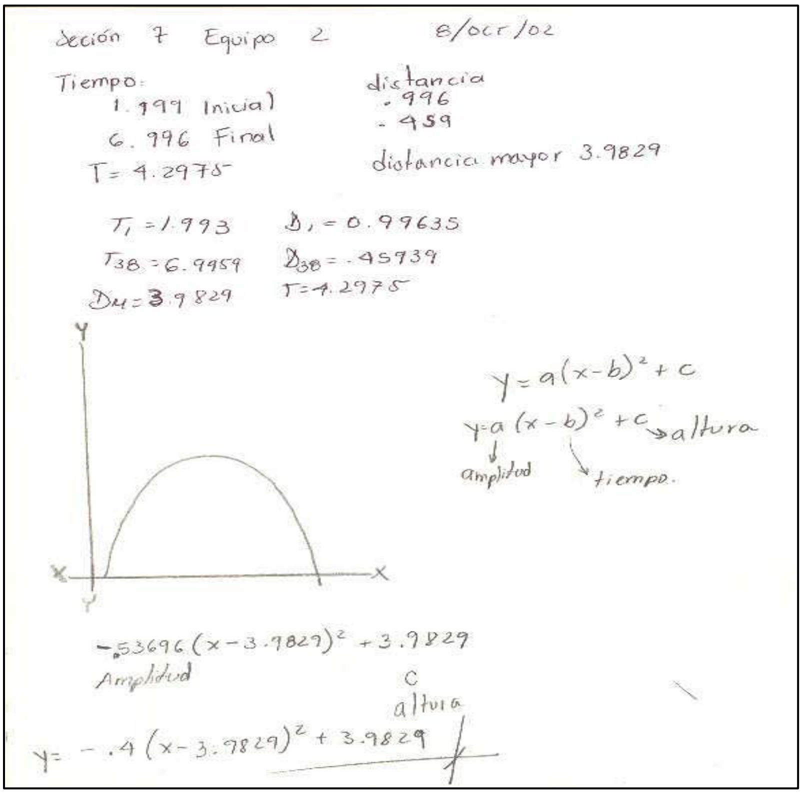
Eder: Es lo que regula lo ancho.

Carlos: Pero, ¿qué es?

Miguel: Es la velocidad, si lo hace más violento o si lo hace más calmado.

Carlos: Puede ser.

Arturo: No sé.



Seción 7 Equipo 2 8/oct/02

Tiempo:
1.999 Inicial
6.996 Final
T= 4.2975

distancia
.996
.459
distancia mayor 3.9829

$T_1 = 1.993$ $D_1 = 0.99635$

$T_{38} = 6.9959$ $D_{38} = .45939$

$D_{4} = 3.9829$ $T = 4.2975$

$y = a(x-b)^2 + c$

$y = a\,(x-b)^2 + c$ → altura

amplitud

tiempo.

$-.53696\,(x-3.9829)^2 + 3.9829$

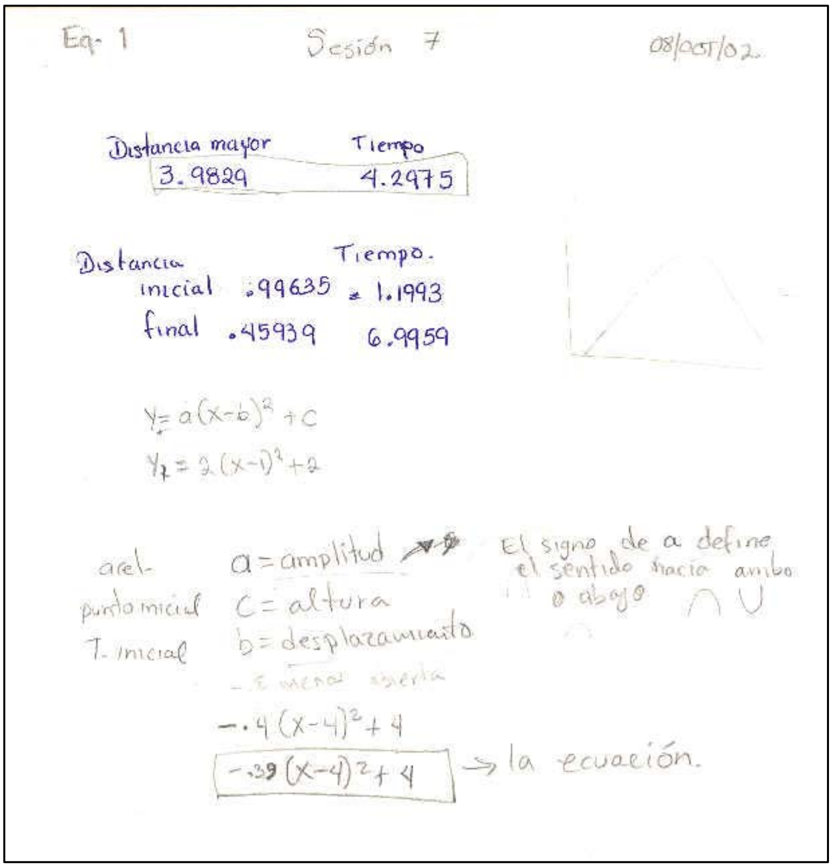
Amplitud

c

altura

$y = -.4\,(x-3.9829)^2 + 3.9829$

Figura 4.54 Escrito de Arturo donde relaciona los parámetros de la fórmula con los de la gráfica



Eq. 1 Sesión 7 08/oct/02

Distancia mayor	Tiempo
3.9829	4.2975

Distancia		Tiempo.
inicial	.99635	1.1993
final	.45939	6.9959

$Y = a(x-b)^2 + c$

$Y_2 = 2\,(x-1)^2 + 2$

arel. a = amplitud

punto inicial c = altura

T. inicial b = desplazamiento

El signo de a define el sentido hacia arriba o abajo ∩ ∪

$-.4\,(x-4)^2 + 4$

$\boxed{-.39\,(x-4)^2 + 4}$ → la ecuación.

Figura 4.55 Informe del equipo 1 donde relaciona los parámetros de la fórmula con los de la gráfica

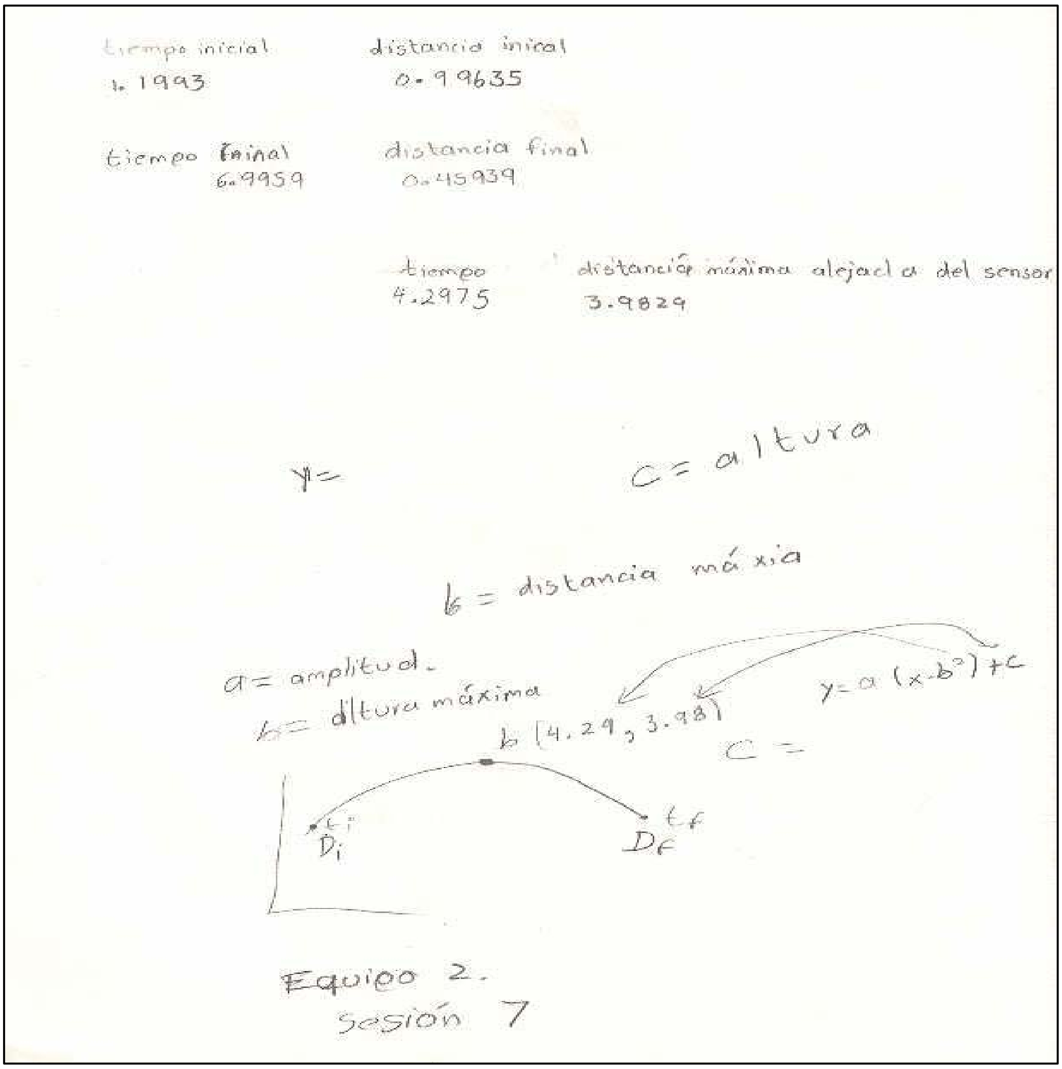


Figura 4.56 Informe del equipo 1 donde relaciona los parámetros de la fórmula con los de la gráfica.

Episodio 4.2.12 *Esquema entre las gráficas distancia-tiempo y velocidad – tiempo en el caso del movimiento uniformemente acelerado*

En este episodio mostramos algunos borradores y acetatos utilizados por los equipos para exponer la relación entre las gráficas distancia – tiempo y velocidad – tiempo y el movimiento.

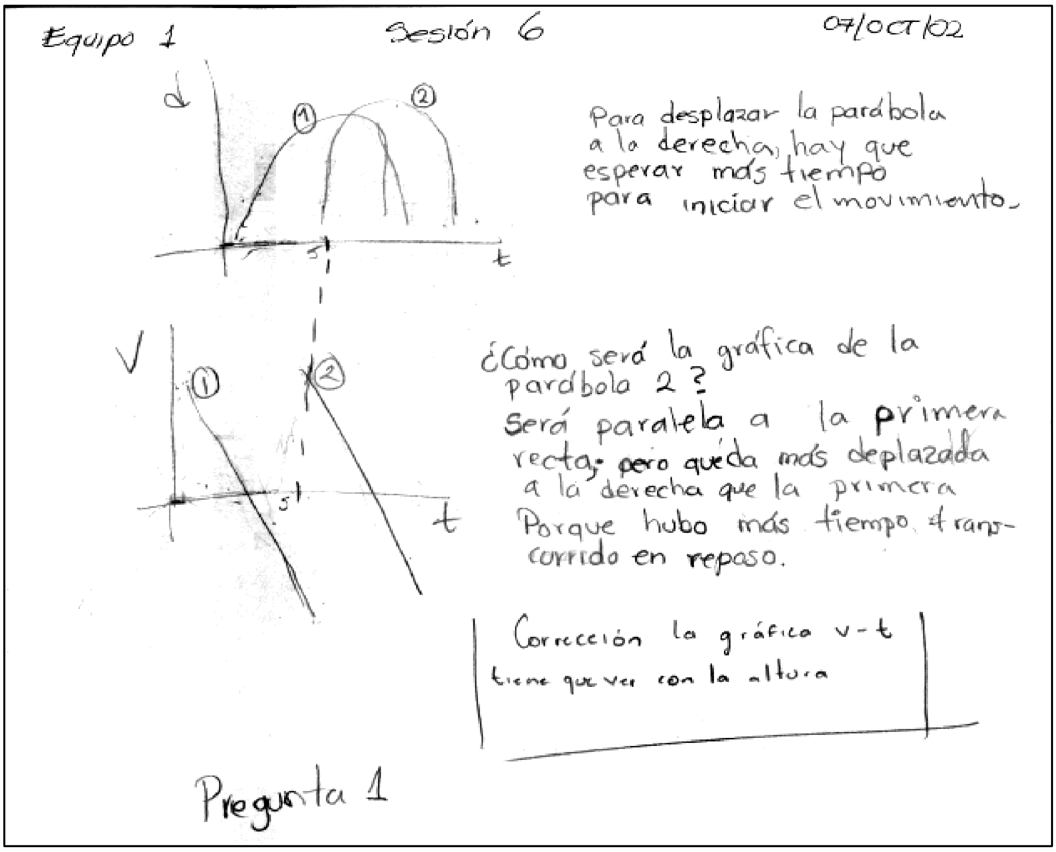


Figura 4.57 Borrador del equipo 1 donde muestra como relacionan los parámetros de las graficas velocidad- tiempo y distancia tiempo con las características del movimiento

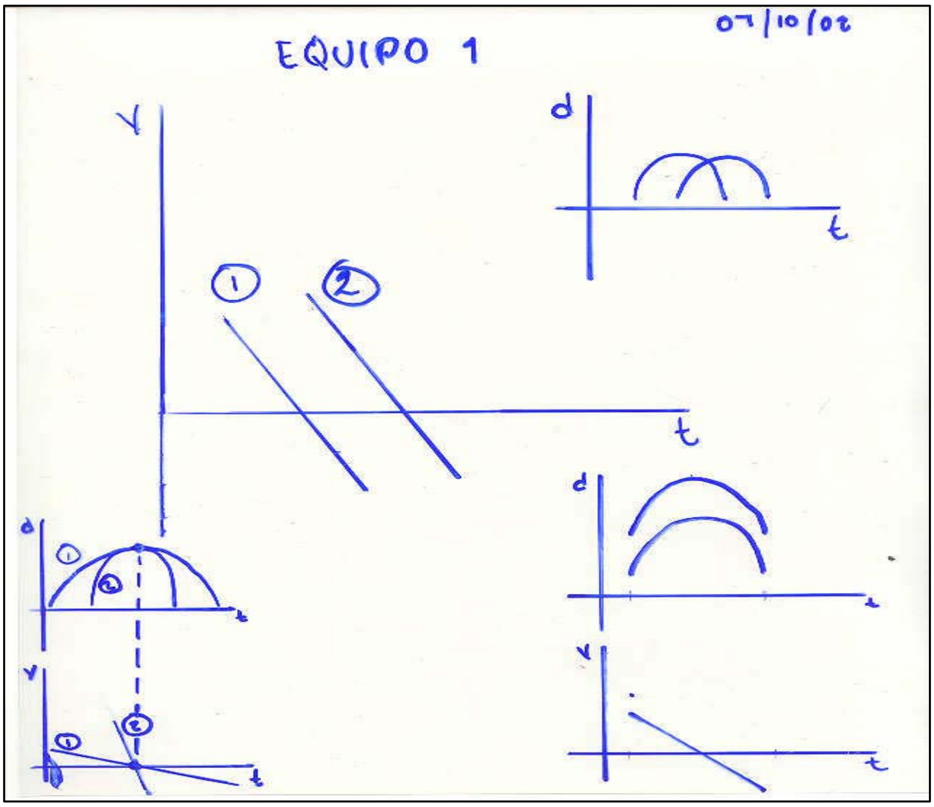


Figura 4.58 Acetato que utiliza el equipo 1 para explicar al grupo como relacionan las graficas velocidad- tiempo y distancia - tiempo

En la figura 4.58 se muestra cómo el equipo 1 relaciona diferentes gráficas distancia -tiempo con gráficas velocidad – tiempo; en una parte de ella se relaciona el punto máximo de la parábola con la intersección del eje *t* y la recta velocidad – tiempo; en otra se muestra cómo relacionan parábolas desplazadas verticalmente con una misma recta; en esta última no se considera la posición inicial.

La posición de Eder (Equipo 3) con respecto a la gráfica velocidad tiempo que corresponde a la parábola más alta es muy interesante, "la gráfica velocidad tiempo es más vertical"; y, en efecto, así es si se considera que las gráficas son como las que se muestran en la figura 4.59; es decir, empiezan y terminan en los mismos puntos.

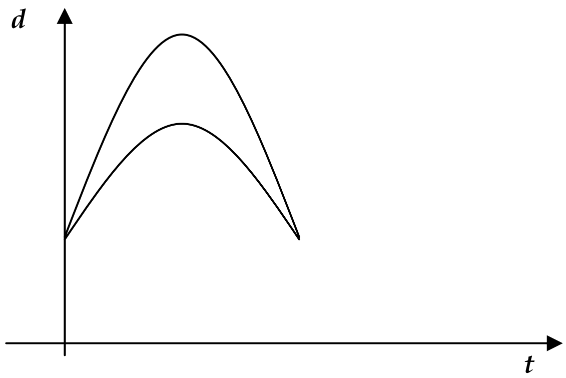


Figura 4.59 Una parábola más alta que otra, pero empiezan y termina en los mismos puntos

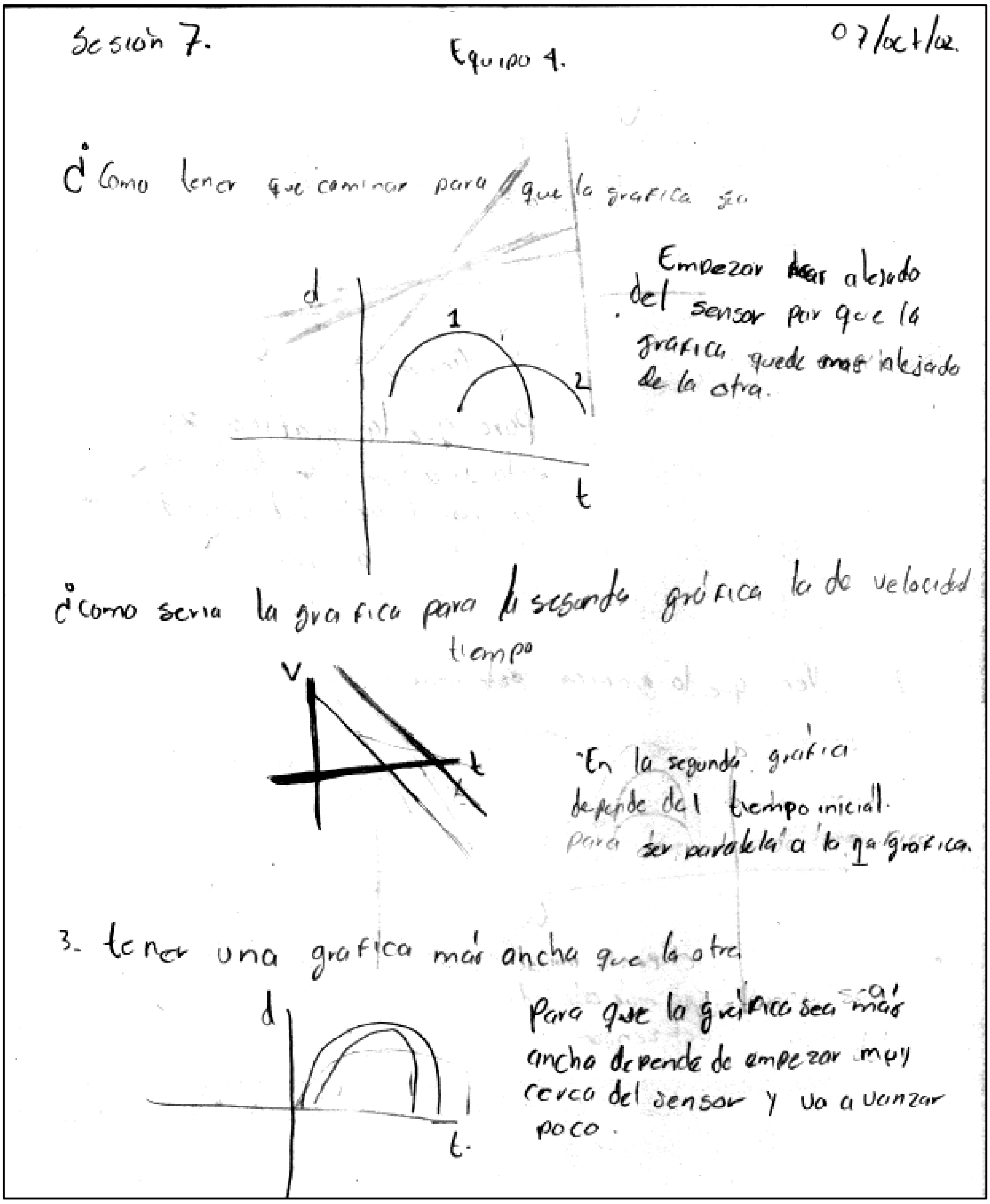


Figura 4.60 Borrador del equipo 4 donde muestra como relacionan los parámetros de las graficas velocidad- tiempo y distancia tiempo con las características del movimiento

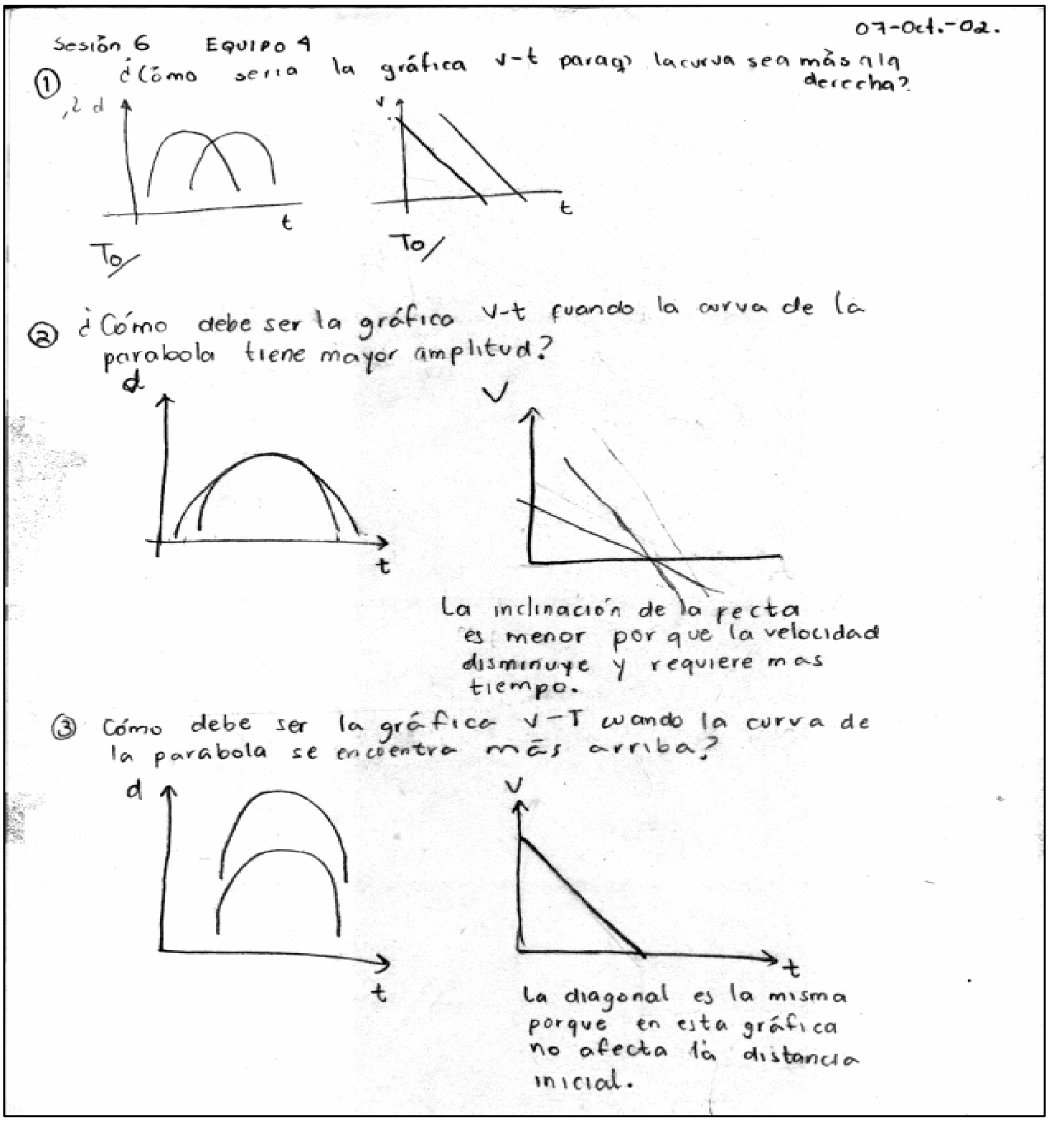


Figura 4.61 Acetato que utiliza el equipo 4 para explicar al grupo como relacionan las graficas velocidad- tiempo y distancia tiempo. Destacamos que, aún cuando ya se ha discutido ampliamente acerca de la velocidad negativa, en la parte de abajo del acetato se presenta la gráfica velocidad – tiempo sin prolongar la recta abajo del eje *t*

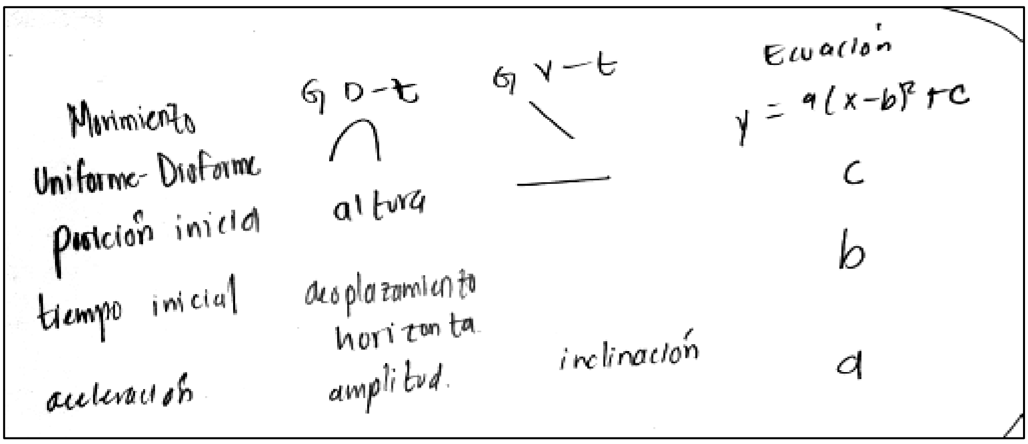


Figura 4.62 Esquema del equipo 2 para explicar al grupo como relacionan las graficas velocidad- tiempo y distancia tiempo, fórmulas algebraica y el movimiento

En esta parte Carlos argumenta: "Debemos hacer más pequeño el tiempo (*gesticulando con las manos*) para cerrar más los brazos; debemos hacer más grande el tiempo para hacer más ancha la parábola". Ésta argumentación también aparece en otras puestas en escena de la secuencia pero, además, aparece en la que se reporta en el capítulo 5. El argumento de hacer más grande o más pequeña la distancia no surge.

La aceleración, es decir, cómo cambia la velocidad, no es un argumento que los estudiantes movilizan. Arguyen que para que la parábola este con los brazos más abiertos se debe empezar caminando más lento y después ir reduciendo la velocidad; los argumentos están centrados en la velocidad, no en la aceleración.

Episodio 4.2.13 **Las versiones de los modelos gráficos aceleración – tiempo**

En la interacción se construyen diferentes modelos gráficos aceleración – tiempo. De éstas destacamos las expuestas por los equipos a todo el grupo. El equipo 1 y el 2 presentan la aceleración constante. El equipo 1 plantea que la aceleración es positiva mientras que el 2 la presenta negativa (figura 4.63). Los equipos 3 y 4 (figuras 4.64 y 4.65) proponen la aceleración negativa pero no constante.

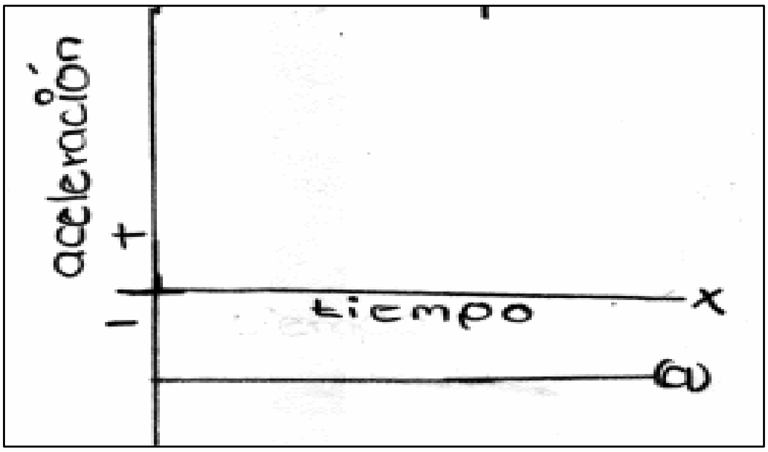


Figura 4.63 Gráfica aceleración – tiempo que propone el equipo 2

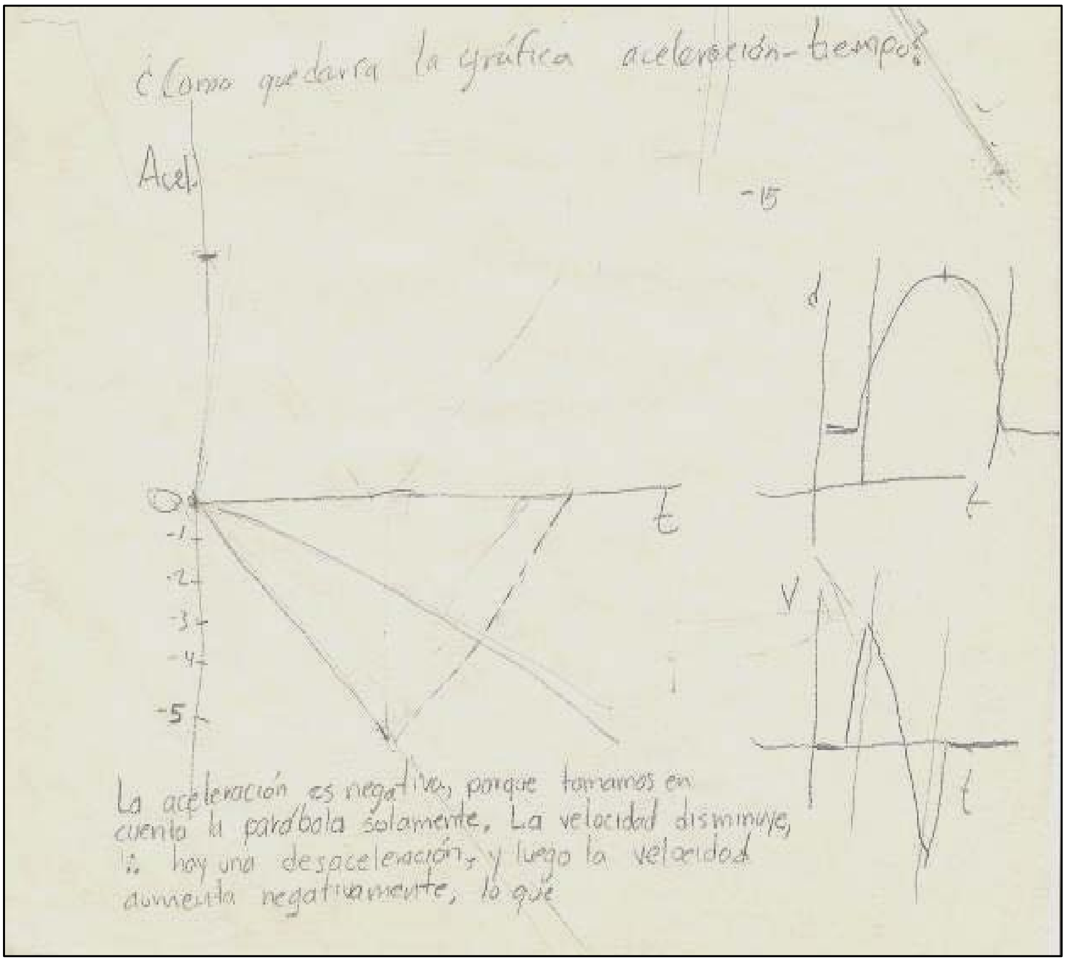


Figura 4.64 Gráfica aceleración – tiempo que propone el equipo 3. Argumenta que "la aceleración es negativa, porque tomamos en cuenta la parábola solamente. La velocidad disminuye, ∴ (*por tanto*) hay una desaceleración, y luego la velocidad aumenta negativamente, lo que..." Intentan presentar una relación entre las gráficas distancia tiempo, velocidad- tiempo y aceleración – tiempo.

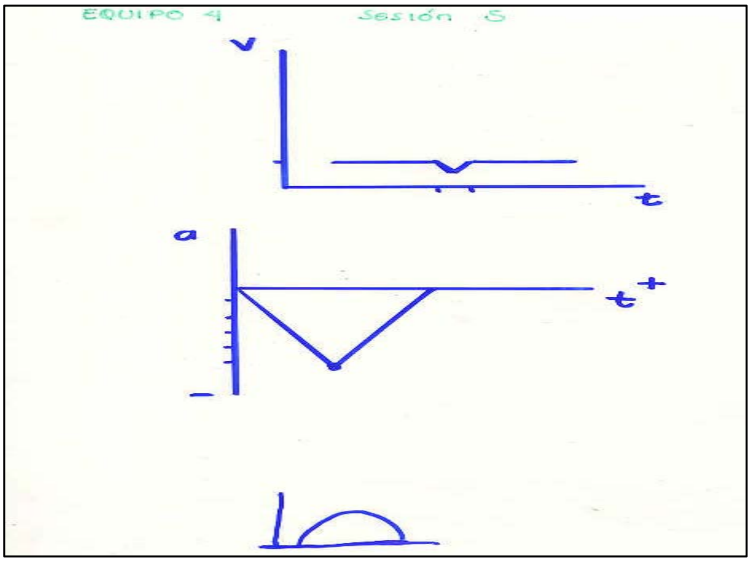
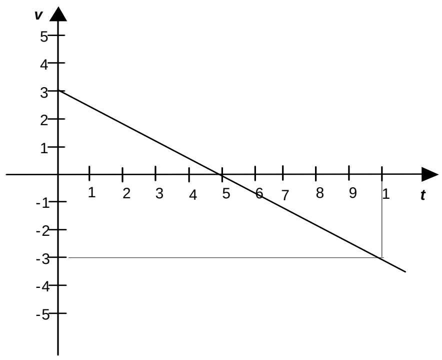


Figura 4.65 Gráficas velocidad- tiempo, aceleración – tiempo y distancia tiempo que propone el equipo 4. Retoman el argumento de que la velocidad en una parte de la parábola es constante

Episodio 4.2.14. ***La distancia recorrida como el área bajo la gráfica velocidad-tiempo, el movimiento uniforme disforme***

Se muestran fragmentos de la trascripción de la sesión ocho y algunas producciones de los equipos al enfrentar la situación planteada en la figura 4.66.

1. De acuerdo a la gráfica que se da a continuación ¿qué distancia recorre su compañero del segundo dos al segundo cinco?

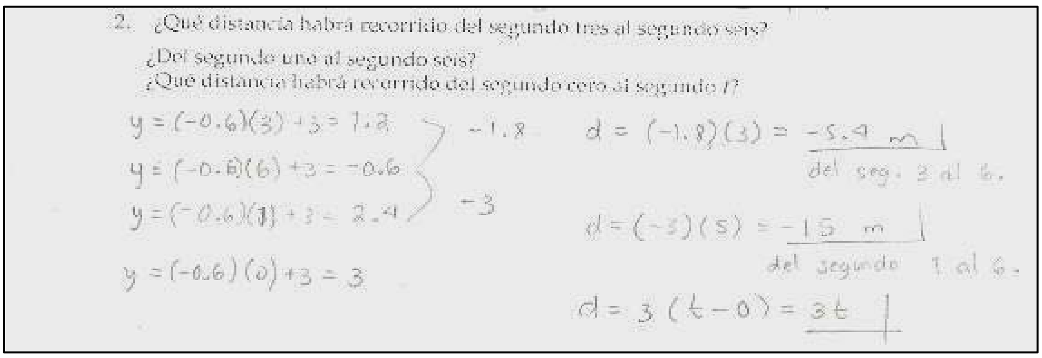


2. ¿Qué distancia recorre del segundo tres al segundo seis?
   ¿Del segundo uno al segundo seis?
   ¿Qué distancia recorre del segundo cero al segundo ***t***?

3. ¿Existe alguna relación entre la gráfica distancia–tiempo y la gráfica velocidad-tiempo?

Figura 4.66 Situación de la sesión 8, predecir la posición del móvil a partir de la gráfica velocidad - tiempo

El equipo 4, para encontrar la distancia recorrida, encuentra la ecuación de la recta velocidad-tiempo $y = \frac{-3}{5}x + 3$; luego encuentra el valor de la velocidad en el segundo tres y el seis; la diferencia entre éstas es la velocidad que utilizan para encontrar la distancia (figura 4.67)



2. ¿Qué distancia habrá recorrido del segundo tres al segundo seis?
¿Del segundo uno al segundo seis?
¿Qué distancia habrá recorrido del segundo cero al segundo *t*?

$y = (-0.6)(3) + 3 = 1.2$ -1.8 $d = (-1.8)(3) = -5.4$ m del seg. 3 al 6.

$y = (-0.6)(6) + 3 = -0.6$

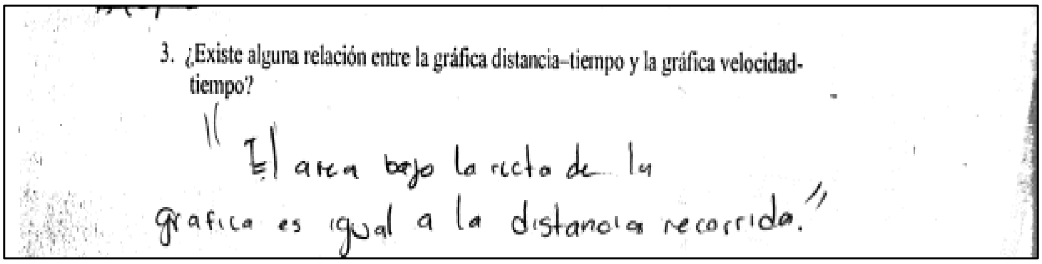
$y = (-0.6)(1) + 3 = 2.4$ -3 $d = (-3)(5) = -15$ m del segundo 1 al 6.

$y = (-0.6)(0) + 3 = 3$

$d = 3(t - 0) = 3t$

Figura 4.67 El equipo 4 encuentra la ecuación de la velocidad; evalúan en los segundos 3 y 6; la diferencia entre estos valores es la velocidad que utiliza para encontrar la distancia

Los equipos 1 y 2 expresan que "el área bajo la recta es igual a la distancia recorrida".



3. ¿Existe alguna relación entre la gráfica distancia–tiempo y la gráfica velocidad-tiempo?

"El area bajo la recta de la grafica es igual a la distancia recorrida."

Figura 4.68 El equipo 1 plantea la relación entre las gráficas distancia – tiempo y velocidad - tiempo

El equipo 1, para encontrar el área bajo la recta, utiliza el área de triángulos bajo la recta velocidad – tiempo (figura 4.69 y 4.70); sin embargo, para responder acerca de la distancia recorrida, del segundo tres al seis, suma el área del triángulo con vértices $(2,0)$, $(5,0)$ y $(2,1.2)$ con la del triángulo que tienen vértices $(5,0)$, $(6,0)$ y $(6,-0.6)$. No conciben un triángulo con velocidad negativa.

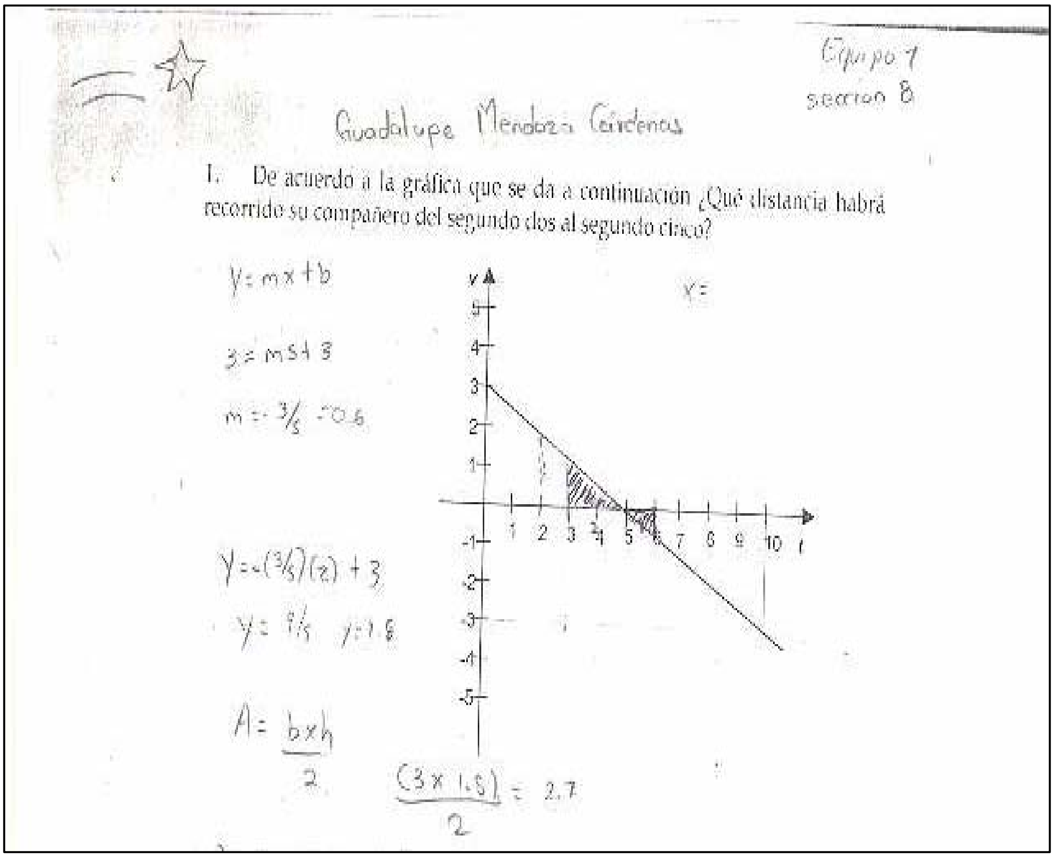


Figura 4.69 El equipo 1 calcula la distancia recorrida del segundo dos al cinco encontrando el área del triángulo bajo la recta.

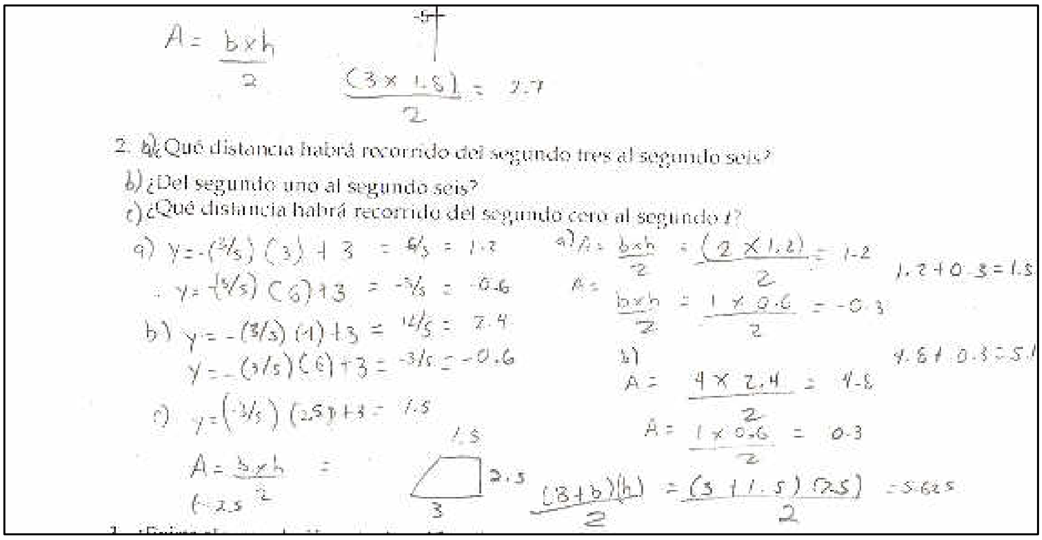


Figura 4.70 El equipo 1 calcula las distancias recorridas del segundo tres al seis y del segundo uno al seis encontrando las áreas de los triángulos y luego las suma, debiendo restarlas

El equipo 2, para encontrar la distancia recorrida, utiliza el área del trapecio.

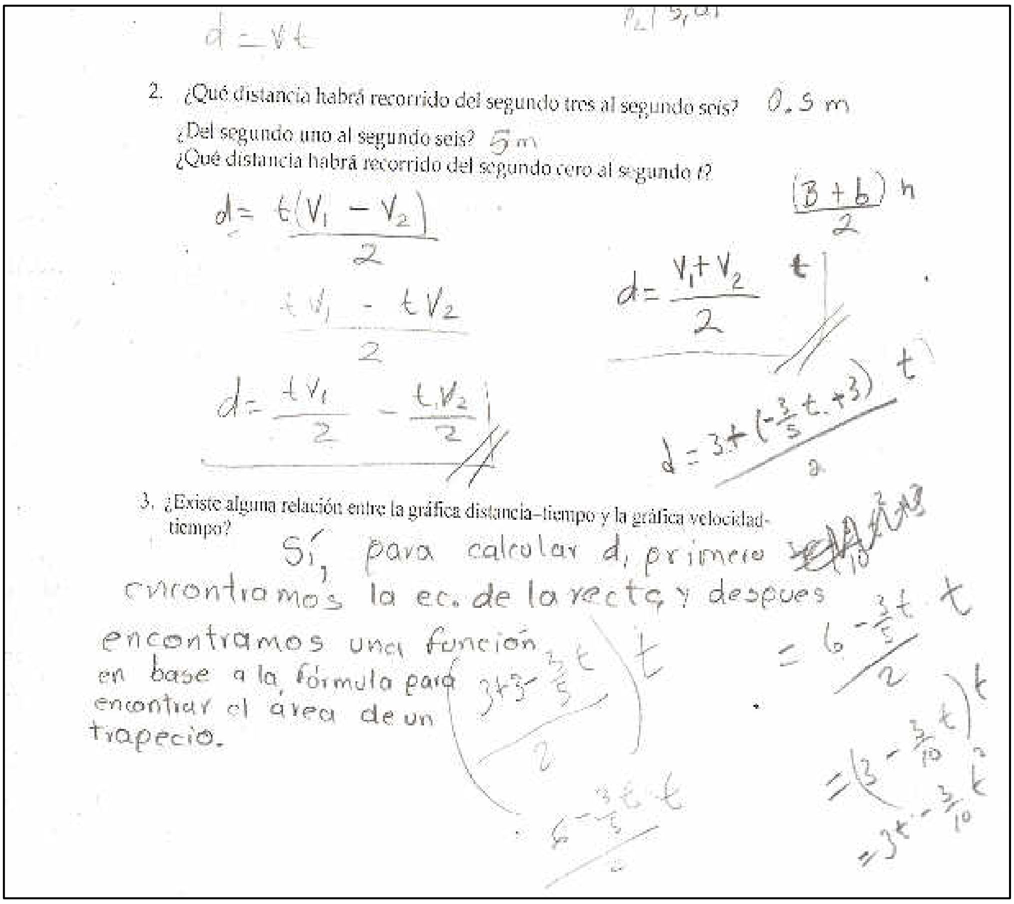


Figura 4.71 El equipo 2, utiliza el área del trapecio para calcular la distancia recorrida. “Sí, para calcular la primera encontramos la ecuación de la recta y después encontramos una función en base a la fórmula para encontrar el área del trapecio”.

En el equipo 3 se presentan diferentes acercamientos para encontrar la distancia recorrida; Carlos y Eder utilizan la integral de la función velocidad; Arturo plantea la ecuación de la velocidad, con ella encuentra el valor de las velocidades en el segundo tres y en el seis. Toma la velocidad promedio y con ésta calculan la distancia recorrida que ocuparan para encontrar la distancia.

El método de Arturo al final de cuentas coincide con el método basado en el área del trapecio bajo la curva,

$$d = \frac{v_2 + v_1}{2}(t_2 - t_1)$$

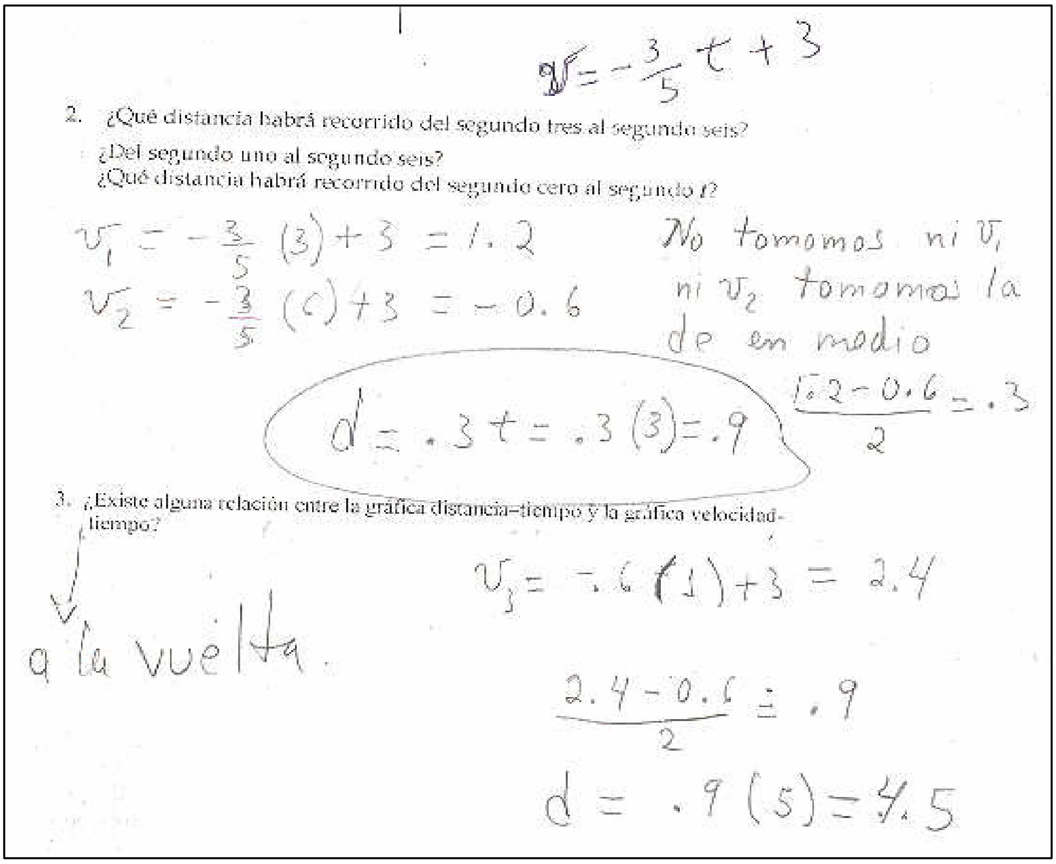


Figura 4.72 Arturo da la ecuación de la velocidad, con ésta encuentra las velocidades en los segundos 3 y 6; calcula la velocidad media y la utiliza para encontrar la distancia recorrida. "No tomamos ni v_1 ni v_2 tomamos la de en medio"

Eder y Carlos plantean la ecuación de la recta velocidad - tiempo y luego intentan integrar para encontrar la distancia recorrida, si embargo integra mal (figura 4.73 y 4.74).

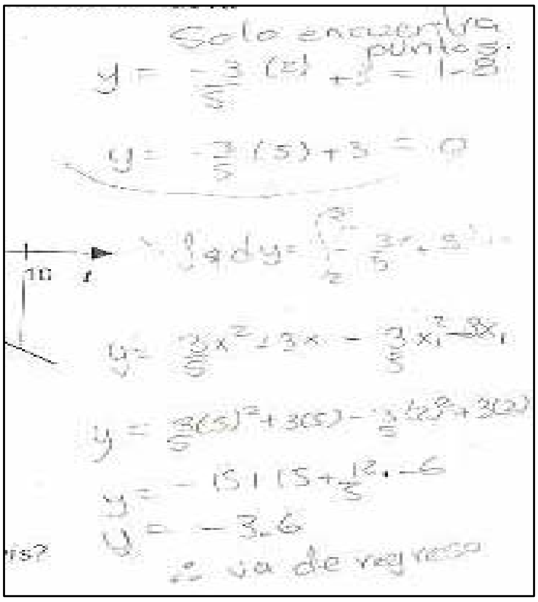


Figura 4.73 El equipo 3 encuentra la ecuación de la velocidad; "integra" y evalúa para encontrar la distancia recorrida (parte de la hoja que entregaron)

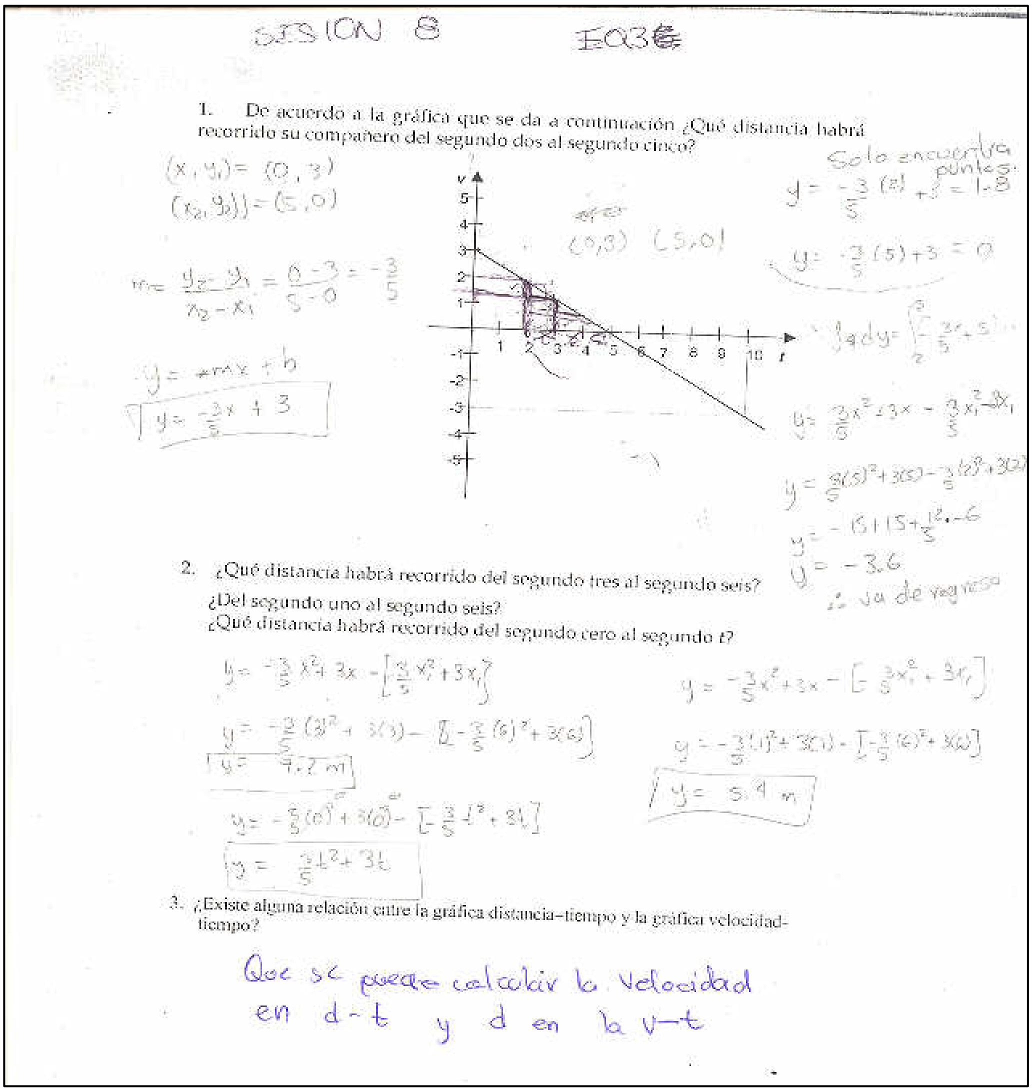


Figura 4.74 El equipo 3 encuentra la ecuación de la velocidad; "integra" y evalúa para encontrar la distancia recorrida (hoja completa)

La distancia como área bajo la gráfica velocidad-tiempo surge en un proceso donde el actor

- realiza predicciones sobre la distancia recorrida utilizando gráficas velocidad-tiempo,
- generaliza el caso del movimiento uniforme,
- ha articulado gráficas distancia-tiempo y velocidad-tiempo,
- ha utilizado las gráficas distancia-tiempo y velocidad-tiempo para realizar predicciones y
- no sólo cuenta como recursos a utilizar las fórmulas algebraicas

Episodio 4.2.15 **Altura y desplazamiento horizontal de la recta**

Indira casi al final de la sesión interrumpe la exposición de Derma, rebate la posición del maestro acerca del significado de los desplazamientos horizontal y vertical de la gráfica velocidad-tiempo, con argumentos gráficos y del movimiento.

Maestro: En este caso el desplazamiento vertical coincide con el desplazamiento horizontal, desplazar una recta horizontalmente es lo mismo que desplazarla verticalmente. ¿Están de acuerdo?

Indira: Nó maestro, no está bien lo que dice porque ya quedamos entre nosotras (equipo 1) que la altura es la velocidad inicial y el desplazamiento horizontal es el tiempo inicial.

Maestro: Sí, estoy de acuerdo, pero a lo que me refiero es que nos resulta la misma recta.

Indira no contesta pero discute con su equipo. Después de un tiempo pide la palabra.

Indira: Ya maestro, otra vez no estamos de acuerdo con usted.

Maestro: ¿En qué?

Indira: Las gráficas no son las mismas, ¿puedo pasar a explicarle en el pizarrón?

Maestro: Sí, pasa por favor.

Indira: Esta es una recta velocidad-tiempo, (*se ilustra el dibujo en la figura 4.75, hemos llamado* l_1 *a esta recta*), si aumentamos la velocidad queda así (*dibuja la recta* l_2), si nos esperamos para caminar nada más queda así la recta (*dibuja* l_3 *y regresa a su asiento*).

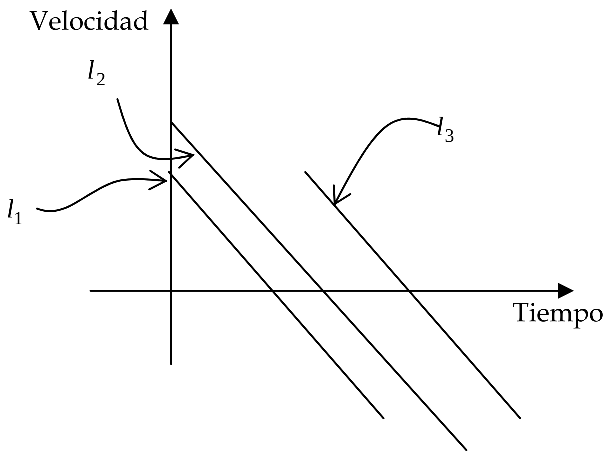


Figura 4.75 Dibujo de Indira para argumentar que los desplazamientos vertical y el horizontal de una recta no se refieren a un mismo movimiento

Maestro: Pero puedes recorrer esta recta (*señala* l_2) hasta que coincida con ésta (*señala* l_3) y coinciden.

Indira: Pero, no es la misma, esta es más chica. Ya no es el mismo movimiento tendría otros tiempos.

Maestro: Pero es el mismo movimiento pero desplazado en el tiempo. Te mueves de la misma forma pero en otro tiempo.

Yuridia: Pero, ¿en que quedamos maestro?, no ha terminado Derma.

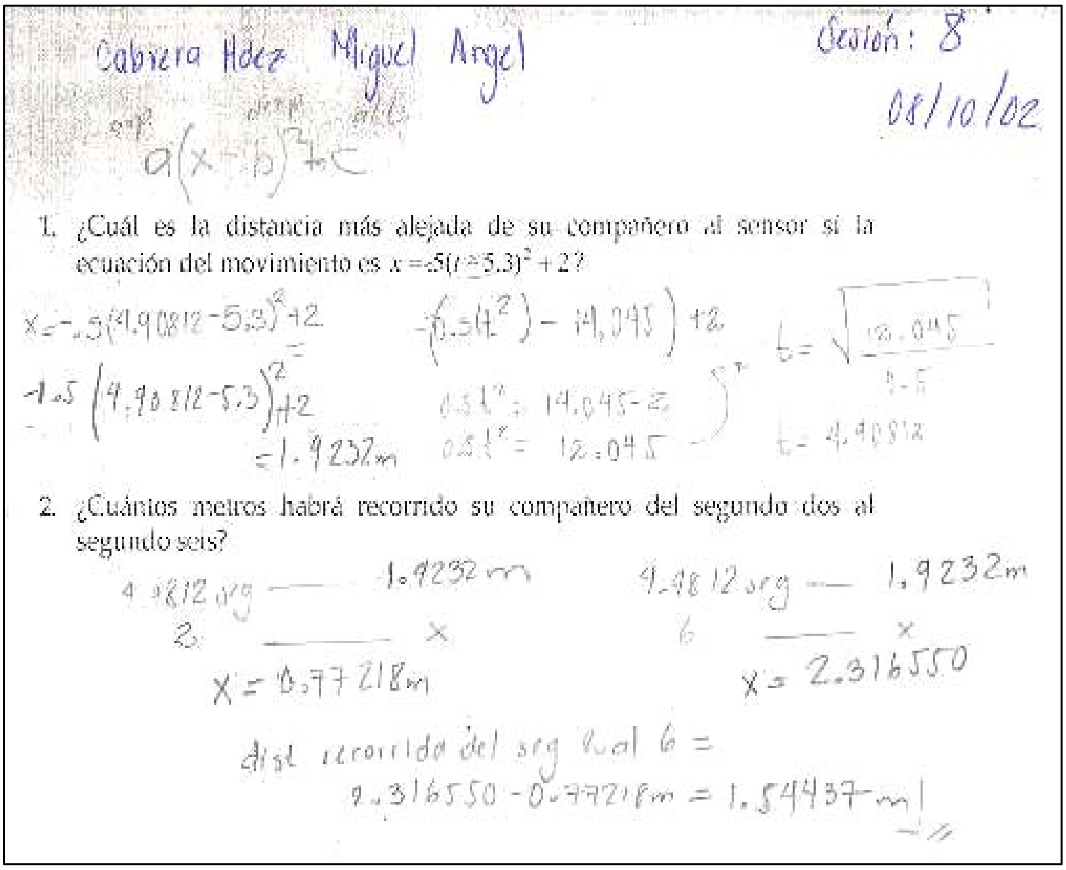
Maestro: Derma continua (*cambia de tema, no continua con el debate)*.

Indira: ¿Por qué no me ayudaron? (*se dirige a sus compañeras de equipo*)

Episodio 4.2.16 ***De nuevo la regla de tres***

En diferentes momentos de la puesta en escena los estudiantes recurren a los métodos utilizados en el desarrollo de la secuencia sobre lo lineal, sobre todo, los métodos "del teorema de Tales" y la regla de tres.

Aparece en el equipo 4 y en Miguel del equipo tres la regla de tres. Carlos rebate esta posición y dice que no es posible aplicar la regla de tres porque el punto inicial no es cero. Miguel hace una modificación a la regla de tres.


Cabrera Hdez Miguel Angel

Sesión: 8

08/10/02

$a(x-b)^2+c$

1. ¿Cuál es la distancia más alejada de su compañero al sensor si la ecuación del movimiento es $x = -.5(t-5.3)^2 + 2$?

$x = -.5(4.90812 - 5.3)^2 + 2$

$-.5\left(4.90812 - 5.3\right)^2 + 2$

$= 1.9232\,m$

$t = \sqrt{\frac{12.045}{.5}}$

$t = 4.90812$

2. ¿Cuántos metros habrá recorrido su compañero del segundo dos al segundo seis?

4.9812 seg — 1.9232 m

2 — x

x = 0.77218 m

4.9812 seg — 1.9232 m

6 — x

x = 2.316550

dist recorrido del seg 2 al 6 =

2.316550 − 0.77218 m = 1.54437 m

Figura 4.76 Miguel recurre a la regla de tres

Capítulo V

La numerización de los fenómenos

Resumen

Los trabajos de Newton, Wallis y Galileo, entre otros, nos muestran una práctica que sería central en las secuencias, a partir de la toma de datos de fenómenos construir modelos numéricos (tablas) encontrando patrones de comportamiento y prediciendo sobre los fenómenos, construir otros modelos, a partir de los datos, y establecer una coordinación entre estos y los fenómenos, sus parámetros y las formas de predicción con cada modelo.

En este capítulo analizamos las prácticas que ejercen los actores en diseños de aprendizaje basados en las prácticas de modelación que hemos llamado "*la numerización de los fenómenos*".

Le hemos llamado "la numerización de los fenómenos" a las prácticas de modelación que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y su uso se toma como central. Estas prácticas ponen en el centro el uso de modelos numéricos, mientras que en el caso de las secuencias del capítulo IV lo hacen más bien en el uso de modelos gráficos.

Son dos los diseños que son puestos en escena, lo lineal y lo cuadrático. Se describen estos diseños y se analizan las evidencias empíricas de su puesta en escena.

Los diseños referidos se centran, no en los contenidos matemáticos en sí o en las producciones de los participantes, sino en las prácticas sociales ejercidas por los participantes utilizando herramientas y situadas en un contexto social.

En la secuencia la estructuración discursiva entre las herramientas, los modelos y las realidades viene a ser central. El otro eje gira en torno a la tesis de que en el ejercicio de ciertas prácticas sociales, usando herramientas, es donde aparecen, se estructuran y movilizan, como argumento, ciertas nociones matemáticas.

5.1 La práctica social: la numerización de los fenómenos

Como lo hemos planteado anteriormente las secuencias que diseñaos no tienen su centro en los objetos matemáticos en sí, sino en prácticas sociales a desarrollar en contextos argumentativos. Nuestra intención es la de proponer contextos argumentativos donde los actores, estudiantes y profesor, reproduzcan prácticas donde se combina la intervención en la naturaleza, el trabajo y el experimento con la especulación matemática: las prácticas de modelación.

La elección de las prácticas a reproducir es guiada por dos criterios, son prácticas que se ejercieron en contextos históricos argumentativos y son prácticas que se ejercen, actualmente, por ciertas comunidades sociales.

Le hemos llamado "***la numerización de los fenómenos***" a las prácticas que parten de la recolección de datos numéricos de un fenómeno para construir modelos numéricos y se toma como central su uso. Estas prácticas ponen en el centro el uso de modelos numéricos, mientras que en el caso de las secuencias del capítulo IV lo hacen más bien en el uso de modelos gráficos.

Las prácticas que se pretenden reproducir se ejercen actualmente en el plano profesional y de los problemas cotidianos; por ejemplo, por ingenieros bioquímicos o economistas al utilizar los datos para predecir el comportamiento de un fenómeno.

En este capítulo se presentan dos diseños con esta perspectiva.

- Elasticidad de resortes. Lo lineal.
- La caída de los graves. Lo cuadrático.

Organizamos el siguiente esquema de las prácticas de numerización de los fenómenos, en este se relacionan los modelos con el fenómeno y con letras itálicas se presentan las prácticas a desarrollar.

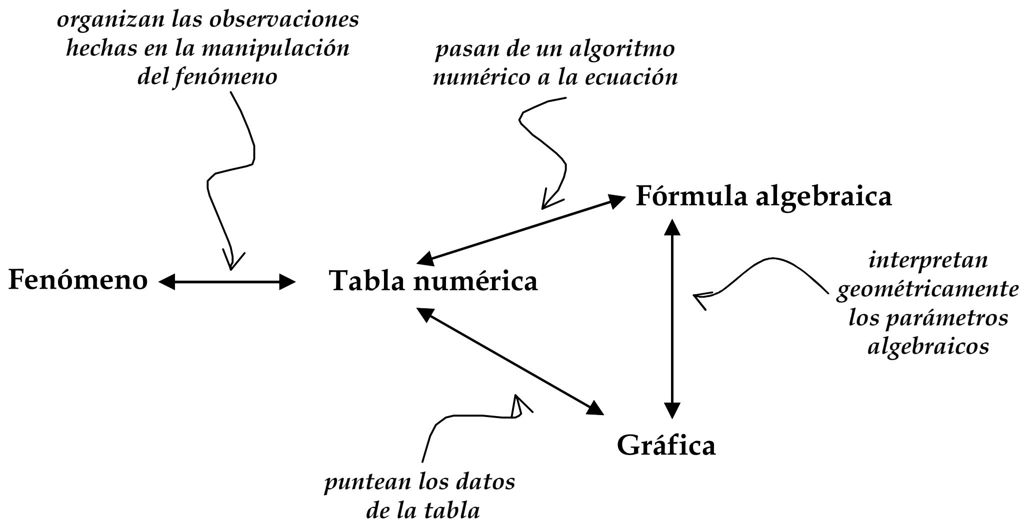


Figura 5.1. Esquema de las prácticas de numerización de los fenómenos

En este esquema se muestran las actividades que se desarrollan en las secuencia. A partir de la interacción con el fenómeno los estudiantes identifican las variables que intervienen en él, organizando los datos obtenidos en una tabla numérica. Identifican las características distintivas de esta tabla y, a partir de ésta, efectúan predicciones. Las formas de predicción utilizadas son diversas y nos interesa privilegiar formas de predicción que nos permitan coordinar los modelos numéricos (las tablas con los demás modelos en particular con un modelo algebraico (fórmula algebraica). Punteando los datos de la tabla e identificando las características de la gráfica obtenemos un modelo gráfico del fenómeno, hacen predicciones con la gráfica y discuten la validez y aplicación del método empleado. Por último, identificando los parámetros algebraicos con los geométricos establecen una relación entre las fórmulas y las gráficas.

5.2 El contexto histórico

"La naturaleza utiliza solamente las hebras más largas para tejer sus formas, de manera de que cada pequeño rincón de su tela revela a organización de la totalidad el tapiz".

Richard Feynman. El carácter de la ley física.

Una forma de proceder, presente en los siglos XIV, XV y XVI, para construir versiones de los hechos, es lo que llamamos inducción, y por inducción no nos referimos aquí a la inducción matemática, sino a la práctica que permite "anticipar" a partir de "un fragmento de un fenómeno" su comportamiento global.

Mediante la información y la experimentación en una cierta área puede "adivinarse" lo que puede ocurrir en una región no explorada. Se trata de algo un poco distinto de una exploración normal porque existen suficientes pistas en las zonas descubiertas para imaginar cómo es el territorio por descubrir.

Feynman (1965/1980) se preguntaba:

> "¿Qué pasa con la naturaleza que permite que ocurra esto, que sea posible imaginar, a partir de un fragmento, lo que será el resto? Ésta no es una pregunta científica: no sé qué respuesta darle y en consecuencia voy a contestar de forma no científica. Creo que se debe a que la naturaleza es simple y tiene, por lo tanto, una gran belleza".

Newton, ante una situación que conocía de forma incompleta, fue capaz de "adivinar" las leyes agrupando ideas muy cercanas a hechos experimentales; la distancia entre las observaciones y las verificaciones no era muy grande.

De alguna forma Wallis (citado en Dennis y Confrey, 2000) practicaba esta forma de inducción informal o científica. Esto es, él visualizaba un patrón, verificaba una serie de ejemplos y, después, asumía que su regla era valida en tanto “no encontrara una sospecha por la que podía fallar”.

Wallis sostenía que él estaba tratado de desarrollar una teoría del conocimiento que fuera superior al análisis lógico de resultados conocidos. Afirmó que Fermat “trató de manera totalmente errada ese tratado [es decir, el *Arithmetica Infinitorum*] el cual no era tanto para mostrar un método de demostrar cosas ya conocidas como para mostrar una manera de investigación o hallazgo de cosas aún desconocidas” (citado en Dennis y Confrey, 2000).

Dennis y Confrey (2000) mencionan que Wallis evoca abiertamente una aproximación empírica o heurística de la verdad matemática. Él se convence de la validez de sus matemáticas a través de una serie de conjeturas y confirmaciones. Sus argumentos centrales dependen de una coordinación de múltiples representaciones. Estas incluyen tablas numéricas, álgebra y geometría. Para Wallis una definición se vuelve razonable cuando emerge como un patrón en una representación, pero que también puede confirmarse a través de estar de acuerdo con otra. El que una idea sea razonable en un escenario nunca fue suficiente para Wallis. Sus primeras investigaciones, por lo general, se llevaron a cabo en el ***escenario de sucesiones numéricas y tablas. Después visualizaba una confirmación a través del álgebra y la geometría.***

Los trabajos de Newton, Wallis y Galileo, entre otros, nos muestran una práctica que sería central en las secuencias, a partir de la toma de datos de fenómenos construir modelos numéricos (tablas) encontrando patrones de comportamiento y prediciendo sobre los fenómenos, construir otros modelos, a partir de los datos y establecer una coordinación entre estos y los fenómenos, sus parámetros y las formas de predicción con cada modelo.

5.3 Condiciones experimentales

Los participantes en esta actividad fueron cuatro equipos de cuatro estudiantes del tercer semestre de Ingeniería Bioquímica del Instituto Tecnológico de Acapulco (con una edad entre 18 y 20 años). Consideramos, para la elección de los participantes, la buena comunicación entre ellos, esto es porque nos interesa la producción discursiva.

El arreglo experimental contempló una cámara "móvil" (que captó los detalles en la discusión general y las discusiones en los grupos, pero especialmente el desarrollo de un equipo), una cámara fija (que captó el panorama general del aula), una grabadora por equipo (que captó las discusiones en el equipo) y material del aula (pizarrón, retroproyector, sensor de movimiento y de temperatura, y calculadoras graficadoras).

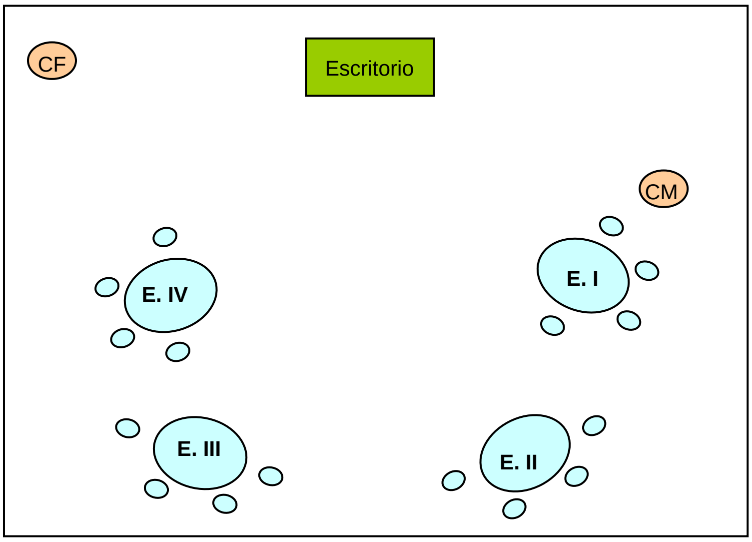


Figura 5.2. Montaje experimental

El montaje experimental se realizó en una aula, en este participaron dos profesores, el profesor A y el B y cuatro equipos de cuatro alumnos, Equipo I, II, III y IV. En cada mesa se instaló una grabadora que recogió las conversaciones de cada equipo. Además se tuvo, una cámara fija (CF), que captó el panorama general y otra móvil (CM), que captó las particularidades del desarrollo de la experimentación

En la conformación de los equipos se tomaron las mismas consideraciones que en la elección de los participantes en las secuencias del capítulo anterior.

Los participantes han aprobado los cursos de Matemáticas I y II, además de un curso de Estática y Dinámica: Física I. En el momento de la puesta en escena de la secuencia ellos cursan Ecuaciones Diferenciales (Matemáticas III) y Electricidad y Magnetismo (Física II).

5.3.1 Los actores

Los estudiantes participantes en la puesta en escena de las secuencias presentadas en este capítulo fueron dieciséis de un grupo de tercer semestre de la carrera de IBQ del Tecnológico de Acapulco. Ellos intervienen en estas secuencias como actividades extraclases, la experiencia se efectúa fuera de horario de clases y sin valor en la evaluación de sus materias. Sin embargo, la integración del grupo no fue muy buena, hubo 8 inasistencias y 6 retardos. Pero sobre todo, algunos de ellos no participaron activamente en sus equipos.

Los alumnos se organizaron en equipos de acuerdo a sus afinidades (ellos proponen los equipos); en un inicio se forman cuatro y a partir de la segunda sesión se organizaron en tres equipos.

Organización en la primera sesión.

Equipo 1: Denisse, Erika, Fandila y Leonel.

Equipo 2: Gerson, Miguel Mata, Marisol y Daniela.

Equipo 3: Leticia, Cristian, Julián y Liliana.

Equipo 4: Rubí, Omar, Saryt y Miguel Espinosa.

Organización de los equipos en la segunda, tercera y cuarta sesiones.

Equipo 1: Denisse, Erika, Fandila, Miguel Espinosa y Leonel.

Equipo 2: Gerson, Miguel Mata, Marisol, Cristian y Leticia.

Equipo 3: Rubí, Omar, Saryt, Julián, Daniela y Liliana.

De la misma forma que en el capítulo anterior intentamos incorporar un estudio acerca de la identidad de los actores participantes en los diseños. Para ello se diseñó un cuestionario (Anexo I) para ser aplicado a los estudiantes que participaron en las secuencias. En este estudio sólo se tomaron en consideración parcialmente tres aspectos, acerca de su situación socioeconómica, acerca de su desarrollo escolar y acerca de sus concepciones acerca de las matemáticas y de su papel social.

Datos del estudio Socioeconómico que se realizó a los estudiantes del Instituto Tecnológico de Acapulco que participaron en las secuencias de la numerización de los fenómenos

Tabla 5.1 Edad de los alumnos participantes

Edad	18 años	19 años	20 años	21 años
Número de alumnos	4	9	2	1
Porcentaje	25%	56.25%	12.5%	6.25%

Medios de información y de procesamiento que utiliza

Tabla 5.2 Uso de medios electrónicos

	Utilizan frecuentemente computadora	Utilizan frecuentemente calculadora	Tiene computadora en su casa
Numero de casos	15	16	11
Porcentaje	93.75%	100%	68.75%

Tabla 5.3 Se lee regularmente un periódico en su casa

	Periódicos locales	Periódicos nacionales	No se leen periódicos	Periódicos locales y nacionales
Número de casos	11	2	3	0
Porcentaje	68.75%	12.5%	18.75%	0

Tabla 5.4 Medios de información que utilizan

	TV	Radio	TV y periódico	Radio y TV	Radio, TV y periódico	Radio, TV e internet
Número de casos	1	1	3	4	3	4
Porcentaje	6.25%	6.25%	18.75%	25%	18.75%	25%

Tabla 5.5 Tiene teléfono en su casa

	Si	No
Número de casos	14	2
Porcentaje	87.5%	12.5%

"Estabilidad familiar"

Tabla 5.6 Escolaridad de los padres

	Superior	Carrera comercial	Medio superior	Secundaria	Primaria	Analfabeta	Otros
Padre	9		1	2	0	1	3
Madre	2	2	1	2	7	0	2

Tabla 5.7 Trabajan los padres

	Padre	Madre	Ambos	Trabaja sólo uno	Otros
Número de casos	13	8	6	9	1
Porcentaje	81.25%	50%	37.5%	56.25 %	6.25%

Tabla 5.8 Tiempo de habitar en su domicilio (en años)

	De uno a cinco	De seis a diez	Más de diez	Tiene casa propia
Número de casos	5	3	8	13
Porcentaje	31.25%	18.75%	50%	81.25%

Tabla 5.9 Viven con sus padres

	Con padre y madre	Solo con madre	Solo	Con familiares
Número de casos	11	2	1	2
Porcentaje	68.75%	12.5%	6.25%	12.5%

Tabla 5.10 Lugar de nacimiento

	Acapulco	En otra parte de Guerrero	En otra parte del país
Número de casos	11	3	2
Porcentaje	68.75%	18.75%	12.5%

Tabla 5.11 Lugar de origen de los abuelos

	Acapulco	En otra parte de Guerrero	En otra parte del país
Abuelo paterno	3	11	2
Abuela paterna	3	11	2
Abuelo materno	2	11	3
Abuela materna	2	11	3

Tabla 5.12 Número de hermanos

	0	1	2	3	4	5
Número de casos	1	6	5	1	1	2
Porcentaje	6.25%	37.5%	31.25%	6.25%	6.25%	12.5%

Tabla 5.13 Edad de sus padres

	35-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Padre	3	2	2	4	2
Madre	6	4	4	1	

Acerca de su desarrollo escolar

Tabla 5.14 Han reprobado alguna asignatura

	Ha reprobado materias	No ha reprobado materias	Ha reprobado matemáticas	No ha reprobado matemáticas
Número de casos	14	2	9	7
Porcentaje	87.5%	12.5%	56.25%	43.75%

Tabla 5.15 Promedio escolar

	7-7.9	8-8.9	9-10
Primaria	2	3	11
Secundaria	1	8	7
Bachillerato	1	10	5

Tabla 5.16 Tipo de escuela: privada o pública

	Privada	Pública
Primaria	4	12
Secundaria	1	15
Bachillerato	1	15

Tabla 5.17 Escuela donde curso el bachillerato

	Cebetis 14	Cebetis 116	Cobach 2	Cobach 16	Privada	Preparatoria	Otras
Número de casos	5	3	3	1	1	1	2
	Cebetis		Cobach		Otras		
	8		4		4		
Porcentaje	50%		25%		25%		

Acerca de sus concepciones acerca de las matemáticas y de su papel social

Tabla 5.18 Creencias del porque los estudiantes reprueban matemáticas

	Razones atribuibles a los alumnos	Razones atribuibles a los profesores	Razones atribuibles al contenido	Total de menciones
Número de casos	13	6	4	23
Porcentajes	56.52%	26.1%	17.39%	100%

	Solo a alumnos	Solo a profesores	Solo a contenidos	A profesores y alumnos	A profesores y contenido	A contenido y alumnos
Número de casos	7	0	2	5	1	1
Porcentajes	43.75%	0%	12.5%	31.25%	6.25%	6.25%

Tabla 5.19 ¿Porqué estudian?

	Porque me gusta	Por compromiso con su familia	Para ayudar a la familia	Para obtener un buen empleo	Para saber	Para ganar dinero
Número de casos	2	3	5	6	8	5
Porcentaje	4.65%	6.98%	11.63%	13.95%	18.6%	11.63%

	Por el país	Para ser alguien en la vida	Por la sociedad	Para enseñar	Para obtener un documento
Número de casos	2	7	1	1	3
Porcentaje	4.65%	16.28%	2.33%	2.33%	6.98%

Tabla 5.20 Que materia prefiere

	Física	Biología	Química	Matemáticas	Español	Total de menciones
Número de casos	3	8	12	4	1	28
Porcentaje	10.71%	28.57%	42.86%	14.28%	3.57%	100%

Tabla 5.21 Le gustan las matemáticas

	Si	No	Ni si ni no
Número de casos	7	7	2
Porcentaje	43.75%	43.75%	12.5%

Tabla 5.22 Motivos por los que les gustan las matemáticas

	Porque se me hacen fácil	Porque sirven para todo	Porque me gusta resolver problemas	Porque enseñan a razonar	Porque son un reto	Porque la tenemos que llevar a fuerzas
Número de casos	2	1	3	1	1	1
Porcentaje	11.77%	5.88%	17.65%	5.88%	5.88%	5.88%

Tabla 5.23 Motivos por los que no les gustan las matemáticas

	Porque son difíciles	Porque son aburridas	Porque se tienen que estudiar mucho	Porqué no encuentra aplicaciones	Porque no las entiendo
Número de casos	4	1	1	1	1
Porcentaje	23.53%	5.88%	5.88%	5.88%	5.88%

Tabla 5.24 Motivos por lo que son importantes las matemáticas

	Para la vida diaria	Para todo	Para aprender a razonar	Solo para hacer cuentas	Para el trabajo	Sirven en ingeniería	Como base para las otras ciencias
Número de casos	6	6	3	1	1	1	1
Porcentaje	31.58%	31.58%	15.79%	5.26%	5.26%	5.26%	5.26%

5.3.2 Las secuencias puestas en escena

La puesta en escena de las secuencias diseñadas se presenta en la siguiente tabla.

Sesión	Secuencia	Duración	Fecha (2001)
Primera	Elasticidad de resortes. Lo lineal Linealidad sin ruido	Tres horas	6 de diciembre
Segunda	Elasticidad de resortes. Lo lineal Linealidad con ruido	Dos horas y media	7 de diciembre
Tercera	Caída de los graves. Lo cuadrático Lo cuadrático sin ruido	Dos horas y media	11 de diciembre
Cuarta	El plano inclinado. Lo cuadrático Lo cuadrático con ruido	Tres horas	12 de diciembre

Tabla 5.25 Secuencias puestas en escena

5.4 Condiciones de las interacciones

Nuestro interés está centrado en la interacción a diferentes niveles, los estudiantes interactúan en su equipo, con los demás equipos y con el profesor.

La dinámica de la actividad es la siguiente: se plantea una cuestión, los equipos construyen una posición al respecto, argumentando ampliamente. Posteriormente, se establece un debate grupal sobre las diferentes posiciones construidas por los equipos utilizando los argumentos que se construyen en torno a cuestión planteada. El profesor actúa promoviendo el discurso y los consensos, de acuerdo al análisis predictivo del diseño.

El problema principal para el profesor es asumir una participación que fomente el debate, que no lo inhiba; sin embargo, en ocasiones, los alumnos intentan descifrar la opinión del profesor a lo largo de los debates y la piden, explícitamente, en el transcurso del discurso o al final de la actividad.

5.5 Objetivos

El objetivo fundamental en el diseño de esta secuencia es construir un contexto argumentativo donde los estudiantes y el profesor, interactivamente en el aula, ejerzan prácticas sociales construyendo argumentos, herramientas y significados a partir de la interacción con un fenómeno

Identificamos, pues, algunas actividades involucradas, dentro lo que llamamos prácticas de modelación, que son el foco de nuestra atención.

- Emplear herramientas específicas y modelos particulares para describir hechos, construyendo versiones de éstos.
- Construir argumentos a través de conjeturas y confirmaciones basadas en la inducción general.
- Argumentar y validar versiones utilizando una coordinación de múltiples herramientas.
- Desarrollar formas de predicción y argumentos de su validación.
- Elaborar categorías descriptivas y explicaciones de nuevas experiencias utilizando conocimientos que tienen, derivados de otros contextos y frente a otras experiencias.

Las secuencias que se desarrollaran son dos.

- Elasticidad de resortes. Lo lineal.
- La caída de los graves. Lo cuadrático.

5.6 Secuencias

1. Elasticidad de resortes. Lo lineal

Objetivo. Los estudiantes construyen y utilizan como herramienta lo lineal en interacción con un fenómeno, la elasticidad de resortes.

Los estudiantes obtienen una connotación física de “variable”, la variable distancia y la variable peso. Los estudiantes construyen un modelo numérico de la elasticidad de resortes identificando las características de la tabla, utilizándola para predecir e identificando los parámetros de esta tabla. Construyen la gráfica distancia – peso como modelo gráfico del fenómeno y el modelo algebraico. Establecen un esquema que coordina los diferentes modelos con el fenómeno, sus parámetros y las formas de predecir.

2. La caída de los graves. Lo cuadrático.

Objetivo. Los estudiantes construyen y utilizan como herramienta lo cuadrático en interacción con un fenómeno, la caída de los graves.

Los estudiantes construyen un modelo numérico de la caída de los graves identificando las características de la tabla, utilizándola para predecir e identificando los parámetros de esta tabla. Construyen la gráfica distancia–tiempo y la gráfica velocidad-tiempo como modelos gráficos del fenómeno y el modelo algebraico. Establecen un esquema que coordina los diferentes modelos con el fenómeno, sus parámetros y las formas de predecir.

5.7 Secuencia 1: *“Elasticidad de resortes. Lo lineal”*

En esta secuencia proponemos un contexto discursivo con la finalidad de que los participantes, ejerciendo prácticas de numerización de los fenómenos, construyan lo lineal como herramienta para interpretar y transformar fenómenos de la naturaleza, en este caso con la elasticidad de resortes.

5.7.1 Las prácticas escolares sobre linealidad

Analizamos los esquemas didácticos que existen en el discurso escolar al abordar lo lineal en el nivel medio superior y los primeros semestres del nivel superior.

La recta y su ecuación se abordan en los cursos de geometría analítica en el nivel medio superior. Los esquemas de las prácticas utilizadas para abordar estos temas son diversos, entre ellos encontramos los siguientes.

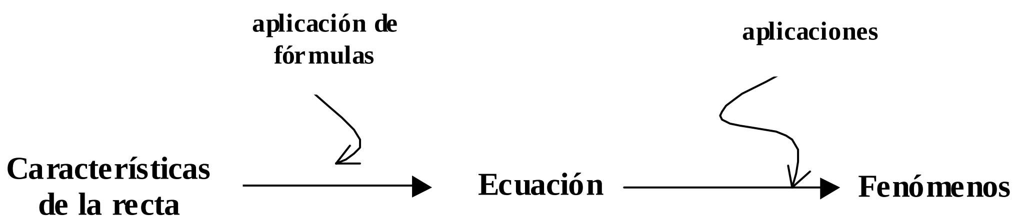


Figura 5.3. Esquema del tratamiento escolar de lo lineal, recta-ecuación-fenómeno

A partir de algunas características de la recta (por ejemplo dos puntos, el ángulo de la recta con el eje x y un punto, la intersección con el eje y y la tangente del ángulo que forman la recta y el eje x, las intersecciones de la recta con los ejes x y y, etc.), aplicando algunas fórmulas (dadas o deducidas), se obtiene su ecuación. En algunas ocasiones se tratan aplicaciones en algunos fenómenos.

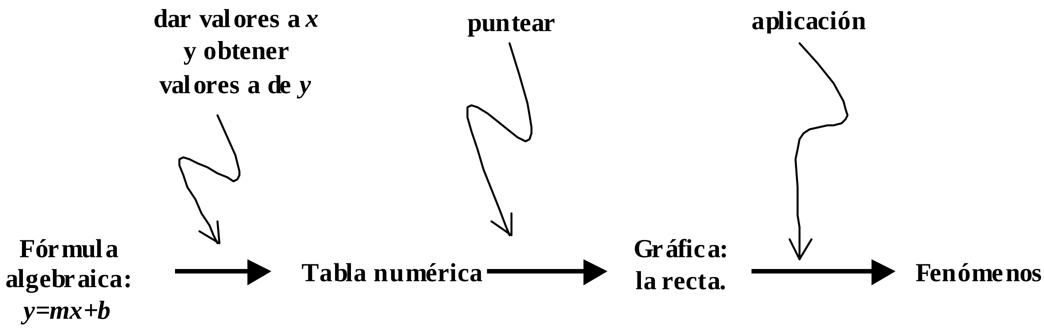


Figura 5.4. Esquema del tratamiento escolar de lo lineal: ecuación-tabla-recta-fenómeno

En otro esquema reproducido en el discurso escolar se parte de la ecuación, se forma una tabla dándole valores a x para obtener los de y. Posteriormente se grafican los datos de la tabla y se unen por segmentos de recta. En pocas ocasiones se tratan aplicaciones.

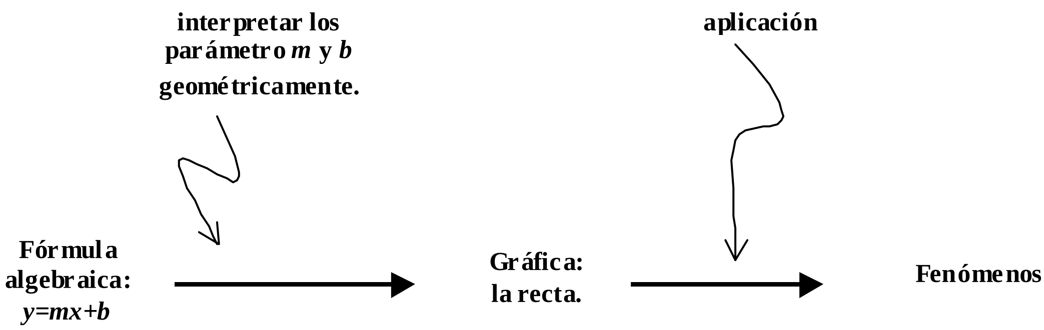


Figura 5.5. Esquema del tratamiento escolar de lo lineal: ecuación-recta-fenómeno

Otra práctica, que es presentada en el esquema de la figura 5.5, que es menos frecuente, es partir de la ecuación e, identificando los parámetros algebraicos con los geométricos, se gráfica la recta sin utilizar la tabla numérica. Un argumento para privilegiar este tipo de prácticas es que de esta forma la recta se ve como objeto y permite realizar transformaciones con ella como objeto; de otra forma se ve como un proceso de deletrear la recta.

Sin embargo, existen otros esquemas, en ocasiones no escolares, no precisamente en el discurso matemático escolar, donde se desarrollan prácticas donde vive la linealidad. Un ejemplo de estos es el sentido que se le da a la linealidad en los laboratorios de química, o física, o en las prácticas de interpretación de datos por ciertos economistas.

El esquema propuesto en el diseño de la secuencia es el siguiente:

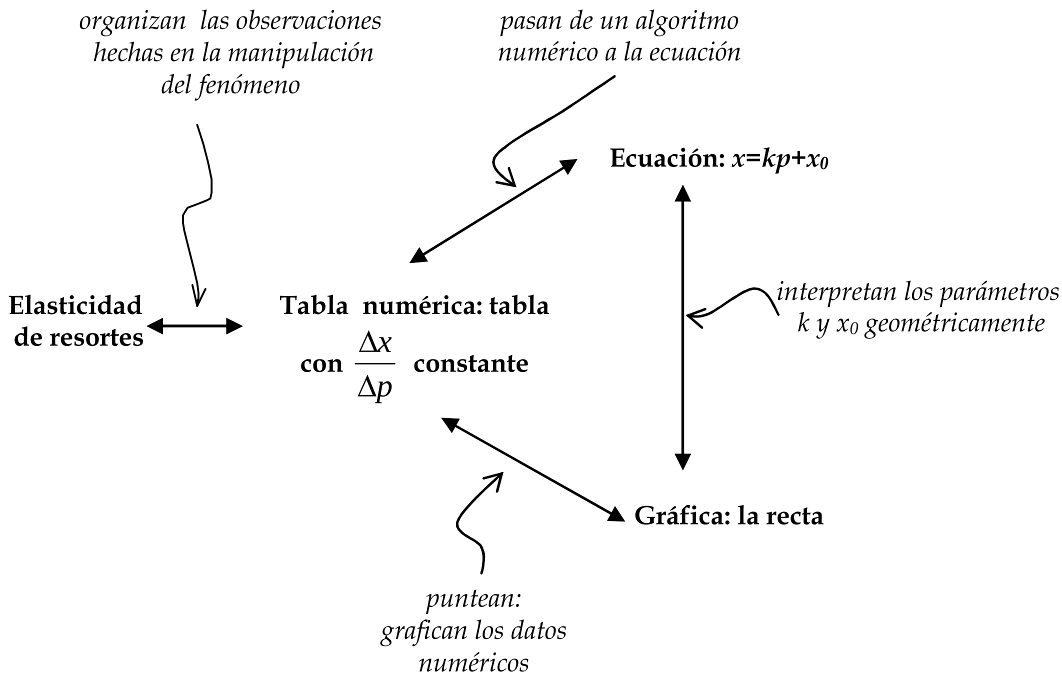


Figura 5.6. Esquema de las prácticas a desarrollar en la secuencia

5.7.2 Hipótesis predictivas del diseño

La secuencia contiene ciertas hipótesis predictivas de acuerdo a la metodología que hemos adoptado. La hipótesis predictiva global consiste en que los estudiantes y el profesor construyen diferentes modelos para explicar un fenómeno e intervenir en él, la elasticidad de resortes. En general construyen diferentes modelos (identificando sus características distintivas y sus parámetros), hacen predicciones del fenómeno utilizando cada modelo y establecen una coordinación entre ellos.

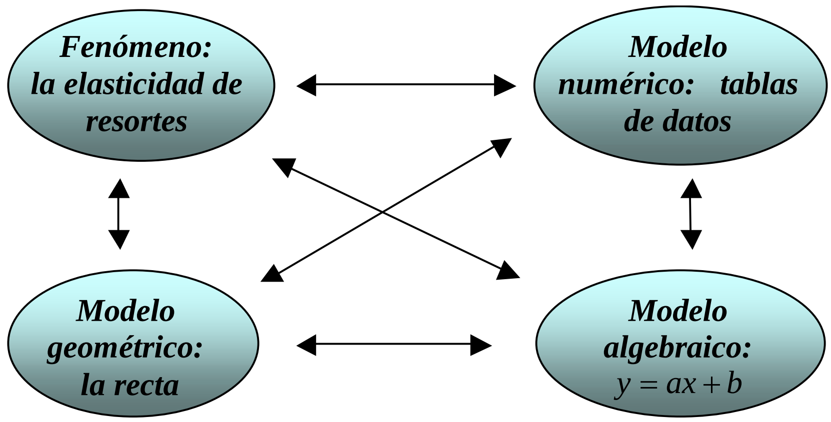


Figura 5.7. La articulación entre el fenómeno y sus diferentes modelos, numérico, gráfico y algebraico

Específicamente, en esta secuencia, las prácticas sociales de numerización de los fenómenos en el aula significan lo siguiente:

- identificar las características del fenómeno en el modelo;
- utilizar a éste como una herramienta para entender e intervenir en él, en este caso hacer predicciones con el modelo; y
- coordinar los diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción con el fenómeno a modelar.

Estas prácticas están relacionadas con las fases de modelación que hemos definido anteriormente:

- Construcción del modelo
- Tratamiento de los modelos
- Construcción de esquemas que articulen los diferentes modelo, con el fenómeno, sus parámetros y formas de tratamiento (predicción).

Las predicciones locales son en torno a lo que esperamos que suceda al ejecutarse la secuencia por los estudiantes en cada fase. A partir de la interacción con el fenómeno (ir colocando pesas y midiendo el estiramiento) los estudiantes identificaran las variables que intervienen, el peso y la posición del portapesas. Los significados de "variable", que los estudiantes construyen están en concordancia con el contexto social donde interactúan; por ejemplo, variar el peso significa poner o quitar peso del portapesas.

Con los datos obtenidos en la experimentación los estudiantes organizan una tabla y discuten las características distintivas de esta tabla (la característica que las distingue de otras tablas que no son modelos lineales de un fenómeno), a incremento constante de una variable se obtiene incrementos constantes de la otra o la razón de estos incrementos es constante.

Construir la tabla con los datos, o manipular estos datos, no significa que han construido un modelo numérico. ¿Cuándo podemos decir que el modelo numérico es construido por los estudiantes? Son dos condiciones las que establecemos para este propósito. El modelo no queda establecido hasta que quedan establecidas las distinciones con lo que no es, y hasta que pueden operar con él como instrumento; es decir, queda constituido como herramienta.

Aún cuando no queden establecidas del todo estas características distintivas el trabajo lo orientamos a la predicción con esta tabla. No es primero un proceso y luego el otro, son procesos que no son demarcados por la secuencialidad. Por ejemplo, ¿cuál es la posición del portapesas después de colocar 50 gramos? Los estudiantes desarrollan diferentes formas de predicción y argumentan sobre su validez y su aplicación. Esto es utilizar la tabla como herramienta para predecir e intervenir en el fenómeno.

Las formas de predicción que surgen en este proceso son el método del "teorema de Tales", "la regla de tres" y el algoritmo multiplica el peso por la razón entre los incrementos y suma la posición inicial, te da la posición.

Nos interesa **privilegiar** la última forma de predicción porque consideramos que este algoritmo es una **forma de construir el modelo algebraico:** $x=kp+x_0$.

Graficamos en el plano los puntos que definen los datos de la tabla e identificamos las características de la gráfica peso–posición como un modelo del fenómeno, la recta. Los estudiantes hacen predicciones con la gráfica y discuten la validez y aplicación del método empleado, interpolación lineal. Los dos procesos presentes para la construcción de un modelo, establecer las distinciones con lo que no es y operar con él como instrumento, son necesarios en este caso para la construcción de un modelo gráfico.

Variando las condiciones de la situación cambiando el resorte (variando la elasticidad) se construyen argumentos a partir de coordinar la inclinación de la recta, la elasticidad del resorte y la razón de incrementos y el parámetro k. Haciendo variar la posición inicial de la regla, construimos argumentos a partir de coordinar la posición inicial del portapesas, la "altura de la recta" y el parámetro x_0. Aquí resaltamos la importancia que concedemos a la coordinación entre modelos y fenómeno.

Los estudiantes y el profesor construyen un esquema que articula los diferentes modelos, sus parámetros y las formas de predicción con el fenómeno a modelar.

5.7.3 Variables del diseño

Variantes.

- No dar la condición inicial (si $x = 0$; $y = 50$), dar otro dato.
- Dar sólo dos datos.

- Dar datos con “ruido”.
- Dar datos con valores negativos.
- Dar tabla de datos con razón de cambio negativa.
- Modificar el incremento de p de tal forma que no sea de 20 en 20, o que no sea constante.
- Preguntar por el valor de x cuando p está en medio de dos valores; por ejemplo, cuando p = 30 (ya que 30 esta entre 20 y 40) con la finalidad de explorar cómo es que surge el método del “teorema de Tales”.

Variables de la actividad.

- Partir de una tabla de datos con características lineales y con condición inicial $(0,0)$.
- Partir de una tabla de datos con características lineales y con condición inicial $(0, y_o)$, con y_0 diferente de cero.
- Partir de una tabla de datos con características lineales, con ruido.
- Tomar la tabla de datos experimentales utilizando sensores.

Actividades.

- Contextualizar la situación, el contexto puede ser, por ejemplo, modelar la elasticidad de resortes o el movimiento uniforme.
- Introducir los datos en la calculadora. Hacer una tabla de datos con ella.
- Identificar la característica de esta tabla. Después utilizar la calculadora para encontrar las diferencias y la razón de cambio.

- Hacer predicciones con la tabla y reflexionar sobre los métodos utilizados (¿por qué funciona la regla de tres? Hay equivalencia entre ellos).
- Graficar los datos.
- Identificar las características de esta gráfica, una recta.
- Hacer predicciones con la gráfica y buscar una relación con los métodos de predicción numéricos.
- Obtener una fórmula que modele el fenómeno.
- Elaborar un esquema donde se articulen los diferentes modelos lineales, las formas de predicción con éstos, así como los parámetros de los modelos con las características físicas del fenómeno.

5.7.4 Las fases de la secuencia

1. *La experimentación*. Los estudiantes montan el siguiente arreglo experimental, colocan pesas en el portapesas y toman mediciones de las posiciones del portapesas.

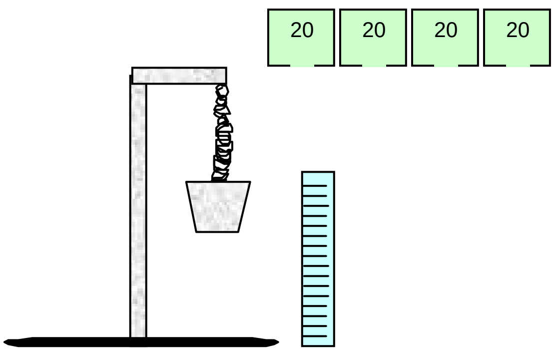


Figura 5.8. El fenómeno, la elasticidad del resorte

2. *La descripción*. Los estudiantes describen (con palabras) lo que observan; es decir, construyen versiones en lenguaje natural. Identifican las variables que intervienen en el fenómeno, el peso y

la posición del portapesas, así como la relación entre ellas. Los estudiantes obtienen una connotación física de “variable”, variar el peso significa poner o quitar peso del portapesas. Hacen predicciones por tanteo.

3. *La tabla numérica como un modelo lineal*. Los datos obtenidos en la experimentación se organizan en una tabla, se identifican las características distintivas de esta tabla (la característica que las distingue de otras tablas que no son modelos lineales de un fenómeno), a incrementos constantes de una variable se obtienen incrementos constantes de la otra o la razón de estos incrementos es constante.

4. *La regla de tres*. Se desarrollan diferentes formas de predicción y se argumenta sobre su validez y su aplicación. Las formas de predicción que surgen en este proceso son el método del “teorema de Tales”, la regla de tres y el algoritmo siguiente: multiplica el peso por la razón entre los incrementos y suma la posición inicial y da la posición. Este último método le llamaremos el “método de Leonel”. Se discute sobre la validez de la regla de tres moviendo la condición inicial. Nos interesa privilegiar el “método de Leonel” para predecir porque consideramos que este algoritmo es una forma de construir el modelo algebraico.

5. *La ecuación $x = kp + x_0$ como modelo algebraico.* A partir del método de Leonel u otro proceso construir el modelo algebraico.

6. *La figuración de las variables*. Identificar las características de la gráfica peso–posición como un modelo del fenómeno, la recta.

7. Argumentación a partir de coordinar la inclinación de la recta y la elasticidad del resorte y la razón de incrementos.

8. Argumentación a partir de coordinar la posición inicial del portapesas y la “altura de la recta”.

9. *El esquema*. Elaboración de un esquema que coordine la elasticidad de resortes, sus diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción.

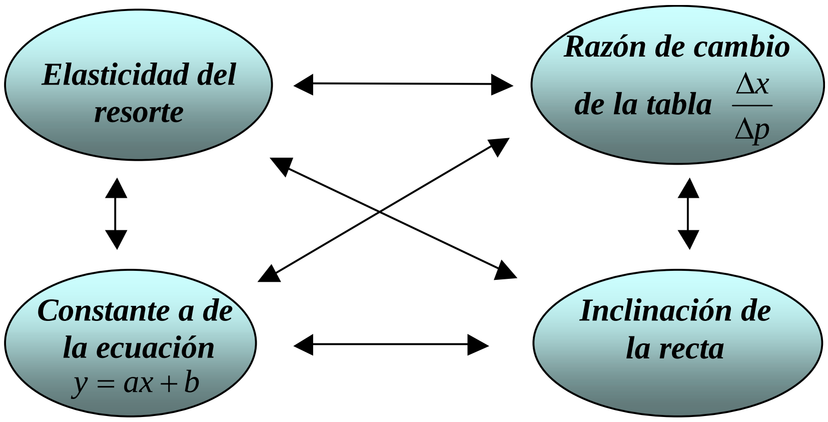


Figura 5.9. Coordinando la elasticidad del resorte con los parámetros de los modelos

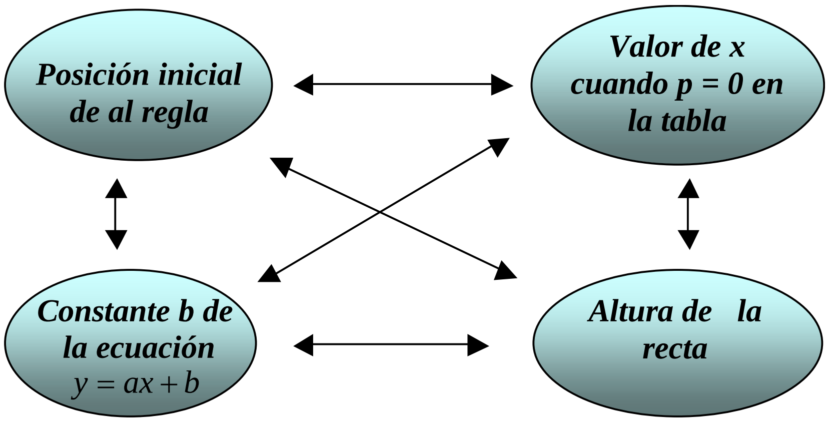


Figura 5.10. Coordinación entre la posición inicial de la regla, la posición inicial x_0 en la tabla, la altura de la recta y el coeficiente independiente b de la ecuación

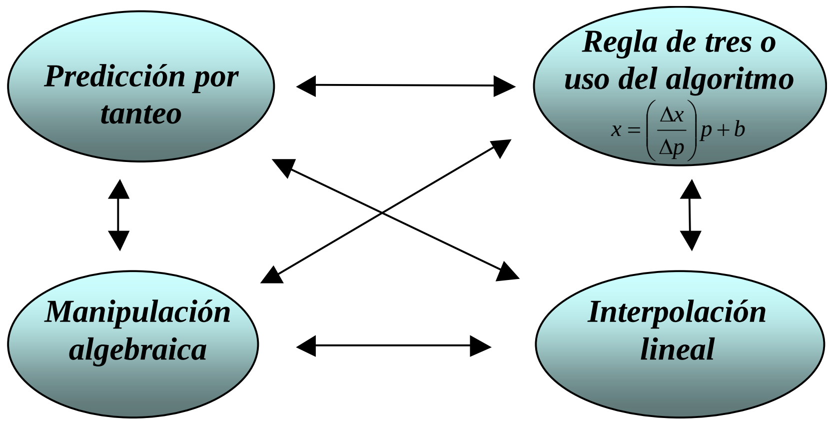


Figura 5.11. Coordinación entre las formas de predicción con diferentes modelos

5.7.5 Descripción de las fases de la secuencia

1. ***La experimentación***

- Se les proporciona a los estudiantes, resortes, regla, soporte universal, portapesas y pesas de 20 gramos.
- "Vamos a estudiar la elasticidad de resortes; es decir, qué es lo que sucede si colocamos pesos al resorte"
- Monten un arreglo y tomen datos con estos materiales.

Los estudiantes montan el arreglo de la figura 5.8. Colocan las pesas en el portapesas y toman mediciones de las posiciones del portapesas.

2. ***La descripción***

- "¿Describan lo que han hecho?"

Los estudiantes describen (con palabras) lo que observan; es decir, construyen versiones en lenguaje natural.

- "¿Qué variables intervienen en este fenómeno?"

Identifican las variables que intervienen en el fenómeno, el peso y la posición del portapesas, así como la relación entre ellas.

- "¿Qué significa que el peso sea una variable?"

Los estudiantes obtienen una connotación física de "variable", variar el peso significa poner o quitar peso del portapesas.

- "¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 70 gramos?"

Como no cuentan con pesas de 10 gramos no pueden colocar 70 gramos y se obligan a predecir con los datos que tienen. Una primera forma de predicción es por tanteo.

3. ***La tabla numérica como un modelo lineal***

- "¿Cómo podrían organizar los datos obtenidos?"

Se organizan en una tabla.

- "¿Qué características tiene esta tabla?"

Los estudiantes discuten las características distintivas de esta tabla (la característica que las distingue de otras tablas que no son modelos lineales de un fenómeno), a incrementos constantes de una variable le corresponden incrementos constantes de la otra, o la razón de estos incrementos es constante.

La parte central de las actividades en estas fases de la secuencia consiste en *establecer las características de la tabla* sin que llegue a ser necesaria esta identificación para continuar a la fase siguiente, quedando la posibilidad latente de identificar estas características en la fase siguiente.

4. ***La regla de tres***

- "¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 50 gramos?"

Aquí la forma de predicción que se utiliza es la del "teorema de Tales": "sí 50 está a la mitad de 40 y 60 entonces la posición debe estar a la mitad de 60 y 90; es decir, en 75".

- "¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 45 gramos?"

Utilizan el método del "teorema de Tales", sí 45 está a la cuarta parte de 40 y 60 entonces la posición debe estar a una cuarta parte de 60 y 90, o sea 67.5.

- "¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 28.3 gramos?"

Con 28.3 gramos ya no es posible utilizar el método anterior simplemente y la mayoría aplica la regla de tres, 20 es a 30 como 28.3 es a x. Se multiplica 30 por 28.3 y se divide por 20.

Algunos estudiantes encuentran cuánto se estira el resorte por cada gramo, o sea 1.5 milímetros por gramo. Utilizan el algoritmo siguiente: multiplica el peso por 1.5 y te da la posición que me pides.

- "¿Por qué funciona el método que emplearon?"

Se discute sobre la validez de la regla de tres moviendo la condición inicial. Es decir, ahora el indicador del portapesas no señala al cero en la regla; cuando no tiene peso señala 60 milímetros. Si embargo, los estudiantes siguen utilizando la regla de tres en sus predicciones; el contexto los hace reflexionar sobre la validez de la regla de tres. Nos interesa privilegiar la última forma de predicción porque consideramos que este algoritmo es una forma de construir el modelo algebraico.

5. ***La ecuación $x = kp + x_0$ como modelo algebraico***

- "¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan ***p*** gramos?"

Utilizando el algoritmo anterior la respuesta se obtiene multiplicando 1.5 por p y se obtiene el valor de x.

- "¿Podrían dar una fórmula algebraica para expresar esto?"

Los estudiantes dan la ecuación $x = 1.5p$.

6. ***La figuración de las variables***

   - "¿Cómo graficarían los datos de la tabla?"

   Los estudiantes puntean los datos de la tabla.

   - "¿Qué características tiene la gráfica?"

   Identifican los datos punteados con la gráfica de una recta.

   - "¿Cómo calculan la posición del portapesas después de colocar 64 gramos utilizando la gráfica?"

   Localizan en el eje de los pesos (la abcisa) la ordenada 64 y buscan la ordenada correspondiente en el eje ***x*** (de las ordenadas).

7. ***Argumentación a partir de coordinar la inclinación de la recta, la elasticidad del resorte y la razón de incrementos***

   - "¿Cómo debe ser el resorte para que la recta obtenida sea más vertical que la primera?"
   - "¿Cómo debe ser el resorte para que la recta obtenida sea más horizontal que la primera?"

8. ***Argumentación a partir de coordinar la posición inicial de la regla y la "altura de la recta"***

   - "¿Cómo debe ser el resorte para que la recta obtenida sea como la primera pero más arriba?"
   - "¿Cómo debe ser el resorte para que la recta obtenida sea como la primera pero más abajo?"

9. El esquema

Elaboración de un esquema que coordine la elasticidad de resortes, sus diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción.

Un posible esquema es el siguiente.

	Características de la linealidad en el sistema	***Parámetros***	***Parámetros***	***Métodos de predicción***
Fenómeno: elasticidad de resortes	Experimental: a incrementos iguales de peso se obtienen incrementos iguales en la elongación del resorte	Elasticidad del resorte	Posición inicial del indicador del portapesas en la regla	Ensayo-error
Tabla numérica	Δp constante implica Δx constante o $\frac{\Delta x}{\Delta p}$ constante	$\frac{\Delta x}{\Delta p}$	Posición inicial $\boldsymbol{x_0}$	Regla de tres directa o aplicando el algoritmo: multiplica la razón de cambio $\frac{\Delta x}{\Delta p}$ por el peso y te da la elongación
Gráfica: la línea recta	Puntos alineados	Inclinación de la recta	Altura de la recta	Interpolación lineal
Expresión algebraica: ***x=k p+b***	Expresión algebraica de la forma ***x=k p+b*** donde ***k*** y ***b*** son constantes	Coeficiente de ***p: k***	Coeficiente independiente: ***b***	Manipulación algebraica de la fórmula
Expresión verbal	"el resorte se estira proporcionalmente con respecto del peso"			Discusión
Semejanza de figuras	Semejanza de triángulos	Razón geométrica		Teorema de Tales

Tabla 5.26. Esquema de la elasticidad de resortes con los modelos construidos

5.7.6 Puntos de discusión, la linealidad

El análisis *a posteriori* de los datos empíricos lo hacemos considerando el análisis predictivo; sin embargo, éste no lo hacemos en forma puntual con respecto a las predicciones del diseño. Esto significa que haremos una selección de los episodios de acuerdo al análisis predictivo pero, también, al interés teórico desde nuestra perspectiva, al interés de mostrar datos que sustenten el acercamiento teórico que adoptamos en nuestra disciplina.

Enseguida planteamos los puntos de discusión derivados de la experiencia de la puesta en escena del diseño.

Identificando las características de la linealidad en los modelos

- Ocurre un proceso de identificación de variables y de seleccionar las variables a considerar.
- Una tabla numérica es un modelo lineal numérico si tenemos que a un incremento constante de una variable le corresponde un incremento constante de la otra. Esta caracterización de la linealidad en las tablas es complicada si en los datos no se muestran incrementos constantes, o cuando los datos tienen "ruido".
- Una caracterización alternativa es la razón de cambio constante, o casi constante.
- Cuando las tablas de datos son muy grandes y se cuenta con medios los estudiantes, en lugar de recurrir al calculo de incrementos y razones de cambio, grafican los datos, o buscan algoritmos para que este proceso no se realice manualmente y se utilicen las funciones de la hoja de calculo de una calculadora. Al proceder así los actores tienden a usar modelos geométricos, la recta, o modelos algebraicos.
- En esta experiencia se encuentran evidencias de que el algoritmo es un vínculo entre los modelos numéricos y los algebraicos, de otra forma, entre tablas de datos y fórmulas.

La diversidad en las formas de predicción

Los participantes utilizan diferentes métodos para predecir la posición del portapesas.

- El método de predicción que hemos llamado el "método del teorema de Tales" es el que se presenta inicialmente.
- Al predecir la posición del portapesas cuando los datos dificultan "el método del teorema de Tales", los estudiantes cambian el método de predicción usado, generalmente es "la regla de tres".
- Este método no es bien utilizado y lleva a resultados diferentes a los datos que se proporcionan. Esto lleva a reflexionar sobre la utilización del método.
- Calcular cuánto se estira el resorte por cada gramo, es decir, cómo cambia la posición con respecto del peso, es una construcción surgida de la actividad de predecir en este contexto.
- La razón de cambio emerge ligada a un método de predicción que hemos llamado "el método de Leonel".
- Aún cuando algunos actores utilizan el algoritmo "multiplico 1.5 por el peso y le sumo la posición inicial", no plantean el modelo algebraico $x = 1.5p + 25$.
- La razón de cambio, el coeficiente de p, obtiene su significado al utilizarse como herramienta para predecir la posición del portapesas. En este sentido, se plantea una estrecha relación entre las herramientas, la razón de cambio, y las practicas, la de predecir con un modelo lineal.
- Por iniciativa de los estudiantes o por sugerencia del maestro los modelos geométricos son utilizados para predecir. Este método es el que hemos llamado de "interpolación lineal", localizamos el punto en el eje x trazamos una recta paralela al eje y hasta que

interseque la recta, luego una recta paralela al eje x, que pase por la intersección anterior y leemos el punto en el eje y.

- Los métodos planteados anteriormente no necesariamente aparecen en el orden en que ha sido expuestos. En ocasiones los actores plantean inmediatamente el modelo algebraico o el "método de Leonel" para hacer predicciones.

Los estudiantes construyen esquemas que relacionan el fenómeno con sus modelos, las características físicas con los parámetros de los modelos y los métodos de predicción en diferentes modelos.

- Los estudiantes relacionan la elasticidad del resorte con la razón de cambio de la tabla, la inclinación de la recta y el coeficiente de la variable p en la fórmula.
- Los estudiantes relacionan la posición inicial del portapesas, el dato inicial en la tabla, la altura de la recta y el valor del término independiente en la fórmula.
- Se relacionan los métodos de predicción.
- En estos esquemas no necesariamente presentan todas las relaciones planteadas en los puntos anteriores.

En la actividad no se espera que los participantes caractericen primero la linealidad en los modelos para después poder predecir y después establecer esquemas de los modelos y el fenómeno, estos procesos no son secuenciales. Estos procesos tampoco son niveles que intentan clasificar el desarrollo cognitivo de los actores en el desempeño de la secuencia.

Una tabla se constituye en un modelo lineal hasta que los estudiantes no sólo identifican las características de la linealidad en la tabla, sino que también pueden distinguirlas de otras tablas; es decir, pueden establecer una distinción con lo no lineal. Por esto planteamos como parte de la secuencia lo no lineal. Se constituye hasta que es utilizado como herramientas; en este caso, es utilizado para predecir. Además, establece diferentes relaciones con el fenómeno modelado y otras construcciones, con otros modelos lineales.

El proceso de construcción de los modelos se refiere a tres prácticas, la caracterización de la linealidad en el modelo, la utilización como herramienta y el establecimiento de una red de significados de la linealidad estableciendo esquemas. Las prácticas están relacionadas con los procesos de la modelación que hemos propuesto, construcción, tratamiento y establecimiento de esquemas de los modelos.

5.7.7 Algunos episodios de la puesta en escena de la secuencia

La experimentación se efectuó en cuatro sesiones con una duración entre dos y tres horas. Se transcribieron cada una de las grabaciones de audio (una por equipo) y las de video.

Los episodios se han elegido de acuerdo a los siguientes criterios:

- Muestra elementos acerca del análisis predictivo.
- Se establece un contexto discursivo rico en la producción de argumentos.
- Muestra evidencias o se establecen como argumento de las afirmaciones teóricas.

Episodio 5.1.1 ***"Hay muchas variables pero sólo escoge las que importan"***

En la sesión 1, la elasticidad de resortes, linealidad sin "ruido", el Equipo 2 discute la pregunta ¿cuáles son las variables que intervienen en el fenómeno?

Marisol: Se trata de un resorte al que se le va agregar peso de 20 gramos cada uno viendo en una tabla los datos.

Daniela: Con cero, igual a cero. Con veinte, igual a treinta. Hay que hacer una regla de tres, la característica de esta tabla es que va de 20 en 20 y de 30 en 30.

Miguel: Que hay proporcionalidad.

Marisol: ¿Qué variables intervienen en el fenómeno?, la fuerza de gravedad, el peso, elasticidad del resorte..., mmm.

Daniela: Son 3 variables.

Gerson: La posición del portapesas también. Si son de 70 gramos se hace regla de 3.

Miguel: ¿Qué dices? Las variables son más, son muchas.

Marisol: ¿Cuáles dices tú?

Miguel: Lo que se estira el resorte, el resorte..., lo que mide el resorte, la regla, si también la gravedad, las pesas,...

Daniela: Sí, ya párale. Hay muchas variables, pero sólo escoge las que importan.

Marisol: Mira, se trata de un resorte al que se le va poniendo peso de 20 gramos cada uno y se va estirando, las variables son el peso y lo que se estira; sí, está aquí en una tabla los datos.

Miguel: ¡Aja!

Daniela: ¿Y las demás?

Marisol: Está bien, también ponlas pues.

Miguel: No, no las pongas.

La modelación implica un proceso de separar lo que se quiere modelar de todo lo constitutivo del modelo. Este proceso no es mediato y es motivo de debates.

Episodio 5.1.2 ***El método del "Teorema de Tales"***

En la misma sesión que el episodio anterior la pregunta que analiza el equipo 1 es ¿Cuál será la posición del resorte sí colocamos 50 gramos en el portapesas?

Erika: ¿Cuánto te salió?

Denisse: 75 milímetros.

Fandila: A mí también.

Erika: ¿Cuánto te salió con 45 gramos?

Ahora analizan la pregunta ¿Cuál será la posición del resorte sí colocamos 45 gramos en el portapesas?

Fandila: No me sale.

Erika: Es igual que el anterior, 45 está entre 40 y 60, tomas la mitad y luego la mitad, debe de estar a una cuarta parte de 60 y 90. (*Método del teorema de Tales"*).

Maestro: ¿Cómo van?

Erika: Bien.

Maestro: ¿Cuál es el resultado con 50 gramos?

Erika, Fandila y Denisse: 75 milímetros.

Maestro: ¿Por qué?

Erika: Porque 50 está en medio de 40 y 60 y 75 esta en la mitad de 60 y 90.

Lety: Yo lo hice con una regla de tres. ¿Está bien?

Episodio 5.1.3. ***"Siempre funciona la regla de tres"***

Se sigue la interacción en el equipo 1.

Maestro: (*Para sacarlos de este esquema se pregunta*) ¿Si colocamos 39.45 gramos?

Los estudiantes, al tener dificultades para aplicar el método anterior, utilizan regla de tres.

Denisse: Es 59.175 milímetros.

...

Erika: Sí, 20 es a 30 entonces 39.45 es a x. Entonces multiplicamos 30 por 39.45 y nos da 1183.5; luego dividimos por 20 y nos da 59.175 milímetros.

Se modifica la condición inicial; es decir, la regla se coloca en otra posición, cuando el portapesas esta vacío la posición de éste es 45 mm., se pregunta,

Maestro: ¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 70 gramos?

Fandila: 97.5, porque 70 esta entre 60 y 80 y 97.5 esta entre 90 y 105 (*el argumento es el "método del teorema de Tales"*).

Maestro: Y, ¿sí se colocan 87.13 gramos?

Erika: Se multiplica 105 por 97.13 y nos da 10198.65, luego se divide por 80 y nos da 127.48, (*aplican regla de tres*).

Maestro: ¿Esta bien el resultado? ¿Sí checa el resultado con los demás datos? (*se intentan que encuentren argumentos contextuales para verificar su resultado*).

Erika: Sí, está bien.

Denisse: Nó, eso sí que está mal, no puede rebasar a 120.

Maestro: ¿Por qué?

Denisse: Porque si pones 100 tienes 120; si pones menos peso no puede estirarse más el resorte (*construyen argumentos contextuales*).

Fandila: Si se colocan 97.13 gramos el resorte se estira 127. No puede ser.

Maestro: Entonces, ¿no funciona siempre la regla de tres?

Lety: Sí, nada más que no se hace así, se tiene que restar 45 a 165.

Episodio 5.1.4 ***"El método de Leonel"***

Continúa la interacción en el equipo 1.

Leonel: Miren, les voy a explicar mí teorema, ¿cuánto se estira en un gramo?

Lety: .75

Leonel: ¡Aja!

Erika: ¿Por qué?

Leonel: Tú tranquila chiquita, que todavía no termino.

Lety: Mira Erika, estamos en 80 y son 105, y si pones 100 son 120, con 20 gramos se estira 15 milímetros con un gramo se estira .75 milímetros.

Denisse: O sea 20 entre 15, nó, nó, al revés 15 entre 20.

Leonel: Bueno ¿ya? Son 97.3 gramos. Multiplicar .75 por 97.3 y nos da... ¿Cuánto nos da Leticia?

Lety: 72.9

Leonel: Más 45 milímetros, nos da...

Lety: 117.9

Denisse: Tú explícame Lety, este es un pelado.

Lety: Encuentras cuánto se estira por cada gramo, y luego lo multiplicas por el peso, y le sumas donde empieza el portapesas y ya.

Denisse: ¡Aja! Dame un peso a ver si le entendí

Lety: 35.6

Denisse: Se estira .75 por gramo, por 35.6 gramos, se estira (*hace operaciones con la calculadora*) 26.7 y le sumo donde empezó el portapesas, queda 71.7.

Lety: Está bien.

Episodio 5.1.5 ***"Todos estamos bien, lo único que cambia es el cristal con que lo mires"***

1 **Denisse:** Si el resorte es más suave, la recta es….

2 **Erika:** Es más (hace movimientos con la mano como sí girara una recta, desde una posición horizontal a una vertical)…

3 **Denisse:** Es más vertical

4 **Leonel:** ¡No!, es más horizontal, pónganle ahí más horizontal.

Denisse y Erika se miran entre ellas y hacen gestos como diciendo ¿por qué? Después Erika se dispone a escribir.

5 **Denisse a Erika:** Pero, Erika, si le pones peso, el resorte se estirara más, el punto ya no queda aquí, lo tenemos que subir, mm..., la recta esta más así (hace señas con la mano)

6 **Erika:** Oye Leonel si es cierto, ¿por qué dices que es más horizontal?

7 **Leonel:** Fíjate, si le pones más peso el resorte se estira más.

Asume una posición de explicar a sus compañeros.

8 **Denisse:** Eso es lo que decimos.

Voltea hacia Erika como para buscar apoyo sobre la posición que comparten.

9 **Erika:** Sí Leonel, mira (*en su cuaderno pinta unos ejes coordenados y traza una recta*), si le colocas más peso al resorte (*coloca sus dedos sobre el eje horizontal en la gráfica y luego los abre*), se estira más (*coloca sus dedos sobre el eje vertical en la gráfica y luego los abre*) y el punto queda más arriba (*señala con su dedo un punto arriba de la recta que ha dibujado*), la recta es más vertical (*traza una recta partiendo de la intersección del eje y de la anterior y uniendo al punto que acaba de señalar*).

10 **Leonel:** Lo que tú dices es lo mismo para todos los resortes si le pones más peso se estira más.

11 **Fandila:** Pero eso es lo que dices tu Leonel.

12 **Leonel:** No, bueno, no sé lo que dije, (*risas*) pero…, tienes dos resortes, uno le pones 20 gramos y se estira poco, ponle 20, al otro le pones lo mismo y se estira 50. Sí, ya esta (*dibuja unos ejes coordenados*), tenemos el mismo peso, el mismo ¿eh? (*señala un punto sobre el eje vertical*), con un resorte el punto queda aquí (*corre el dedo, que estaba posicionado en un punto sobre el eje vertical, hacia la derecha*), con el otro queda más para acá (*corre el dedo hacia la derecha*), las rectas quedan así (*dibuja las rectas*).

Recurre a darle valor al peso y al estiramiento.

13 **Denisse:** Pero por qué pones el peso aquí (*señala el eje vertical*).

14 **Leonel:** ¡Ah!, ya sé, estamos bien, lo que pasa es que ustedes ponen el peso aquí, pero éste es el eje *x*.

15 Todo el equipo: ¡Aja!, sí.

16 **Leonel:** Bueno, ¿quién lo explica?

17 **Erika:** Denisse.

18 **Denisse:** Sí, yo lo explico, sí, le entendí muy bien.

...

El maestro centra la atención en la discusión grupal.

19 **Maestro:** ¿Quién del equipo tres quiere pasará a exponer sus conclusiones?

Julián se levanta.

20 **Julián:** Si el resorte es más rígido la recta es más vertical, si el resorte el suave la recta es más horizontal.

Todos los del equipo dos dicen que no y levantan la mano. Los estudiantes de los otros equipos no dicen nada, pero parece una actitud de compartir la posición del equipo tres.

21 **Maestro:** Con calma (*se dirige al equipo uno*), escuchemos los argumentos del equipo tres.

22 **Cristian:** Es muy fácil, si le pones más peso el resorte más suave se estira más.

23 **Erika:** Esta mal. Claro que si le pones más peso se estira más. Lo que se tiene que ver es poner el mismo peso y ponérselo a dos resortes y ver cómo quedan las gráficas. Un resorte suave y otro duro.

24 **Maestro:** Pero, ¿están de acuerdo en las conclusiones del equipo tres?

Aquí, el maestro no da oportunidad de que el equipo tres contrargumente.

25 **Equipo uno:** ¡Nó!

26 **Maestro:** ¿Quién del equipo uno quiere pasará a exponer sus conclusiones?

27 **Denisse:** Yo maestro (*se levanta y pasa al frente, toma un gis y en el pizarrón dibuja ejes coordenados, rotula al eje horizontal con la letra x y al eje vertical con p*). Colocamos un peso (*coloca su dedo en el eje vertical de la gráfica*) en el resorte duro, se estira un poco (*corre su dedo a la derecha y coloca una "x"*), se coloca el mismo peso en el otro resorte y se estira más (*corre su dedo más a la derecha y coloca una "x"*). La recta del resorte duro es esta (*traza una recta desde el punto sobre el eje vertical y la primera "x" que dibujo*) y la otra, es esta (*traza una recta similar a la anterior pero utilizando la segunda "x" que dibujo*), ¿se ve? ¿no? La recta es más horizontal.

28 **Leonel:** Muy bien Dense, pareces maestra.

29 **Denisse:** (*Se ríe*) ¡Ah!, entonces no se entendió.

30 **Rubí:** Maestro, verdad que está mal. Nosotros hemos venido poniendo el peso en donde está *x* y los estiramientos donde está *y*.

31 **Leonel:** Siempre el eje horizontal son las "*x*'s".

32 **Maestro:** Pero, ¿por qué el eje horizontal siempre debe de ser las "*x*'s"?

33 **Leonel:** Siempre ha sido así.

34 **Marisol:** Pero puedes colocar como quieras a las "*x*'s". Aquí no tenemos *y* y siempre tenemos *y*. Entonces quita *p* y pon *y*.

35 **Leonel:** Bueno, si es cierto puede ser como quieras. Maestro, entonces ¿cuál es la respuesta correcta?

36 **Maestro:** Ustedes que opinan.

37 **Erika:** Nosotros estamos bien porque nuestros argumentos estuvieron muy bien. (*Con voz baja dirigiéndose a su equipo*) La maestra Denisse explico muy bien. (*Risas en su equipo*).

38 **Rubí:** En ese caso nosotros estamos bien. Nos permite pasar.

39 **Maestro:** ¡Claro que sí!

40 **Rubí:** (*Inaudible*) (*Con voz muy baja, ella habla muy pausado y con voz baja*)

41 **Maestro:** Más fuerte Rubí, no se escucha.

42 **Rubí:** (*Traza unos ejes coordenados, le pone "x" al eje vertical y "p" al eje horizontal*) Empezamos aquí, el resorte esta aquí, (*coloca el*

dedo en un punto del eje vertical) por un gramo (*recorre su dedo hacia la derecha, una unidad*) el resorte suave se estira más; por ejemplo, cinco (*recorre su dedo cinco unidades hacia arriba y traza una recta*), ahora, el resorte duro (*vuelve a colocar el dedo en el eje vertical*) por un gramo (*recorre el dedo a la derecha*) se estira poco, dos (*recorre su dedo hacia arriba dos unidades y traza una recta*). La recta es más vertical si el resorte es más suave y más horizontal si el resorte no es tan suave.

43 *Voces de aprobación* (*Los equipos uno, tres cuatro compartían la misma posición*).

44 **Leonel:** Todos estamos bien, lo único que cambia es el cristal con que lo mires.

45 *Voces de aprobación*.

Análisis.

Durante todo el episodio se observa cómo se construyen diferentes versiones, se argumenta utilizando gestos y modelos geométricos (2, 5, 9, 12, 13, 27 y 42).

Construyen una versión en colaboración Denisse y Erika (1, 2 y 3)

Leonel ejerce su posición de liderazgo (4) y hace dudar a Erika y Denisse de la versión construida por ellas (5, 6, 8 y 9).

Erika y Denisse se apoyan para poder "combatir" la posición de fuerza de Leonel (5 y 6) y consolidan sus argumentos recurriendo a gráficas y gestos. Los modelos gráficos que construyen son utilizados como herramientas para argumentar.

Leonel asume la posición de explicar la posición correcta no la de oír los argumentos de los demás (7).

Leonel no rebate la versión, ahora rebate él argumento (10)

Se mueven de lo global a lo particular en el discurso. Recurren para argumentar a darle valores concretos al peso y al estiramiento (12), aún cuando ya lo comprenden a nivel global, utilizan valores concretos para explicar, para argumentar.

La selección de las variables y las constantes es esencial en la argumentación, esta selección está presente en el discurso del equipo uno, el peso lo mantienen constante, los resortes (el suave y el duro) son las variables, con esto varían los estiramientos y con ello la inclinación de la recta (12, 13, 14 y 23).

Establecen consensos a nivel de equipo (14, 15 y 16) y a nivel de grupo (43, 44 y 45).

Diferentes versiones y diferentes argumentos en el discurso (20, 27 y 42). Se observa la posición del maestro en la conducción del discurso. En ocasiones interviene fomentándolo (21); sin embargo en ocasiones lo desvía, eliminando la posibilidad de discurrir sobre un aspecto clave, la elección de las variables y las constantes en la argumentación (24).

Los alumnos demandan la versión del profesor como validación de alguna posición (30 y 35).

Erika valida su versión con base en que "nuestros argumentos estuvieron muy bien" (37 y 38).

Erika y Denisse se apropian de los argumentos, los exponen y defienden (23, 25 y 27).

Se combate la idea de "siempre el eje horizontal son las *x*'s" (13, 30, 31, 32, 33, 34 y 35).

Episodio 5.1.6 ***"Es hablar de lo mismo con diferentes palabras"***

El equipo tres trabaja en la fase de la construcción de un esquema.

Omar: Características proporcionales,... no nos vamos a dar cuenta de que es una ecuación lineal hasta que hagamos la gráfica.

Rubí: Pero la proporción de 15, de 15, de 15... (*se refiere a la tabla*).

Miguel: Pero eso también lo podemos hacer conociendo la tabla nada más.

Sarit: La linealidad ya no es necesidad de hacer esto (*señala la gráfica*) y esto (*señala la ecuación*)

Omar: ¡Aja! Es como hablar de lo mismo pero con diferentes palabras.

Miguel: Si puedes ver la ecuación o la gráfica o la tabla.

Sarit: Sí, eso está padre, ya le entendí. Es lo mismo.

En la interacción los actores adoptan un lenguaje común. “Es hablar de lo mismo con diferentes palabras”. De tal forma que la linealidad para ellos significaría un modelo gráfico, numérico o una fórmula.

Episodio 5.1.7 ***“Bueno, es casi lineal”***

Maestro: Se supone que ya estuvimos viendo las características de nuestra tabla. ¿Qué características tiene?

Leonel: No es lineal

Omar: No es lineal

Maestro: Equipo 3 ¿Por qué no es lineal?

Leonel toma la palabra, sin ser del equipo 3.

Leonel: Los intervalos no son los mismos, no es una línea recta la grafica.

Rubí: Maestro, le podemos sacar el promedio a todos los intervalos.

Marisol: No son constantes las razones de cambio pero casi constante. No es lineal, pero es casi lineal.

Lety: Si graficamos nos queda casi una recta.

Leonel: Pero no pueden encontrar una ecuación porque no es exacta.

Rubí: Si tomamos los promedios de las razones de cambio esta sería el coeficiente de la ecuación,...

Miguel: Sí, el otro sería el valor,...

Marisol: Si se puede encontrar la ecuación, bueno no exacta.

Leonel: Jamás será exacta.

Marisol: Algo parecido.

Episodio 5.1.8 ***“Otra vez el Método de Leonel”***

Denisse: ¿Cuál era la posición con 35 gramos? ¿Cómo le vamos a hacer?

Erika: ¿Cómo encontraste la posición con treinta y cinco?

Lety: ¿La otra, ya la acabaste?

Leonel: Nó, es que la quiero hacer, serían..., el incremento de..., mmm, no sería el de cuatro, ¡mmps!, más el..., ¿cómo?

Fandila: ¿Cómo conseguiste ese valor?

(Ruido ambiente, al fondo voces inaudibles)

Pesos en gramos	Posiciones del portapesas en milímetros
0	36
20	100
38	160
62	236
80	300
100	360
122	420
138	490
161	535

Tabla 5.27 Tabla utilizada en la secuencia

Leonel: A 160 le resto 100, y...

(Ruido ambiente, al fondo voces inaudibles)

Lety: Leonel, Leonel.

Leonel: O sea, si el 20 nos da 100...

(Ruido ambiente, al fondo voces inaudibles)

Maestro: Ahora, un integrante de cada equipo va a pasar a explicar cómo calculó la posición.

Leonel: Agarro y aumento a treinta y cinco, como está entre 20 y 38, agarro que la diferencia es de 18 ¿no?, y esto entre... con un número, ¿no me acuerdo cual era?

Lety: Si 60, 60 ¿cuánto será? (*hace operaciones con la calculadora*) 3.33

Leonel: Sí, ahora, multiplícame el 35 gramos por el 3.33, ¿cuánto da?

Lety: 116. 55

Leonel: ¡Ah!, ¡eso Chiquita! ¿Cuánto te dio? ¿Cuánto les da la de 35?

Erika: ¿35?

Leonel: Sí.

(Ruido ambiente, al fondo voces inaudibles)

Leonel: ¿Ciento qué?, mira, no seas así, te voy a explicar para que lo pases a explicar...

Fandila: 152 milímetros, ¿no? Tú vas a pasar ¿eh?, tú.

Denisse: Sí, y ¿por qué?

Leonel: Tranquila, mira, como 35 está entre estos dos números 20 y 38, aquí hay un intervalo de 18, entre estos hay 60 *(se refiere a 100 y 60),* entonces 60 entre 18, a ver ¿cuánto es de uno? ¿Cuánto equivaldría en un gramo?, es igual a 3.33, si esto lo, multiplico por el puro 35, me da 116, pero le sumo lo que es la condición inicial que es 36.

O sea, es esto 3.33 por los gramos que te dan, más 36, eso es igual a los milímetros x. ¿Vas a pasar?

Fandila: ¿Y el de 87?

Leonel: ¿El de 87? Haces lo mismo tomando entre el 80 y el 100 que son 20, y acá son 60 (*señala 300 y 360*) que es igual a 3.

Ve, 20 gramos es a 64 milímetros, ¿cuánto es en uno?, Son 3. Ahora...

Fandila: Espérate, es 3.33, ¿no?, por 35.

Leonel: ¿Cuánto es? 60 entre 20, es tres ¿no?, ahora 3 por 87, más 36

Lety: 261

Leonel: Más 36

Lety: 297

Leonel: ¡Ah! Claro está bien, ¡no hay pexs!

Leticia: No, tranquilo; a ver, 261, ¿eh?

Leonel: No, que sea un incremento de 60 aquí.

Maestro: ¿Cómo van?

Leonel: Más o menos

Maestro: ¿Ya encontraron la solución para 35 gramos?

Leticia: Nos dio 152

Maestro: ¿Por qué?

Leonel: ¿Este..., este...? los 35 gramos están entre los 20 y 38, sacamos la diferencia que son 18 entre 60, entonces quise ver cuánto es en un gramo, luego lo multiplico por 35 y le sumo la posición inicial.

Maestro: ¡Aja!

Leonel: Quise saber la posición en un gramo, o sea me da 3.33, esto lo multipliqué por el 35, que es igual a 116 y eso lo sumé con la condición inicial.

Leticia: Y todo coincide con esa forma, es la misma forma para todo.

Erika: Sí, nada más que no sale el de 87.

Denisse: Maestro, me sale más que el intervalo

Maestro: ¿Cómo? ¿Te sale más que en el intervalo?

Erika: 300 por 87 entre 100 (*teclea en a calculadora al mismo tiempo que habla*) me da 261, esto no puede ser, pues con 100 gramos esta en 300. (*Comprueban con los datos dados*)

En un mismo equipo existen dos posiciones en interacción, Leonel y Leticia trabajan con “el método de Leonel” y Fandila, Erika y Denisse trabajan con la regla de tres. La personalidad de Leonel impide el trabajo colectivo, la relación entre Leonel y Leticia es lo que permite el trabajo entre ellos.

5.8 Secuencia 2: "La caída de los graves. Lo cuadrático"

Dentro de las consideraciones para el diseño didáctico en esta secuencia consideramos que la linealidad viene a ser la primera aproximación en el análisis del comportamiento de algún fenómeno, a pesar de que la naturaleza misma, en general, no se comporta de esta manera, lo que obligará a desarrollar comportamientos no lineales, en este caso lo cuadrático.

De acuerdo a lo anterior elaboraremos una secuencia centrada en la modelación de la caída de los graves y del movimiento de un objeto deslizándose en un plano inclinado.

El esquema propuesto en el diseño de la secuencia es el siguiente:

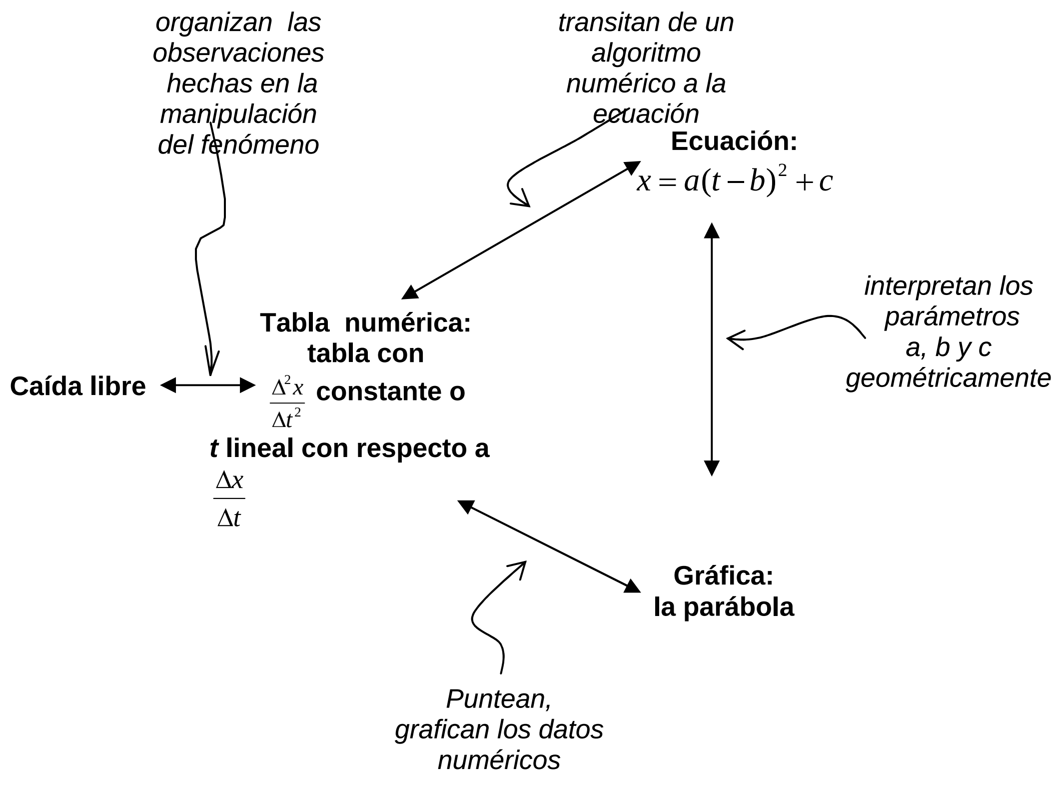


Figura 5.12 Esquema de las actividades de la secuencia

5.8.1 Hipótesis predictivas del diseño

La hipótesis predictiva global es que los estudiantes y el profesor construyen lo cuadrático como herramienta al ejercer las prácticas de modelación de fenómenos, la caída de los graves y el plano inclinado.

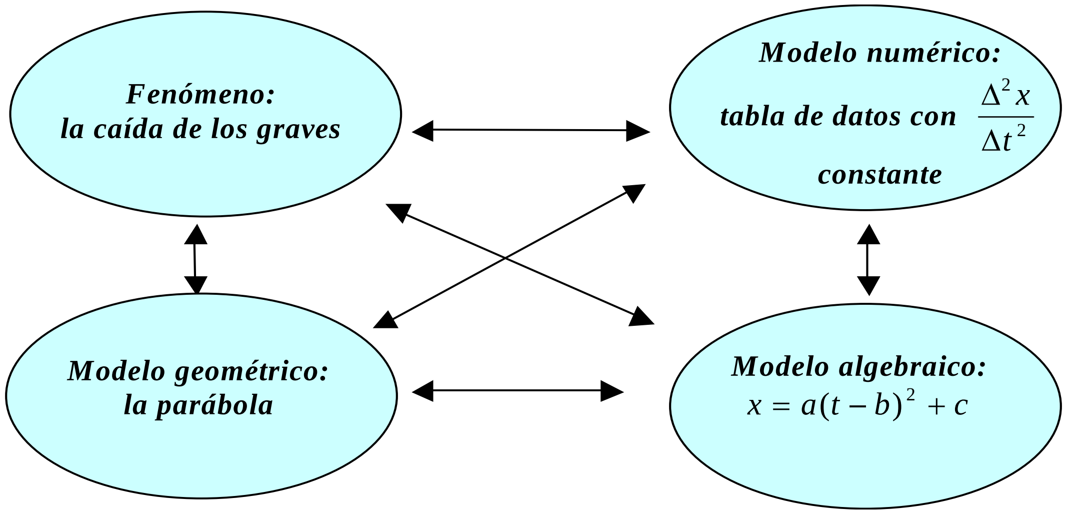


Figura 5.13 La articulación entre el fenómeno y sus diferentes modelos: numérico, gráfico y algebraico

En general, construyen diferentes modelos (identificando sus características distintivas y sus parámetros), hacen predicciones del fenómeno utilizando cada modelo y establecen una coordinación entre ellos. Los estudiantes identifican las características del fenómeno en el modelo, utilizándolo para predecir y coordinan diferentes modelos con el fenómeno.

Las predicciones más locales son en torno a lo que esperamos que suceda al ejecutarse la secuencia por los estudiantes en cada fase. A partir de la interacción con el fenómeno (tomar la posición del objeto) los estudiantes identificaran las variables que intervienen, el tiempo y la posición del objeto en movimiento.

Con los datos obtenidos en la experimentación los estudiantes, organizan una tabla y discuten las características distintivas de la tabla (la característica que las distingue de otras que no son modelos cuadráticas de un fenómeno), la razón de cambios de la posición con respecto del tiempo es proporcional al tiempo o la segunda razón de cambio es constante.

Aún cuando no quedan establecidas estas características distintivas orientamos el trabajo a la predicción con la tabla. No se tata de un proceso seguido de otro, más bien son procesos que no son demarcados por la secuencialidad.

Persiste la regla de tres como método para predecir; además, surgen otros métodos, por ejemplo, los basados en aproximaciones de segundo orden.

Después graficamos en el plano los puntos que definen los datos de la tabla e identificamos las características de la gráfica distancia - tiempo como un modelo del fenómeno, la parábola. Los estudiantes hacen predicciones con la gráfica y discuten la validez y aplicación del método empleado, interpolación lineal. Los dos procesos presentes para la construcción de un modelo son los siguientes: establecer distinciones con lo que no es y operar con él como instrumento. Sendos son necesarios para la construcción de un modelo gráfico.

Variando las condiciones del fenómeno, por ejemplo, cambiando la inclinación del plano, se construyen argumentos a partir de coordinar la amplitud de la parábola, la inclinación del plano y la constante a en la fórmula. Aquí resaltamos la importancia que concedemos a la coordinación entre modelos y fenómeno.

Los estudiantes y el profesor construyen un esquema que articula los diferentes modelos, sus parámetros y las formas de predicción con el fenómeno a modelar.

5.8.2 Variables del diseño

La secuencia se puede poner en escena partiendo de la tabla de datos o de la recolección de datos, con la toma de la posición del objeto con el sensor de movimiento. El fenómeno puede ser la caída libre o el plano inclinado.

Variables de la actividad.

- Partir de una tabla de datos con ruido.
- Tomar la tabla de datos experimentales utilizando sensores.
- No dar la condición inicial (si $t = 0$; $x = 0$), dar otro dato.
- Dar tabla de datos con valores negativos.

Actividades.

- Contextualizar la situación, el contexto puede ser modelar la caída libre, el plano inclinado, la ley de Torricelli, u otro.
- Introducir los datos en la calculadora. Hacer una tabla de datos.
- Identificar la característica de la tabla. Se pude utilizar la calculadora para encontrar las diferencias y la razón de cambio.
- Hacer predicciones con la tabla y reflexionar sobre los métodos utilizados.
- Graficar los datos.
- Identificar las características de esta gráfica, una parábola.
- Hacer predicciones con la gráfica y buscar una relación con los métodos de predicción numéricos.
- Obtener una fórmula que modele el fenómeno.
- Elaborar un esquema donde se articulen los diferentes modelos cuadráticos, las formas de predicción con éstos, así como los parámetros de los modelos con las características físicas del fenómeno.

5.8.3 Las fases de la secuencia

1. *La experimentación*. Los estudiantes montan el siguiente arreglo experimental.

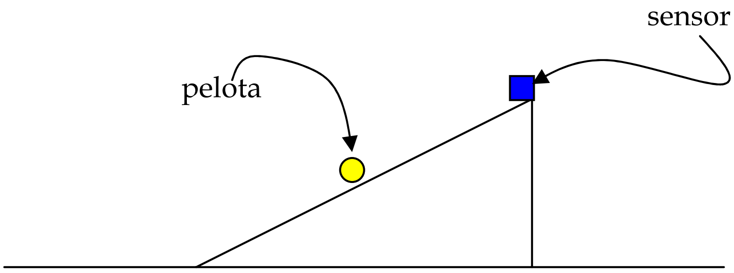


Figura 5.14 El fenómeno, el plano inclinado

2. *La tabla numérica como un modelo cuadrático*. Se identifican las características distintivas de la tabla numérica, la razón de cambios de la posición con respecto del tiempo es proporcional al tiempo o la segunda razón de cambio es constante.
3. *Las formas de predicción*. Se desarrollan diferentes formas de predicción y se argumenta sobre su validez y su aplicación. Persiste la regla de tres como forma de predecir
4. *La figuración de las variables*. Identificar las características de la gráfica distancia – tiempo como un modelo del fenómeno, la parábola.
5. *La ecuación* $x = a(t-b)^2 + c$ *como modelo algebraico.* Coordinando los parámetros algebraicos con los parámetros gráficos utilizando la calculadora graficadora se establece el modelo algebraico del fenómeno.
6. *Argumentación a partir de coordinar la inclinación del plano, la amplitud de la parábola y la constante a.*
7. *Argumentación a partir de coordinar la posición inicial del móvil, la "altura de la parábola" y la constante c.*
8. *Argumentación a partir de coordinar el tiempo inicial, el desplazamiento horizontal de la parábola y la constante b.*
9. *La construcción del modelo gráfico velocidad – tiempo.*

10. *El esquema*. Elaboración de un esquema que coordine el fenómeno, sus diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción.

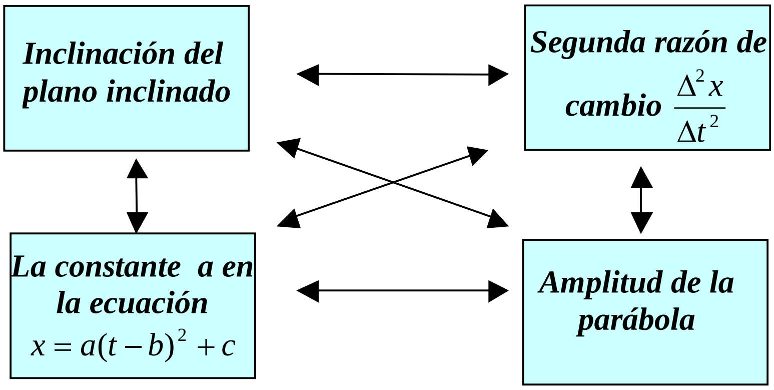


Figura 5.15. Coordinando la inclinación del plano con los parámetros de los modelos

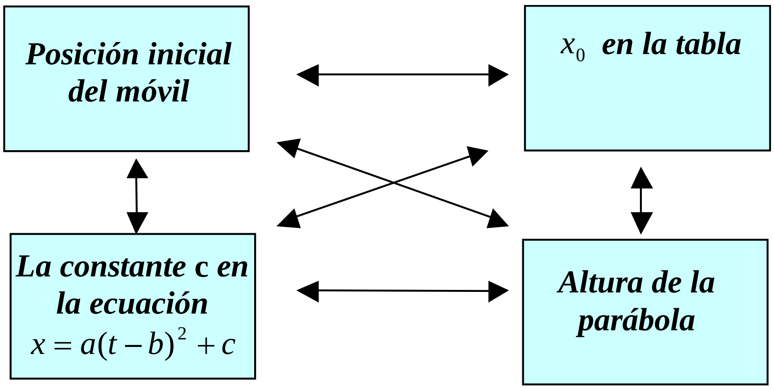


Figura 5.16. Coordinación entre la posición inicial del móvil, la posición inicial x_0 en la tabla, la altura de la parábola y el coeficiente c de la ecuación

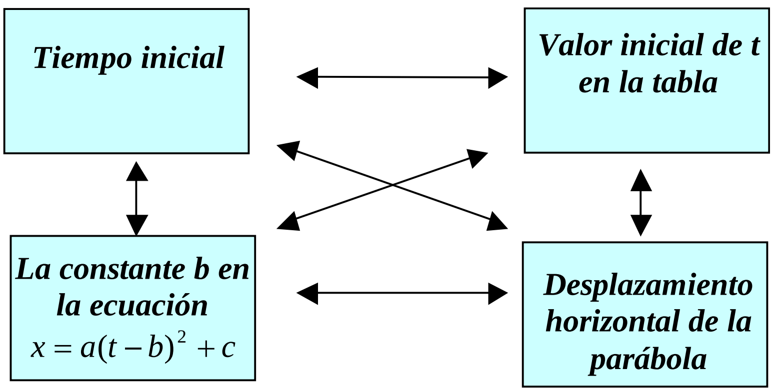


Figura 5.17. Coordinación entre el tiempo inicial, el valor inicial de t en la tabla, el desplazamiento horizontal de la parábola y el coeficiente b de la ecuación

5.8.4 Descripción de las fases de la secuencia

1. ***La experimentación***

   - "Monten un arreglo y tomen datos con estos materiales".

   Los estudiantes montan el arreglo de la figura 5.12 y toman datos de la posición del móvil con el sensor de movimiento.

2. ***La tabla numérica como un modelo cuadrático***

   - Construyan una tabla con estos datos en la calculadora.
   - ¿Qué características tiene esta tabla?

   Los estudiantes discuten las características distintivas de esta tabla, la razón de cambio de la posición con respecto del tiempo es proporcional al tiempo o la segunda razón de cambio es constante.

   La parte central de las actividades en estas fases de la secuencia consiste en *establecer las características de la tabla* sin que llegue a ser necesaria esta identificación para continuar con la fase siguiente, quedando la posibilidad latente de identificar estas características.

3. ***Las formas de predicción***

   - ¿Cuál será la posición del objeto después de 2.5 segundos?
   - ¿Cuál será la posición del objeto después de 5.7 segundos?
   - ¿Cuál será la posición del objeto después de 12.37 segundos?
   - ¿Qué métodos para predecir utilizan?

   Se desarrollan diferentes formas de predicción y se argumenta sobre su validez y su aplicación. Persiste la regla de tres como forma de predecir. Se discute sobre la validez de los métodos empleados.

4. ***La figuración de las variables***

   - Grafiquen los puntos haciendo uso de la calculadora.

Los estudiantes identifican las características de la gráfica distancia–tiempo como un modelo del fenómeno, la parábola.

- ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una parábola más alta que la anterior?
- ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una parábola esté más a la derecha que la anterior?
- ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una parábola con los brazos más abiertos que la anterior?

Los participantes relacionan los parámetros de la gráfica con las características del fenómeno.

5. ***La ecuación*** $x = a(t-b)^2 + c$ ***como modelo algebraico.***

- Encuentren una curva cuya ecuación es de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ que, además, se apegue a los datos obtenidos.

Los participantes a través de pegarle una curva a la nube de puntos e ir modificando los parámetros algebraicos ajustan la curva a la nube, de esta forma construyen el modelo algebraico del fenómeno.

6. ***Argumentación a partir de coordinar los parámetros algebraicos con los parámetros gráficos***

- ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro a?
- ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro b?
- ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro c?

Los estudiantes coordinan los parámetros gráficos con los algebraicos.

7. ***La construcción del modelo gráfica velocidad – tiempo.***

- ¿Cómo será la gráfica velocidad tiempo de este movimiento?

Los estudiantes construyen la gráfica velocidad – tiempo como modelo del fenómeno.

9. *La construcción del esquema*

- ¿Podrás hacer un esquema que relacione las características del fenómeno, de la tabla, del modelo gráfico distancia–tiempo, de la ecuación y del modelo gráfico velocidad-tiempo?

Elaboración de un esquema que coordine el fenómeno, sus diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción.

	Cosa a tratar	Característica	Característica	Característica
Fenómeno				
Tabla numérica				
Gráfica Distancia - tiempo				
Ecuación				
Gráfica Velocidad - tiempo				

Tabla 5.27 Esquema del movimiento de un móvil en un plano inclinado con los modelos construidos

Un posible esquema es el siguiente.

	Características de lo cuadrático	*Parámetros*	*Parámetros*	*Parámetros*
Fenómeno: Movimiento de un móvil en un plano inclinado	Experimental: la velocidad es proporcional al tiempo o la aceleración es constante	Inclinación del plano	Tiempo inicial	Posición inicial
Tabla numérica	Tablas con razón de cambio $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ proporcional al tiempo o con segunda razón de cambio constante.	Segunda razón de cambio $\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$	Valor inicial de t en la tabla	Valor de x_0 en la tabla
Gráfica: la parábola	La parábola	Amplitud de la parábola	Desplazamiento horizontal de la parábola	Altura de la parábola
Expresión algebraica: $x = a(t-b)^2 + c$	Expresión algebraica de la forma $x = a(t-b)^2 + c$ donde ***a, b*** y ***c*** son constantes	***a***	***b***	**c**

Tabla 5.28. Esquema posible del movimiento de un móvil en un plano inclinado con los modelos construidos

5.8.5 Puntos de discusión, lo cuadrático

Enseguida planteamos los puntos de discusión derivados de la experiencia de la puesta en escena del diseño.

Identificando las características de lo cuadrático en los modelos

- Los actores en la puesta en escena de estos diseños emprenden diferentes acciones para determinar las características de la tabla. Estas acciones son “heredadas” desde su participación en el diseño anterior. Con esto queremos decir que existen continuidades de las prácticas.
- Los estudiantes calculan los incrementos de las variables y las razones de cambio, comprueban que la tabla no tiene las

características lineales. Grafican con sus calculadoras y observan que la gráfica no es una recta.

- Dan argumentaciones relacionadas con el fenómeno para sostener que los datos no corresponden a un modelo lineal, "el objeto va con una velocidad cada vez más grande, o sea recorre una distancia por segundo cada vez más grande"; "los incrementos de distancia no son constantes están creciendo porque por cada segundo está aumentando la velocidad, empieza con una velocidad pequeña y termina con una muy grande".
- Se construyen diferentes versiones de lo cuadrático, una de ellas es que la segunda razón de cambio es constante.
- Otra de ellas es que la primera razón de cambio es lineal con respecto al tiempo.
- También se presentan diferentes variantes de las dos anteriores.
- Algunos estudiantes llegan a deducir un modelo algebraico, casi desde un inicio, cuando los datos que trabajan no tienen ruido.
- En la búsqueda de las características de lo cuadrático construyen términos ("la diferencia del resultado") o le dan significado a términos ("¡Ah!, ésta es la aceleración, o sea, cómo cambia la velocidad por segundo. Hasta que le entendí").

La diversidad en las formas de predicción

Los participantes utilizan diferentes métodos para predecir la posición del móvil.

- La regla de tres se presenta de diferentes formas y es el método al que se recurre; en algunos casos, inicialmente. A este fenómeno le hemos llamado la centración en lo lineal.
- La diversidad de los métodos propuestos es una característica en la puesta en escena de estos diseños. Un método utilizado es el

"método del teorema de Tales" que utilizaron en la secuencia anterior.

- Uno de los métodos de predicción que construyeron y utilizaron es el basado en la aproximación lineal. "Si queremos calcular en 3.75 entonces como está entre 3 y 4 tomamos la posición en 3 y le sumamos la distancia recorrida en .75 segundos con una velocidad de 35 metros por segundo que es la velocidad entre tres y cuatro".

  Escribe en el pizarrón:

$$x = 45 + .75(35) = 71.25$$

  Vista de otra forma

$$x(3.75) = x(3) + \frac{\Delta x}{\Delta t} 0.75$$

- En esta experiencia un alumno presentó un método basado en "aproximaciones de segundo orden" este método no es la utilización de la serie de Taylor de segundo orden. Sin embargo, a pesar de la insistencia del profesor a que se discutiera el método propuesto por Leonel, no se estableció la interacción en torno a este método (se presenta en un episodio este desarrollo).

Los estudiantes construyen esquemas que relacionan el fenómeno con sus modelos; las características físicas con los parámetros de los modelos; y los métodos de predicción en diferentes modelos.

- Los estudiantes relacionan la inclinación del plano inclinado con la segunda razón de cambio de la tabla, la amplitud de la parábola y el coeficiente *a* en la fórmula.

- Los estudiantes relacionan la posición inicial del móvil con el dato inicial de la posición del objeto en la tabla, la altura de la parábola y el valor del término *c* en la fórmula.

- Los estudiantes relacionan el tiempo inicial del móvil, con el dato inicial del tiempo en la tabla, el desplazamiento horizontal y el valor del término *b* en la fórmula.
- Se relacionan los métodos de predicción.
- En estos esquemas, no necesariamente, presentan todas las relaciones planteadas en los puntos anteriores.

5.8.6 Algunos episodios de la puesta en escena de la secuencia

Los criterios para escoger los episodios de la secuencia son los descritos anteriormente.

La tabla que discuten es la siguiente

Tiempo	Distancia recorrida
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
6	180
7	245
8	320

Tabla 5.29 Tabla utilizada en la secuencia “Caída de los graves”

Los participantes de los equipos calculan los incrementos de tiempo y de distancias. Han colocado dos nuevas columnas. En una ponen las diferencias de los tiempos y en la otra las de las distancias. Lo hacen mientras discuten; o sea, construyen su tabla y discuten.

Tiempo	Distancia recorrida		
0	0	1	5
1	5	1	15
2	20	1	25
3	45	1	35
4	80	1	45
5	125	1	55
6	180	1	65
7	245	1	75
8	320		

Tabla 5.30 Tabla construida por el equipo 2

Episodio 5. 2.1 *"El incremento del incremento constante"*

Equipo 2: Marisol, Lety, Cristian, Gerson y Miguel Mata.

El equipo dos discute las preguntas ¿qué variables intervienen? y ¿qué característica tiene esta tabla?

Lety: ¿Qué variables intervienen?

Marisol: El tiempo y la distancia.

Gerson: Ok. Ahora, ¿qué característica tiene esta tabla?

Lety: No sé.

Marisol: No manches.

Gerson: A ver, ¿qué característica tiene esta tabla?

Miguel: Esta incrementando distancia y los intervalos de tiempo que se van incrementando son constantes.

Marisol: ¡Aja!

Miguel: Se van incrementando.

Gerson: ¿Cómo que se van incrementando?

Miguel: Sí, una determinada distancia; o sea, va requiriendo este..., si tomamos en cuenta la velocidad para la distancia, la velocidad va incrementando y aumenta la distancia; o sea, no es un incremento constante.

El maestro llega al equipo 2 e interactúa con él.

Maestro: A ver, a ver, platiquen, ¿qué opinión tienen de lo que dice él?, ¿tú que opinas? (*se dirige a Lety)*

Lety: Yo opino que la distancia que va recorriendo va aumentando. De 10 a 15, de 5 en 5, o sea va aumentando de 5 en 5, ya ¡ouch!...

Marisol: 10 más que la anterior (*se refiere a la diferencia entre 5 y 15*).

Gerson: Y esto ¿qué es? (*no le hacen caso*)

Marisol: ¡Aja!, y en otra hay 20 más que esa (*se refiere a la diferencia entre 5 y 35*).

Lety: O sea, va aumentando de 10, 20, 30, 40...

Maestro: Entonces, ¿qué característica tiene?

Miguel: Es un incremento constante.

Gerson: ¿Cuál es el incremento constante? (*no le hacen caso*)

Miguel: Un incremento del incremento constante. ¿No, maestro?

Maestro: No sé, platíquenlo ustedes (*se retira*).

Lety: Es un incremento del incremento, que es constante, que va de 10 en 10.

Cristian: ¿Ya acabaste con mí lápiz?

Marisol: Cómprate otro, más factible.

Gerson: Oye ¿cuál incremento del incremento?

Inaudible.

Marisol: ¿Qué, ya anotaron?

Cristian: En eso andamos.

Gerson: El incremento del incremento es lo que no entiendo.

Miguel: Suma de 10 en 10 a partir del segundo uno.

Gerson: ¿Aquí? (*señala el segundo incremento*)

Miguel: Sí, suma 10.

Gerson: Ok.

Miguel: De aquí, a aquí, suma 10, para 1, 2, 3, segundos.
Préstame una hoja.

Cristian: ¿Una hoja?

Miguel: Una hoja.

Gerson: ¿Cómo se puede decir esto, la diferencia de una variable?

Marisol: ¿Es el incremento del incremento?

Cristian: x, y y se tiene que sacar una...

Miguel: ¿Cuántas?

Cristian: ¡Ay!, ¡ay!, estas calcetas me estorban ya.

Cristian: Van dos juntos.

Gerson: Esta tabla va aumentando de 10 en 10 (*esta llenando la columna de las segundas diferencias*). ¡Ujum!

Los participantes del equipo 2 plantean que la característica de la tabla es que las segundas diferencias de las distancias son constantes.

Episodio 5.2.2 ***"La diferencia del resultado"***

Gerson: Esto es, es,... ¿cómo se le llama?

Miguel: Caída libre.

Gerson: No, ¿cuándo haces esto?

Marisol: ¿Cómo se le llama?

Lety: Resultado.

Miguel: Diferencia.

Gerson: ¿Diferencia de qué, o qué? Hazme caso.

Miguel: Te estoy escuchando.

Cristian: Sí pues, se llama diferencia de resultado.

Miguel: Sí pues, la diferencia del resultado.

Cristian: Ésta es la diferencia del resultado.

Lety: Sí, ésta es la diferencia del resultado.

Gerson: No, pero tiene un nombrecito.

Marisol: Y si sacas otra diferencia de la diferencia del resultado ¿cómo va a ser?

Lety: Pues cero, 10 menos 10 es cero. Esto esta muy bien.

Marisol: Con el resorte, si la diferencia de resultado es cero es lineal, si la diferencia de la diferencia del resultado es cero entonces es la caída libre.

Los estudiantes inventan su terminología, "diferencia del resultado". El resultado para ellos son las razones de cambio.

Episodio 5.2.3 ***"Incrementos de aceleración podrían ser"***

Este episodio es una continuación de la interacción del equipo 2 anterior.

Cristian: Entonces qué son estos resultados, ¿incrementos de qué?

Lety: Incrementos de aceleración podrían ser,...

Cristian: Sí, ¿verdad? (*Pide aprobación)*

Marisol: ¡Ah!, ésta es la aceleración; o sea, cómo cambia la velocidad por segundo. Hasta que le entendí.

Lety: No, sí, a mí me gusta la física.

Cristian: No me recuerdes al maestro de física por favor.

Marisol: Ja, ja, ja, ja, ja.

Lety: Ni quién quisiera.

La constitución de identidades se refleja en este episodio, Lety adquiere un aspecto de su identidad: "a mí me gusta la física".

Le dan significados a la aceleración, que es algo ya han tratado en la materia de física.

Episodio 5.2.4 ***Diferentes caracterizaciones de la tabla***

Después de las interacciones en los equipos se establece una interacción de todo el grupo en torno a la pregunta ¿qué características tiene la tabla?

Maestro: ¿Que características tiene la tabla? ¿Quién quiere participar? ¿Equipo 3?

Julián pasa al pizarrón y escribe una tabla.

Julián: Tomamos el incremento del tiempo, tengo que la velocidad que lleva el cuerpo la ponemos aquí. Va de 5 en 5 la velocidad.

t	d	Δv
0	0	0
1	5	5
2	20	10
3	45	15
4	80	20
5	125	25
6	180	30
7	245	35
8	320	40

Tabla 5.31 Tabla construida por el equipo 3

Marisol: Esa columna está mal, ¿cómo la calculó? El Incremento de 5 y 20 no son 10 son 15.

Julián: Esta columna sería la velocidad (señala la de Δv), 5 entre 1, queda 5, 20 entre 2, queda 10, 45 entre 3, queda 15,...

Denisse: Entonces no sería Δv sería v.

Julián: Saco el promedio de las velocidades, sumo todas las velocidades y lo divido entre el tiempo para sacar el promedio y me da 5, o sea va de 5 en 5.

Maestro: ¿Es la velocidad media?

Omar: Para que nos dé el valor de la posición y la posición es igual al promedio (*inaudible*), que de 5 a 10 cambia a 5, que de 10 a 15 cambia 5 y así en las demás. Del tiempo 2.5, me da..., ¿cuánto da 2.5 al cuadrado por 5?

La posición será, 31.25 (*escribe en el pizarrón*)

$$p = 5t^2 \qquad t = 2.5$$

$$\begin{array}{r} 2.5 \\ \underline{2.5} \\ 125 \\ \underline{50} \\ 6.25 \times 5 \\ p = 31.25 \end{array}$$

Marisol: Yo paso maestro (*pasa al pizarrón y empieza a escribir la tabla 5.32*), nosotros hicimos una tabla y si el tiempo va de uno en uno la diferencias de los resultados va de 10 en 10.

Y si sacamos las diferencias otra vez es 0.

Gerson: Esta columna, se llama razón de cambio no se llama resultado y ésta es la razón de cambio de la razón de cambio

Lety: Nó, esta columna nos dice los metros por segundo y es la velocidad; y esta la diferencia de la velocidad, pero es diferente a la velocidad que ellos tienen.

Maestro: ¿Qué opina el equipo 1?

Erika: Se complican la vida ellos, ¿para qué sacan diferencias y más diferencias? Se ve que esta columna (*la primera*) es lineal con esta columna (*la quinta*) y ya.

Lety: Estás diciendo que así como si graficáramos nos quedaría una ecuación lineal, ¿algo así?

t	d	Δt	Δd	$\frac{\Delta d}{\Delta t}$	
0	0	1	5	5	10
1	5	1	15	15	10
2	20	1	25	25	10
3	45	1	35	35	10
4	80	1	45	45	10
5	125	1	55	55	10
6	180	1	65	65	
7	245				

Tabla 5.32 Tabla construida por el equipo 2

Denisse: ¡Aja!, el tiempo es lineal con la velocidad.

Fandila: Es una característica de la tabla ¿no?, ésta con ésta es lineal (*señala la primera y quinta columna de datos*).

Varias voces de aprobación (*consenso).*

Erika y Denisse: Ésta con ésta si es lineal (*a la vez*).

Varias voces: ¡Aja!

Cristian: Ésta con ésta no presenta una línea (*señala la primera y la segunda columna*)**.**

Marisol: ¡Aja!, ¿pero, con la otra?

Cristian: Y con ésta sí.

Gerson: Lineal, ¡Aja!

Todos: Sí.

Marisol: Y es lineal ¿si tu sacas otra diferencia aquí como va a ser?

...

Maestro: Ustedes han caracterizado la tabla que están trabajando de diferentes maneras, ¿cuál es la mejor forma? (*Diferentes versiones)*

Leonel: Ninguna, es la fórmula.

Denisse: Todos están bien, todas, lo importante es saber de qué forma es la tabla, no importa el método.

En este episodio se presentan varias formas de caracterizar a la tabla. La caracterización planteada por el equipo 1 (Erika) es la que logra consenso.

Episodio 5.2.5 ***Diferentes métodos de predicción***

El equipo 2 discute cual será la posición del objeto después de algún tiempo.

Maestro: ¿Cómo van?

Lety: Lo que pasa es que estamos viendo que... y tenemos que analizar entre éste y éste.

Marisol: Entre 2 y 3.

Lety: Sí entre 2 y 3. Se supone que entre 2 y 3 aumenta 25, uno aumenta 25 ¿.5 cuánto tiene qué aumentar?

Gerson: ¡Ujum!

Lety: .5 ¿cuánto tiene qué aumentar?

Gerson: ¡Ujum!

Lety: Entonces necesitamos saber cuanto aumentaría .5; de ese .5 le sumariamos 20 pero…

Gerson: Esto sería así, ¿no?

Marisol: Aumenta 12.5, ¿sí?

Gerson: De aquí a aquí, en medio está 2.5, tomamos en medio de 20 y 45, que es 32.5. (*Método del teorema de Tales).*

Todos: ¡Umm!

Gerson: ¡Ah!, ¿no es lo mismo, con lo que haces tú?

Lety: Porque estoy tomando el incremento de 20 a 45.

Gerson: Sí, de en medio a 32.5.

Cristian: ¡Ah!, sí.

Lety: Pero el incremento es de 25, no es...

Gerson: 2.5.

Lety: De 20 a 45 es 25.

Marisol: No es la misma, ¿cuál es el incremento de aquí?, 1 es a 25 como .5 a x y ya lo sumas. (*Regla de tres).*

Lety: ¡Aja!

Marisol: Es 25 por .5 entre 1,... da 12.5 más 20 da 32.5.

Gerson: Es lo que yo te digo, pero más fácil, 2 a 3 es 2.5 la mitad de 30 a 45 es 32.5 es la mitad. Es el mismo lugar, da el mismo resultado.

Lety: Creo que sí.

Cristian: ¿No es otro método?

Marisol: Otro más eficaz.

Lety: No es cierto.

Cristian: ¿No es cierto qué?

Lety: No es más eficaz. A ver, utilízalo en el siguiente tiempo, con 4.37.

Gerson: Bueno ahí vamos.

Todos: Pues sí.

Los métodos utilizados en las sesiones anteriores, "método del teorema de Tales" y la regla de tres, prevalecen inicialmente como métodos de predicción. Leticia utiliza un argumento que proviene de su práctica de predecir la posición del resorte para argumentar que el método que propone Gerson no es más eficaz. Ella tuvo que abandonar el "método del teorema de Tales" cuando intento predecir la posición del resorte al colocar 28.3 gramos en el portapesas.

Episodio 5.2.6 ***Los participantes comprueban sus resultados: buscan consensos***

El siguiente extracto también es parte de la trascripción de la interacción del equipo 2.

Cristian: 72.5 tengo.

Cristian: ¿Te da 72.5?

Miguel: ¡Yuju!

Marisol: Ya raya más esta goma.

Lety: ¿Te da 72.5? (*Comprueban su respuesta*).

Miguel: Sí.

Una forma de validar sus respuestas es comparando los resultados obtenidos.

Episodio 5.2.7 ***"¿Cómo sacaste la fórmula?"***

Miguel: Y ¿cómo sacaste la fórmula?

Lety: Una x cuadrada y luego por 5 y me sale bien todo, ¿por ejemplo?

Miguel: Y ¿cómo sacaste la fórmula?

Lety: Nada más la invente, la x cuadrada, y me sale bien todo, por ejemplo, en 3.9 podemos suponer.

Cristian: No me digas, 3.9.

Miguel: 76.05. (*Modelo algebraico*).

Lety: Compruébame con uno de estos números, mí vida. (*Comprobando*).

Miguel: ¿Con cuál?

Lety: Uno de los de la tabla.

Miguel: Sí, sí resulta, mira con 2, lo elevo al cuadrado y lo multiplico por 5 y me da 20.

Miguel: Se supone que tiene que ver algo la generación y la generación es cuadrada y tú sabes que la generación se pone cuadrada. Ya sé, tú cuando vas en física la fórmula de distancia es segundo al cuadrado y se va incrementando por cada segundo así me explicaron.

Episodio 5.2.8 ***La aproximación lineal.***

El episodio es un fragmento de la interacción del grupo alrededor de los métodos utilizados para predecir.

Maestro: Bueno, ahora quién explica cómo realizaron las predicciones que se pidieron. Saryt, ¿pasas?

Saryt: Bueno, como vemos de 0 a 5 son 5, de 5 a 20 son 15 y de 20 a 45 son 25 y, así hasta 320 y son 75; entonces nos pide la posición en 2.5, por ejemplo, entonces 2.5 esta entre 2 y 3... (*inaudible*).

Saryt utiliza el pizarrón:

Nosotros queremos 2.5 ¿eso a cuánto es? 12.5 y le sumamos la condición inicial. Si con 1 segundo avanza 25 con 0.5 segundo avanza 12.5 metros.

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \rightarrow & 25 \\
0.5 & \rightarrow & 12.5 \\
 & & 12.5 + x_0
\end{array}
$$

$$12.5 + 20 = 32.5 \text{ en } 2.5$$

Maestro: ¿Alguien más quiere explicar el método que empleó? Ahora con 3.75 segundos.

Fandila: Yo maestro, yo paso.

Fandila: 3.75 esta entre 3 y 4, ¿sí?, entonces de 45 a 80 se saca la velocidad y es 35 entre 1, tenemos 35 metros por segundo, ¿Cuánto da por 0.75? más 45 metros.

Erika: Si queremos calcular en 3.75 entonces como está entre 3 y 4, tomamos la posición en 3 y le sumamos la distancia recorrida en .75 segundos, con una velocidad de 35 metros por segundo que es la velocidad entre tres y cuatro.

Leyó una hoja y luego escribe en el pizarrón:

$$x = 45 + .75(35) = 71.25$$

Maestro: Fíjense lo que está haciendo su compañera (*habla y escribe al mismo tiempo*) para calcular la posición en el segundo 3.75. Toma la posición en el segundo 3 y le suma la velocidad por el tiempo .75,

$$x(3.75) = x(3) + \frac{\Delta x}{\Delta t} 0.75$$

La posición en 3.75 es igual a la posición en 3 mas $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ por .75, me da 45 más 35 por .75,

$$x(3.75) = 45 + (35)(.75)$$

Leonel: Pero yo ya tengo una fórmula, no tengo que estar haciendo eso, nada más sustituyo el valor del tiempo.

Marisol: Yo también, la fórmula es $x = 5t^2$

...

Maestro: Para concluir, ¿de qué tipo es esta gráfica o como es esta gráfica?

Marisol: Cuadrática, es una parábola. La fórmula es $x = 5t^2$

Maestro: ¿Cuál es la ecuación de la velocidad con el tiempo?

Leonel: Es $v = 10t$ porque la velocidad es lineal con el tiempo. Es 10 lo que multiplica a *t*, porque la razón de cambio es 10 y la velocidad inicial es 0.

Maestro: Ahora falta hacer la gráfica de tiempo sobre velocidad.

Leonel: ¿La de la velocidad? Es una línea recta, porque es lineal.

...

Maestro: *x* es igual a $5t^2$, ahora la velocidad con el tiempo.

¿Es lineal, o no?, entonces

$$v = 10t$$

$$x = 5t^2$$

La aproximación lineal es un método de predicción que es utilizado por los estudiantes; sin embargo, éste no es bien valorado porque los equipos ya contaban con el modelo algebraico.

Los métodos predicción de primer orden no se plantean como método general, se da contextualizado y es la participación del profesor la que plantea la generalización y el planteamiento simbólico.

La posición del objeto en el segundo 3 más la velocidad promedio entre el segundo tres y cuatro multiplicada por .75 seg.

Es decir $x(3.75) = x(3) + \frac{\Delta x}{\Delta t}(0.75)$.

Los próximos episodios son extraídos de la trascripción de la interacción en la sesión “El plano inclinado, lo cuadrático con ruido”.

Episodio 5.2.9 ***Es casi cuadrática***

Omar: ¿Cómo? Por ejemplo, Rubí a mi no me dan valores constantes, pero me dan mas o menos.

Rubí: Si es cierto, eso es casi cuadrática.

Saryt: Ya cállate, ya cállate. No te van a dar los datos exactos.

Omar: Si están bastantes extraños, permítanme tantito.

En este extracto se muestra como es utilizado un modelo cuadrático sin que sea un "modelo exacto".

Episodio 5.2.10. ***Las intenciones de participación de los actores***

En el siguiente episodio se muestra cómo las intenciones de los participantes no son compartidas en algún momento de la puesta en escena.

1. **Maestro:** Si ustedes se fijan se han propuesto cuatro métodos para predecir la posición de la pelota. El primero,...
2. **Marisol:** Pero nuestro método es más exacto y más rápido y más fácil.
3. **Rubí:** ¿Cómo sabes que es más exacto?
4. **Marisol:** Porque nos da el resultado que se acerca a la realidad.
5. **Omar:** ¿Pero como sabes como debe ser la realidad?
6. **Leticia:** Más bien a la forma que debe de tener.
7. **Leonel:** Yo tengo un método que es mucho mejor, voy a escribir en el pizarrón para que me entiendan, maestro.
8. **Maestro:** Sí claro, pasa por favor.

Leonel pasa al frente.

9. **Leonel:** ...

   ...

10. **Maestro:** ¡Es muy interesante tu método! ¿Le han entendido a Leonel?, es muy interesante, ¿Qué opinan?

El maestro desea entablar una discusión alrededor de la posición de Leonel, pero nadie opina.

11. **Maestro:** ¿Qué opinan? ¿Este es mejor o peor método que los anteriores?

Los estudiantes no opinan.

12. **Maestro:** ¿Han entendido? Marisol, ¿qué opinas?
13. **Marisol:** No lo sé, yo ya tengo un método para predecir.
14. **Maestro:** Rubí, ¿tú que opinas?
15. **Rubí:** Yo también ya tengo un método para predecir.

Los alumnos no participan en esta dirección.

16. Maestro: Tal vez no le han entendido, voy a explicar el método...

El maestro ve que ha perdido la atención del grupo y decide poner fin a este intento de entablar una discusión alrededor de este método, aunque le parece muy interesante.

....

Comentarios en el equipo tres.

E3.1 Rubí: Ya va empezar ese... zopenco,...

E3.2 Sarit: Sí, ya lo alucino.

E3.3 Rubí: Se cree,...

....

El maestro considera que es "interesante" el método de Leonel y se plantea como intención abrir la discusión alrededor de él, sin embargo los estudiantes no tienen la intención de discutir este método. Los motivos podrían ser contextuales, por ejemplo, lo expresado en los comentarios del equipo 3 (E3.1, E3.2 y E3.3). Aquí las intenciones de los estudiantes no son compartidas con las del profesor. El maestro, al no obtener respuesta ante su petición de participación (10, 11), lo hace directamente (12, 14).

Marisol que se había mostrada dispuesta a participar opinando (2) alrededor de qué método para predecir es mejor, después de la participación de Leonel, rehúsa hacerlo (13). El argumento que expresa, para no hacerlo, es adoptado por los demás (13, 15).

Las intenciones, al participar en la secuencia, no siempre son compartidas por el profesor y los estudiantes; estas intenciones están determinadas por el rol social que juegan los actores en el contexto argumentativo concreto.

Episodio 5.2.11 ***Métodos de predicción basados en aproximaciones de segundo orden***

Es de resaltar los episodios donde surgen como herramienta para predecir la aproximación de segundo orden. Los datos que fueron obtenidos a través del sensor al rodar la pelota en un plano inclinado se muestran en la siguiente tabla.

Tiempo	Posición del móvil	Razón de cambio Velocidad	Diferencia de las razones de cambio
4.1	3.581	-4.51	-0.12
4.2	3.13	-4.63	0.67
4.3	2.667	-3.96	0.6
4.4	2.271	-3.36	0.2
4.5	1.935	-3.16	0.76
4.6	1.619	-2.4	0.33
4.7	1.379	-2.07	0.52
4.8	1.172	-1.55	0.39
4.9	1.017	-1.16	0.36
5	0.901	-0.8	0.57
5.1	0.821	-0.23	0.44
5.2	0.798	0.21	0.49
5.3	0.819	0.7	0.52
5.4	0.889	1.22	0.3
5.5	1.011	1.52	0.63
5.6	1.163	2.15	0.28
5.7	1.378	2.43	0.67
5.8	1.621	3.1	0.38
5.9	1.931	3.48	0.37
6	2.279	3.85	
6.1	2.664		

Tabla. 5.33 Tabla que Leonel construyo en su calculadora

Maestro: Si ustedes se fijan se han propuesto cuatro métodos para predecir la posición de la pelota. El primero,...

...

Leonel: Yo tengo un método que es mucho mejor, voy a escribirlo en el pizarrón para que me entiendan maestro.

Maestro: Sí claro, pasa por favor.

Leonel pasa al frente.

Leonel: Yo le hice así. La razón de cambio anterior le quitamos la razón de cambio y luego esto (*escribe en el pizarrón y señala el resultado de la diferencia*) es lo que cambio en .1 segundo; entonces cuánto cambia en .03 segundos,...

Escribe

3.1 2.43 .67

Maestro: ¿Cómo, cómo?

Leonel: Es la razón de cambio anterior, es 2.43 y la que sigue es 3.1; vamos a ver la diferencia, el incremento es .67

También tenemos el de 5.7 a 5.8, es de .1 el recorrido, el tiempo es de .1. Para saber cual fue el incremento, para saber la razón de cambio, 0.67 por 1 entre .1, cada segundo, va ir creciendo (*la razón de cambio*) 6.7 por segundo, esto lo multiplico por .03 que va ser la diferencia de 5.7 a 5.73, para que nos dé (*la razón de cambio*) en 5.73, 6.7, por .03 nos da 0.201; a esto le sumo la anterior 2.43, que es igual a 2.631, ahora sí ésta es la razón de cambio (*escribe en el pizarrón mientras habla*)

$$
\begin{array}{ll}
0.1 & 0.67 \\
1 & 0.67 \times 1/0.1 = 6.7 \\
 & \times .03 = .201 + 2.43 = 2.631
\end{array}
$$

Esto por lo de "*x*", por .03 más lo que vale en 5.7 (*escribe*)

$$2.631 \times .03 = .07893 + 1.378 = 1.45693$$

1.45693, metros, ¡Aja!, metros.

No se oyen voces.

Leonel: Lo que pasa es que ellos no toman bien la razón de cambio, la toman como si fuera constante y no, está cambiando. Se debe tomar la diferencia entre las razones de cambio y luego...

Varias voces: No...

Maestro: ¿Por qué tomaste la diferencia entre las razones de cambio?

Leonel: Porque es la razón de cambio lo que está cambiando, por eso pongo la diferencia, es una diferencia que subió de 2.43 a 3.1; tiene que llegar a 3.1. Va a subir .67 de 2.43, hasta 3.1

Maestro: Pero ¿por qué no tomaste la diferencia de las razones de cambio antes?

Leonel: Porque antes no era necesario, eran constantes las razones de cambio, era lineal. La razón de cambio esta cambiando, tomamos el promedio de las razones de cambio.

Maestro: Pero esto del promedio de las razones de cambio es diferente de lo que has hecho.

Leonel: Nó, es lo mismo.

Maestro: ¡Es muy interesante tu método! ¿Le han entendido a Leonel?, es muy interesante, ¿Qué opinan?

El maestro desea entablar una discusión alrededor de la posición de Leonel, pero nadie opina.

Maestro: Sí se le entendió.

Varias voces: No.

Maestro: Su compañero utiliza la segunda razón de cambio para predecir. Él no considera la razón de cambio en 5.7 ni la de 5.8, él hace una aproximación lineal entre las dos razones de cambio, como lo hicimos con el resorte. ¿Recuerdan?

$x(p+h)=x(p)+\frac{\Delta x}{\Delta p}h$. Pero ahora Leonel considera el tiempo y las razones de cambio como variables.

Entonces la razón de cambio es $R=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t}h+\frac{\Delta x}{\Delta t}$

Y después calcula la posición del objeto considerando esta nueva razón de cambio.

$$x(5.7+.03)=x(5.7)+\left(\frac{3.1-2.43}{0.1}0.3+2.43\right).03$$

$$x(t+h)=\left(\frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t}h+\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)h+x(t)=x(t)+\frac{\Delta x}{\Delta p}h+\frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t}h^2$$

El maestro intenta que el grupo discuta sobre los métodos de predicción de segundo orden sin lograrlo.

Después de la sesión el maestro charla con Leonel.

Leonel insiste que el método que emplea y el de tomar las razones de cambio promedio es el mismo, el maestro argumenta que si se toma el promedio de las razones de cambio se tendría

$$x(5.73)=x(5.7)+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}+\frac{\Delta x_2}{\Delta t}\right).03$$

pero

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}+\frac{\Delta x_2}{\Delta t}\right).03=\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x_1}{\Delta t}+\frac{\Delta x_2}{\Delta t}-\frac{\Delta x_1}{\Delta t}\right).03=\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}\right)0.03+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta t}-\frac{\Delta x_1}{\Delta t}\right)0.03$$

entonces

$$x(t+h)=x(t)+\frac{\Delta x}{\Delta t}h+\frac{1}{2}\left[\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\right]\frac{h^2}{h}$$

con números

$$x(5.73)=x(5.7)+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}+\frac{\Delta x_2}{\Delta t}\right).03=1.378+\frac{1}{2}(2.43+3.1).03=1.46095$$

Episodio 5.2.12 ***Coordinando los parámetros del modelo con las características del fenómeno***

En el episodio los estudiantes del equipo 1 discuten la pregunta ¿qué tendríamos que hacer para que la gráfica que despliegue el sensor sea una parábola con los brazos más abiertos?

Denisse: Tenemos que poner el plano, o ¿qué podemos hacer con la pelota para que los brazos queden más abiertos?

Erika: Lanzar la pelota más..., o hacer que el plano...; no, lanzar la pelota lentamente.

Denisse: ¿Lanzar la pelota más lentamente?

Erika: Para que los intervalos de tiempo sean más grandes, a ver, pero no sé como hacer con el plano.

Fandila: Es distancia y tiempo.

Erika: Distancia y tiempo, va a ser frontal, más estrecha si los intervalos de tiempo son mas cortos (*en la gráfica señala con el dedo pulgar el origen y con el índice el punto p en el eje t, como queriendo abarcar con los dedos el intervalo de tiempo y luego acerca el dedo índice al pulgar como queriendo hacer más chico el intervalo de tiempo, figura 5.18*)

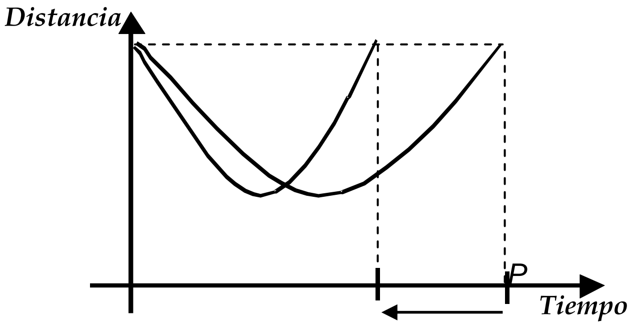


Figura 5.18 Para cerrar los brazos de la parábola hacemos más chico el tiempo

Leonel: ¡Aja!, y para abrir los brazos debe recorrer en mayor tiempo la distancia...

Erika: Debe de recorrer en mayor tiempo una misma distancia.

Denisse: En mayor tiempo (*a la vez*).

Erika: La misma distancia.

Denisse: La misma distancia (*a la vez*).

Erika: O también debe de ser menor la distancia en la que se lanza la pelota en el mismo tiempo.

Denisse: La velocidad debe ser.

Erika: Sí, menor.

Denisse: A ver, ¿cómo, mayor tiempo?

Leonel: Mmmh, más tiempo en recorrer la misma distancia.

Erika: De manera que la distancia entre el tiempo sea menor, la velocidad sea menor; sí, debemos lanzar mas lentamente la pelota.

Denisse: Pero este..., si avientas más lentamente la pelota lo que vas a hacer es que no va a llegar la pelota.

Erika: No puede ser mayor.

Fandila: Pero se da distancia sobre tiempo, si la distancia es mayor.

Leonel: Mmmh, recorrerá una menor distancia en el mismo tiempo.

Fandila: ¡Ah! Bueno.

Erika: Si la velocidad es menor va a recorrer una menor distancia en un intervalo de tiempo determinado, si la velocidad es mayor va a recorrer 3 metros en 1 segundo, si es menor va a recorrer 2 metros.

Denisse: Si es mayor el tiempo es menor la velocidad.

Leonel: Pero, ¿cómo hacerle para que la velocidad sea menos?

Erika: Pasándola.

Leonel: Nó.

Denisse: Y es que lo que hace que no llega hasta acá…

Erika: Más distancia en mismo tiempo, solamente que el dato sea más elemental para que recorra mas distancia.

Leonel: Se debe poner el plano más horizontal.

Denisse: ¿Qué opinan, eh?

Denisse: Sea más horizontal el plano...

Erika: Para que recorra más distancia.

Denisse: ¿Eh?

Fandila: Sí ¿nó?

Erika: Sí, porque mientras más inclinado sea el plano mayor es la distancia recorrida.

Aquí Erika construye un argumento valiéndose de la gráfica y de movimientos con la mano para determinar cómo se obtendría una parábola con los brazos más cerrados. Además, se muestra cómo logran coordinar la inclinación del plano y la amplitud de la parábola.

Episodio 5.2.13 *"Necesitamos saber qué hace cada uno de estos parásitos"*

El siguiente episodio es un extracto de la discusión del equipo 3 al intentar pegarle una parábola a la nube de puntos obtenida de los datos del movimiento de la pelota en el plano inclinado. El episodio transcurre al mismo tiempo que interactúan con la calculadora.

Saryt: Ya sé por qué no me sale.

Rubí: Chismosa.

Omar: Te hace falta abrirla y subirla

Rubí: ¿Cómo que nada más me falta abrirla y subirla?

Omar: Estamos dando palos de ciego, necesitamos saber qué cosa hace cada parásito.

Julián: ¡Madre!

Omar: ¿Cómo que es 1.0?, ¿qué cambia con esto?

Rubí: Cambia lo abierto. Fíjate en el signo de a, ¡Aja!

Saryt: ¿En el signo de a?

Omar: El signo de a nada más la voltea.

Julián: Entonces, ¿qué hace a, qué hace b y qué hace c?

Omar: a afecta la altura y c también la altura, pero b no sé que afecta. b afecta el punto de inicio de la parábola pero lo afecta en el sentido horizontal, no sé cual es el que afecta en el sentido vertical, no sé si sea el coeficiente de x.

Julián: ¡Aja!, vamos a ver. Vamos por partes. A a si le pones negativo se voltea, entonces ponle positivo.

Si le pones más grande...

Rubí y Omar: Se hace más amplia (*a la vez*)

Omar: b la mueve en el sentido horizontal.

Julián: ¡Aja!, y c la sube o la baja.

Omar: Ahí va.

Rubí: Sí.

...

Omar: Ahora, nada más tengo que subirla.

Rubí: Nada mas le pongo más acá, le pongo .9 (se refiere a *c*).

Julián: No es necesario que la mueva arriba, déjala en .8.

Julián: Yo digo que eso no es necesario que la mueva para arriba.

Omar: ¿Cómo, cómo?

Julián: Que no es necesario que la suba. Nada más sube el valor de *a* (*a tiene el valor de 2.5)*.

Rubí: ¡Aja!, nada más hace falta ampliarla tantito (*No aumenta el valor de a le da el valor de 2.3*).

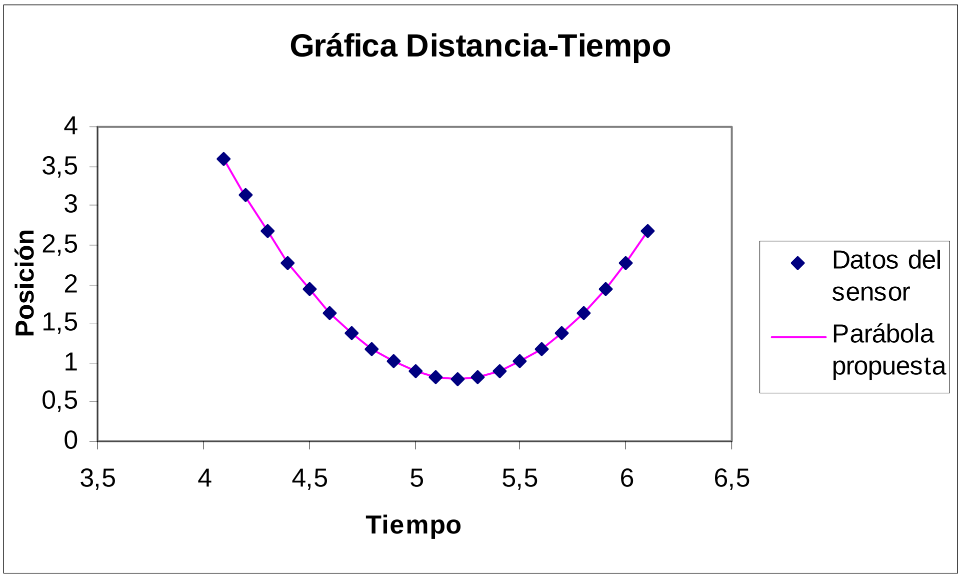


Figura 5.19 La nube de puntos obtenida de la tabla de datos y la gráfica de la parábola que propone el equipo 3: $x(t) = 2.3(t - 5.2)^2 + 0.8$.

Los participantes del equipo 3, al intentar ajustar una parábola a la nube de datos, asocian los parámetros algebraicos con los geométricos. A esta práctica le hemos llamado "ajuste gráfico de datos". Consiste en pegarle una curva a una nube datos moviendo los parámetros algebraicos para obtener cambios en las parábolas en la dirección que ellos juzgan conveniente. En este episodio hemos intentado presentar cómo al ejercer esta práctica los estudiantes asocian los modelos gráficos y algebraicos. Aún cuando se manifiesta si "se sube *a*" entonces "se hace más amplia" la parábola, ellos coordinan "en la práctica" *a* con la amplitud de la parábola, es decir, para obtener una parábola más "amplia" disminuyen el valor de "a".

La idea presente es la de una parábola que se mueve al cambiar los parámetros de la fórmula.

Como una conclusión general es que la centración en lo lineal persiste aun después de haber participado en secuencias donde se llegan a consensos sobre lo que es lo lineal y aplican regla de tres y cuando los actores han concluido que éste no es un buen método para predecir en todos los casos.

En general, la regla de tres persiste como método más recurrente para predecir; por ejemplo, Miguel recurre a ella durante toda la experimentación y Sarit en menor medida.

La centración en lo lineal se rompe parcialmente al enfrentarse con lo no lineal; es decir, en ocasiones recurren a esta experiencia pero en otras ocasiones recurren, en la misma situación, a la regla de tres.

La experiencia de las prácticas ejercidas en los diseños propuestos pasa a ser significativa, pero no en todos los casos.

En el discurso se presenta gran variedad de formas de caracterizar los modelos así como métodos de predicción.

Destacan las formas contextuales donde adquieren significados ciertos "conocimientos".

Capítulo VI

Conclusiones y perspectivas

6.1 Las dicotomías como explicación de los fenómenos educativos

"En general, se puede decirse que la división de la educación se refleja en la filosofía dualista. Se considera al espíritu y el mundo como dos reinos de la existencia independientes teniendo entre sí ciertos puntos de contacto".

John Dewey. Democracia y educación.

Desde diferentes perspectivas los fenómenos sociales, en general, y de aprendizaje, en particular, se han intentado abordar. Se han planteado metáforas basadas en dicotomías que han transitado desde la dicotomía planteada por Descartes objeto- sujeto, que han permeado gran parte de las investigaciones en nuestra disciplina, hasta dicotomías como la planteada por Duval (1995), objeto matemático–representación, que, más particularmente, establecen la distancia entre los objetos matemáticos externos al humano y predeterminados y las representaciones (mentales) como imagen de los mencionados objetos. Así como se ha opuesto la teoría y la práctica, el conocimiento y la actividad, la mente y el cuerpo, lo sensible y lo racional, se ha opuesto el sujeto y el objeto, lo individual y lo social.

En esta investigación se ha intentado presentar una visión unitaria, no basada en escisiones o en falsas dicotomías.

Nuestro intento, en general, se concentró en argumentar y en presentar evidencias acerca de una perspectiva contraria a una visión reduccionista acerca de los fenómenos de aprendizaje. Nuestro esfuerzo se dirigió en mostrar en que el todo tiene características que las partes, por separado, no tienen y que la importancia no está en el análisis de las partes sino en las relaciones que establecen las partes.

Una muestra de esta afirmación está en nuestro acercamiento con lo lineal. Los modelos lineales y cuadráticos se constituyen en íntima relación, no se constituyen primero uno y luego otro, se consolidan en un mismo movimiento: lo lineal en confrontación con lo no lineal. De otra forma la centración en lo lineal se presenta como una forma de actuar al enfrentar diversas situaciones.

6.2 Lo individual y lo social

¿Por qué, pues, se ha de enseñar que uno debe realizar su elección entre sacrificarse, haciendo cosas útiles a los demás o sacrificar a éstos en la prosecución de sus propios fines exclusivos, sea la salvación de su propia alma o la edificación de una vida y una personalidad internas espirituales? El dualismo está demasiado profundamente arraigado para que pueda ser vencido fácilmente; por esta razón es función particular de la educación, en la actualidad, luchar en defensa de un fin en el que la eficiencia social y la cultura personal sean sinónimos en vez de antagónicos.

John Dewey. Democracia y educación

Hoy día se ha establecido un debate entre lo social – individual, como si algunos de estos aspectos pudiera soslayarse, olvidándose, en algunas ocasiones, de que es en la relación entre ellos donde se devela el carácter de la perspectiva. De esta manera las perspectivas constructivistas han puesto énfasis en lo individual, mientras que en las perspectivas socioculturales el énfasis se encuentra en lo social; sin embargo, hoy día, las perspectivas en nuestra disciplina pueden negar la influencia de alguno de estos aspectos; así, por ejemplo, teorías como APOE reconocen el papel de lo social en los fenómenos educativos[3]. El carácter del debate entre las corrientes teóricas adquiere otro cariz, referido al análisis particular de las investigaciones que guían, donde lo social y lo individual, como un todo, adquiere significado.

Es una dicotomía errónea pensar en que la unidad de análisis de la identidad debe ser la comunidad o la persona, lo social o lo individual. El enfoque debe recaer en el proceso de constitución mutua, en una dualidad

[3] Ed Dubynsky, mesa redonda "*El estatus científico de los diversos acercamientos*" en la VI Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, 2002.

donde lo que más importa es la interacción, no la capacidad de clasificación (Wegner, 2001).

Hemos intentado en esta investigación atender tanto lo individual como lo social. Sin perder de vista las particularidades de cada individuo se estudia las interacciones en un contexto social. Evitamos una dicotomía simplista individual-social, sin anular la distinción. La perspectiva resultante no es individualista, ni abstractamente institucional, o social, sino que hace justicia a la experiencia de identidad vivida, al tiempo que reconoce su carácter social: es lo social, lo cultural, lo histórico con un rostro humano.

El estudio del carácter de las interacciones de los actores en el aula construyendo sus conocimientos es una de las formas del análisis particular que adquiere nuestra visión del individuo y la sociedad. La interacción es lo característico de lo socio; es decir, el profesor no trasmite el conocimiento al alumno, el alumno tampoco construye individualmente su conocimiento. El carácter discursivo de estas interacciones, construyendo, proponiendo y argumentado diferentes versiones (lo individual) y llegando a consensos (lo colectivo) es una distinción en esta investigación.

Por ejemplo, es en el discurso donde surgen, como construcciones propias, herramientas como los modelos gráficas distancia - tiempo y velocidad - tiempo del movimiento de un móvil ó las tablas de datos lineales. Otro ejemplo lo constituye el debate donde se propone la velocidad negativa como un argumento para establecer una versión.

Esto es acorde con nuestra propuesta: aprender está referido a las formas en que el conocimiento, construido por el humano, vive, es movilizado en las interacciones sociales. Desde este punto de vista, no sólo es importante que un alumno estudie lo que es velocidad, por ejemplo, sino que fundamentalmente nos interesa cómo se moviliza como herramienta “la velocidad” en sus interacciones sociales. Nos interesa la forma en cómo viven los conocimientos construidos, cómo son movilizados como argumentos o cómo se emplean como herramienta para intervenir en su entorno.

6.3 Las prácticas humanas en un lugar y en un tiempo

En esta investigación dirigimos nuestra atención en cómo el humano participa en contextos sociales construyendo su conocimiento y su realidad. No hemos querido desprendernos de la temporalidad y el lugar donde esta participación sucede. En esta forma se atienden las intenciones de los estudiantes y se analiza la historia particular de los actores. Como dijimos anteriormente, nuestras identidades incorporan el pasado y el futuro en el proceso mismo de negociar el presente.

Las evidencias presentadas con respecto a la importancia del contexto confirman la tesis de que las estrategias, la argumentación y las concepciones, entre ellas la de "verdad" de los actores, dependen de los contextos donde participan.

De esta forma reportamos que aun cuando los estudiantes han trabajado con gráficas cartesianas en otras materias (química, física,…) y han visto conceptos como velocidad, aceleración. Este conocimiento no es "transferido" al actuar, en este caso, en las secuencias donde participaron. En particular, la aceleración es una herramienta que no es movilizada inmediatamente en las prácticas que se ejercieron en las secuencias de la figuración del devenir de las cualidades.

Hemos querido mostrar cómo la construcción de los conocimientos se devela en las interacciones del humano con su entorno y con los otros, en sus prácticas, en el empleo de sus capacidades, en las herramientas que emplea, por sus intenciones, por su visión del mundo, por su pertenencia a comunidades; es decir, en su actuar en el mundo.

Aquí quisiéramos resaltar los métodos de predecir que son utilizados y particularmente cómo surge como método de predicción la aproximación de segundo orden, lo que llamamos la serie de Taylor de segundo orden en contexto.

Un error sería olvidarse del carácter contextual de estas construcciones y, adoptando el punto de vista criticado, pensar que son construcciones adquiridas para siempre y que tendrán listas para ser aplicadas en cualquier otro contexto

Por ejemplo, cuando reportamos lo que hemos llamado la centración en lo lineal, decimos que este fenómeno persiste aún después de haber participado en secuencias donde se llegan a consensos sobre lo que es lo lineal y aplican regla de tres aún cuando los actores han concluido que éste no es un buen método para predecir en todos los casos.

La centración en lo lineal se rompe parcialmente al enfrentar con lo no lineal; es decir, en una misma situación, los estudiantes pueden recurrir a la regla de tres u a otras formas de predecir o de argumentar.

La experiencia de las prácticas ejercidas en los diseños propuestos pasa a ser significativa no en todos los casos.

Aún cuándo llegan a consensos las construcciones anteriores no son olvidadas, recurren a ellas, en cuanto tienen oportunidad; "no están convencidos".

Lo que podemos afirmar es que los argumentos vertidos en "las exploraciones" son cercanos a la experiencia vivida en las secuencias.

6.4 Los conocimientos matemáticos

En el Capitulo I sostuvimos una crítica al modelo donde se presenta el proceso de cognición como la relación entre el objeto cognitivo y el sujeto cognoscente. De esta forma las perspectivas que proponen la existencia de un objeto cognitivo preexistente, único y con estructuras rígidas, giran alrededor de la construcción del objeto matemático por lo que el foco de interés de sus respectivos marcos teóricos está en la actividad matemática y en la cognición del individuo con respecto a la adquisición de ese objeto. El sujeto es determinado linealmente y de forma única. El profesor enseña y el alumno aprende.

Es en este terreno donde el objeto de estudio (la matemática) se torna ya dado, externa al sujeto y los esfuerzos educativos se centran en cómo este sujeto se apropia, construye, reifica, etc. este objeto. Donde construcciones alternas a las de este objeto son vistas como errores o desviaciones que hay que erradicar o corregir; donde la evaluación de un proceso esta en términos de qué tanto los alumnos se han apropiado de estos objetos; o de cómo los pueden aplicar a ciertos problemas; dónde las investigaciones epistemológicas se ven desde el punto de vista de cómo los objetos matemáticos han llegado a ser parte de esta verdad eterna; por ejemplo en términos de Sfard (1992) "la turbulenta biografía de la función puede ser vista como una larga lucha de tres siglos por reificarse".

Sin embargo, en las prácticas escolares este objeto no está determinado y es construido de acuerdo a las prácticas de los grupos sociales que participan en contextos determinados socialmente y estas construcciones no son únicas; se presenta ante ellos una vasta red de posibles construcciones y toman "lo que está a la mano".

De esta manera las gráficas cartesianas no son un modelo que es movilizado al enfrentarse a situaciones de modelación, las gráficas icónicas se presentan como una construcción inmediata.

En la investigación se tomó como central, no los objetos matemáticos, sino el ejercicio de prácticas sociales en el diseño de las secuencias puestas en escena. Así mismo, reportamos la diversidad de herramientas y argumentos matemáticos y "extramatemáticos" que surgen en el ejercicio de las prácticas: gestos, métodos para predecir, procedimientos, gráficas, etc.

De esta forma, damos vida en la investigación a nuestra concepción acerca de los conocimientos: los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades.

6.5 El sujeto cognoscente genérico

En nuestro medio podemos encontrar trabajos donde se hace investigación con sujetos genéricos, sin contexto social; donde se reportan diferentes resultados o construcciones, sin atender las interacciones que dieron lugar a ellas.

En contraste, en esta investigación hemos manifestado nuestro enfoque centrado en las prácticas sociales que ejercen los actores en contextos sociales. Pero su actuar depende, entre otras cosas, de la formación cultural y social del participante, de sus creencias y concepciones; en particular de lo que son las matemáticas y su papel en la sociedad; es de esta forma que la formación académica, el trabajo de los padres, sus prácticas no escolares influyen en la participación; es decir, en su identidad. Los actores que participaron en los diseños no son sujetos genéricos, son individuos provistos de una identidad.

La identidad de los participantes forma parte del contexto social, éste no es sólo una descripción externa, objetiva, de las condiciones materiales de la actividad también incluye componentes subjetivas como la historia personal de los participantes, las concepciones y las relaciones sociales.

Por esto intentamos incorporar un estudio acerca de la identidad de los actores participantes en los diseños; sin embargo, ésta es una primera aproximación al planteamiento y será en el transcurso de futuras investigaciones donde se aborden las formas de cómo éstos influyen. Para ello se diseñó un cuestionario (Anexo I), aplicado a los estudiantes que participaron en la secuencia y a sus padres.

En el estudio sólo se tomaron en consideración parcialmente tres aspectos, la situación socioeconómica, el desarrollo escolar y las concepciones acerca de las matemáticas y de su papel social.

Sobre la situación socioeconómica de los participantes nos interesó saber,

- Si viven en “familias integradas”. Preguntas 6, 7, 8, 9, 10 y 11 del cuestionario.
- El arraigo de los participantes en la región. Preguntas 2, 3, 4, 5, 27, 32 34 y 36.
- El nivel académico de padres y hermanos. Preguntas 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15.
- Las actividades económicas de la familia. Preguntas 10, 11 y 12.
- Sobre su situación económica. Preguntas 3, 5, 10, 11, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 45, 46 y 47 del cuestionario.

Acerca de su desarrollo escolar nuestro interés se dirigió a conocer

- Sobre los medios electrónicos que utiliza, PC., calculadoras, teléfono, etc. Preguntas 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30 y 31.
- Sobre su historia académica en general y en particular en las materias de matemáticas. Preguntas 1, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 y 41 del cuestionario.
- Si son estudiantes de tiempo completo. Preguntas 31, 45, 46 y 47.

Sobre las concepciones acerca de las matemáticas y de su papel social preguntamos,

- Las concepciones de las matemáticas. Preguntas 16, 40, 41, 42, 43 y 44 del cuestionario.
- Sus intenciones. Preguntas 16, 17, 18, 19 y 20.

La mayor parte de los estudiantes que participan en los diseños son estudiantes que tiene arraigo en Acapulco, sus padres son de Acapulco, aún cuando sus abuelos no lo son. Son estudiantes que viven con sus padres y en casa propia. Son estudiantes de tiempo completo.

Los estudiantes, en gran proporción cuentan con PC y están familiarizados con su uso. Sus padres, en general, son empleados con ingresos “medios”.

Una proporción considerable de los padres cuenta con estudios universitarios.

Ellos han tenido en su historial académico buenas calificaciones y no han reprobado materias.

Sobre su actitud hacia las matemáticas

- Tienen alta estima por ellas.
- Consideran que el índice alto de reprobados en matemáticas es debido a causas imputables a los alumnos.
- No las consideran "temibles".
- Las consideran tanto, o más, importantes que la química o la biología.

Al analizar este cuestionario, sin plantear que existe alguna correlación, es interesante observar algunas respuestas.

Al responder a la pregunta ¿Por qué quieres estudiar? Fandila dice: "Porque no quiero que en la calle me señalen como una ignorante". Los padres de Fandila son campesinos analfabetas. Leonel responde: "Porque me gusta". El padre de Leonel es filósofo y su madre psicóloga. José Luis responde: "Porque quiero obtener un título". El padre es abogado y la madre secretaria.

Los estudiantes no son entes aislados, participan en comunidades, donde las concepciones en general y, en particular, las concepciones que tienen acerca de las matemáticas, son importantes en su actuar.

6.5.1 Una ideologización de la matemática

Los aspectos ideológicos acerca del conocimiento y del desempeño escolar, sin duda, son importantes. Consideramos que la importancia que se concede a las matemáticas en nuestras comunidades es relevante. Como lo señala Harris (1991), el papel de las matemáticas escolares distingue a los estudiantes de acuerdo a sus habilidades y da acceso a oportunidades, aun cuando este papel se originó en el siglo pasado.

Indudablemente, esta posición privilegiada de un cierto tipo de conocimiento matemático de la sociedad afecta el aprendizaje.

Intentando escudriñar en esta red de concepciones de una comunidad realizamos un test entre los padres de los estudiantes participantes en las secuencias, los profesores del ITA y estudiantes.

Se aplicó una encuesta a 25 profesores de matemáticas del ITA; se les cuestionó, ¿por qué cree que muchos alumnos reprueban matemáticas?

Vertieron diferentes argumentos que clasificamos en argumentos con causas atribuibles al maestro, a los estudiantes, a la matemática o a otras cusas. El resultado de esta clasificación fue 72% atribuyen al alumno las causas de reprobación, 16% al profesor, 7% a las matemáticas y 5% a otras causas.

Se pidió a los estudiantes participantes que respondieran la misma pregunta y el 57% de los argumentos son basados en causas atribuibles a ellos mismos, el 36% atribuibles al profesor, el 3% a las matemáticas y el 4% a otras cusas.

Los padres fueron cuestionados con la misma pregunta y el 68% de los argumentos son causas atribuibles a los alumnos, el 22% al profesor, el 6% a las matemáticas y el 4% a otras cusas.

Se desprende que la cusa del fracaso escolar en matemáticas es atribuible al estudiante, ya que la matemática, no es variable, “no hay otra, ésta se tiene que aprender”; si acaso el otro factor sería el profesor, sin embargo debido a que posee la matemática y, entre más sepa matemáticas mejor, la culpabilidad es menor.

Causas / Respuestas	Atribuibles al estudiante	Atribuibles al profesor	Atribuibles a la matemática	Atribuibles a otras causas
Profesores	72%	16%	7%	5%
Estudiantes	57%	36%	3%	4%
Padres	64%	28%	6%	2%
Madres	72%	16%	6%	6%

Tabla 6.1 Causas de reprobación de la materia de matemáticas

En esta misma encuesta se cuestionó sobre la importancia de las matemáticas en la vida profesional, en la vida cotidiana y de estudiarla. Se propuso una escala del uno al diez, donde uno significa "muy poca importancia" y diez "mucha importancia", la siguiente tabla se presenta los promedios de las respuestas.

Importancia / Respuestas	En la vida profesional	En la vida cotidiana	De estudiar matemáticas
Profesores	9.6	9.4	9.7
Estudiantes	8.94	8.52	9
Padres	9.16	7.9	9.08
Madres	9.2	8.5	9.4

Tabla 6.2 Importancia concedida a las matemáticas

Además se pidió que mencionaran otras dos materias que consideran importantes de estudiar y calificarlas del uno al diez. Los resultados se dan en las siguientes tablas.

Materias / Respuestas	Física		Química		Biología		Ciencias de la salud	
	F	E	F	E	F	E	F	E
Profesores	14	9.2	7	9	2	9.5		
Estudiantes	11	8.63	14	9.5	7	9		
Padres	5	8	4	9	2	8.5		
Madres	4	9	8	9.8	4	9.5	1	10

Tabla 6.3 Materias que son consideras importantes para ser estudiadas. F significa número de menciones y E evaluación promedio

Materias / Respuestas	Relaciones humanas		Español		Civismo		Contabilidad		Historia		Ingles	
	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E
Profesores	3	8.6	8	9.4			1	8	1	9	2	8.5
Estudiantes												
Padres	1	9	4	9.5	1	8	2	9	2	8	1	10
Madres	1	10	5	9.4	1	10			1	9	1	9

Tabla 6.4 Materias que son consideras importantes para ser estudiadas. F significa número de menciones y E evaluación promedio

Un alumno respondió psicología y la calificó con 8 y otro termodinámica y la califico con 9. Un profesor mencionó literatura y la calificó con 8, cuatro computación con un promedio de 9 y uno arte con 8.

Del análisis de los datos desprendemos que a las matemáticas se les concede gran importancia para el desempeño del estudiante en su comunidad, incluso más que a química o biología, siendo que los estudiantes son de la carrera de Ingeniería Bioquímica

La participación de los estudiantes en los diseños esta influida por la pertenencia a sus comunidades; de esta forma, no es posible seguir viéndolos, en las actividades diseñadas, como sujetos sin historia y genéricos. Al final de cuentas, en las prácticas de aprendizaje el punto de inicio es su identidad y el punto final es la transformación de ésta.

6.6 Palabra finales

Los logros deseados en la investigación se refieren, por una parte, a proporcionar elementos para el desarrollo de la perspectiva teórica que construimos llamada socioepistemología y mostrar evidencias que sustenten nuestras afirmaciones en lo teórico. Por otra parte, aportar elementos para incorporarlos en nuestro quehacer cotidiano en el aula.

De esta forma hemos argumentado y mostrado evidencias con respecto a nuestra posición sobre el conocimiento, a lo que es aprender y el papel de los actores en el aula. Concretamos lo epistemológico, lo cognitivo y lo didáctico, en un lugar y en un tiempo, en contextos sociales.

Aprender. Sostenemos que el aprendizaje es una actividad humana situada en contextos sociales donde los actores sociales ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad, las mismas prácticas, su entorno, sus realidades, sus herramientas y su identidad.

Los conocimientos. Para nosotros los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades.

La interacción en el aula. La construcción de los conocimientos se devela en las interacciones del humano con su entorno y con los otros humanos; en sus prácticas, en el empleo de sus capacidades, en las herramientas que emplea, por sus intenciones, por su visión del mundo, por su pertenencia a comunidades; es decir, en su actuar en el mundo.

Los contextos sociales. El humano participa en contextos sociales construyendo su conocimiento y su realidad. No hemos querido desprendernos de la temporalidad y del lugar donde esta participación sucede.

Mostramos evidencias, a nuestro entender, de cómo los humanos construyen conocimiento en el ejercicio de prácticas sociales. Aquí se han propuesto a los actores diseños donde ejercen prácticas sociales de modelación particulares, la figuración del devenir de las cualidades y la numerización de los fenómenos. Al ejercer las prácticas sociales de modelación propuesta, construyen lo lineal y lo cuadrático como herramientas para intervenir en sus comunidades. Esto, precisamente, es lo que se constituye en conocimiento. Entendemos que al hablar del conocimiento utilizamos el lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos.

En nuestra investigación se ha tratado lo lineal y lo cuadrático no como dos cosas distintas, como dicotomía; más bien como un todo indisoluble, necesitario de su contraparte y, por ende, como un todo complejo. Esto rompe con cuestiones como "la centración en lo lineal".

Actualmente, hemos dirigido la atención en dos direcciones, la primera, en la construcción de diseños donde el ejercicio de la modelación construye lo exponencial y lo inversamente proporcional como herramientas. La segunda dirección es el estudio del ejercicio de la modelación en contextos que conlleven a relacionar más de dos variables.

De esta manera, las prácticas sociales propuestas forman la base epistemológica de los diseños propuestos a desarrollar en el aula; es decir, concretamos la aseveración de que la actividad humana es base epistemológica para la intervención en el discurso matemático escolar. Sin embargo, estas prácticas, y las herramientas que se construyen, distan mucho de ser una totalidad; ni siquiera referente a lo que hemos llamado las prácticas sociales de modelación; por ejemplo, en el trabajo doctoral que desarrolla Buendía (Buendía y Cordero 2001, 2002; Arrieta y Buendía 2001, 2002) se presenta a la predicción como una practica social como base epistemológica de lo periódico.

Los estudios de prácticas sociales diferentes que son ejercidas por los actores en contextos sociales contribuirán, sin duda, a la reorganización del discurso matemático escolar. Así, algunas investigaciones emprendidas por Cordero, Cantoral, Farfán y Montiel (Cantoral y Montiel

2001, 2002; Cordero 2001, 2001a; Cantoral y Farfán 1998a; Cantoral 1998), sólo por mencionar algunas, se refieren a la práctica social de graficación dejando un importante legado en cuanto a la reorganización del discurso matemático escolar.

Sin duda, una perspectiva de esta investigación estaría en la dirección de estudiar las prácticas sociales de la algoritmia, entendidas como las prácticas que se relacionan con describir cómo se efectúan las tareas, éstas son prácticas que históricamente se ha ejercido desde milenios en contextos sociales diferentes y que actualmente constituyen parte fundamental en la computación.

Este trabajo pretende estar en la línea de investigación que versa sobre el estudio de las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento.

Por último, refrendamos nuestra posición en cuanto al trabajo en nuestra disciplina, matemática educativa, tratamos de materializar en este trabajo nuestras concepciones sobre la investigación, sin perder de vista el lugar y el tiempo, los contextos y los actores sociales, las problemáticas concretas y las perspectivas teóricas generales, pero sobre todo, el afán de hacer investigación intervensionista; es decir, investigamos para transformar.

Bibliografía

AAAS (1997). *Ciencia Conocimiento para Todos.* México: Harla.

Arrieta, J. (2001). Narración de una interacción discursiva en el aula: "la linealidad y lo que no es la linealidad". *Actas de la 15 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Buenos Aires, Argentina. Grupo Editorial Iberoamérica.

Arrieta, J. y Buendía, G. (2001) El diseño de situaciones desde la perspectiva de la actividad humana. Serie: *Antologías*. No. 1. Programa Editorial de la Red Nacional de Cimates.

Arrieta, J. y Buendía G. (2002) La predicción como argumento para construir la periodicidad en el contexto interactivo del salón de clases. En *Casio Académico* 2 (2), 6-7

Arrieta, J. y Slisko, J. (2002). Las dificultades conceptuales que revelan los estudiantes en la modelación verbal y gráfica de un movimiento y su comunicación. *En Resúmenes de la Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica. p. 121.

Atweh, B., Bleicher, R. y Cooper, T. (1998). The Construction of the Social Context of Mathematics Classrooms: A Sociolinguistic Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29, No. 1, pp. 63-82.

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of structures: Development and function of mathematizing as a social practice. En Steffe, Leslie P. & Gale, Jerry (Eds), *Constructivism in Education,* pp. 137-158. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, New Jersey.

Bauersfeld, H. (1992). Classroom Cultures from a Social Constructivist's Perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 467-481.

Bell, A. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Editado por la Universidad del País Vasco.

Berg, C. y Phillips, D. (1994). An investigation of the relationship between logical thinking structures and the ability to construct and interpreted line graphs. En *Journal for Research in Science Teaching*, 31, pp. 323-344.

Bernstein, B. (1971). *Class, Codes and Control.* Vol. 1. Routledge and Kegan Paul, London.

Bernstein, B. (1990). *The structuring of the pedagogic discourse.* London: Routledge.

Billing, M. (1987). *Arguing and Thing: A Rhetorical Approach to Social Psychology*. Cambridge University Press, Cambridge.

Billing, M. (1989). The Argumentative Nature of Holding Strong Views: A Case Study. *European Journal of Social Psychology*, vol. 19, 1989, pp. 203-223.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), pp. 33-112.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. et al. *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Paidós Educador, Argentina.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers -Mathematics Educations Library, Vol. 19, Holanda.

Bruner, J. (1987). *La importancia de la educación*. Paidós, Barcelona.

Bruner, J. (1972). *Hacia una teoría de la instrucción*. México: Manuales UTEHA. Número 373.

Bruner, J. (1988). *Realidad mental y mundos posibles. Los actos de la imaginación que dan sentido a la experiencia.* Gedisa, Barcelona.

Bruner, J. Haste, H. (1990). *La elaboración del sentido*. Paidós, Barcelona.

Buendía. G. y Cordero, F. (2002). Las prácticas sociales como generadoras de conocimiento. La predicción y lo periódico. *Antologías II.* Editorial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Red Nacional de CIMATES, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Buendía. G. y Cordero, F. (2001). Una epistemología del concepto de periodicidad a través de la actividad humana. *Actas de la 15 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Buenos Aires, Argentina. Grupo Editorial Iberoamérica.

Camarena, P. (2001, a). Los modelos matemáticos en la ingeniería. En *Memorias del XVI Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas*. Saltillo, Coahuila, México.

Camarena, P. (2001, b). La matemática en el contexto de la ciencia. Serie: *Antologías*, No. 1. Programa Editorial de la Red Nacional de Cimates.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. Primera edición. Paidós Educador, México.

Cantoral, R. (1997). Matemática educativa. Serie: *Antologías*, No. 1, pp. 81-98. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

Cantoral, R. (1998). Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: el caso de la matemática escolar. Serie: *Antologías*, No. 3. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Investigación en didáctica de las matemáticas y profesionalización docente: retos de la educación superior. Serie: *Antologías*, No. 3. Área de Educación Superior del Departamento de matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998a). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon,* Vol. 42. Núm. 14 (3), pp. 854-856.

Cantoral, R. (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea. En R. Farfán (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 12 (I), pp. 41–48.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 13.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 54-62.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Desarrollo del pensamiento matemático: el caso de la visualización de funciones. *Actas de la 15 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Buenos Aires, Argentina. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002). Visualización y pensamiento matemático. En *Resúmenes de la Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2002). Sur la sensibilité a la contradiction en mathématiques; l'origine de l'analyse complexe. *Recherches en Didactique des mathématiques*. Vol. 22, Núm. 2.

Carraher, D. (1991). Mathematics in and out of school: A selective review of studies from Brazil. En M. Harris (Ed.) *Schools, mathematics, and work.* Falmer Press, Brighton.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Development Psychology*, 3.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1991). *En La vida diez en la escuela cero: Los contextos culturales de educación matemática.* Primera edición en español. Siglo Veintiuno Editores, México.

Carraher, D. y Schliemann, A. (1993). Proportional reasoning in and out of school. En P. Light y G. Butterworth (Ed) *Context and Cognition. Ways* *of Learning and Knowing.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 47-73.

Carrión, V. y Arrieta, J. (1998). La modelación de fenómenos como proceso de matematización para la formación, tratamiento y conversión de representaciones en diferentes sistemas semióticos. *Investigaciones en matemática Educativa II*, Grupo Editorial Iberoamérica – Cinvestav, México.

Clark, A. (1999) *Estar Ahí. Cerebro, cuerpo y mundo en la ciencia cognitiva.* Paidós, España.

Cobb, (1986). Contexts, goals, beliefs and learning mathematics. *For the Learning of mathematics,* 6(2), pp. 2-9.

Coll, C. (1986). Acción, interacción y construcción del conocimiento en situación escolar. *Revista de Educación*, no. 279, pp. 9-25.

Confrey, J. (1995). How compatible are radical constructivism, sociocultural approaches and social constructivism. En Steffe, Leslie P. & Gale, J. (eds) *Constructivism in education*, pp. 207-225. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, New Jersey.

Confrey, J. and Costa, S. (1996). A critique of the selection of "mathematical objects" as a central metaphor for advance mathematical thinking. En *International journal of computers for mathematical learning*. Vol. 1.

Confrey, J. (1999). Generative Domain Knowledge: Redefining Teachers' Content Knowledge for a Changing Technological World. En *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Confrey, J. y Dennis, D. (2000). La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Vol. 3, Núm. 1, pp. 5-26.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y el análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* Vol. 1. Núm. 1, pp. 56-74.

Cordero, F. (1998a). Cognición y enseñanza. La distinción y formación de construcciones en la didáctica de la matemática. En *Antologías* No. 3, del programa editorial del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, México.

Cordero, F. (1999). La Matemática Educativa en una aproximación sociocultural a la mente. En *Memorias del VII Simposio Internacional de Educación Matemática*. UPN. Ciudad de México. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 106-112.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* Vol. 4. Núm. 2, pp. 103-128.

Cordero, F. (2002). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y de significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 16. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cristal, D. (1985). *A Dictionary of Linguistics and Phonetics*. Second edition, Basil Blackwell, Oxford.

Dekker, R. (1995). Gebruik je gezond verstand! Use your common sense! *Actas de la CIEAM-47*, Berlín.

Dewey, J. (1916/2001). *Democracia y educación.* Ediciones Morata, España.

Donaldson, M. (1979). *La mente de los niños*. Morata, Madrid.

Duhem, P. (1913). *Etudes sur Léonar de Vinci. Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu*, vol. III. *Les précurseurs parisiens de Galilée*. Paris, 1913.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Suisse.

Edwards, D. y Mercer, N. (1994). *El conocimiento compartido. El desarrollo de la comprensión en el aula.* Paidós.

Edwards, D. y Potter, J. (1992). *Discursive Psychology*. Sage, Londres.

Edwards, D. (1996). *Discourse and Cognition*. Sage, Londres.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre enseñanza. *La investigación de la enseñanza II.* Paidós.

Engels, F. (1976). Introducción a la dialéctica de la naturaleza. *En Marx y Engels. Obras escogidas*, pp. 354-370. Editorial Progreso, Moscú.

Engels, F. (1976, a). El papel del trabajo en la transformación del mono en hombre. *En Marx y Engels. Obras escogidas*, pp. 371-382. Editorial Progreso, Moscú.

Evans, J. (1996). *Boundary-crossing: Another look at the possibilities for transfer of learning in mathematics.* Paper for the Standing Conference on Research on Social Perspectives on Mathematics Education. School of Education, University of North London, London.

Farfán, R. (1995). Ingeniería didáctica. *Revista Pedagogía*. Impreso por la Universidad pedagógica Nacional.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica.* Un estudio de la variación y el cambio. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Feynman, R. (1965/1980). *El carácter de la ley física.* Antoni Bosch editor, Barcelona.

Foucault, M. (1972). *The Archeology of Knowledge.* Pantheon, Nueva York

Galileo Galilei (1981). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.* Edición preparada por C. Solís y J. Sadaba. Segunda Edición. Editora Nacional, Madrid.

Garfinkel, H., Lynch M. y Livingston, E. (1981). The Work of a Discovering Science Construed whit Materials from the Optically Discovered Pulsar. *Philosophy of the Social Sciences, 11*, pp. 131-158.

González, J. (1996). *El héroe en el alma. Tres ensayos sobre Nietzsche.* Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, segunda edición, México.

Harris, M. (1991). *Schools, mathematics and work.* Falmer, Londres.

Heidegger, M. (1927/1999). *El ser y el tiempo.* Fondo de Cultura Económica, México.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *Investigaciones en matemática Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica, p. 223 - 244.

Hitt, F. (1997). Sistemas semióticos de representación. *Avance y Perspectiva*, Vol. 16 p. 191. México.

Kaput, J. (1991). Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes. Radical *Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74, Holanda.

Kaput, J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics authentic experience. En R. Biehler, R. W. Scholtz, R. Strässer, B. Wnklemann (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Kluwer Academic Publishers, Dortrecht.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza, Madrid.

Latour, B. (1987). *Science in action*. Open University Press, Milton Keynes. (Trad. En Labor, Barcelona, 1992).

Latour, B. (1993). *La clef de Berlin et autres leçons d'un amateur de science.* Éditions la Découverte, Paris.

Lave, J. (1992). *La cognición en la práctica.* Ediciones Paidós, 1992, España.

Lave, J. y Wenger, E. (1993). *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation.* Cambridge University Press, New York.

Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of mathematical ideas and Problem solving processes. En L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Gedisa, Barcelona.

Malaspina, U. (1998). Visualización de conceptos matemáticos empleando conceptos económicos. En *Resúmenes de Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* Vol. 12.

Martinez, S. (1997). *De los efectos alas causas. Sobre la historia de los patrones de explicación científica*. Paidós-UNAM, México.

Martínez, G. y Farfán, R. (2002). La convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. *Antologías II.* Editorial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Red Nacional de CIMATES, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Mercer, N. (1993). Culture, context and the construction of knowledge in the classroom. En P. Light y G. Butterworth (Ed) *Context and Cognition. Ways of Learning and Knowing.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 28–46.

Moreno, A. (1999). *Estudio operatorio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.* Tesis de maestría. Departamento de matemática educativa del Cinvestav.

Morin, E. (1995). Epistemología de la complejidad. *Nuevos paradigmas, cultura y subjetividad.* Dora Fried Schnitman compiladora. Paidós, Argentina.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Newman, D., Griffin P. y Cole, M. (1998). *La zona de construcción del conocimiento: Trabajando por un cambio cognitivo en educación.* Morata/MEC, Madrid.

Newton, I. (1713). Letter to Roger Cotes, 28 March. En J. Edelston, (Ed.), Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes. Cambridge University Press, 1850.

Noss, R., Hoyles, C. y Pozzi, S. (2002). Abstraction in expertise: a study of nurses' conceptions of concentration. *Journal for Researches in Mathematics Education,* Vol. 33. Num. 3, pp. 204–229.

Oresme, N. (1968). *Tractatus de configurationibus qualitatum et motunm.* En *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions por Marshall Glagett*. The University of Wisconsin Press, 1968.

Otte, M. (1986). What Is a Text? *Perspectives on Mathematics Education*, B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte (eds). Reidel Publishing Company, 1986, pp. 173-203.

Otte, M. (1993). Towards a social theory of mathematical knowledge. En C. Keitel and K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics, Education, and Technology* (pp.280-327). Springer-Verlag, New York.

Platón (1991). *Diálogos.* Porrua, México.

Preece, J. y Janvier, C. (1992). A study of interpretation of trends in multiple curve graphs of ecological situations. *School Science and Mathematics*, 92, pp. 299-306.

Potter, J. (1996). *La representación de la realidad. Discurso retórica y construcción social.* Paidós, Barcelona.

Pozo, J. (1993). *Aprendizaje estratégico.* Santillana, Pozo.

Qhelhas y Pereira, (1998). Cognition and Context. Número Especial de *Análise Psicológica,* Lisboa, Instituto Superior de Psicología Aplicada.

Reif, F. (1987). Interpretation of Scientific or Mathematical Concepts: Cognitive Issues and Instructional Implications. *Cognitive Science* 11, pp. 395-416.

Rojano, Sutherland, Jinich, Mochón, Molyneux, (1996). Las prácticas matemáticas en las materias científicas de la enseñanza media: el papel de la modelación. *Investigaciones en matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 365-388.

Roth, W. (1996). Where is the context in contextual word problems?: Mathematical practices and products in Grade 8 students' answers to story problems. *Cognition and Instruction*, 14, pp. 487-527.

Roth, W. y McGinn, M. (1997). Graphing: A cognitive ability or cultural practice? *Science Education*, 81, pp. 91-106.

Roth, W. y McGinn, M. (1998). Inscriptions: a social practice approach to "representations". *Review of Educational Research*, 68, pp. 35-59.

Roth, W., Bowen, M. y McGinn, M. (1999). Differences in graph-related practices between high school biology textbooks and scientific ecology journals. *Journal of Research in Science Teaching. Mathematics Education,* 36, pp. 977-1019.

Roth, W. y Bowen, M. (2001). Professionals read graphs: a semiotic analysis. *Journal for Researches in Mathematics Education,* Vol. 32. Núm. 2, pp. 159-194.

Saxe, G. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding.* Lawrence Erlbaum, Hillsdale, N. J.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. En G. Harel and E. Dubinsky (Eds.). *The Concept of Function,* pp. 59-84. Mathematical Association of America, Washington, U. S. A.

Sierpinska, A. (1998). Three Epistemologies, Three Views of Classroom Communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism. En Steinbring, Heinz, Bartolini Bussi, Maria G. Sierpinska (Eds) *Language and Communication in the mathematics classroom*, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

Sierpinska, A. (1995). Mathematics: "In Context", "Pure" or "With Applications"? A Contribution to the Question of Transfer in the Learning of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 15, pp. 2-15.

Slisko, J. (2002). Deficiencias de la modelación matemática en la ciencia escolar. Serie: *Antologías*. No. 2, pp. 3-22. Programa Editorial de la Red Nacional de Cimates.

Slisko, J. (2000). Errores comunes en problemas numéricos de la física escolar. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales* 4, pp. 67-98.

Sutherland, Mochón, Jinich, Molyneux, Rojano, (1996). Cultura y cognición: El caso de las matemáticas y la ciencia. *Investigaciones en matemática Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica, p. 1 - 16.

Varela, F., Thompson, E. y Rosch, E. (1997). *De cuerpo presente.* Segunda edición. Gedisa, Madrid.

Varela, F. (1988/2002). *Conocer*. Gedisa editorial, tercera edición, Barcelona.

Vattimo, G. (1987). *Introducción a Heidegger: Ser y tiempo*. Gedisa, México.

Vergaud, G. (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela.* Editorial Trillas. México.

Vergnaud, G. (1998). Towards a Cognitive Theory of Practice. En Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, pp. 227-240. Kluwer Academic Publishers, Gran Bretaña.

Vygotsky, L. (1984). Aprendizaje y desarrollo intelectual en edad escolar. En *Infancia y Aprendizaje*, no. 27/28.

Waszkiewica, J. (1978). Idea centralnej kategorii pojeciowej jako zasada ukladu i doboru tresci ksztalcenia. En R. Lukaszewicz (Ed.), Wroclawska Szkola Przyszlosci. Przeslanki eksperymentu nad szkola. *Acta Universitatis Wratislaviensis,* 396. Prace Pedagogiczne XIII, pp. 91-107.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Paidós Educador, España.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la Mente*. Visor, Madrid.

Woolgar, S. (1990). Time and documents in researcher interaction: Some ways of making out what is happening in experimental science. En M. Lynch y S. Woolgar (Eds.) *Representation in scientific practice*, pp. 123-152. MIT Press, Cambridge.

Woolgar, S. (1991). *Ciencia: abriendo la caja negra*. Anthropos, Barcelona.

Anexo I

Cuestionarios aplicados a los estudiantes participantes en las puestas en escena de los diseños

Cuestionario aplicado a estudiantes participantes en las secuencias

Nombre: ____

Semestre que cursa: ______________

1. Edad: _____ 2. Lugar de nacimiento: _____________________________________

3. Dirección de tu casa: ____

4. ¿Cuánto tiempo tienes viviendo en tu domicilio? ____________________________

5. ¿Vives en casa propia ó rentada? ____

6. ¿Con quiénes vives? ____

7. ¿Cuántos hermanos tienes? ______ 8. ¿Cuántos años tienen tus hermanos? _________

____

9. ¿Cuántos años tienen tus papás? ____

10. ¿A qué se dedica tu papá? ____

____

11. ¿A qué se dedica tu mamá? ____

12. ¿A qué se dedican tus hermanos? ____

13. ¿Cuál es el grado de escolaridad de tu papá? ______________________________

14. ¿Cuál es el grado de escolaridad de tu mamá? _____________________________

15. ¿Cuál es el grado de escolaridad de tus hermanos? __________________________

____

16. ¿De dónde son tus abuelos paternos? ____________________________________

17. ¿De dónde son tus abuelos maternos? ____________________________________

18. ¿Por qué estudias? ____

____

____

____

____

19. ¿Piensas estudiar una carrera? ____ 20. ¿Por qué? ______________________________

____

____

21. ¿Qué carrera quieres estudiar? _______________________ 22. ¿Por qué? ___________

____

____

23. ¿Tienes teléfono en tu casa? _____ 24. ¿Tienes computadora en tu casa? ___________

25. ¿Utilizas la computadora frecuentemente? ____________________________________

26. ¿Tienes calculadora? ____ 27. Si tienes calculadora ¿qué marca es? ________________

28. ¿Leen regularmente algún periódico en tu casa? _____ 29. ¿Cuál? _______________

30. ¿Cuáles son los medios que usas para informarte? _____________________________

31. ¿Qué haces en tu tiempo libre? ____

32. ¿En qué escuela estudiaste la primaria? _______________________ 33. Promedio: ___

34. ¿En qué escuela estudiaste la secundaria? _____________________ 35. Promedio: ___

36. ¿En qué escuela estudiaste el bachillerato? ____________________ 37. Promedio: ___

38. ¿Que materias has reprobado? ____

____

39. ¿Has reprobado matemáticas alguna vez? ________ 40. ¿En qué escuela y en qué semestre? ____

____

41. ¿Qué materia te gusta más? ____

42. ¿Te gustan las matemáticas? _____ 45. ¿Por qué? _______________________________

____

____

46. ¿Crees que son importantes las matemáticas? ____ 47. ¿Por qué? ________________

____

____

48. ¿Qué opinas? ¿Para que sirven las matemáticas? ______________________________

____

____

49. ¿Por qué crees que muchos alumnos reprueban matemáticas? __________________

____

____

____

50. ¿Qué importancia le das a estudiar matemáticas? (1 muy poca, 10 muchísima)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

51. ¿Qué importancia tienen las matemáticas en la vida cotidiana? (1 muy poca, 10 muchísima)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

52. ¿Qué importancia tienen las matemáticas en la vida profesional? (1 muy poca, 10 muchísima)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

53. Menciona dos materias más que consideras que son importantes estudiar y califícalas.

Materia: ____________________________ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Materia: ____________________________ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

54. ¿Trabajas? ____ 55. ¿En donde? ____

56. ¿Qué haces en tu trabajo? ____

Acapulco, Guerrero a 2 de Octubre de 2002.

Cuestionario aplicado a los padres de los estudiantes participantes en las secuencias

Nombre del encuestador: ____

Nombre del encuestado: ____

1. Edad: ____ 2. Lugar de nacimiento: _________________________________

3. ¿Cuántos años tienen sus papás? ____________________________________

4. ¿A qué se dedica su papá? ____

5. ¿A qué se dedica su mamá?____

6. ¿Cuál es el grado de escolaridad de su papá? ___________________________

7. ¿Cuál es el grado de escolaridad de su mamá? __________________________

8. ¿Considera que es importante que estudie una carrera su hijo (a)? _____________

9. ¿Por qué? ____

____

10. ¿Cree que es importante que sus hijos estudien matemáticas? _______________

11. ¿Por qué? ____

____

____

12. ¿Cree que son importantes las matemáticas? _____ 13. ¿Por qué? ____________

____

____

14. ¿Cuál es la materia que reprueban con más frecuencia los estudiantes? _________

____

____

15. ¿Por qué cree que muchos alumnos reprueban matemáticas? ____________________

____

____

16. ¿Qué importancia le das a estudiar matemáticas? (1 muy poca, 10 muchísima)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

17. ¿Qué importancia tienen las matemáticas en la vida cotidiana? (1 muy poca, 10 muchísima)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

18. ¿Qué importancia tienen las matemáticas en la vida profesional? (1 muy poca, 10 muchísima)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

19. Mencione dos materias más que consideras que son importantes estudiar y califíquelas.

Materia: ______________________________ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Materia: ____________________________ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Acapulco, Guerrero a 2 de Octubre de 2002.

Anexo II

Secuencias puestas en escena

La figuración del devenir de las cualidades

Sesión	Secuencia	Duración	Fecha (2002)
Primera	Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil.	Dos horas y media	24 de septiembre
Segunda	Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil.	Dos horas y media	25 de septiembre
Tercera	Las matemáticas del movimiento, movimiento uniforme.	Dos horas y media	2 de octubre
Cuarta	Las matemáticas del movimiento, movimiento uniforme.	Tres horas	3 de octubre
Quinta	Exploraciones.	Tres horas	4 de octubre
Sexta	Las matemáticas del movimiento, movimiento uniforme disforme.	Tres horas	7 de octubre
Séptima	Las matemáticas del movimiento, movimiento uniforme disforme.	Tres horas	8 de octubre
Octava	Exploraciones.	Tres horas	9 de octubre

Secuencia aplicada el martes 24 y el miércoles 25 de septiembre de 2002

Las prácticas de modelación en la comunicación del movimiento de un móvil

Movimiento en una dimensión

La secuencia consiste de dos fases, una, donde la comunicación (por escrito) se realiza utilizando lenguaje natural y, otra donde se pide a los estudiantes que se comuniquen en forma gráfica.

Para describir la secuencia tomaremos un punto del escritorio como referencia, que será el lugar donde colocaremos el sensor de movimiento, este lugar lo llamaremos *r*.

- Se coloca el profesor 1 a dos metros de *r*, se espera tres segundos, después se desplaza dos metros alejándose de *r* y permanece tres segundos; y, por último, se desplaza otros dos metros alejándose de *r* y permanece tres segundos. El profesor 2 se encuentra a medio metro del sensor y permanece en esta posición hasta que los equipos elaboran su descripción; posteriormente se cambia de posición.

- Se coloca el profesor a seis metros de *r*, permanece dos segundos; avanza hacia *r* dos metros, permanece dos segundos; avanza hacia *r* medio metro permanece dos segundos; avanza un metro, permanece dos segundos; y, por último, avanza dos metros más y permanece dos segundos.

- Se coloca el profesor a un metro de *r*, permanece dos segundos; se aleja de *r* cuatro metros, permanece dos segundos; se aleja un metro, permanece dos segundos; se acerca dos metros, permanece dos segundos; se acerca un metro, permanece dos segundos; y, por último, se aleja tres metros y permanece dos segundos.

- Se desarrolla una caminata donde los intervalos de tiempo de permanencia en una posición no son constantes. Se coloca el profesor a tres metros de *r*, permanece dos segundos; se acerca un metro, permanece cuatro segundos; se aleja dos metros, permanece un segundo; se acerca cuatro metros, permanece tres segundos; se aleja un metro, permanece cinco segundos; y, por último, se aleja cuatro metros y permanece dos segundos.

- El profesor parte desde una posición a un metro del sensor y se aleja con velocidad constante a seis metros del sensor.

Secuencia aplicada el miércoles 2 y el jueves 3 de octubre de 2002

"Las matemáticas del movimiento"

Movimiento uniforme

Descripción de la secuencia

Fase 1. La gráfica distancia – tiempo.

Dos prácticas son centrales en esta fase, a partir del movimiento construir versiones gráficas; a partir de la gráfica dar versiones del movimiento realizado.

- Breve explicación del sensor de movimiento.

  Este es un instrumento que nos dice a que distancia se encuentra de un objeto; por ejemplo, (el profesor se coloca a cierta distancia delante del sensor y pulsa el botón de inicio; se despliega la gráfica distancia- tiempo). Esta gráfica nos dice que el profesor estuvo colocado a 2 metros y 12 centímetros del sensor (señalando la coordenada en el eje *y*) y el profesor se mantuvo en esta posición desde el segundo cero hasta el segundo ocho.

- A partir del movimiento construir versiones gráficas.
    - ❖ ¿Quién quiere pasar a colocarse a una distancia de tres metros del sensor? ¿Cómo será la gráfica que describa el sensor (distancia – tiempo)?
    - ❖ Ahora, ¿quién pasa a colocarse dos segundos a un metro, dos segundos a dos metros y dos segundos a cuatro metros? ¿Qué gráfica describirá el sensor?
    - ❖ ¿Quién pasa a colocarse un segundo a cuatro metros, un segundo a tres metros, un segundo a dos metros y un segundo a tres metros? ¿Qué gráfica describirá el sensor?
- A partir de la gráfica dar versiones del movimiento realizado.
    - ❖ Cierran los ojos. Alguien pasa a caminar, considerando la gráfica que describió. Se pregunta ¿pueden explicar como se movió su compañero?

Fase 2. La linealidad. Movimiento uniforme

2.1 La gráfica distancia - tiempo

Construcción de la línea recta (gráfica distancia – tiempo) como modelo del movimiento de un móvil con velocidad constante.

- Argumentación a partir de coordinar la inclinación de la recta y la velocidad del móvil.
    - ❖ El profesor se coloca a medio metro del sensor y camina cinco metros con una velocidad constante. A una velocidad aproximada de 1.5 metros por segundo, el sensor despliega la gráfica distancia - tiempo.

      ¿Cómo debería moverse una persona para que la gráfica que se obtenga sea como la del profesor, pero “más horizontal”? Pónganse de acuerdo con sus equipos y escriban las instrucciones para que su representante ejecute el movimiento.
    - ❖ Después de que los equipos se ponen de acuerdo en las instrucciones, se les pide que las expliquen.
    - ❖ ¿Cómo deben moverse para que la gráfica sea una línea recta pero “más vertical”?
    - ❖ ¿Cómo debemos caminar para que la gráfica que describa el sensor sea una recta inclinada a la izquierda?

- Argumentación a partir de coordinar la posición inicial del móvil y la “altura de la recta”.
    - ❖ ¿Cómo deben caminar para que la recta que obtengamos sea como la de su profesor pero “más arriba”?
    - ❖ ¿Cómo deben de caminar para que la recta este “más abajo”?
    - ❖ Hagan un resumen de sus conclusiones.

2.2 Gráfica velocidad - tiempo

- Construcción del modelo gráfica velocidad - tiempo y de argumentos a partir de coordinar la distancia recorrida por el móvil y el “área bajo la curva de la gráfica velocidad - tiempo”.
    - ❖ ¿Calculen la velocidad con la que caminó su profesor?
    - ❖ ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de la caminata de su profesor? (se proyecta por medio de un acetato la gráfica distancia tiempo de la caminata del profesor).

- ❖ ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de las caminatas que ustedes realizaron? (se proyecta por medio de acetatos las gráficas distancia - tiempo de las caminatas de los estudiantes).
- ❖ Describan cómo se movió su compañero de acuerdo a la siguiente gráfica velocidad tiempo. (se presenta a través de un acetato una gráfica velocidad – tiempo).

2.3 Prediciendo con la gráfica velocidad- tiempo.

- ❖ Teniendo presente la gráfica tiempo - velocidad, ¿Cuál es la distancia recorrida después de 5 segundos? ¿Después de 2 segundos?
- ❖ ¿Cuál es la distancia recorrida después de *t* segundos?
- ❖ ¿Hay alguna relación entre la gráfica velocidad – tiempo y la distancia recorrida por el móvil?

2.4 El modelo algebraico.

Construcción de la ecuación $x = vt + x_0$ como modelo algebraico del movimiento uniforme.

- Articulación del modelo gráfico con un modelo algebraico.
  - ❖ Haciendo uso de una calculadora graficadora, graficamos los datos obtenidos de la caminata.
  - ❖ Indicamos a los estudiantes lo siguiente: vamos a pegar a esta nube de puntos una recta que esté lo más cercana posible a puntos. Para hacerlo vamos editar la ecuación en esta ventana y luego la graficamos. Por ejemplo, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ y luego graficamos.
  - ❖ ¿Cuál es la relación entre la ecuación que han encontrado y el movimiento que están modelando?
  - ❖ Interpreten los parámetros.

2.5 La articulación entre los modelos y el fenómeno.

- Elaboración de un esquema del movimiento con velocidad constante y de sus diferentes modelos.
  - ❖ ¿Cuál es la relación entre la ecuación que han encontrado, la gráfica distancia – tiempo, la gráfica velocidad – tiempo y el movimiento del profesor?

	Parámetro	Parámetro	
Movimiento con velocidad constante			
Gráfica distancia - tiempo, la recta			
Gráfica velocidad – tiempo, recta paralela al eje del tiempo.			
Ecuación, $y = mx + b$			

.

Secuencia aplicada el viernes 4 de octubre de 2002

"Las matemáticas del movimiento"

Movimiento uniforme
Exploraciones

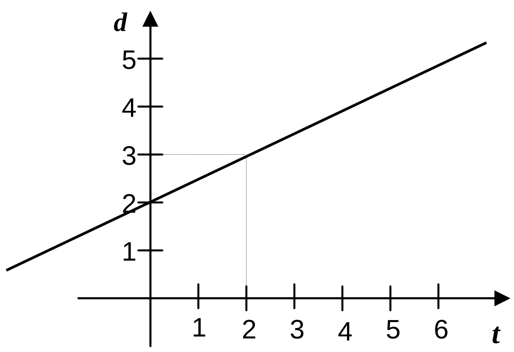
Situación 1

1. ¿Cuál es la posición de su compañero después de tres segundos, si la ecuación del movimiento es $x = 1.5t + 2$?

2. ¿Cuántos metros recorrió su compañero del segundo dos al segundo seis?

Situación 2

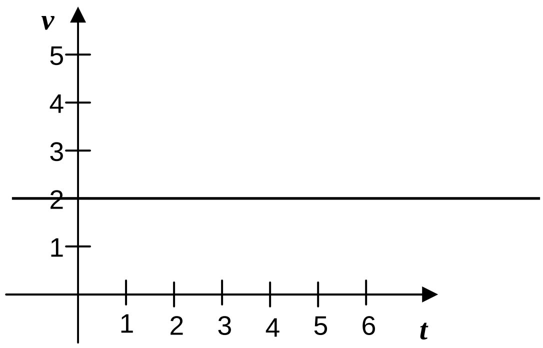
1. De acuerdo a la gráfica que se da a continuación ¿qué distancia recorrió su compañero del segundo tres al segundo siete?



2. ¿Cuál es la velocidad con que caminó su compañero?

Situación 3

1. De acuerdo a la gráfica que se da a continuación ¿qué distancia recorre su compañero del segundo dos al segundo cinco?



2. ¿Qué distancia habrá recorrido del segundo tres al segundo seis?,

   ¿Cuál es la distancia del segundo cuatro al segundo seis?

   ¿Qué distancia recorre del segundo cero al segundo *t*?

3. ¿Existe alguna relación entre la gráfica distancia–tiempo y la gráfica velocidad-tiempo?

Secuencia aplicada el lunes 7 y el martes 8 de octubre de 2002

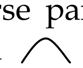
"Las matemáticas del movimiento"

Movimiento uniforme disforme

Descripción de la secuencia

Fase 3. Lo cuadrático.

3.1 La gráfica distancia - tiempo

- Construcción de la parábola (gráfica distancia – tiempo) como modelo del movimiento de un móvil uniformemente acelerado.
    - ¿Cómo deben moverse para que la gráfica que resulte sea una gráfica como esta  ?
- Argumentación a partir de coordinar la posición inicial del móvil y la "altura de la parábola". Argumentación a partir de coordinar el desplazamiento horizontal y el inicio del movimiento.
    - ¿Cómo debemos caminar para que la gráfica sea una parábola desplazada hacia arriba?
    - ¿Cómo debemos caminar para que la gráfica sea una parábola desplazada hacia la derecha?
- Argumentación a partir de coordinar la amplitud de la parábola y la aceleración del móvil.
    - ¿Cómo debemos de caminar para que la gráfica sea una parábola con los brazos más abiertos?

3.2 La gráfica velocidad – tiempo.

- Construcción del modelo gráfica velocidad - tiempo.
    - ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de esta forma de moverse?
    - ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de una parábola más abierta?
    - ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de una parábola más alta?
    - ¿Cómo será la gráfica tiempo – velocidad de una parábola desplazada a la derecha?

3.3 Prediciendo con la gráfica velocidad- tiempo.

Argumentación a partir de coordinar la distancia recorrida y el "área bajo la curva de la gráfica velocidad - tiempo".

- ❖ Teniendo presente la gráfica de tiempo velocidad, ¿Cuál es la distancia recorrida después de 5 segundos?, ¿cuál es después de 2 segundos?
- ❖ ¿Cuál es la distancia recorrida después de t segundos?
- ❖ ¿Hay alguna relación entre la gráfica velocidad – tiempo y la distancia recorrida por el móvil?

3.4 El modelo algebraico.

- Articulación del modelo gráfico con un modelo algebraico.
  - ❖ Haciendo uso de su calculadora graficamos los datos obtenidos de la caminata.
  - ❖ Indicamos a los estudiantes lo siguiente: vamos a pegar a esta nube de puntos una parábola que esté lo más cercana posible a los puntos. Para hacerlo vamos editar la ecuación en esta ventana y luego la graficamos. Por ejemplo $y = 3(x-2)^2 + 1$ y luego graficamos.
  - ❖ ¿Cuál es la relación que hay entre la ecuación que han encontrado y el movimiento que están modelando?

3.5 La articulación de los modelos con el fenómeno.

- Elaboración de un esquema del movimiento uniformemente acelerado y de sus diferentes modelos

	Parámetros	Parámetros	Parámetros	
Movimiento uniformemente acelerado				
Gráfica distancia–tiempo, la parábola				
Gráfica Velocidad-tiempo, la recta				
Ecuación $y = a(x-b)^2 + c$				

Secuencia aplicada el miércoles 9 de octubre de 2002

“Las matemáticas del movimiento”

Movimiento uniforme disforme
Exploraciones

Situación 1

1. ¿Cuál es la distancia al sensor más alejada de su compañero, si la ecuación del movimiento es $x = .5(t - 5.3)^2 + 2$?

2. ¿Cuántos metros habrá recorrido su compañero del segundo dos al segundo seis?

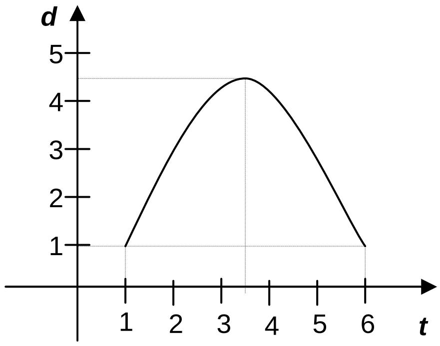
3. Llena la siguiente tabla considerando fija la posición inicial en el segundo $t = 1$.

Tiempo t (en segundos)	Posición x (en metros)	Distancia recorrida Δx	Tiempo transcurrido Δt	Velocidad media $\frac{\Delta x}{\Delta t}$
1		------	-----	------
2				
1.5				
1.2				
1.1				
1.05				
1.001				

4. ¿Cuál es la velocidad en el segundo uno?

Situación 2

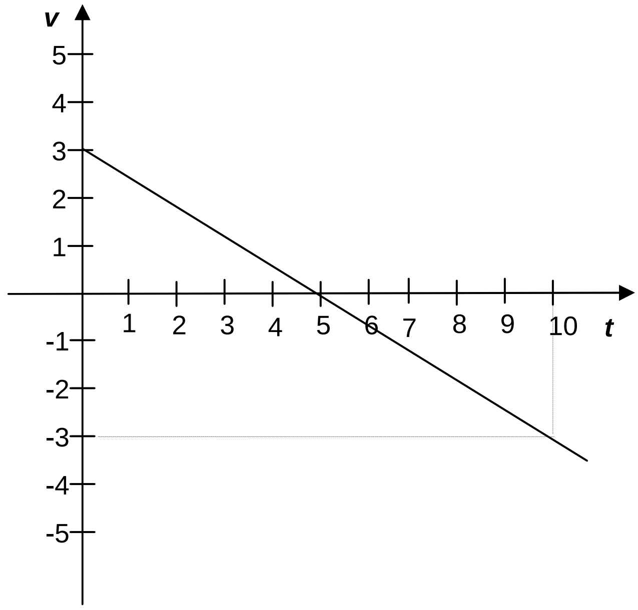
1. De acuerdo a la gráfica que se da a continuación ¿qué distancia recorrió su compañero del segundo tres al segundo seis?



2. ¿Cuál es la velocidad con que caminó su compañero en el segundo dos?

Situación 3

1. De acuerdo a la gráfica que se da a continuación ¿qué distancia recorre su compañero del segundo dos al segundo cinco?



2. ¿Qué distancia recorre del segundo tres al segundo seis?

   ¿Del segundo uno al segundo seis?

   ¿Qué distancia recorre del segundo cero al segundo ***t***?

3. ¿Existe alguna relación entre la gráfica distancia–tiempo y la gráfica velocidad-tiempo?

Sesión	Secuencia	Duración	Fecha (2001)
Primera	Elasticidad de resortes. Lo lineal Linealidad sin ruido	Tres horas	6 de diciembre
Segunda	Elasticidad de resortes. Lo lineal Linealidad con ruido	Dos horas y media	7 de diciembre
Tercera	Caída de los graves. Lo cuadrático Lo cuadrático sin ruido	Dos horas y media	11 de diciembre
Cuarta	El plano inclinado. Lo cuadrático Lo cuadrático con ruido	Tres horas	12 de diciembre

Secuencia aplicada el jueves 6 de diciembre de 2001

“Elasticidad de resortes. Lo lineal”

Linealidad sin ruido

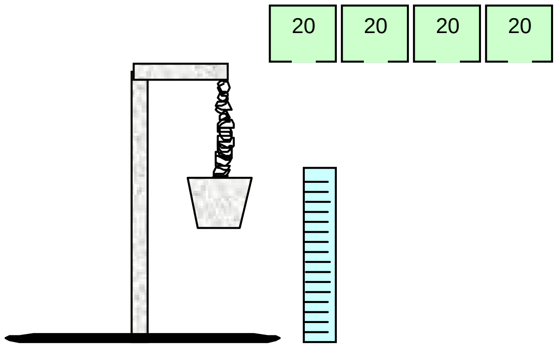
Elasticidad de resortes. Lo lineal

Objetivo. En esta fase los estudiantes construyen y utilizan como herramienta la linealidad en interacción con un fenómeno, la elasticidad de resortes.

Los estudiantes obtienen una connotación física de “variable”, la variable distancia y la variable peso. Construyen un modelo numérico de la elasticidad de resortes, identificando las características de la tabla, utilizándola para predecir e identificando los parámetros de esta tabla. Construyen la gráfica distancia – peso, como modelo gráfico del fenómeno y el modelo algebraico. Establecen un esquema que coordina los diferentes modelos con el fenómeno, sus parámetros y las formas de predecir.

La elasticidad de los resortes I

1. Se monta el siguiente arreglo experimental, se colocan pesas de 20 en 20 gramos en el portapesas y se observan las posiciones del portapesas en la regla.



2. ¿Describan el fenómeno?

   ¿Qué variables intervienen en este fenómeno?

3. Los datos que se obtienen son los de la siguiente tabla.

Peso (*g*)	Posición del portapesas (*mm*)
0	0
20	30
40	60
60	90
80	120
120	150
140	180
160	210

¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan 70 gramos?

4. ¿Qué características tiene esta tabla?

5. ¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 50 gramos?

   ¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 45 gramos?

   ¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 28.3 gramos?

6. Cambiando de resorte obtenemos la siguiente tabla

Peso (*g*)	Posición del portapesas (*mm*)
0	45
20	60
40	75
60	90
80	105
100	120
120	135
140	150

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 25 gramos?

¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan 7 gramos?

¿Por qué funciona el método que emplearon?

5. ¿Cuál será la posición del portapesas sí se colocan p gramos?

¿Podrían dar una fórmula algebraica para expresar esto?

6. ¿Cómo graficarían los datos de la tabla?

¿Cómo calculan la posición del portapesas después de colocar 64 gramos utilizando la gráfica?

7. ¿Cómo deberá ser el resorte para que la recta que obtengamos sea "más vertical" que la primera?

¿Cómo deberá ser el resorte para que la recta que obtengamos sea "más horizontal" que la primera?

8. ¿Cómo deberá ser el resorte para que la recta que obtengamos sea como la primera pero más arriba?

¿Cómo deberá ser el resorte para que la recta que obtengamos sea como la primera pero más abajo?

9. Elaboren un esquema que coordine la elasticidad de resortes, sus diferentes modelos, sus parámetros y sus formas de predicción.

Secuencia aplicada el viernes 7 de diciembre de 2001

"Elasticidad de resortes. Lo lineal"

Linealidad con ruido

La elasticidad de los resortes II

1. Los datos que se muestran a continuación se obtuvieron experimentalmente, para estudiar el fenómeno de elasticidad de resortes.

Pesos en gramos	Posiciones del portapesas en milímetros
0	36
20	100
38	160
62	236
80	300
100	360
122	420
138	490
161	535

2. Construyan una tabla con estos datos en la calculadora.

   ¿Qué características tiene esta tabla?

3. Complete la siguiente tabla de datos.

p	x	Δp	Δx	$\Delta x/\Delta p$
0	36			
20	100			
38	160			
62	236			
80	300			
100	360			
122	420			
138	490			
161	535			

4. ¿Cuál será la posición del portapesas al colocar 35 gramos?

   ¿Cuál será la posición del portapesas al colocar 87 gramos?

   ¿Cuál será la posición del portapesas al colocar 114 gramos?

   ¿Qué métodos para predecir utilizan?

5. Grafiquen los puntos haciendo uso de la calculadora.

   ¿Qué características tiene esta gráfica?

6. Encuentren una curva cuya ecuación es de la forma $y = ax + b$ que se apegue a los datos obtenidos.

7. ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro a?

   ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro b?

Secuencia aplicada el martes 11 de diciembre del 2001

“Caída de los graves. Lo cuadrático”

Lo cuadrático sin ruido

Calculando la distancia que recorre un objeto cuando cae

1. Se suelta un objeto desde un edificio. Con un radar tomamos la distancia que el objeto recorre y obtenemos la siguiente tabla.

Tiempo	Distancia recorrida
0	0
1	5
2	20
3	45
4	80
5	125
6	180
7	245
8	320

2. Construyan una tabla con estos datos en la calculadora.
   ¿Qué características tiene esta tabla?
3. ¿Cuál será la posición del objeto después de 2.5 segundos?
   ¿Cuál será la posición del objeto después de 3.75 segundos?
   ¿Cuál será la posición del objeto después de 4.37 segundos?
   ¿Qué métodos para predecir utilizan?
   ¿Por qué funciona el método que emplearon?
4. Haciendo uso de la calculadora calcule la razón de cambio. Calcule la segunda razón de cambio
   ¿Qué características tiene la tabla?
5. ¿Cuál será la posición del objeto después de 8.7 segundos?
   ¿Cuál será la posición del objeto después de 14.3 segundos?
   ¿Qué métodos para predecir utilizan?
6. Grafiquen los puntos haciendo uso de la calculadora.
   ¿Qué características tiene esta gráfica?

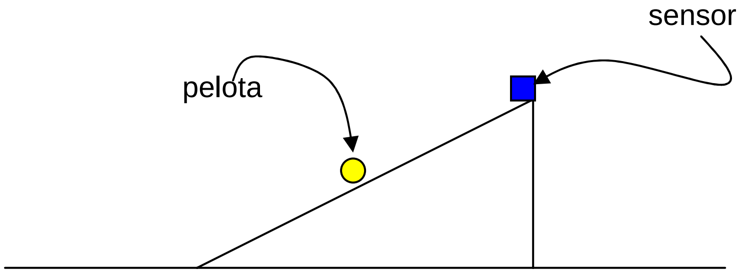
Secuencia aplicada el miércoles 12 de diciembre de 2001

“El plano inclinado. Lo cuadrático”

Lo cuadrático con ruido

El plano inclinado

1. Haciendo uso del sensor de movimiento tome datos de la posición de la pelota rodando en el plano inclinado.



2. Construyan una tabla con estos datos en la calculadora. ¿Qué características tiene esta tabla?

3. ¿Cuál será la posición del objeto después de 2.5 segundos?

   ¿Cuál será la posición del objeto después de 5.73 segundos?

   ¿Cuál será la posición del objeto después de 12.37 segundos?

   ¿Qué métodos para predecir utilizan?

4. Grafiquen los puntos haciendo uso de la calculadora.

   ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una parábola más alta que la anterior?

   ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una parábola este más a la derecha que la anterior?

   ¿Qué tendríamos que hacer para que la gráfica que obtengamos sea una parábola con los brazos más abiertos que la anterior?

5. Encuentren una curva cuya ecuación es de la forma $y = a(x+b)^2 + c$ que, además, se apegue a los datos obtenidos.

6. ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro a?

   ¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro b?

¿Que efectos produce en la curva variar el parámetro *c*?

7. ¿Cómo será la gráfica velocidad tiempo de este movimiento?

8. ¿Haz un esquema que relacione las características del fenómeno, de la tabla, del modelo gráfico distancia–tiempo, de la ecuación y del modelo gráfico velocidad-tiempo?

	Cosa a tratar	Característica	Característica	Característica
Fenómeno				
Tabla numérica				
Gráfica distancia - tiempo				
Ecuación				
Gráfica velocidad - tiempo				