



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y
TECNOLOGÍA AVANZADA**

**USO DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA
ESCUELA SECUNDARIA**

Tesis que para obtener el grado de Maestría en Ciencias con
Especialidad en Matemática Educativa presenta:

Homero Ulises Vázquez Cernas

Asesor:

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 12:00 horas del día 09 del mes de Diciembre del 2013 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis titulada:

Uso de geometría dinámica en la escuela secundaria

Presentada por el alumno:

Vázquez
Apellido paterno

Cernas
Apellido materno

Homero Ulises

Nombre(s)

Con registro:

B	1	0	2	3	2	2
---	---	---	---	---	---	---

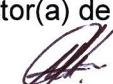
aspirante de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis


Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

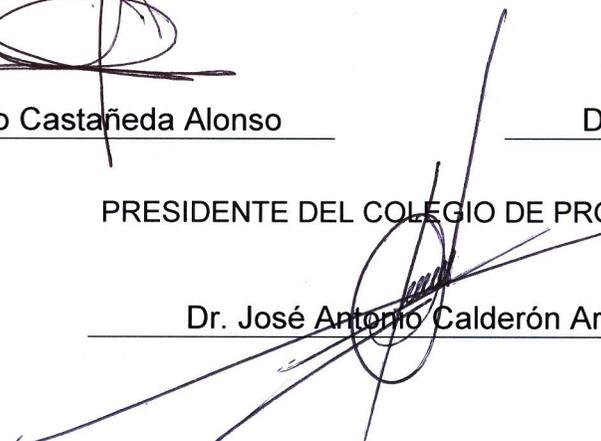

Dr. José Guzmán Mendoza


M. C. Juan Gabriel Molina Zavaleta


Dr. Apolo Castañeda Alonso


Dr. Mario Sánchez Aguilar

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES


Dr. José Antonio Calderón Arenas



CICATA - I.P.N. U. LEGARIA
Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Nacional

Autorización de uso de obra

Instituto Politécnico Nacional
Presente

Bajo protesta de decir verdad el que suscribe **Homero Ulises Vázquez Cernas** (se anexa copia simple de identificación oficial), manifiesto ser autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de la obra titulada ***Uso de geometría dinámica en la escuela secundaria***, en adelante "La Tesis" y de la cual se adjunta copia, por lo que por medio del presente y con fundamento en el artículo 27 fracción II, inciso b) de la Ley Federal del Derecho de Autor, otorgo a el Instituto Politécnico Nacional, en adelante El IPN, autorización no exclusiva para comunicar y exhibir públicamente total o parcialmente en medios digitales e impresos de "La Tesis" por un periodo de **diez años** contado a partir de la fecha de la presente autorización, dicho periodo se renovará automáticamente en caso de no dar aviso a "El IPN" de su terminación.

En virtud de lo anterior, "El IPN" deberá reconocer en todo momento mi calidad de autor de "La Tesis".

Adicionalmente, y en mi calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales de "La Tesis", manifiesto que la misma es original y que la presente autorización no contraviene ninguna otorgada por el suscrito respecto de "La Tesis", por lo que deslindo de toda responsabilidad a El IPN en caso de que el contenido de "La Tesis" o la autorización concedida afecte o viole derechos autorales, industriales, secretos industriales, convenios o contratos de confidencialidad o en general cualquier derecho de propiedad intelectual de terceros y asumo las consecuencias legales y económicas de cualquier demanda o reclamación que puedan derivarse del caso.

México, D.F., 10 de diciembre de 2013.

Atentamente



Homero Ulises Vázquez Cernas

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Aprendizajes esperados. Indicadores de logro que, en términos de la temporalidad establecida en los programas de estudio, definen lo que se espera de cada alumno en términos de saber, saber hacer y saber ser; además, le dan concreción al trabajo docente al hacer constatable lo que los estudiantes logran, y constituyen un referente para la planificación y la evaluación en el aula.

Bajo grado de marginación. Índice asignado por el Consejo Nacional de Población (CONAPO) de manera que una escuela pueda compararse de manera más equitativa y justa, con aquellas ubicadas en comunidades con niveles socioeconómicos similares. De manera específica este término significa que la escuela no es marginada.

Enfoque. En educación este término se refiere hacia dónde tienen que centrarse la concepción de la enseñanza y el aprendizaje, mediante el cual los estudiantes adquieren conocimientos.

Extraedad. Término usado en las normas de control escolar, que hace referencia a los estudiantes que cursan o pretenden cursar un grado de primaria o secundaria, con dos o más grados de atraso respecto al que les correspondería cursar.

Principios pedagógicos. Los principios pedagógicos son condiciones esenciales para la implementación del currículo, la transformación de la práctica docente, el logro de los aprendizajes y la mejora de la calidad educativa.

Secuencia didáctica. Estructuración sistemática del trabajo en el aula en la relación estudiante, profesor, saber y entorno.

ÍNDICE DE GRÁFICAS, IMÁGENES Y TABLAS

<i>Gráfica 1: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, 1er grado de secundaria, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.....</i>	<i>11</i>
<i>Gráfica 2: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, 2º grado de secundaria, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.....</i>	<i>12</i>
<i>Gráfica 3: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, 3er grado de secundaria, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.....</i>	<i>12</i>
<i>Gráfica 4: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, promedio de los tres grados, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.....</i>	<i>13</i>
<i>Imagen 1: barra de herramientas de GeoGebra.....</i>	<i>30</i>
<i>Imagen 2: barra de herramientas de GeoGebra desplegada</i>	<i>31</i>
<i>Imagen 3: figuras geométricas trazadas durante la exploración instrumental</i>	<i>31</i>
<i>Imagen 4: grupo 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V.....</i>	<i>39</i>
<i>Imagen 5: alumnos del grupo 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V. contestando cuestionario de conocimientos previos.....</i>	<i>40</i>
<i>Imagen 6: aula digital de la secundaria Manuel Álvarez T.V.....</i>	<i>40</i>
<i>Imagen 7: distribución del área de trabajo del profesor (lap top y proyector) y las computadoras de los alumnos al interior del aula digital.....</i>	<i>41</i>
<i>Imagen 8: alumnos del grupo 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V. trabajando con la secuencia didáctica y GeoGebra</i>	<i>43</i>
<i>Imagen 9: monitoreo del trabajo de alumnos del grupo 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V.</i>	<i>44</i>
<i>Imagen 10: pantalla de trabajo con GeoGebra, realizado por un alumno de 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V.....</i>	<i>44</i>
<i>Imagen 11: trazos de Abril, fase 1</i>	<i>84</i>

<i>Imagen 12: trazos de Abril, fase 2, Actividad A</i>	85
<i>Imagen 13: trazos de Abril, fase 2, Actividad B</i>	86
<i>Imagen 14: trazos de Mayté, fase 2, Actividad A</i>	87
<i>Imagen 15: trazos de Mayté, fase 2, Actividad B</i>	88
<i>Imagen 16: trazos de William, fase 2, Actividad A</i>	89
<i>Imagen 17: trazos de William, fase 2, Actividad B</i>	90
<i>Imagen 18: trazos de Abril, fase 4, Actividad A</i>	92
<i>Imagen 19: trazos de Abril, fase 4, Actividad B</i>	93
<i>Imagen 20: trazos de Mayté, fase 4, Actividad A</i>	94
<i>Imagen 21: trazos de Mayté, fase 4, Actividad B</i>	95
<i>Imagen 22: trazos de William, fase 4, Actividad A</i>	96
<i>Imagen 23: trazos de William, fase 4, Actividad B</i>	97
<i>Tabla 1: resultados del diagnóstico de Sandra</i>	77
<i>Tabla 2: resultados del diagnóstico de William</i>	78
<i>Tabla 3: resultados del diagnóstico de Ricardo</i>	79
<i>Tabla 4: resultados del diagnóstico de Víctor</i>	80
<i>Tabla 5: resultados del diagnóstico de Abril</i>	81
<i>Tabla 6: resultados del diagnóstico de Mayté</i>	82
<i>Tabla 7: resultados del diagnóstico de Atziri</i>	83
<i>Tabla 8: niveles de aprendizaje alcanzados</i>	100

ÍNDICE

Capítulo 1. Contexto de la investigación.....	9
1.1 Motivación de la investigación.....	9
1.2 Contexto escolar.....	10
1.3 El aula de clase	13
Capítulo 2. Problema de investigación.....	15
2.1 Estado del arte	15
2.1.1 Ventajas del uso de la tecnología en la educación.....	15
2.1.2 Software de geometría dinámica	16
2.1.3 Literatura que incorpora software de geometría dinámica dentro de una secuencia didáctica.	17
2.2 Marco teórico.....	18
2.2.1 Aproximación instrumental y génesis instrumental	18
2.2.2 El modelo de van Hiele.....	20
2.3 Pregunta de investigación	25
Capítulo 3. Metodología.....	26
3.1 Metodología de trabajo	26
3.2 Diseño de la actividad	26
3.2.1 Cuestionario diagnóstico.....	27
3.2.2 Secuencia didáctica	29
3.3 Aplicación de la actividad.....	38
3.3.1 Población.....	38
3.3.2 Sesiones de trabajo	38
3.3.3 Comentarios sobre las sesiones de trabajo.....	42
Capítulo 4. Resultados.....	45
4.1 Ejemplos de respuestas de alumnos	45
4.1.1 Cuestionario diagnóstico.....	45
4.1.2 Secuencia didáctica	52
4.2 Análisis de las respuestas	76
4.2.1 Cuestionario diagnóstico.....	76

4.2.2 Secuencia Didáctica.....	84
Capítulo 5. Conclusiones	100
Referencias.....	105

RESUMEN

En el siglo XXI la tecnología se ha convertido en un factor muy importante en la vida diaria de cada uno de nosotros, y el sector educativo no está exento de ello; prueba contundente es que los docentes a través de cursos de formación continua y autoformación han aprendido a hacer uso de diversos recursos tecnológicos, tanto hardware como software, con la finalidad de llevarlos al aula de clases. En este trabajo se realizó una secuencia didáctica que fue diseñada de acuerdo al modelo de van Hiele, para su aplicación con alumnos del nivel de Secundaria. Dicha secuencia incorpora como apoyo dentro de sus fases el manejo del software de geometría dinámica llamado GeoGebra; y con la teoría antes mencionada se analizaron las respuestas de los alumnos para saber si en este caso, la tecnología fue factor o no para propiciar que los alumnos alcanzaran un nivel de razonamiento geométrico superior en comparación con el nivel que mostraban previo a la secuencia diseñada.

ABSTRACT

The technology in the XXI century has become an important factor in the daily life of everyone, and education cannot escape from this. A forceful evidence, is that teachers through ongoing training courses and by themselves have learned to make use of various technological resources, both hardware and software, in order to bring them to the classroom. In this work, a didactic sequence was designed according to van Hiele's model and it was applied to Secondary level students (12 – 15 years old). This sequence and its phases are supported by the dynamic geometry software named GeoGebra. Using the aforementioned theory, we analyzed the responses of students, to see in this case whether technology was or not a factor to encourage students achieve a higher level on geometric reasoning compared with the level showed prior to the designed sequence.

Capítulo 1. Contexto de la investigación

1.1 Motivación de la investigación

Ante las reformas educativas del 2006 para el nivel de Secundaria y la actualización del Plan y Programas de Estudios en el 2011, considero necesario hacer referencia a los enfoques y principios propuestos en estos materiales educativos, ya que son la base del trabajo que he venido desarrollando desde mi función como Asesor Técnico Pedagógico del Nivel de Secundaria y que ha sido motivación para realizar esta investigación. Por una parte, el programa de Matemáticas Educación Secundaria 2006 indica que es necesario llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos, que los inviten a reflexionar y a formular argumentos (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2006); además, en los principios pedagógicos del Plan de Estudios 2011 de Educación Básica se menciona que los materiales educativos digitales son relevantes en la generación de ambientes de aprendizaje (SEP, 2011).

En congruencia con estos documentos rectores oficiales y para dar cumplimiento con estas exigencias, en el estado de Colima se han impartido talleres sobre el manejo de GeoGebra, un software de geometría dinámica que es utilizado como herramienta de enseñanza que puede ayudar a fomentar el aprendizaje experimental, orientado a los problemas y el descubrimiento de las matemáticas (Hohenwarter y Preiner, 2007). Durante los talleres, se ha invitado a que los maestros incorporen GeoGebra en su planificación y lo apliquen con sus alumnos, sin embargo no sabemos cómo puede estar impactando en el aprendizaje de los alumnos al abordar una secuencia didáctica con dicho software. Es por ello que resulta interesante estudiar el nivel de razonamiento geométrico que puedan alcanzar los alumnos de secundaria, al trabajar una secuencia didáctica donde se incorpore GeoGebra; usando para ello el modelo de van Hiele, siendo esta la

teoría que nos permitirá hacer un análisis sobre si un alumno ha sido capaz, o no, de pasar de un nivel de razonamiento geométrico a otro nivel inmediato superior.

1.2 Contexto escolar

La escuela seleccionada para realizar la investigación fue la Secundaria General Federal “Manuel Álvarez” del turno vespertino, que se encuentra ubicada en la Ciudad de Villa de Álvarez, Colima; pertenece al medio urbano y es considerada por las autoridades educativas y el Consejo Nacional de Población (CONAPO) como una escuela con muy bajo grado de marginación; mientras que los alumnos que asisten pertenecen a familias con un nivel socioeconómico medio-bajo.

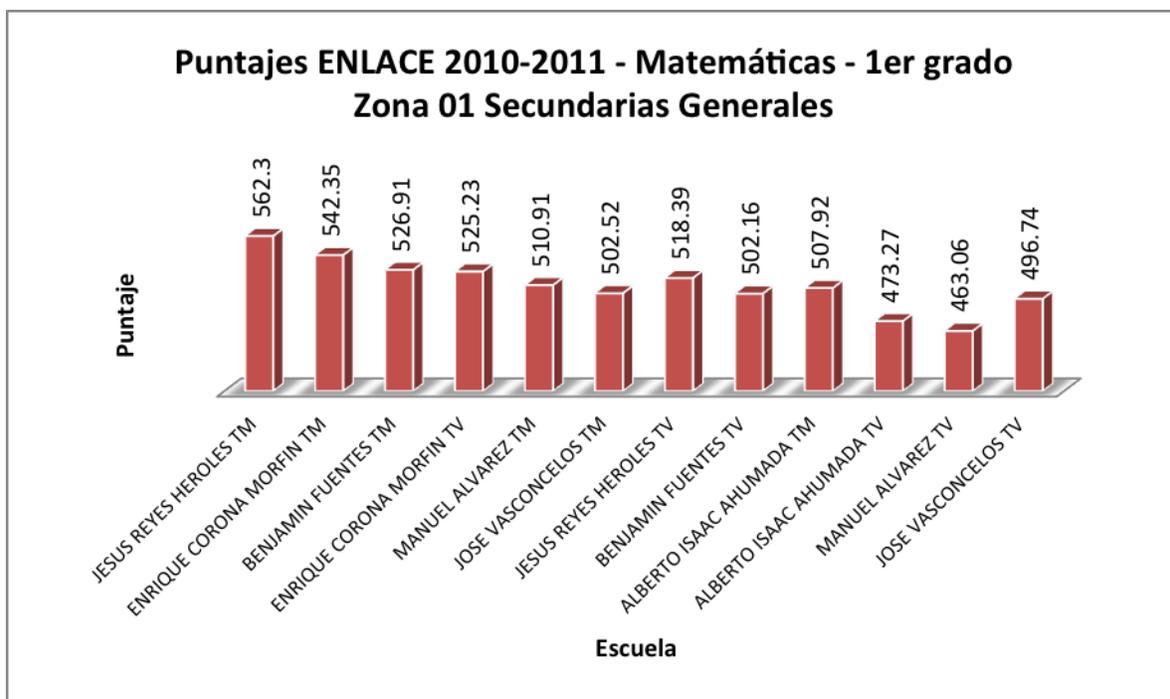
La secundaria forma parte de la zona escolar No. 01 de Secundarias Generales, donde actualmente laboro como asesor técnico pedagógico, realizando actividades de diagnóstico, análisis, diseño, elaboración e impartición de cursos para directores y docentes que forman parte de la zona escolar, encaminados a la mejora de los aprendizajes de los alumnos.

La zona escolar está integrada por un total de 16 escuelas: 7 matutinas, 6 vespertinas y 3 nocturnas.

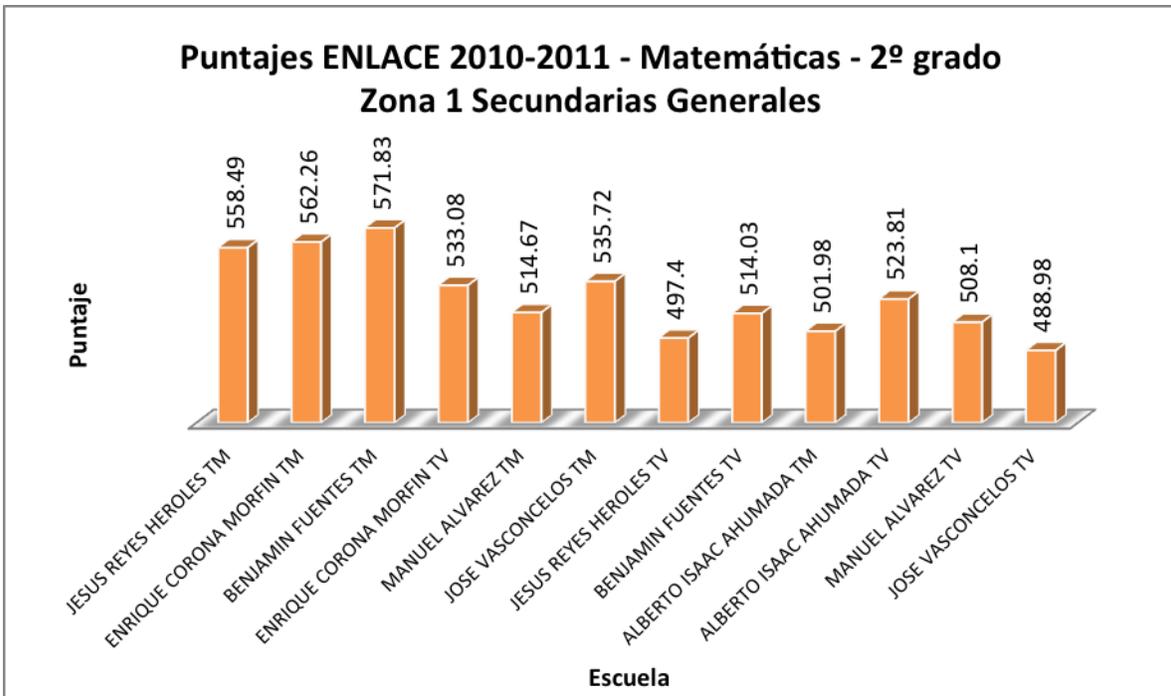
Para brindar un panorama respecto al aprovechamiento escolar en la zona, se tomaron los resultados de la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) del ciclo escolar 2010-2011 en la asignatura de matemáticas, donde la escala de puntajes manejada va desde los 200 como mínimo hasta un máximo de 800 puntos. Para este análisis, se omitieron las secundarias nocturnas, ya que tienen características muy diferentes a las escuelas matutinas y vespertinas, propias de secundarias donde asisten de manera irregular alumnos que actualmente se encuentran en el sector laboral, o que están en situación de extraedad; además no fue incluida la secundaria matutina “Nueva Creación” porque no fue evaluada en el ciclo escolar anterior, ya que aun no existía.

En la asignatura de matemáticas en primer grado de secundaria (Gráfica 1), podemos observar que la secundaria Manuel Álvarez T.V.(turno vespertino) se

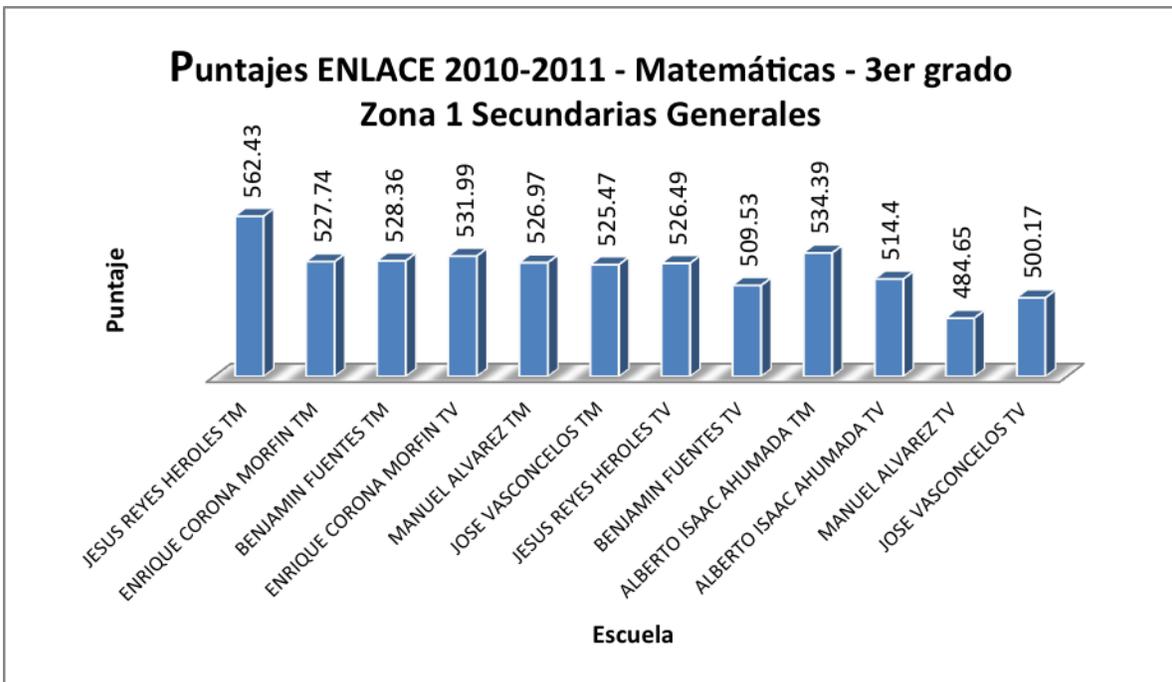
encuentra en el último lugar en aprovechamiento de matemáticas dentro de la zona escolar; al observar los resultados para el segundo grado (gráfica 2), la escuela se encuentra en noveno lugar de aprovechamiento; mientras que en tercer grado de secundaria (gráfica 3), nuevamente se encuentra en último lugar de la zona. Esto nos lleva a un promedio general de los tres grados, que posiciona a la escuela en el último lugar de la zona escolar (gráfica 4). Finalmente, los resultados muestran clara evidencia de que el plantel escolar requiere fortalecer los contenidos curriculares que corresponden a la asignatura de matemáticas, lo que implica buscar estrategias de enseñanza que fomenten el interés por la asignatura y el logro de los aprendizajes esperados de cada bloque.



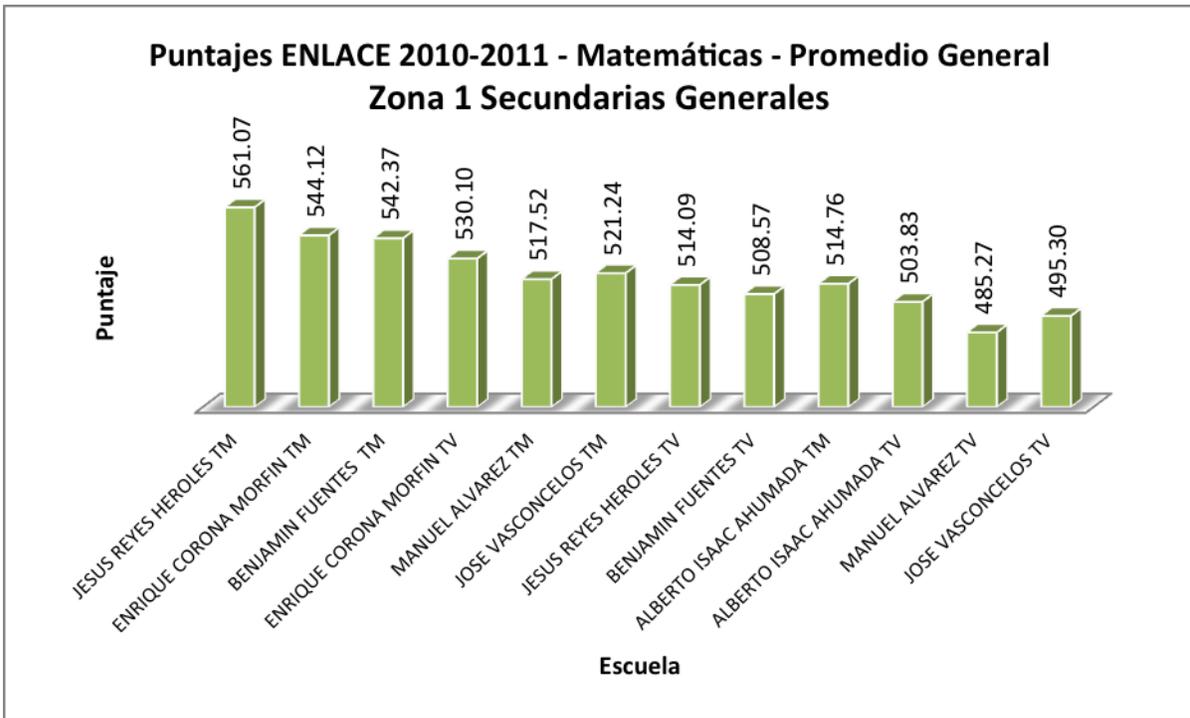
Gráfica 1: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, 1er grado de secundaria, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.



Gráfica 2: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, 2º grado de secundaria, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.



Gráfica 3: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, 3er grado de secundaria, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.



Gráfica 4: Resultados de la Prueba ENLACE ciclo escolar 2010-2011, en la asignatura de Matemáticas, promedio de los tres grados, Zona Escolar 01 de Secundarias Generales.

1.3 El aula de clase

Es importante mencionar que la secundaria Manuel Álvarez T.V. es una escuela grande en cuanto a infraestructura, con 18 grupos: 6 de cada grado; en contraste a este dato, los grupos son bastante reducidos debido a la baja demanda del turno, al ausentismo y la deserción que se va presentando a lo largo del ciclo escolar, teniendo en promedio 10 alumnos por salón.

Al ser una escuela Federal, el maestro del grupo está sujeto a dar cumplimiento con los temas del Programa de Estudios 2006, pues a pesar de entrar en vigor el nuevo Plan y Programas de Estudios a partir del 19 de Agosto de 2011, sólo les

ha sido entregado en físico el Plan de Estudios 2011 por parte de las autoridades educativas locales, quienes dieron indicaciones de seguir trabajando con el viejo programa durante el ciclo escolar 2011-2012, y a su vez en las reuniones con los colectivos docentes empezar a explorar el nuevo plan de estudios.

Revisando el Programa de Estudios 2006, podemos observar que está conformado por cinco bloques, correspondientes a los cinco bimestres y cortes de evaluación:

Bloque 1 septiembre - octubre

Bloque 2 noviembre - diciembre

Bloque 3 enero - febrero

Bloque 4 marzo - abril

Bloque 5 mayo - junio

Y dentro de cada bloque se han distribuido los temas y aprendizajes esperados en tres ejes: “Sentido numérico y pensamiento algebraico”, “Manejo de la información” y “Forma, espacio y Medida”. Este último eje, donde se encuentra el tema de la secuencia didáctica abordada en esta investigación, favorece de modo especial el desarrollo de la competencia de argumentación. Por ejemplo, para construir, reproducir o copiar una figura, hay que argumentar las razones por las que un trazo en particular es válido o no, tomando como base las propiedades de dicha figura (SEP, 2006).

Capítulo 2. Problema de investigación

2.1 Estado del arte

2.1.1 Ventajas del uso de la tecnología en la educación

Son muchas las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y sus aplicaciones en el ámbito educativo para mejorar la formación de los alumnos, profesores e investigadores. Las más utilizadas son, por supuesto, internet, las plataformas electrónicas, el e-learning a través de blogs y wikis, entre otras (Buela-Casal y Castro, 2009).

Algunas de las ventajas del uso de las TIC que señala Cabero (2004), se encuentra, el favorecer la creación de escenarios tanto para el aprendizaje individual y colectivo, donde los estudiantes se conviertan en constructores del conocimiento. Además que permiten el ahorro de tiempo para la adquisición de habilidades y destrezas.

El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM), que es la mayor asociación mundial de profesores de matemáticas, declaró a la tecnología como uno de los seis principios de la matemática escolar. La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, influye en la matemática que se enseña y mejora el aprendizaje de los estudiantes (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

Hollebrands (2007) menciona que los estudiantes pueden beneficiarse de las diferentes formas de integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje, y las nuevas oportunidades de aprendizaje que se presentan en entornos tecnológicos podrían proveer a los estudiantes de diferentes habilidades matemáticas y niveles de entendimiento. Además, la visualización de los

conceptos matemáticos y la exploración de las matemáticas en entornos multimedia pueden fomentar su comprensión.

2.1.2 Software de geometría dinámica

Software de Geometría Dinámica (DGS) es utilizado como un término genérico para describir un cierto tipo de software que se utiliza principalmente para la construcción y el análisis de tareas y problemas geométricos (Sträßer, 2002). Algunos ejemplos de software de geometría dinámica son Cabri-Géomètre y Geometer's Sketchpad.

GeoGebra es un software que combina las características de construcción de un DGS con el poder y la funcionalidad de un sistema de álgebra computacional (CAS) y abre un amplio abanico de posibilidades de aplicación para enseñar matemáticas, permitiendo a los profesores utilizarlo en todos los grados de la escuela secundaria hasta la universidad (Fuchs y Hohenwarter, 2004). Fue creado por Markus Hohenwarter en 2001-2002, como parte de su tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas y ciencias informáticas en la Universidad de Salzburg, en Austria (Hohenwarter y Preiner, 2007). Está escrito en Java para que se ejecute en cualquier computadora, ya sea directamente desde la web o mediante la instalación del archivo ejecutable.

De acuerdo a Edwards y Jones (2006) el nombre de GeoGebra se debe a la combinación de la geometría y el álgebra asociada a sus representaciones matemáticas. En su investigación, han recopilado las opiniones de diversos maestros, quienes se han mostrado maravillados por el software debido a las siguientes características que presenta:

- Muestra relaciones entre la geometría y el álgebra.
- Es gratuito para uso educativo, pues los alumnos puede instalarlo y usarlo en casa o en cualquier otro lugar.
- Está disponible en varios idiomas.

- Permite actividades que requieren alto nivel de razonamiento.
- Atrae la atención de los alumnos gracias al potencial que las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ofrecen, tales como el aprendizaje por medio de las retroalimentaciones, viendo patrones, realizando conexiones, trabajando con imágenes dinámicas, etc.

Desde hace más de dos décadas, los DGS se han convertido en uno de los software más utilizados en las escuelas de todo el mundo. Visto en términos de investigación sobre el uso de software en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los DGS son los software más investigados dentro de la didáctica de las Matemáticas (Sträßer, 2002), no obstante la investigación que se ha encontrado en torno al nivel de Secundaria es relativamente poca en comparación con el nivel de bachillerato.

2.1.3 Literatura que incorpora software de geometría dinámica dentro de una secuencia didáctica.

Actualmente en la red podemos encontrar materiales interactivos de libre disposición para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Kerlegand (2008) en su trabajo muestra el desarrollo y los resultados de una investigación sobre la construcción de dos propiedades de la circunferencia, apoyándose del software de geometría dinámica Cabri-Géomètre. Cabe señalar que la investigadora realizó esta investigación en una escuela de nivel medio superior utilizando como marco teórico la combinación del Modelo de van Hiele y la Visualización. El desarrollo de la investigación se dio en dos etapas de trabajo, primero utilizó una actividad para detectar el nivel de conceptualización en que se encontraban los alumnos. En la segunda etapa aplicó actividades didácticas que involucraban las fases del Modelo de van Hiele para observar cómo el estudiante va construyendo las propiedades de la circunferencia involucradas en la investigación. Finalmente concluye que la herramienta tecnológica empleada favorece el proceso de visualización de las nociones y agiliza el tránsito de los estudiantes desde un nivel de razonamiento geométrico al inmediato superior.

De esta investigación se retomó el modelo de van Hiele para determinar el nivel de razonamiento de los alumnos, así como el uso de dos etapas: la primera, de diagnóstico para conocer el nivel de razonamiento acorde a la escala propuesta por el Modelo; y la segunda, en la cual se diseñó una secuencia didáctica que se aplicó y se analizó para ver si existe un cambio en el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes. Un aporte de nuestra investigación fue el análisis del modelo con alumnos del nivel de secundaria y el uso del software GeoGebra, el cual es relativamente más nuevo a comparación de Cabri-Géomètre o Geometer's Sketchpad, pues como ya se mencionó, fue creado en los años 2001-2002.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Aproximación instrumental y génesis instrumental

De acuerdo con la "aproximación instrumental" (Guin y Trouche, 1999), las herramientas como los software son artefactos que deben ser transformados en instrumentos matemáticos por los estudiantes con el fin de utilizarlos con éxito para resolver las tareas dadas. Por lo tanto, una herramienta de software matemático como GeoGebra por sí misma no tiene el poder de mejorar el aprendizaje matemático, pero puede ser transformado por un usuario en un instrumento matemáticamente útil.

Este proceso se llama "génesis instrumental" (Trouche, 2003) y puede ser largo y complejo (Artigue, 2002) ya que el mismo artefacto se puede transformar en una variedad de herramientas en función del usuario y la tarea a resolver.

De acuerdo con Brown y colaboradores (2009) la "integración instrumental" describe la forma en que el profesor organiza las condiciones de génesis instrumental de la tecnología que propone a los alumnos y en qué medida se fomenta el aprendizaje de matemáticas a través de la génesis instrumental.

En este contexto, los autores distinguen entre cuatro modos de integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas:

Iniciación instrumental: Dado que los estudiantes son principiantes en el software, el objetivo principal del maestro es presentarles el programa y enseñarles las habilidades básicas necesarias. De esta manera, las tareas se centran en la tecnología, y el nivel de integración instrumental de la herramienta en el aprendizaje del contenido matemático es mínimo.

Exploración instrumental: Aunque los estudiantes no están familiarizados con el uso de un paquete de software en particular, el maestro quiere que aumenten sus conocimientos matemáticos y que exploren la herramienta tecnológica. Así, los estudiantes "exploran la tecnología a través de las tareas matemáticas". De esta manera, la integración fundamental depende de la tarea matemática, así como en la orientación y las instrucciones dadas por el profesor.

Refuerzo instrumental: Mientras los estudiantes ya están familiarizados con el uso básico de un paquete de software en particular, podrían experimentar dificultades técnicas para resolver una tarea determinada. El profesor proporciona información adicional específica sobre la función correspondiente del software con el fin de ayudarles a superar sus problemas; sin embargo, el objetivo principal del maestro es aumentar el conocimiento matemático de los estudiantes. De esta manera, la integración instrumental varía dependiendo de la clase de apoyo que el maestro proporciona.

Simbiosis instrumental: Los estudiantes que tienen una cierta experiencia en el manejo de un software, trabajan en tareas que les permitan mejorar tanto sus habilidades técnicas como los conocimientos matemáticos, por lo tanto, la integración instrumental es máxima en este entorno.

2.2.2 El modelo de van Hiele

El modelo de van Hiele surgió de los trabajos doctorales de Dina van Hiele-Geldof y Pierre van Hiele, que fueron realizados simultáneamente en la Universidad de Utrecht (Crowley, 1987).

De acuerdo a Jaime (1993), el Modelo de van Hiele abarca dos aspectos:

Descriptivo, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de éstos.

Instructivo, que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

El núcleo central del Modelo de van Hiele está constituido por la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la Geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos, y hacer demostraciones.

El modelo consta de cinco niveles de comprensión que han sido denominados: "reconocimiento o visualización", "análisis", "clasificación o abstracción", "deducción" y "rigor"; los cuales describen las características del proceso de pensamiento (Burger y Shaughnessy, 1986).

Es necesario comentar que no hay unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, pues algunas publicaciones como Burger y Shaughnessy (1986) hablan de los niveles 0 a 4, mientras que otras como Guillen (2004) hablan de los niveles del 1 al 5. Las características que diversos investigadores han atribuido a los niveles de razonamiento, y que han sido recuperadas por Jaime (1993), se describen a continuación:

Nivel 1 (Reconocimiento o visualización)

- Percepción global de las figuras: se suelen incluir atributos irrelevantes en las descripciones, especialmente referidos a la posición en el plano.
- Percepción individual de las figuras: cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase.
- Descripción de las figuras basada principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas físicas globales.
- Frecuentemente hay descripciones por semejanza con otros objetos, no necesariamente matemáticos: "Se parece a...", "tiene forma de...".
- Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, caracterizar figuras, con frecuentes referencias a prototipos visuales.
- Aprendizaje de un vocabulario básico para hablar de las figuras, describirlas, etc.
- No se suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Cuando sí se hace dicho reconocimiento, estos elementos o propiedades no tienen un papel central y, frecuentemente, reflejan contradicciones.

Nivel 2 (Análisis)

- Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.
- Deducción de propiedades mediante experimentación. Capacidad de generalización de dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.
- La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias. Así mismo, se rechazan las definiciones dadas

por el profesor o el libro de texto en favor de la del estudiante cuando aquéllas entran en conflicto con la propia.

- No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de las relaciones entre las propiedades.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.

Nivel 3 (Clasificación o abstracción)

- Sí se pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: se comprende la existencia de relaciones y se descubren, de manera experimental, nuevas relaciones.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y tipos de figuras. También se hacen referencias explícitas a las definiciones cuando se realizan razonamientos o demostraciones.
- La demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay una necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.
- Comprensión de una demostración realizada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
- Incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

Nivel 4 (Deducción formal)

- Se pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso.
- Realización de las demostraciones mediante razonamientos deductivos formales.

- Capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones.
- Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas: Sentido de axiomas, definiciones, teoremas, etc.
- Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5 (Rigor)

- Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual (de la geometría euclídea).
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
- Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

En relación al aspecto instructivo del modelo de van Hiele, se tienen cinco fases de aprendizaje, cuya finalidad es organizar las actividades o tareas que el estudiante debe realizar, de tal manera que le permitan transitar de un nivel de razonamiento al siguiente.

Algunas de las características que menciona Jaime (1993) y componen a cada fase son las siguientes:

Fase 1 (Información)

En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en el mismo. Los

alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

Fase 2 (Orientación dirigida)

Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes) para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicas de la red de conocimientos que deben formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y debe orientar a sus alumnos hacia la solución cuando lo necesiten.

Fase 3 (Explicitación)

Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

Fase 4 (Orientación libre)

En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.

El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.

Fase 5 (Integración)

Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos.

2.3 Pregunta de investigación

Los DGS son herramientas tecnológicas que suponen ser de ayuda para los docentes y que tienen como fin incidir de forma directa en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se desarrolla en el aula (Real, 2009). En acuerdo con ello y con la motivación descrita en el capítulo 1.1, nos surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo puede el DGS GeoGebra acelerar el aprendizaje de la geometría en los alumnos de la Secundaria Manuel Álvarez T.V.?

Algunas otras preguntas que surgieron a la pregunta principal ya mencionada fueron: ¿Usando GeoGebra se acelera el paso entre niveles de van Hiele? ¿El software GeoGebra motiva a los alumnos a aprender matemáticas?

Capítulo 3. Metodología

3.1 Metodología de trabajo

La elección de un instrumento para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes es un elemento importante (Jaime, 1993); algunos de ellos son pruebas escritas con puntos o ítems de elección múltiple, de respuesta libre, o parte de cada clase; entrevistas clínicas; pruebas escritas seguidas de entrevistas complementarias. Para nuestra investigación se optó por la medición del nivel de razonamiento inicial mediante una prueba de respuesta libre, ya que en ocasiones los ítems pueden ser seleccionados por los alumnos, sin tener una verdadera noción del significado o teoría que está detrás de una respuesta seleccionada. Las respuestas que cada alumno argumentó fueron analizadas y clasificadas tomando en cuenta el aspecto descriptivo de la Teoría de van Hiele, mencionado en el capítulo 2.

Una vez establecido el nivel inicial de los alumnos, y en sesiones posteriores, se procedió a la aplicación del aspecto instructivo del modelo de van Hiele a través de una secuencia didáctica cuidando las fases del aprendizaje inmersas en ella para el trabajo con los alumnos. Debido a que se utilizaría un DGS se prestó atención a la génesis instrumental, dedicando tiempo para una iniciación y exploración instrumental, procurando así que GeoGebra fuera una herramienta de apoyo para el trabajo de la secuencia didáctica y no un obstáculo para el aprendizaje.

3.2 Diseño de la actividad

Se platicó con el docente del grupo, y consciente de los bajos resultados en la prueba ENLACE se mostró con la disposición y en conjunto se acordó trabajar en

un aprendizaje esperado perteneciente al bloque cuatro, que aunque ya lo había trabajado, era conveniente reforzarlo ante las vísperas de las pruebas ENLACE y el Examen de Fin de Cursos, pues debido a nuestra experiencia, ha sido un tema que presenta dificultades para la mayoría de los estudiantes.

El aprendizaje esperado seleccionado fue: construyan círculos que cumplan con ciertas condiciones establecidas, perteneciente al bloque cuatro, eje “Forma, espacio y medida”, del tema “Formas geométricas” y subtema “figuras planas”.

En las orientaciones didácticas del Programa de Estudios 2006 de Matemáticas se menciona que usualmente un círculo se construye a partir de la medida del radio, pero es importante que los alumnos sepan determinar esta medida con base en otros datos y ubicar el centro del círculo para que éste cumpla con ciertas condiciones. Por ejemplo:

- Dados tres puntos no alineados, tracen la circunferencia que los contiene.
- Dada una cuerda, construyan el círculo al que ésta pertenece.

Una vez acordado el tema a trabajar con los estudiantes, se elaboró un cuestionario diagnóstico con la finalidad de rescatar los conocimientos previos que tenían acerca de los elementos de la circunferencia y su construcción dados ciertos elementos. La información arrojada del análisis de las respuestas brindaría información sobre el nivel de razonamiento geométrico del tema, posteriormente se procedió a elaborar una secuencia didáctica con un grado de dificultad acorde al nivel predominante en el grupo.

3.2.1 Cuestionario diagnóstico

El cuestionario estaba conformado por nueve preguntas abiertas: las primeras dos fueron elaboradas con la intención de rescatar las nociones que los alumnos tenían sobre el círculo, tanto en el contexto escolar como fuera de él. Las preguntas 3 y 4, aunque parecen repetidas, fueron redactadas de tal manera que permitieran observar si el alumno era capaz o no de diferenciar el círculo de la circunferencia, así como brindar información de sus conocimientos para sus

respectivos trazos, la pregunta 5 pone al alumno en un contexto escolar donde se tomará en cuenta la descripción que haga sobre los trazos, así como del vocabulario matemático empleado. Para la pregunta 6 se les agrega una imagen muy común para ellos (una bicicleta) donde se les pide que identifiquen alguna circunferencia, nuevamente aquí se ponen en juego el vocabulario que empleen para argumentar del por qué se trata de una circunferencia en caso de identificarla. En la pregunta 7, se busca analizar los argumentos que puedan dar, para asegurar que un trazo muy común, realizado con la ayuda de un objeto redondo (como una moneda), realmente sea una circunferencia. Mientras que las preguntas 8 y 9 ponen en juego los conocimientos previos que los alumnos puedan tener respecto al trazo de circunferencia a partir de dos puntos y a partir de tres puntos no alineados, respectivamente.

A continuación se enlistan las preguntas que se incluyeron en el cuestionario aplicado para el diagnóstico inicial:

1. ¿Has oído hablar del círculo en tus clases de la escuela? ¿Qué es?
2. ¿En qué clases has oído o usado el círculo?
3. ¿En la escuela cómo te pedían que trazaras un círculo?
4. ¿Y el profesor cómo te pedía trazar una circunferencia?
5. Si construyeran una segunda cancha de basquetbol, y te pidieran dibujar la circunferencia del centro, ¿cómo le harías?
6. Observa la siguiente imagen. ¿Identificas alguna circunferencia? En caso afirmativo ¿Cómo sabes que realmente se trata de una circunferencia?



7. Si utilizaras una moneda para trazar una circunferencia, ¿cómo puedes asegurar que el dibujo que trazaste es una circunferencia?
8. Supongamos que tú y un amigo están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo inferior). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar los dos? _____ ¿Por qué? _____



9. Ahora supongamos que tú y otros dos amigos están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo de abajo). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar los tres? _____ ¿Por qué? _____



3.2.2 Secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica se tomó en cuenta el nivel predominante que mostraron los alumnos al contestar el cuestionario diagnóstico, ya que las actividades debían tener la intención de facilitar el alcance al nivel inmediato superior. Además de ello, la secuencia debía seguir las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración.

Fase 1: Información

En la primera fase se les dio la información, donde se les dio a conocer la intención que tenían las actividades de la secuencia didáctica a realizar, siendo que mediante el uso del software GeoGebra, el alumno estudie los elementos del círculo y aprenda a construir círculos a partir de diferentes datos o que cumplan condiciones dadas.

También se aprovechó para realizar una integración instrumental como parte del proceso de la génesis instrumental.

Se procedió con una iniciación instrumental al enseñarles algunas de las herramientas básicas que necesitarían para trabajar con la secuencia. Desde ubicar el programa, saber cómo abrirlo y explorar el contenido de la barra de herramientas (Ver Figura 1 y 2).

En esa misma fase se procedió con una exploración instrumental, propiciando que los alumnos se fueran familiarizando con la tecnología a usar, a través de tareas matemáticas básicas, trazando algunas figuras geométricas: una recta, un segmento, una semirrecta, un triángulo, un pentágono convexo, un polígono regular de 12 lados, un hexágono cóncavo, una circunferencia y un arco de circunferencia. (Ver Figura 3)

Cabe señalar que al término de esta actividad, así como de las demás construcciones de las fases subsecuentes, se solicitó a los alumnos guardar los trazos realizados, a fin de contar con evidencia del trabajo que cada estudiante realizó y poder hacer el análisis de las respuestas. Algunas de las imágenes que se presentan este trabajo, representan la captura de pantalla correspondiente a dichas construcciones.



Imagen 1: barra de herramientas de GeoGebra

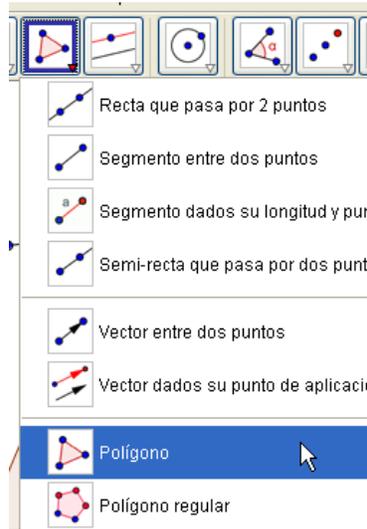


Imagen 2: barra de herramientas de GeoGebra desplegada

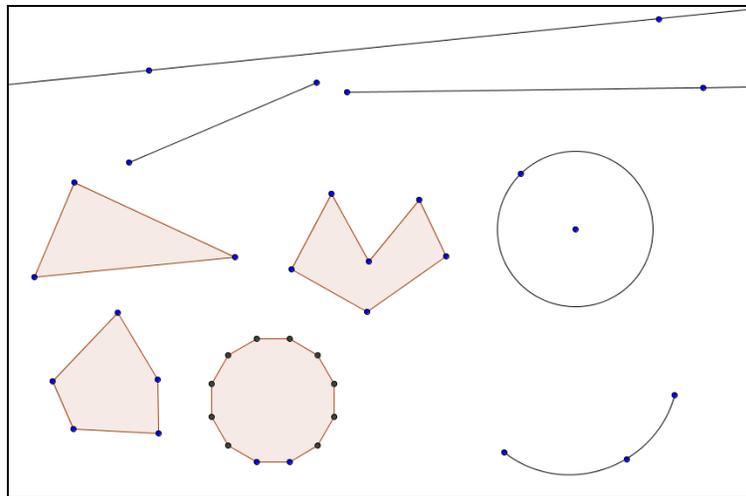


Imagen 3: figuras geométricas trazadas durante la exploración instrumental

Fase 2: Orientación dirigida

La fase 2 estuvo integrada por dos actividades, denominadas actividad A y B respectivamente. La actividad A tiene la intención de que los alumnos tracen una circunferencia con GeoGebra, que analicen y midan diferentes radios trazados y a partir de ello construyan una definición para la circunferencia. La actividad B tiene la intención que los alumnos construyan su concepto de mediatriz mediante la observación de la medida de un segmento y el ángulo formado entre el segmento y la mediatriz.

Las instrucciones proporcionadas, así como las preguntas para cada actividad de la fase 2 son las siguientes:

ACTIVIDAD A

Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia del tamaño que tu desees.

Selecciona la herramienta **nuevo punto** y ubica cinco puntos sobre la circunferencia. Ubícalos donde tu quieras.

Selecciona la herramienta **segmento entre dos puntos** y traza el segmento que va del centro de la circunferencia a cualquiera de los puntos que trazaste. Repite el mismo procedimiento con los demás puntos.

Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir cada uno de los segmentos trazados y responde:

¿Cuánto mide la distancia del centro a cualquiera de los puntos que ubicaste sobre la circunferencia?

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona uno de los puntos y arrástralo para cambiar la longitud de la circunferencia. ¿Qué pasa con la longitud de los segmentos? ¿Son iguales entre sí o son diferentes?

¿Cómo se le conoce al segmento que va del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia?

¿Cómo podrías definir la circunferencia?

ACTIVIDAD B

Traza el segmento de recta AB del tamaño que tú quieras usando la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Selecciona la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

¿Ocurrió algo?

Selecciona la herramienta **ángulo** y mide el ángulo formado por tu segmento y la mediatriz. ¿Cuánto mide?

Utiliza la herramienta **intersección de dos objetos** para marcar donde se interseca la mediatriz y el segmento AB. Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir y responder: ¿Cuánto mide del punto A del segmento al punto donde se corta con la mediatriz?

¿Cuánto mide del punto B del segmento al punto donde se corta con la mediatriz?

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona uno de los puntos y arrástralo para cambiar la longitud del segmento. ¿Se mantienen las características mencionadas anteriormente?

De acuerdo a los trazos que has realizado ¿Cómo definirías la mediatriz de un segmento?

Fase 3: Explicitación

Durante esta fase se les dio la instrucción de mostrar y compartir entre compañeros las construcciones realizadas con GeoGebra, así como las respuestas a las que llegaron. En plenaria se comentaron y discutieron, a fin de llegar a una definición de circunferencia y mediatriz que consensaran como correcta.

Fase 4: Orientación Libre

Ya en la fase 4, considerando que los alumnos debían utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades, se les propuso resolver nuevamente dos actividades. La primera de ellas, denominada actividad A, el alumno usaría la herramienta mediatriz, utilizada en la fase 2 y definida en la fase 3, con la intención de descubrir que es posible trazar una circunferencia a partir de dos puntos (extremos de una cuerda), y en el mejor de los casos descubrir que es posible trazar infinitas circunferencias a partir de esos mismos dos puntos.

La segunda actividad, llamada actividad B, nuevamente requería del uso de las mediatrices, para que a partir de un triángulo ABC se construyera la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo, tocando a cada uno de los vértices.

Las instrucciones proporcionadas, así como las preguntas para cada actividad de la fase 2 son las siguientes:

ACTIVIDAD A

En la pantalla de GeoGebra y con la herramienta **nuevo punto** traza dos puntos A y B.

Une los puntos A y B mediante la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Traza la mediatriz utilizando la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

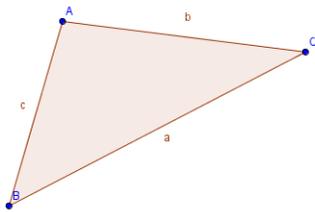
Selecciona la herramienta **nuevo punto** traza un punto donde tú quieras sobre la mediatriz.

Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia cuyo centro estará en el punto que ubicaste y el otro punto será el punto A o el punto B

- ¿Se podría trazar otra circunferencia que pase por estos mismos puntos A y B? Si se puede, trácenla.
- ¿Cuántas circunferencias que cumplan esta condición se pueden trazar? ¿Por qué?
- ¿Qué relación tiene el segmento AB con todos los círculos que trazaron?
- ¿Existe algún círculo donde el segmento AB sea diámetro?

ACTIVIDAD B

La siguiente figura representa un triángulo con vértices en los puntos A, B y C



Reproduce el dibujo en GeoGebra (no es necesario que tenga las mismas medidas).

Traza las mediatrices de los segmentos AB, BC y CA.

Utiliza la herramienta **Intersección de dos objetos** para marcar el punto donde se intersecan las mediatrices (a este punto se le conoce como circuncentro).

Selecciona la herramienta **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** y traza la circunferencia que tiene su centro en el circuncentro hasta cualquiera de los tres vértices del triángulo.

¿Qué observas?

Selecciona la herramienta **distancia o longitud** para contestar las siguientes preguntas:

¿Cuál es la distancia del circuncentro al punto A?

¿Cuál es la distancia del circuncentro al punto B?

¿Cuál es la distancia del circuncentro al punto C?

Selecciona la herramienta **Elige y mueve** y mueve uno de los vértices del triángulo. ¿Qué pasa con las distancias que mediste?

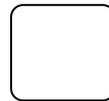
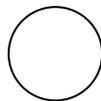
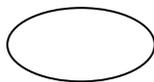
Fase 5: Integración

En esta última fase, se proponen 3 actividades que no implican la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización e integración de los ya adquiridos y la argumentación necesaria para responder las preguntas. La primera de ellas, denominada actividad A, tiene la intención de que el alumno seleccione y argumente el por qué una de las figuras mostradas es una circunferencia y que mencione algunos de los elementos que la componen para que sea válida su justificación. La actividad B y C corresponden a las preguntas 8 y 9 del cuestionario diagnóstico, cuya intención era revisar las nociones que los alumnos puedan tener respecto al trazo de circunferencia a partir de dos puntos y a partir de tres puntos no alineados. Retomar estas preguntas como parte de las actividades, nos permitiría comparar y valorar si hay un avance o no en sus respuestas, y si éstas cumplen con las condiciones necesarias para validar o no la evolución al nivel inmediato superior.

Las instrucciones proporcionadas, así como las preguntas para cada actividad de la fase 5 son las siguientes:

ACTIVIDAD A

Observa las siguientes figuras, ¿cuál de ellas es una circunferencia?



¿Cómo convencerías a alguien que realmente es una circunferencia? Argumenta ampliamente tu respuesta.

ACTIVIDAD B

Supongamos que tenemos a 2 niños situados en dos puntos distintos como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los dos niños?

Si No

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los dos niños. ¿Sólo se puede trazar una circunferencia que pase por estos dos puntos?

ACTIVIDAD C

Supongamos que tenemos a 3 niños situados en tres puntos distintos no alineados como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los tres niños?

Si No

En caso de haber elegido que no escribe por qué consideras tú que no es posible.

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los tres niños.

3.3 Aplicación de la actividad

3.3.1 Población

El grupo elegido para nuestra investigación fue el “1° C”, que está conformado por 9 alumnos de acuerdo a la lista de asistencia. La directora del plantel fue quien propuso y facilitó éste grupo para trabajar, debido a que mostraban asistencia regular en comparación con los otros salones, lo que permitiría tener condiciones más adecuadas para las intervenciones y el seguimiento de la investigación; no obstante hizo énfasis en que un alumno ya tenía días que no se presentaba, por lo que era probable que me encontraría con sólo 8 alumnos.

3.3.2 Sesiones de trabajo

La aplicación del cuestionario diagnóstico para obtener los conocimientos previos de los alumnos se llevó a cabo en el aula de clases del grupo 1° C, tomando una sesión de 40 minutos de un total de 50 que se tienen asignados por clase. En ésta sesión estuvieron presentes 7 alumnos de los 9 registrados en lista: Sandra, Abril, Atziri, Mayté, Ricardo, Victor y William. Sólo fue necesario su lápiz, borrador, así como los cuestionarios para cada uno.

A diferencia de la primera sesión utilizada para el cuestionario diagnóstico, se llevaron a cabo otras 4 sesiones de 50 minutos para trabajar las fases de la secuencia didáctica que quedaron distribuidas de la siguiente manera: fase 1, durante la sesión 1; fase 2 y 3, durante la sesión 2; fase 4, durante la sesión 3; y la fase 5 durante la sesión 4.

Para llevar a cabo estas 4 sesiones, fue necesario el uso del aula digital, la cual contaba con las computadoras de escritorio suficientes para los alumnos, así como una laptop y proyector para el profesor. Las computadoras estaban equipadas con sistema operativo Windows 7, así como con la versión 3.2.42.0 de GeoGebra.



Imagen 4: grupo 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V.



Imagen 5: alumnos del grupo 1° C de la secundaria Manuel Álvarez T.V. contestando cuestionario de conocimientos previos.



Imagen 6: aula digital de la secundaria Manuel Álvarez T.V.



Imagen 7: distribución del área de trabajo del profesor (lap top y proyector) y las computadoras de los alumnos al interior del aula digital.

3.3.3 Comentarios sobre las sesiones de trabajo

Las sesiones de trabajo se desarrollaron en los tiempos acordados con el maestro titular del grupo, quien estuvo presente sólo durante la fase 1 de la secuencia didáctica, para estar al pendiente que no hubiera problemas con el préstamo del aula digital, así como asegurarse que las condiciones eléctricas y herramientas de trabajo fueran adecuadas.

Durante la sesión para la aplicación del cuestionario diagnóstico no estaba presente el maestro de grupo, por lo que me auto presenté ante los alumnos y les comenté el motivo de mi visita, haciendo énfasis en que las respuestas que plasmaran o externaran durante la actividad no tendría repercusión alguna con su calificación. Así mismo se les comentó que los resultados serían tratados con fines de investigación y no se les mostrarían a su maestro. Una vez expuesto esto se generó un clima un poco menos tenso, el cual no dejó de estar presente, por el simple hecho de que alguien externo llegue a aplicarles un cuestionario de preguntas relacionadas con la asignatura de matemáticas.

A los estudiantes se les dieron instrucciones de contestar de manera individual, sin importar lo que pusieran, con la condición de argumentar lo más posible sus respuestas.

En cierto momento dos alumnas tenían intención de ayudarse, pero se les insistió en que la actividad era trabajo individual.

En las sesiones posteriores donde se aplicaron las fases de la secuencia didáctica se sentía un ambiente más tranquilo en los alumnos, tal vez porque ya no era la primera vez que estaba interactuando con el grupo, o porque se estaba realizando trabajo con apoyo de las computadoras. Mientras me acercaba a apoyar a algún alumno, algunas de sus compañeras se ponían a platicar sobre otros asuntos, y el profesor titular de grupo intervino llamándoles la atención. Salvo ese detalle, en

general se comportaron y trabajaron bien. Cabe señalar que costó demasiado trabajo desarrollar la fase 3 de explicitación debido a que no querían compartir sus respuestas por pena al qué dijeran los demás, o a estar equivocados. Tuve que estar insistiendo mucho e indagando para que aportaran algo de información.

Referente a la interacción con GeoGebra, los alumnos externaron que ya lo habían manejado antes con su profesor, sin embargo al estar manipulando las herramientas dejaron entrever la falta de dominio del programa. Esto confirma la importancia de haber realizado la fase 1 de información y no omitirla o darla por hecho, pues en ella se aprovechó tanto para dar instrucciones como para acercarlos con las herramientas que utilizarían al manipular GeoGebra, en otras palabras como se explicó en la teoría hubo una integración instrumental para los alumnos como parte del proceso de la génesis instrumental.



Imagen 8: alumnos del grupo 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V. trabajando con la secuencia didáctica y GeoGebra



Imagen 9: monitoreo del trabajo de alumnos del grupo 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V.

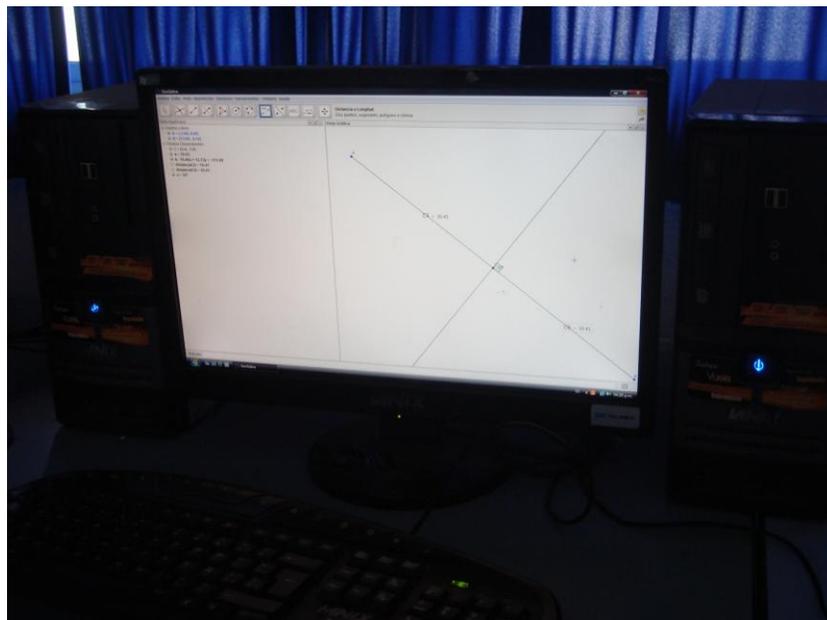


Imagen 10: pantalla de trabajo con GeoGebra, realizado por un alumno de 1º C de la secundaria Manuel Álvarez T.V.

Capítulo 4. Resultados

4.1 Ejemplos de respuestas de alumnos

4.1.1 Cuestionario diagnóstico

A fin de no saturar el trabajo con ejemplos de respuestas de alumnos, se ha decidido seleccionar solamente algunos de ellos. Los tres ejemplos del cuestionario diagnóstico que se incluyen en el trabajo corresponden a Abril, una alumna que en su cuestionario diagnóstico obtuvo dos respuestas consideradas como nivel 2 en la escala de van Hiele; Mayté, quien obtuvo todas las respuestas consideradas como nivel 1; y William, alumno que también obtuvo todas las respuestas nivel 1, pero consideramos importante monitorear debido a que mostró un conocimiento por debajo de sus compañeros en el cuestionario diagnóstico, pues se le otorgó el nivel 1 (reconocimiento), cuando en sus respuestas se ausentó ese reconocimiento básico de las figuras.

Cuestionario diagnóstico de Abril

CUESTIONARIO

Nombre: Abril Montserrat Padilla Serrano

Grado y grupo: 2^aC 13 años

Instrucciones: El presente cuestionario tiene la finalidad de recabar información para una investigación externa a la escuela. Lo que respondas no será dado a conocer a tus profesores ni afectará tu calificación.

1. ¿Has oído hablar del círculo en tus clases de la escuela? ¿Qué es?

Si, es el relleno de la circunferencia pues
es lo de adentro de la circunferencia

2. ¿En qué clases has oído o usado el círculo?

Matemáticas, Geografía, Danza, Biología,

3. ¿En la escuela cómo te pedían que trazaras un círculo?

con un compas midiendo el diametro

4. ¿Y el profesor cómo te pedía trazar una circunferencia?

midiendo el diametro, y con el compas
media el diametro, y con eso ago la
circunferencia

5. Si construyeran una segunda cancha de basquetbol, y te pidieran dibujar la circunferencia del centro, ¿cómo le harías?

midiera el diametro y con el diametro
ago la circunferencia

Abril Montserrat Padilla Serrano.

6. Observa la siguiente imagen. ¿Identificas alguna circunferencia? En caso afirmativo ¿Cómo sabes que realmente se trata de una circunferencia?



Las llantas porque es redonda y si medimos el diámetro y con la medida del diámetro medimos la circunferencia los va da 3 veces y cacho.

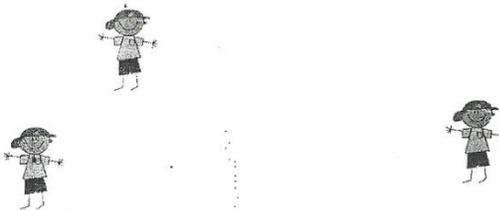
7. Si utilizaras una moneda para trazar una circunferencia, ¿cómo puedes asegurar que el dibujo que trazaste es una circunferencia?

Porque es circular y si la medimos la mitad y despues medimos 3 veces y cachito y se hace la circunferencia.

8. Supongamos que tú y un amigo están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo inferior). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar los dos? Si. ¿Por qué? la soga es larga y aguada y se puede doblar y asi podemos hacer una circunferencia.



9. Ahora supongamos que tú y otros dos amigos están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo de abajo). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar, los tres? NO ¿Por qué? porque dos manos estan juntos y otro no y no va alcanzar.



Cuestionario diagnóstico de Mayté

CUESTIONARIO

Nombre: Mayte del Rosario Gonzalez Rodriguez.

Grado y grupo: "7.º C"

12

Instrucciones: El presente cuestionario tiene la finalidad de recabar información para una investigación externa a la escuela. Lo que respondas no será dado a conocer a tus profesores ni afectará tu calificación.

1. ¿Has oído hablar del círculo en tus clases de la escuela? ¿Qué es?

Si. a veces

2. ¿En qué clases has oído o usado el círculo?

En matemáticas y tutoría

3. ¿En la escuela cómo te pedían que trazaras un círculo?

Con una compas.

4. ¿Y el profesor cómo te pedía trazar una circunferencia?

con la Regla midiera todo lo de
adentro del círculo.

5. Si construyeran una segunda cancha de basquetbol, y te pidieran dibujar la circunferencia del centro, ¿cómo le harías?

des sacaría el diámetro y lo
multiplicaría por el 0.7.

Mayte Del Rosario Gonzalez A.

6. Observa la siguiente imagen. ¿Identificas alguna circunferencia? En caso afirmativo ¿Cómo sabes que realmente se trata de una circunferencia?



Si las Ruedas de la Bici, por que es un círculo.

7. Si utilizaras una moneda para trazar una circunferencia, ¿cómo puedes asegurar que el dibujo que trazaste es una circunferencia?

Por que como la moneda es como un círculo y me piden dibujar una circunferencia.

8. Supongamos que tú y un amigo están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo inferior). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar los dos? Si ¿Por qué?

La soga si la doblas forma un círculo y quizás puedan caer los dos.



9. Ahora supongamos que tú y otros dos amigos están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo de abajo). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar los tres? Si ¿Por qué?

Por que si la soga tienen varios metros podrían caer los tres.



Cuestionario diagnóstico de William

CUESTIONARIO

Nombre: William Guillermo Cardenas Aldana

Grado y grupo: 7C 12 años

Instrucciones: El presente cuestionario tiene la finalidad de recabar información para una investigación externa a la escuela. Lo que respondas no será dado a conocer a tus profesores ni afectará tu calificación.

1. ¿Has oído hablar del círculo en tus clases de la escuela? ¿Qué es?

no

2. ¿En qué clases has oído o usado el círculo?

en Matemáticas

3. ¿En la escuela cómo te pedían que trazaras un círculo?

mediante una operación

4. ¿Y el profesor cómo te pedía trazar una circunferencia?

con una operación que le pide las respuestas

5. Si construyeran una segunda cancha de basquetbol, y te pidieran dibujar la circunferencia del centro, ¿cómo le harías?

mediría la cancha y luego la resolvería en los círculos.

William Guillermo Cardenas Albana.

6. Observa la siguiente imagen. ¿Identificas alguna circunferencia? En caso afirmativo ¿Cómo sabes que realmente se trata de una circunferencia?



los ruedas, el círculo de donde están los pedales

7. Si utilizaras una moneda para trazar una circunferencia, ¿cómo puedes asegurar que el dibujo que trazaste es una circunferencia?

porque es una rueda un círculo.

8. Supongamos que tú y un amigo están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo inferior). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar los dos? no ¿Por qué? no hay suficiente espacio en el círculo dependiendo el tamaño.



9. Ahora supongamos que tú y otros dos amigos están parados en puntos distintos en el patio de tu escuela (como en el dibujo de abajo). ¿Con una soga podrían formar una circunferencia que puedan pisar los tres? si ¿Por qué? Pueden sacar la soga más grande y hacerla.



4.1.2 Secuencia didáctica

Con la finalidad de tener continuidad en el análisis de las respuestas del cuestionario diagnóstico y los avances logrados en la secuencia didáctica, los ejemplos que a continuación se muestran son los correspondientes a las fases de la secuencia didáctica de los alumnos Abril, Mayté y William:

Secuencia didáctica Fase 1, de la alumna Abril

SECUENCIA DIDÁCTICA

Alumno: Abril Montserrat Padilla Serrano.
Escuela: Manuel Alvarez + V Grado y grupo: 2º C

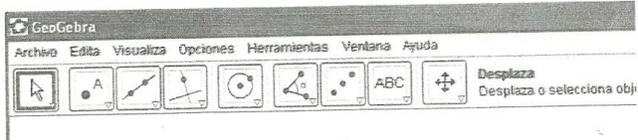
FASE 1: INFORMACIÓN

Con esta secuencia se pretende que mediante el uso del software Geogebra, el alumno estudie los elementos del círculo y aprenda a construir círculos a partir de diferentes datos o que cumplan condiciones dadas.

 Para arrancar el programa, haz doble clic sobre el icono que está en el Escritorio. (Si no encuentras el icono en el Escritorio, acceder desde Inicio/Todos los programas/GeoGebra/GeoGebra)

 Te aconsejo pulsar el botón *Maximizar* para trabajar más cómodamente sobre la hoja en blanco o zona gráfica que GeoGebra nos muestra.

La parte superior de la pantalla tiene el siguiente aspecto:



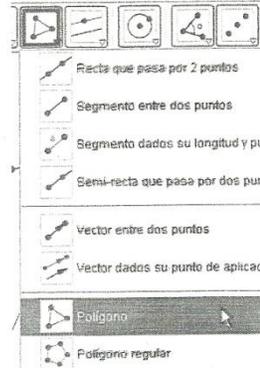
Cada uno de los botones que estás viendo (en la llamada *Barra de Herramientas*) permite desplegar un menú diferente.

Secuencia didáctica Fase 1, de la alumna Abril

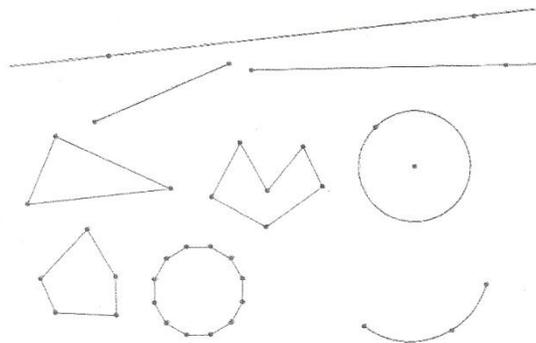


Pulsa en el cuarto de ellos sobre el triángulito de la parte inferior derecha y comprobarás cómo se abre el correspondiente menú y cómo cambia el aspecto del botón cuando seleccionas, por ejemplo la herramienta **Polígono**. Observa también cómo, a la derecha de la *Barra de Herramientas*, se actualiza un pequeño texto de ayuda para el uso de la correspondiente herramienta:

Polígono
Seleccionar todos los vértices y cerrar reiterando el inicial



Para que inicies la experiencia del uso del software Geogebra te sugerimos dibujar las siguientes figuras: una recta, un segmento, una semirrecta, un triángulo, un pentágono convexo, un polígono regular de 12 lados, un hexágono cóncavo, una circunferencia y un arco de circunferencia.



Si quieres eliminar algún elemento selecciónalo mediante la herramienta principal **Desplazar** y pulsa la tecla **Supr** (o clic derecho sobre el elemento y **Borra**).

También si lo deseas puedes modificar y cambiar de posición algunas figuras, usando la herramienta **Desplazar**.

¡Ahora te encuentras listo para empezar a trabajar con el software!



Secuencia didáctica Fase 2, de la alumna Abril

FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD A

Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia del tamaño que tu desees.

Selecciona la herramienta **nuevo punto** y ubica dos puntos sobre la circunferencia. Ubícalos donde tu quieras.

Selecciona la herramienta **segmento entre dos puntos** y traza el segmento que va del centro de la circunferencia a cualquiera de los puntos que trazaste. Repite el mismo procedimiento con los demás puntos.

Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir cada uno de los segmentos trazados y responde:

¿Cuánto mide la distancia del centro a cualquiera de los puntos que ubicaste sobre la circunferencia? 1.91

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona el punto B y arrástralo para cambiar la longitud de la circunferencia. ¿Qué pasa con la longitud de los segmentos?

¿son iguales entre sí o son diferentes? son iguales, por que se suman + tiempo adicional

¿Cómo se llama el segmento que va del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia? radio

¿Cómo podrías definir la circunferencia?

Es el exterior de un círculo

ACTIVIDAD B

Traza el segmento de recta AB del tamaño que tú quieras usando la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Selecciona la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

¿Ocurrió algo? la línea se dividía por otra línea.

Selecciona la herramienta **ángulo** y mide el ángulo formado por tu segmento y la mediatriz. ¿Cuánto mide? 90°

Secuencia didáctica Fase 2 y 3, de la alumna Abril

Utiliza la herramienta **intersección de dos objetos** para marcar el punto donde se intersectan la mediatriz y el segmento AB.

Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir y responder: ¿Cuánto mide del punto A del segmento al punto donde se corta con la mediatriz? 2.666

¿Cuánto mide del punto B del segmento al punto donde se corta con la mediatriz? 2.666

¿Cómo son las medidas del segmentos que mediste? Iguales

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona uno de los puntos y arrástralo para cambiar la longitud del segmento. ¿Se mantienen las características mencionadas anteriormente? Si. Solo se suman o restan las medidas

De acuerdo a los trazos que has realizado ¿Cómo definirías la mediatriz de un segmento?

Es una línea que está en la mitad de un segmento

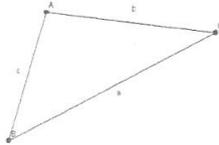
FASE 3: EXPLICITACIÓN

En esta fase mostrarás a tus compañeros las construcciones realizadas con Geogebra, así como las respuestas a las que llegaste. En caso de haber diferencias en las respuestas, será necesario que las comenten y las discutan para obtener una sola que consideren la más clara.

Si encuentras algo diferente a lo que escribiste, no lo corrijas, será mejor que lo anotes aquí abajo:

Las distancias del centro a los otros puntos aunque suman o restan siempre serán iguales. La circunferencia es una figura geométrica.
La mediatriz es un segmento que divide a otro en partes igual y mide un ángulo de 90°

Secuencia didáctica Fase 3, de la alumna Abril



Reproduce el dibujo en Geogebra (no es necesario que tenga las mismas medidas).

Traza las mediatrices de los segmentos AB, BC y CA.

Utiliza la herramienta **Intersección de dos objetos** para marcar el punto donde se intersectan las mediatrices (a este punto se le conoce como circuncentro).

Selecciona la herramienta **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** y traza la circunferencia que tiene su centro en el circuncentro hasta cualquiera de los tres vértices del triángulo.

¿Qué observas?

Se pone un círculo afuera del triángulo por
alrededor del triángulo

Selecciona la herramienta **distancia o longitud** para contestar las siguientes preguntas:

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice A? 0.39

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice B? 0.39

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice C? 0.39

Selecciona la herramienta **Elige y mueve** y mueve uno de los vértices del triángulo.

¿Qué pasa con las distancias que mediste? ¿Cambian? ¿Son iguales o distintas entre sí?

Si, entre si son iguales

Secuencia didáctica Fase 4, de la alumna Abril

FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE

ACTIVIDAD A

En la pantalla de Geogebra y con la herramienta **nuevo punto** traza dos puntos A y B.

Une los puntos A y B mediante la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Traza la mediatriz utilizando la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

Selecciona la herramienta **nuevo punto** y traza un punto sobre la mediatriz, donde tú quieras.

Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia cuyo centro estará en el punto que ubicaste y el otro punto será el punto A o el punto B

- a) ¿Se podría trazar otra circunferencia que pase por estos mismos puntos A y B? Si En caso de que sí se pueda, trázala.
- b) ¿Cuántas circunferencias que cumplan esta condición se pueden trazar? muchas ¿Por qué? los puntos siempre pasan por A y B
- c) ¿Qué relación tiene el segmento AB con todos los círculos que trazaron?

- d) ¿Existe algún círculo donde el segmento AB sea diámetro?

ACTIVIDAD B

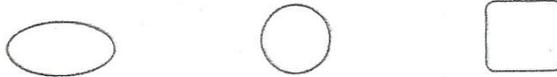
La siguiente figura representa un triángulo con vértices en los puntos A, B y C

Secuencia didáctica Fase 5, de la alumna Abril

FASE 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD A

Observa las siguientes figuras, ¿cuál de ellas es una circunferencia? *El círculo*



¿Cómo convencerías a alguien que realmente es una circunferencia? Argumenta ampliamente tu respuesta.

por que tiene diametro, radio, longitud etc.

ACTIVIDAD B

Supongamos que tenemos a 2 niños situados en dos puntos distintos como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los dos niños?

Si

No

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los dos niños. ¿Sólo se puede trazar una circunferencia que pase por estos dos puntos?

porque si juntas a los niños con una línea y después en medio de la línea pones una mediatriz se hace una cruz después haces un

Secuencia didáctica Fase 5, de la alumna Abril

triángulo y después ponemos el triángulo adentro de una circunferencia.

ACTIVIDAD C

Supongamos que tenemos a 3 niños situados en tres puntos distintos no alineados como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los tres niños?

Si

No

En caso de haber elegido que no escribe por qué consideras tú que no es posible.

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los tres niños.

por que los tres niños forman un triángulo si los juntamos con una línea y después hacemos una línea en medio de las lados y después ponemos un punto en medio del triángulo des pues hacemos una circunferencia

Secuencia didáctica Fase 1, de la alumna Mayté.

SECUENCIA DIDÁCTICA

Alumno: Mayte Del Rosario Gonzalez R.
Escuela: Mandel Alvarez Grado y grupo: 1º

FASE 1: INFORMACIÓN

Con esta secuencia se pretende que mediante el uso del software Geogebra, el alumno estudie los elementos del círculo y aprenda a construir círculos a partir de diferentes datos o que cumplan condiciones dadas.



GeoGebra

Para arrancar el programa, haz doble clic sobre el icono que está en el *Escritorio*. (Si no encuentras el icono en el *Escritorio*, acceder desde *Inicio/Todos los programas/GeoGebra/GeoGebra*)



Te aconsejo pulsar el botón *Maximizar* para trabajar más cómodamente sobre la hoja en blanco o zona gráfica que GeoGebra nos muestra.

La parte superior de la pantalla tiene el siguiente aspecto:



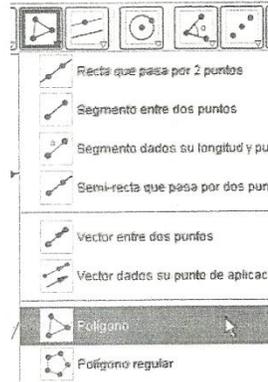
Cada uno de los botones que estás viendo (en la llamada *Barra de Herramientas*) permite desplegar un menú diferente.

Secuencia didáctica Fase 1, de la alumna Mayté.

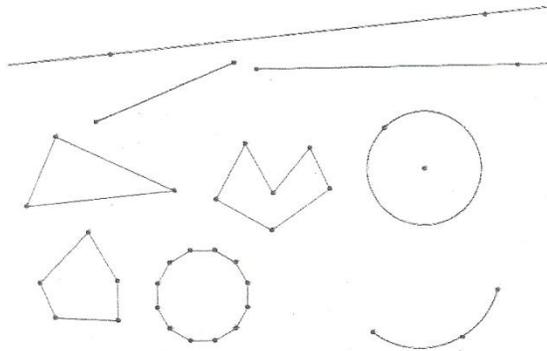


Pulsa en el cuarto de ellos sobre el triángulito de la parte inferior derecha y comprobarás cómo se abre el correspondiente menú y cómo cambia el aspecto del botón cuando seleccionas, por ejemplo la herramienta Polígono. Observa también cómo, a la derecha de la Barra de Herramientas, se actualiza un pequeño texto de ayuda para el uso de la correspondiente herramienta:

Polígono
Seleccionar todos los vértices y cerrar reiterando el inicial



Para que inicies la experiencia del uso del software Geogebra te sugerimos dibujar las siguientes figuras: una recta, un segmento, una semirrecta, un triángulo, un pentágono convexo, un polígono regular de 12 lados, un hexágono cóncavo, una circunferencia y un arco de circunferencia.



Si quieres eliminar algún elemento selecciónalo mediante la herramienta principal **Desplazar** y pulsa la tecla **Supr** (o clic derecho sobre el elemento y **Borra**).

También si lo deseas puedes **modificar** y **cambiar de posición** algunas figuras, usando la herramienta **Desplazar**.

¡Ahora te encuentras listo para empezar a trabajar con el software!



Secuencia didáctica Fase 2, de la alumna Mayté.

FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD A

Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia del tamaño que tu desees.

Selecciona la herramienta **nuevo punto** y ubica dos puntos sobre la circunferencia. Ubícalos donde tu quieras.

Selecciona la herramienta **segmento entre dos puntos** y traza el segmento que va del centro de la circunferencia a cualquiera de los puntos que trazaste. Repite el mismo procedimiento con los demás puntos.

Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir cada uno de los segmentos trazados y responde:

¿Cuánto mide la distancia del centro a cualquiera de los puntos que ubicaste sobre la circunferencia? 4.26

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona el punto B y arrástralo para cambiar la longitud de la circunferencia. ¿Qué pasa con la longitud de los segmentos?

¿son iguales entre sí o son diferentes? son diferentes, por que se hacen mas chicos.

¿Cómo se llama el segmento que va del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia? nose

¿Cómo podrías definir la circunferencia?

que se hace más chico y más grande, la circunferencia

ACTIVIDAD B

Traza el segmento de recta AB del tamaño que tú quieras usando la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Selecciona la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

¿Ocurrió algo? si, aparecio una linea cruzada con otra

Selecciona la herramienta **ángulo** y mide el ángulo formado por tu segmento y la mediatriz. ¿Cuánto mide? 90°

Secuencia didáctica Fase 2 y 3, de la alumna Mayté.

Utiliza la herramienta **intersección de dos objetos** para marcar el punto donde se intersectan la mediatriz y el segmento AB.

Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir y responder: ¿Cuánto mide del punto A del segmento al punto donde se corta con la mediatriz? 10.21

¿Cuánto mide del punto B del segmento al punto donde se corta con la mediatriz? 10.21

¿Cómo son las medidas del segmentos que mediste? Iguales

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona uno de los puntos y arrástralo para cambiar la longitud del segmento. ¿Se mantienen las características mencionadas anteriormente? Si, los dos son iguales al otro que medimos.

De acuerdo a los trazos que has realizado ¿Cómo definirías la mediatriz de un segmento?

que es la que los divide dos puntos de la mediatriz.

FASE 3: EXPLICITACIÓN

En esta fase mostrarás a tus compañeros las construcciones realizadas con Geogebra, así como las respuestas a las que llegaste. En caso de haber diferencias en las respuestas, será necesario que las comenten y las discutan para obtener una sola que consideren la más clara.

Si encuentras algo diferente a lo que escribiste, no lo corrijas, será mejor que lo anotes aquí abajo:

la distancia a cualquiera de los puntos eran iguales. Es una figura geométrica con características cuya distancia es igual mediatriz. una cada de la mitad de un segmento de 90°.
La mediatriz es un segmento que divide a otro en partes iguales y como un ángulo de 90°.

Secuencia didáctica Fase 4, de la alumna Mayté.

FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE

ACTIVIDAD A

En la pantalla de Geogebra y con la herramienta **nuevo punto** traza dos puntos A y B.

Une los puntos A y B mediante la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Traza la mediatriz utilizando la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

Selecciona la herramienta **nuevo punto** y traza un punto sobre la mediatriz, donde tú quieras.

Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia cuyo centro estará en el punto que ubicaste y el otro punto será el punto A o el punto B

a) ¿Se podría trazar otra circunferencia que pase por estos mismos puntos A y B? Si En caso de que sí se pueda, trázala.

b) ¿Cuántas circunferencias que cumplan esta condición se pueden trazar? muchas Por qué? porque pueden poner los puntos que quieran y volver a repetirlos.

c) ¿Qué relación tiene el segmento AB con todos los círculos que trazaron?

si porque el radio va al centro de la bisectriz.

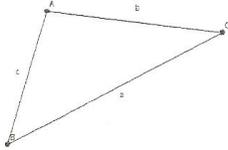
d) ¿Existe algún círculo donde el segmento AB sea diámetro?

si, los dos

ACTIVIDAD B

La siguiente figura representa un triángulo con vértices en los puntos A, B y C

Secuencia didáctica Fase 4, de la alumna Mayté.



Reproduce el dibujo en Geogebra (no es necesario que tenga las mismas medidas).

Traza las mediatrices de los segmentos AB, BC y CA.

Utiliza la herramienta **intersección de dos objetos** para marcar el punto donde se intersecan las mediatrices (a este punto se le conoce como circuncentro).

Selecciona la herramienta **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** y traza la circunferencia que tiene su centro en el circuncentro hasta cualquiera de los tres vértices del triángulo.

¿Qué observas?

que el círculo se hace más grande con sus mediatriz

Selecciona la herramienta **distancia o longitud** para contestar las siguientes preguntas:

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice A? 2.92

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice B? 2.92

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice C? 2.92

Selecciona la herramienta **Elige y mueve** y mueve uno de los vértices del triángulo.

¿Qué pasa con las distancias que mediste? ¿Cambian? ¿Son iguales o distintas entre sí?

Son iguales entre sí

Secuencia didáctica Fase 5, de la alumna Mayté.

FASE 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD A

Observa las siguientes figuras, ¿cuál de ellas es una circunferencia? el círculo



¿Cómo convencerías a alguien que realmente es una circunferencia? Argumenta ampliamente tu respuesta.

el cuadrado porque la distancia a cualquiera de los puntos son iguales.

ACTIVIDAD B

Supongamos que tenemos a 2 niños situados en dos puntos distintos como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los dos niños?

Si

No

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los dos niños. ¿Sólo se puede trazar una circunferencia que pase por estos dos puntos?

Si por que pueden pasar por el círculo y unirlo.

Secuencia didáctica Fase 5, de la alumna Mayté.

y dándole clic al círculo y
unirlo y el círculo se hace más
grande

ACTIVIDAD C

Supongamos que tenemos a 3 niños situados en tres puntos distintos no alineados como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los tres niños?

Sí

No

En caso de haber elegido que no escribe por qué consideras tú que no es posible.

Primero se debe trazar una raya
donde está el niño y después donde
está el otro y luego las traza.

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los tres niños.

Primero le daría clic en el primer
niño y después lo encerraría en el
círculo y luego para el otro niño
tendría que hacer lo mismo para
enseñarle con la mediatriz
le doy clic en distancia y longitud
y le doy clic en una raya para
que se saque la distancia y
longitud

Secuencia didáctica Fase 1, del alumno William

SECUENCIA DIDÁCTICA

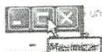
Alumno: William Guillermo Cordero Aldana
Escuela: ESC. BEC MANUEL ÁLVAREZ Grado y grupo: 1^o C

FASE 1: INFORMACIÓN

Con esta secuencia se pretende que mediante el uso del software Geogebra, el alumno estudie los elementos del círculo y aprenda a construir círculos a partir de diferentes datos o que cumplan condiciones dadas.

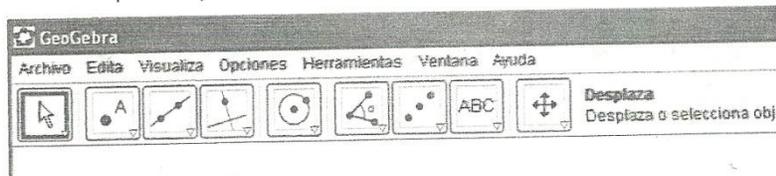


Para arrancar el programa, haz doble clic sobre el icono que está en el *Escritorio*. (Si no encuentras el icono en el *Escritorio*, acceder desde *Inicio/Todos los programas/GeoGebra/GeoGebra*)



Te aconsejo pulsar el botón *Maximizar* para trabajar más cómodamente sobre la hoja en blanco o zona gráfica que GeoGebra nos muestra.

La parte superior de la pantalla tiene el siguiente aspecto:



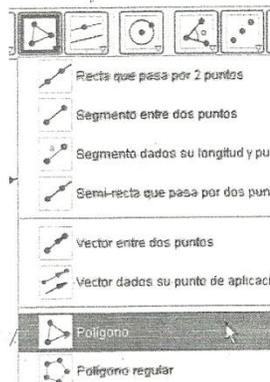
Cada uno de los botones que estás viendo (en la llamada *Barra de Herramientas*) permite desplegar un menú diferente.

Secuencia didáctica Fase 1, del alumno William

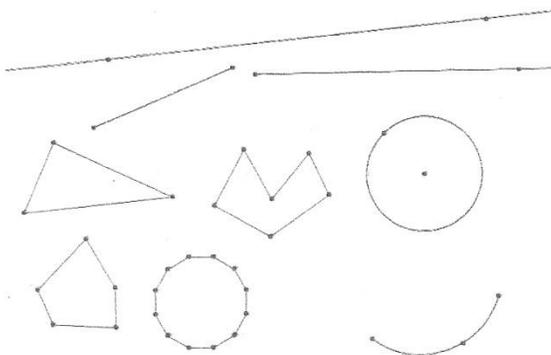


Pulsa en el cuarto de ellos sobre el triángulito de la parte inferior derecha y comprobarás cómo se abre el correspondiente menú y cómo cambia el aspecto del botón cuando seleccionas, por ejemplo la herramienta **Polígono**. Observa también cómo, a la derecha de la *Barra de Herramientas*, se actualiza un pequeño texto de ayuda para el uso de la correspondiente herramienta:

Polígono
Seleccionar todos los vértices y cerrar reiterando el inicial



Para que inicies la experiencia del uso del software Geogebra te sugerimos dibujar las siguientes figuras: una recta, un segmento, una semirrecta, un triángulo, un pentágono convexo, un polígono regular de 12 lados, un hexágono cóncavo, una circunferencia y un arco de circunferencia.



Si quieres eliminar algún elemento selecciónalo mediante la herramienta principal **Desplazar** y pulsa la tecla **Supr** (o clic derecho sobre el elemento y **Borra**).

También si lo deseas puedes modificar y cambiar de posición algunas figuras, usando la herramienta **Desplazar**.

¡Ahora te encuentras listo para empezar a trabajar con el software!



Secuencia didáctica Fase 2, del alumno William

FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD A

Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia del tamaño que tu desees.

Selecciona la herramienta **nuevo punto** y ubica dos puntos sobre la circunferencia. Ubicalos donde tu quieras.

Selecciona la herramienta **segmento entre dos puntos** y traza el segmento que va del centro de la circunferencia a cualquiera de los puntos que trazaste. Repite el mismo procedimiento con los demás puntos.

Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir cada uno de los segmentos trazados y responde:

¿Cuánto mide la distancia del centro a cualquiera de los puntos que ubicaste sobre la circunferencia? 1,34

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona el punto B y arrástralo para cambiar la longitud de la circunferencia. ¿Qué pasa con la longitud de los segmentos? ¿son iguales entre sí o son diferentes? son diferentes

¿Cómo se llama el segmento que va del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia? NOSE

¿Cómo podrías definir la circunferencia? un círculo que tiene radio, diámetro.

ACTIVIDAD B

Traza el segmento de recta AB del tamaño que tú quieras usando la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Selecciona la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

¿Ocurrió algo? Aparece una línea

Selecciona la herramienta **ángulo** y mide el ángulo formado por tu segmento y la mediatriz. ¿Cuánto mide? 90°

Secuencia didáctica Fase 2 y 3, del alumno William

Utiliza la herramienta **intersección de dos objetos** para marcar el punto donde se intersectan la mediatriz y el segmento AB.

Utiliza la herramienta **distancia o longitud** para medir y responder: ¿Cuánto mide del punto A del segmento al punto donde se corta con la mediatriz? 1.17

¿Cuánto mide del punto B del segmento al punto donde se corta con la mediatriz? 1.17

¿Cómo son las medidas del segmentos que mediste? iguales

Con la herramienta **elige y mueve** selecciona uno de los puntos y arrástralo para cambiar la longitud del segmento. ¿Se mantienen las características mencionadas anteriormente? igual a lo anterior

De acuerdo a los trazos que has realizado ¿Cómo definirías la mediatriz de un segmento?

una raya perpendicular de un segmento.

FASE 3: EXPLICITACIÓN

En esta fase mostrarás a tus compañeros las construcciones realizadas con Geogebra, así como las respuestas a las que llegaste. En caso de haber diferencias en las respuestas, será necesario que las comenten y las discutan para obtener una sola que consideren la más clara.

Si encuentras algo diferente a lo que escribiste, no lo corrijas, será mejor que lo anotes aquí abajo:

las distancias son iguales si se aumentan o se bajan de la distancia de un segmento a un punto siempre va a quedar un mismo número en cualquier línea.

Secuencia didáctica Fase 4, del alumno William

FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE

ACTIVIDAD A

En la pantalla de Geogebra y con la herramienta **nuevo punto** traza dos puntos A y B.

Une los puntos A y B mediante la herramienta **segmento entre dos puntos**.

Traza la mediatriz utilizando la herramienta **mediatriz** y da click sobre el segmento trazado.

Selecciona la herramienta **nuevo punto** y traza un punto sobre la mediatriz, donde tú quieras.

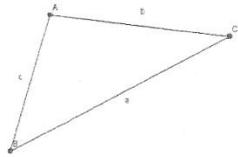
Utiliza la herramienta **circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** para trazar una circunferencia cuyo centro estará en el punto que ubicaste y el otro punto será el punto A o el punto B

- a) ¿Se podría trazar otra circunferencia que pase por estos mismos puntos A y B? Si En caso de que sí se pueda, trázala.
- b) ¿Cuántas circunferencias que cumplan esta condición se pueden trazar?
muchas ¿Por qué? pueden ponerse en el mismo ángulo
- c) ¿Qué relación tiene el segmento AB con todos los círculos que trazaron?
que siempre es AB
- d) ¿Existe algún círculo donde el segmento AB sea diámetro?
-

ACTIVIDAD B

La siguiente figura representa un triángulo con vértices en los puntos A, B y C

Secuencia didáctica Fase 4, del alumno William



Reproduce el dibujo en Geogebra (no es necesario que tenga las mismas medidas).

Traza las mediatrices de los segmentos AB, BC y CA.

Utiliza la herramienta **Intersección de dos objetos** para marcar el punto donde se intersectan las mediatrices (a este punto se le conoce como circuncentro).

Selecciona la herramienta **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** y traza la circunferencia que tiene su centro en el circuncentro hasta cualquiera de los tres vértices del triángulo.

¿Qué observas?

La circunferencia toca los puntos del triángulo.

Selecciona la herramienta **distancia o longitud** para contestar las siguientes preguntas:

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice A? 3.57

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice B? 3.57

¿Cuál es la distancia del circuncentro al vértice C? 3.57

Selecciona la herramienta **Elige y mueve** y mueve uno de los vértices del triángulo.

¿Qué pasa con las distancias que mediste? ¿Cambian? ¿Son iguales o distintas entre sí?

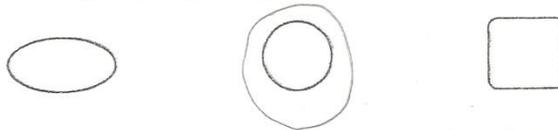
Son iguales

Secuencia didáctica Fase 5, del alumno William

FASE 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD A

Observa las siguientes figuras, ¿cuál de ellas es una circunferencia?



¿Cómo convencerías a alguien que realmente es una circunferencia? Argumenta ampliamente tu respuesta.

Por que es una circunferencia por
puede tocar los puntos de cualquier

ACTIVIDAD B

Supongamos que tenemos a 2 niños situados en dos puntos distintos como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los dos niños?

Sí

No

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los dos niños. ¿Sólo se puede trazar una circunferencia que pase por estos dos puntos?

No por que puede haber muchas circunfe-
rencia entre los dos puntos

Secuencia didáctica Fase 5, del alumno William

ACTIVIDAD C

Supongamos que tenemos a 3 niños situados en tres puntos distintos no alineados como se muestran a continuación:



¿Es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los tres niños?

Si

No

En caso de haber elegido que no escribe por qué consideras tú que no es posible.

por que la circunferencia es muy corta para poder alcanzar los puntos

En caso de haber elegido que sí, anota detalladamente paso a paso qué harías para trazar la circunferencia que pasa por los tres niños.

4.2 Análisis de las respuestas

4.2.1 Cuestionario diagnóstico

En las tablas subsecuentes se presentan los resultados del análisis de respuestas del cuestionario diagnóstico para cada alumno. En la primera columna podemos observar el número de pregunta del cuestionario a la que se hace referencia; en la segunda columna aparece el nivel asignado a la respuesta de la pregunta correspondiente de acuerdo a la escala de van Hiele; mientras que en la tercera columna se exponen los argumentos por los cuales consideramos ubicarlo en dicho nivel.

Dado que la pregunta 2 del cuestionario diagnóstico se realizó con la intención de ver el contexto en el cual relacionaban la circunferencia, no implicó la asignación de un nivel de razonamiento, por lo que en la tabla aparece que no aplica (n/a) en la asignación de nivel.

Tabla 1: resultados del diagnóstico de Sandra

No. de pregunta	Nivel asignado de acuerdo a la escala de van Hiele	Justificación
1	1	No describe nada. Al decir que es una figura geométrica, no da características.
2	n/a	No aplica como cuestión que defina un nivel de razonamiento.
3	1	En estas dos preguntas escribe la misma respuesta, sin mencionar alguna diferencia entre circunferencia y círculo. Utiliza un lenguaje básico al enunciar elementos o propiedades involucradas en el trazo del círculo.
4	1	
5	1	Utiliza un vocabulario básico sin enunciar elementos del círculo necesarios para el trazo de la circunferencia.
6	1	Sólo hace un reconocimiento de las figuras con un lenguaje básico sin entrar en detalle a los elementos del círculo o propiedades que le aseguren que se trata de una circunferencia.
7	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que se trata de una circunferencia.
8	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 2 niños pisen la sogá (circunferencia).
9	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 3 niños pisen la sogá (circunferencia).

Tabla 2: resultados del diagnóstico de William

No. de pregunta	Nivel asignado de acuerdo a la escala de van Hiele	Justificación
1	1	Dice que no ha oído hablar del círculo, eso nos lleva a que no hace el intento por describirla, por lo que se le ubicará en el nivel más bajo.
2	n/a	No aplica como cuestión que defina un nivel de razonamiento.
3	1	Realmente William no muestra en sus respuestas alguna idea de cómo trazar la circunferencia, se le ubicará en el nivel 1 aunque nuevamente no llegue al reconocimiento de la figura.
4	1	
5	1	Utiliza un vocabulario básico sin enunciar elementos del círculo necesarios para el trazo de la circunferencia.
6	1	Sólo hace un reconocimiento de las figuras con un lenguaje básico sin entrar en detalle a los elementos del círculo o propiedades que le aseguren que se trata de una circunferencia.
7	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que se trata de una circunferencia.
8	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar por qué los 2 niños no pisan la sogá (circunferencia).
9	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 3 niños pisen la sogá (circunferencia).

Tabla 3: resultados del diagnóstico de Ricardo

No. de pregunta	Nivel asignado de acuerdo a la escala de van Hiele	Justificación
1	2	Hace distinción entre circunferencia y círculo, poniendo en evidencia su conocimiento respecto a que las figuras geométricas están formadas de partes o elementos.
2	n/a	No aplica como cuestión que defina un nivel de razonamiento.
3	1	Utiliza un vocabulario básico sin enunciar elementos o propiedades involucradas en el trazo del círculo. En sus respuestas no expresa diferencias entre circunferencia y círculo.
4	1	
5	2	Hace referencia al centro del círculo y menciona la cuerda como otro elemento necesario (radio) que le es útil para poder trazar la circunferencia.
6	1	Hace referencia a los elementos del círculo, mencionando las partes de la bicicleta y señalando cuál es la circunferencia. Sin embargo no usa alguna propiedad que justifique por qué son circunferencias.
7	1	Solamente describe basándose en el aspecto de la moneda, sin hacer referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que se trata de una circunferencia.
8	1	Hace referencia a un elemento del círculo pero no hace uso de propiedades para justificar que los 2 niños pisen la sogá (circunferencia).
9	1	Menciona un elemento del círculo, pero no usa las propiedades para justificar que los 3 niños pisen la sogá (circunferencia).

Tabla 4: resultados del diagnóstico de Víctor

No. de pregunta	Nivel asignado de acuerdo a la escala de van Hiele	Justificación
1	1	Se contradice en lo que argumenta, mostrando confusión en los conceptos de círculo y circunferencia.
2	n/a	No aplica como cuestión que defina un nivel de razonamiento.
3	1	Utiliza un vocabulario básico sin enunciar elementos o propiedades involucradas en el trazo del círculo.
4	1	En esta respuesta se observa que tiene la misma concepción de circunferencia y círculo.
5	1	Utiliza un vocabulario básico sin enunciar elementos o propiedades involucradas en el trazo de la circunferencia.
6	1	Sólo hace un reconocimiento de las figuras con un lenguaje básico sin entrar en detalle a los elementos del círculo o propiedades que le aseguren que se trata de una circunferencia.
7	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que se trata de una circunferencia.
8	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 2 niños pisen la sogá (circunferencia).
9	1	No muestra conocimiento de que a partir de 3 puntos se pueda trazar una circunferencia. Pudiéramos decir que "cayó en la trampa" de ver un niño más alejado de los otros dos.

Tabla 5: resultados del diagnóstico de Abril

No. de pregunta	Nivel asignado de acuerdo a la escala de van Hiele	Justificación
1	2	Hace distinción entre circunferencia y círculo, lo que evidencia su conocimiento de que las figuras geométricas están formadas de partes o elementos.
2	n/a	No aplica como cuestión que defina un nivel de razonamiento.
3	1	Hace referencia a un elemento del círculo para trazar tanto el círculo y la circunferencia, sin hacer distinción. En su descripción del trazo muestra imprecisión, ya que maneja un elemento (el diámetro) cuando en realidad se refería a otro (el radio).
4	1	
5	1	Enuncia un elemento del círculo necesario para el trazo de la circunferencia (diámetro), sin embargo no explicita cómo hacer el trazo con ese elemento.
6	2	Identifica la figura en las llantas, y para justificar que realmente se trata de una circunferencia menciona la propiedad de que el diámetro cabe 3.14 veces en la circunferencia.
7	1	Hace el esfuerzo por describir una propiedad que justifique que se trata de una circunferencia, pero refleja contradicciones.
8	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 2 niños pisen la sogá (circunferencia).
9	1	No muestra conocimiento de que a partir de 3 puntos se pueda trazar una circunferencia. Pudiéramos decir que "cayó en la trampa" de ver un niño más alejado de los otros dos.

Tabla 6: resultados del diagnóstico de Mayté

No. de pregunta	Nivel asignado de acuerdo a la escala de van Hiele	Justificación
1	1	No hace el intento por describirla, por lo que se le ubicará en el nivel más bajo.
2	n/a	No aplica como cuestión que defina un nivel de razonamiento.
3	1	Utiliza un vocabulario básico sin enunciar elementos o propiedades involucradas en el trazo del círculo.
4	1	En esta respuesta se observa que tiene la misma concepción de circunferencia y círculo.
5	1	Menciona un elemento necesario para el trazo, sin embargo hay imprecisiones en sus comentarios, al decir que lo multiplica por "el otro" para trazar la circunferencia.
6	1	Sólo hace un reconocimiento de las figuras con un lenguaje básico sin entrar en detalle a los elementos del círculo o propiedades que le aseguren que se trata de una circunferencia.
7	1	Solamente describe basándose en el aspecto de la moneda, sin hacer referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que se trata de una circunferencia.
8	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 2 niños pisen la sogá (circunferencia).
9	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 3 niños pisen la sogá (circunferencia).

Tabla 7: resultados del diagnóstico de Atziri

No. de pregunta	Nivel asignado de acuerdo a la escala de van Hiele	Justificación
1	1	No hace el intento por describirla, por lo que se le ubicará en el nivel más bajo.
2	n/a	No aplica como cuestión que defina un nivel de razonamiento.
3	1	Utiliza un vocabulario básico sin enunciar elementos o propiedades involucradas en el trazo del círculo.
4	2	Reconoce propiedades de los elementos del círculo, mencionando la relación existente del diámetro y π para obtener la circunferencia.
5	2	Reconoce elementos de la círculo y la relación que existe entre un diámetro para dibujar el perímetro. En esta respuesta se observa que la circunferencia la asocia con el perímetro.
6	1	Hace referencia a los elementos del círculo, pero no usa alguna propiedad que justifique por qué son circunferencias.
7	1	Solamente describe basándose en el aspecto de la moneda, sin hacer referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que se trata de una circunferencia.
8	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 2 niños pisen la sogá (circunferencia).
9	1	No hace referencia a los elementos del círculo ni a las propiedades para justificar que los 3 niños pisen la sogá (circunferencia).

4.2.2 Secuencia Didáctica

Fase 1: Información

Durante la fase 1, Abril y Mayté demostraron rápida familiarización con el Software GeoGebra, ya que no tuvieron problema alguno de trazar las figuras que se pedían usando los botones de la barra de herramientas. A William le llevó alrededor de tres minutos más trazar las formas geométricas, ya que apenas se acostumbraba a desplegar los botones y utilizar aquellos necesarios para el trazo de figuras. Podemos decir que se cumplió con la intención de esta fase, logrando que los alumnos recibieran la información del campo de estudio a trabajar, los materiales y herramientas a utilizar, y adicionalmente se les indujo a una iniciación y exploración instrumental al interactuar con las herramientas básicas que necesitarían para trabajar con la secuencia didáctica y GeoGebra.

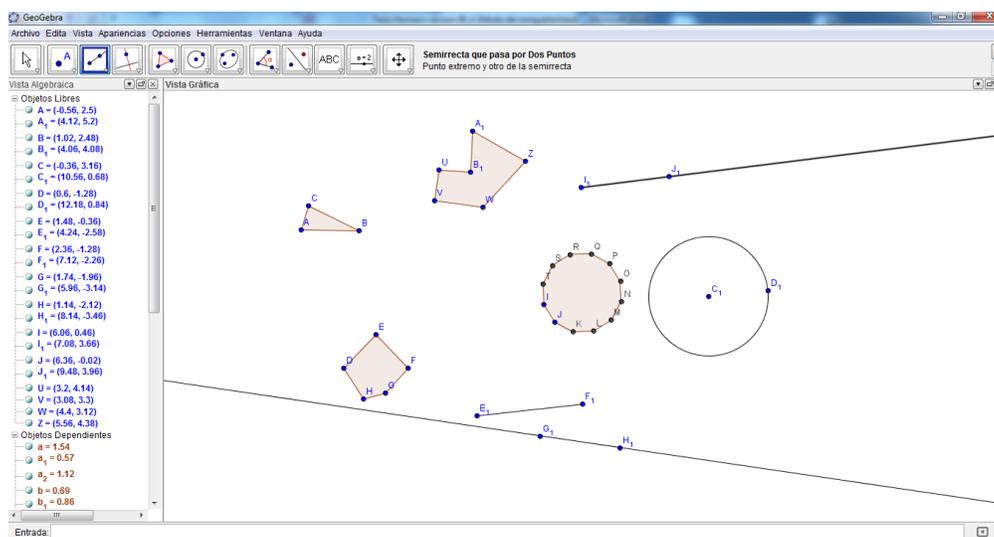


Imagen 11: trazos de Abril, fase 1

Fase 2: Orientación dirigida

En la actividad A de esta fase, Abril construye correctamente su circunferencia, así como el trazo de tres radios, identificando su respectiva longitud, siendo ésta de un radio inicial de 1.91cm. Al aplicar el arrastre a su figura, observa que el radio aumenta o disminuye, pero al compararlos entre sí se percata que son iguales. Tiene reconocimiento del concepto de radio, sin embargo no utiliza esta información para definir la circunferencia. Se pudiera decir que percibió componentes y propiedades de las figuras, característica de un nivel 2 de razonamiento, pero no definió a la circunferencia usando éstas, propio de un nivel 1 de razonamiento geométrico.

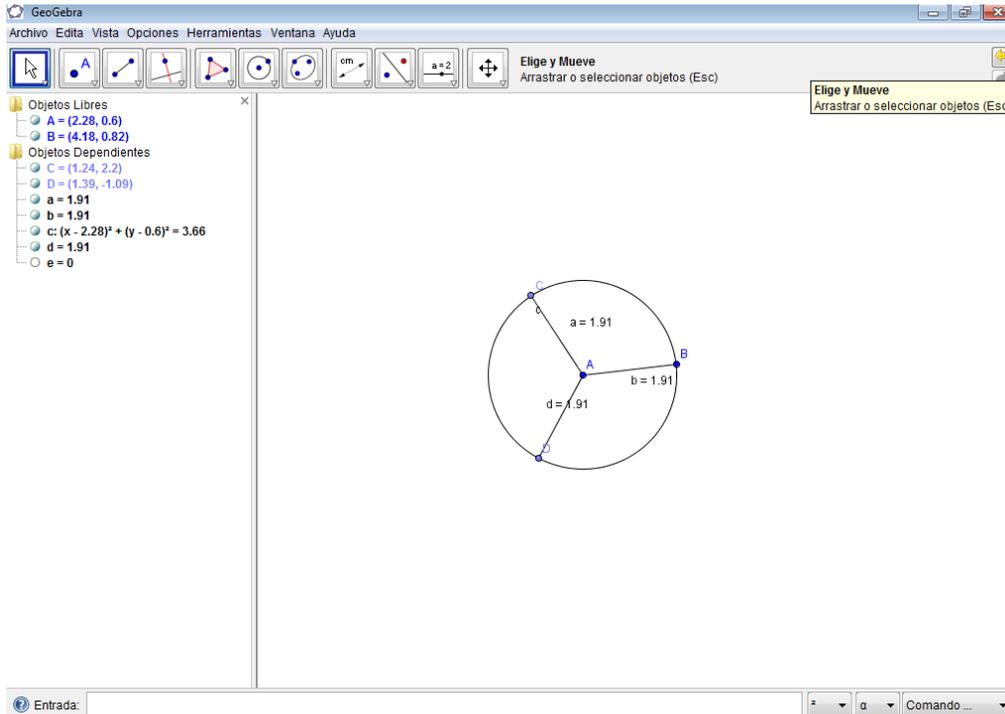


Imagen 12: trazos de Abril, fase 2, Actividad A

En la actividad B Abril hace utiliza las herramientas del DGS apropiadamente para trazar la mediatriz de un segmento y ver que la medida entre ellos es de 90° , así mismo es capaz de ver que una de las propiedades de la mediatriz es que divide a un segmento en dos segmentos de igual magnitud, sin importar la medida de éste. Podemos decir que al ser capaz de analizar estas propiedades de la mediatriz, Abril se encuentra en un nivel 2 de razonamiento geométrico, sin embargo a la hora de definir lo hace de manera informal, con un lenguaje básico, propio de un nivel 1. En un cierta parte de la actividad utiliza la palabra línea como sinónimo de segmento, pero al definir la mediatriz los maneja como conceptos diferentes.

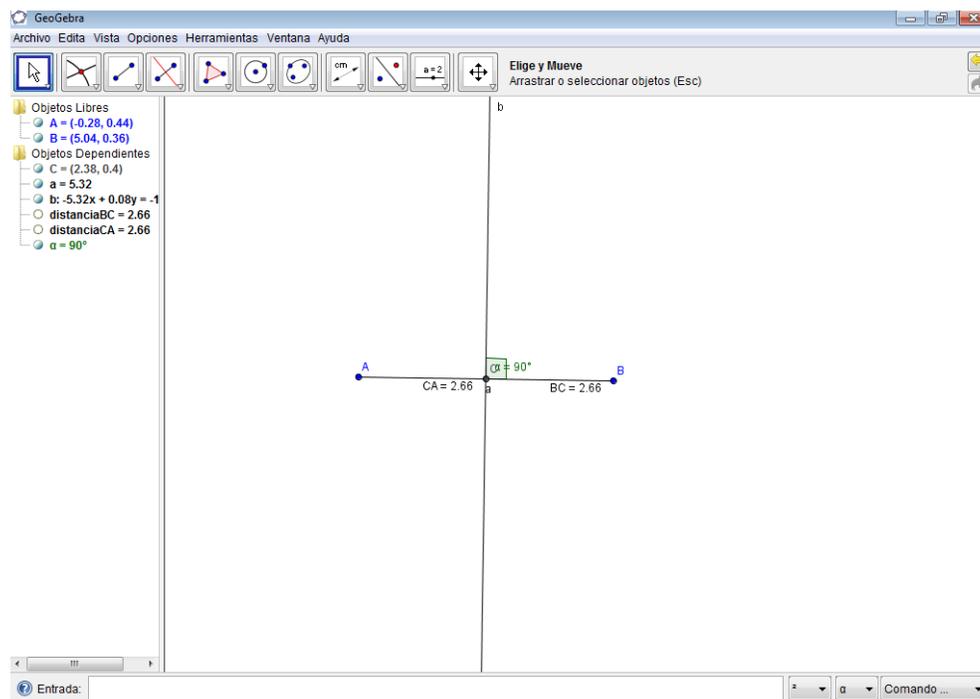


Imagen 13: trazos de Abril, fase 2, Actividad B

Las construcciones de Mayté de la actividad A durante la fase 2 también fueron correctas, y aunque fue capaz de trazar tres radios midiendo su respectiva longitud, no logra definir la circunferencia ni identifica que esos segmentos que midió son los radios. Al no reconocer explícitamente al radio como parte que compone a la circunferencia, fueron consideradas nivel 1 de razonamiento geométrico las respuestas a esta actividad A.

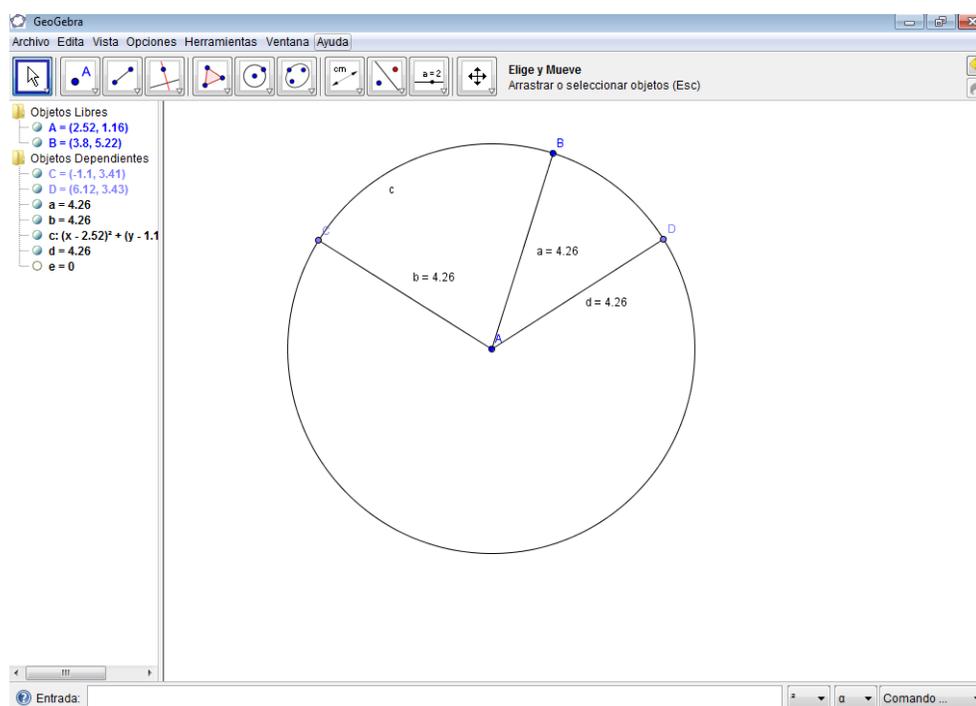


Imagen 14: trazos de Mayté, fase 2, Actividad A

En la actividad B y con ayuda de GeoGebra, Mayté es capaz de descubrir las propiedades de la mediatriz, como saber que el ángulo entre un segmento y su mediatriz es de 90° , así como que divide a un segmento en dos segmentos de igual magnitud. Al ser capaz de analizar estas propiedades de la mediatriz, Mayté se encuentra en un nivel 2 de razonamiento geométrico, sin embargo a la hora de definir se encuentra en un nivel 1, pues lo hace de manera incorrecta sin aplicar las propiedades observadas con anterioridad.

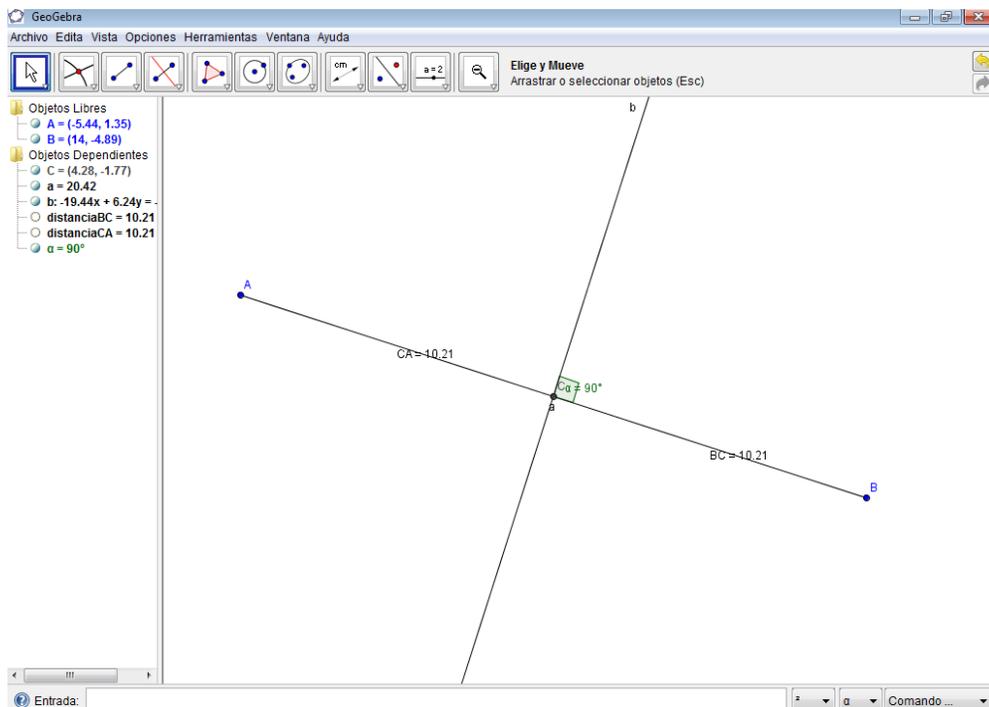


Imagen 15: trazos de Mayté, fase 2, Actividad B

En la actividad A de la fase 2, William consigue hacer trazos correctos con el uso de GeoGebra. En sus respuestas se puede notar que aunque sabe que una circunferencia tiene elementos como radio o diámetro, no es capaz de identificarlos en la figura que trazó. Cuando William responde que los radios son diferentes, él se refería a los de la figura nueva generada por el arrastre de uno de los puntos sobre la circunferencia, pues en sus trazos y respuestas podemos percatarnos que puso medidas de 1.34 cm a los radios de la circunferencia. Ante estas imprecisiones William muestra respuestas propias de un nivel 1 de razonamiento geométrico para esta actividad.

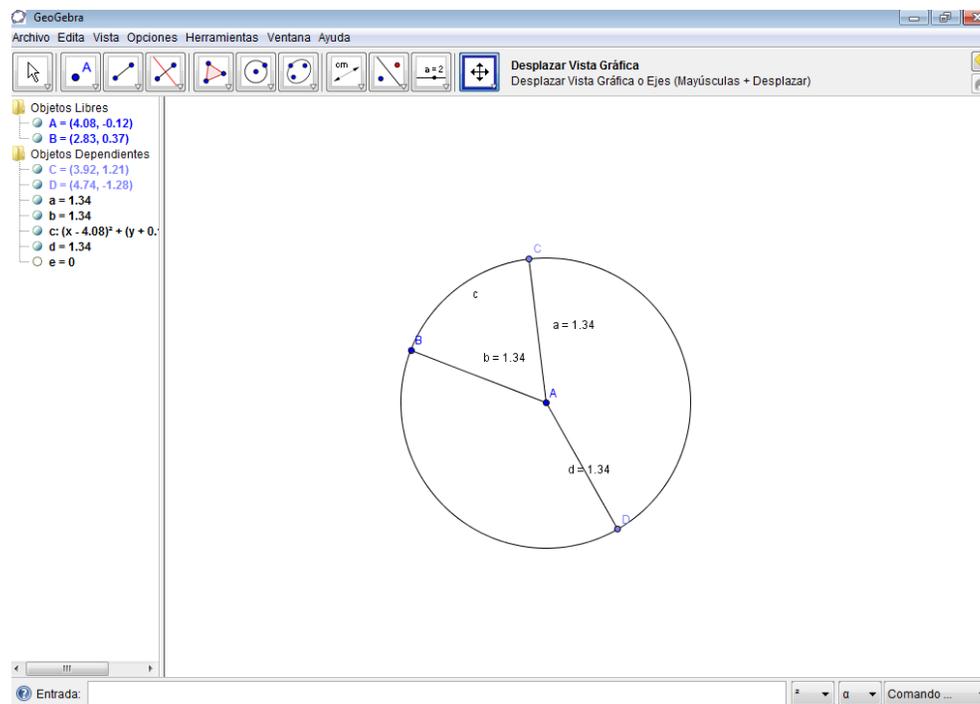


Imagen 16: trazos de William, fase 2, Actividad A

En la actividad B de esta misma fase, William también realiza trazos correctos que le permiten reconocer propiedades de la mediatriz, como el haber dividido su segmento en partes iguales de 2.27cm, así como darse cuenta de que forman un ángulo de 90° entre ellos, y que a pesar de que el segmento sea de otro tamaño, las propiedades son iguales a las descritas con anterioridad. Esto lo ubica en un nivel 2 de razonamiento geométrico pese al uso de la palabra “raya” utilizada en su definición de mediatriz.

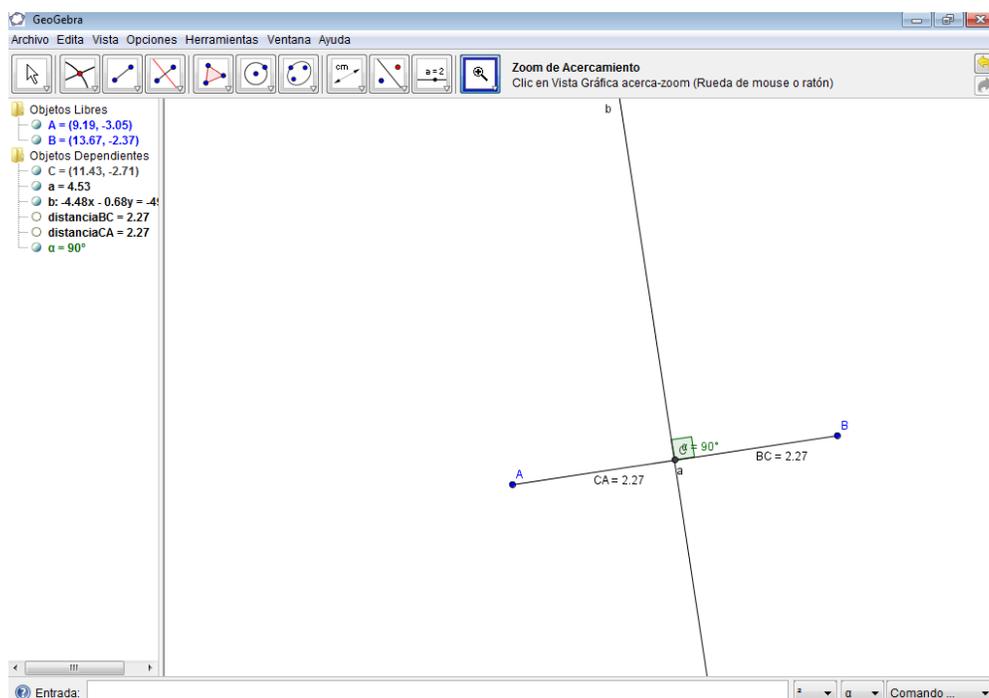


Imagen 17: trazos de William, fase 2, Actividad B

Fase 3: Explicitación

En esta fase, derivado de los resultados obtenidos de las actividades de la fase 2 y del intercambio de experiencia con sus compañeros, Abril logra complementar sus conceptos, utilizando las propiedades encontradas anteriormente para definir la mediatriz de un segmento, correspondiendo esto a un nivel 2 de razonamiento geométrico. Mientras que para hablar de la circunferencia, la describe utilizando la propiedad de que la distancia del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia son iguales, y hace el intento por generalizar para cualquier circunferencia sin importar el tamaño de su radio, quedando evidente en su respuesta al escribir “aunque se sumen o se resten”, siendo su intención expresar que no importa si ésta es de radio mayor (“se sumen”) o de radio menor (“se resten”).

Durante la fase de explicitación Mayté también complementa su concepto de mediatriz a partir de las propiedades encontradas en la fase 2, mostrando un nivel 2 de razonamiento geométrico. Cuando quiere definir la circunferencia usa propiedades imprecisas, a pesar del esfuerzo por hacer una definición formal, queda en un nivel 1 para este aspecto.

Durante la explicitación, William intenta definir la circunferencia en base a las actividades anteriores. Evidencia de esto es cuando menciona que si “aumentas o bajas” las distancias son iguales. A William le queda presente que si aumenta o disminuye de tamaño la circunferencia, las medidas de los radios serán iguales entre sí. Pese al avance en su análisis de esta propiedad de la circunferencia, no utilizó componentes básicos de la figura para su argumentación, lo que nos hace ubicarlo en un nivel 1 de razonamiento geométrico.

Respecto a su definición de mediatriz, ya no la complementó, lo que lo ubica directamente en nivel 1.

Fase 4: Orientación libre.

En la actividad A de esta fase, Abril es capaz de hacer los trazos de una circunferencia a partir de dos puntos, incluso se da cuenta que puede trazar otras circunferencias que pasan por los mismos dos puntos, sin embargo no es capaz de identificar que el segmento de recta formado entre esos dos puntos es una cuerda que pertenece a todas las circunferencias trazadas. Tampoco se percata que en algún momento esa cuerda puede ser el diámetro de una circunferencia, ya que dejó esas preguntas sin contestar, reflejando por ende un nivel 1 de razonamiento al no reconocer a segmento de recta como cuerda de una circunferencia.

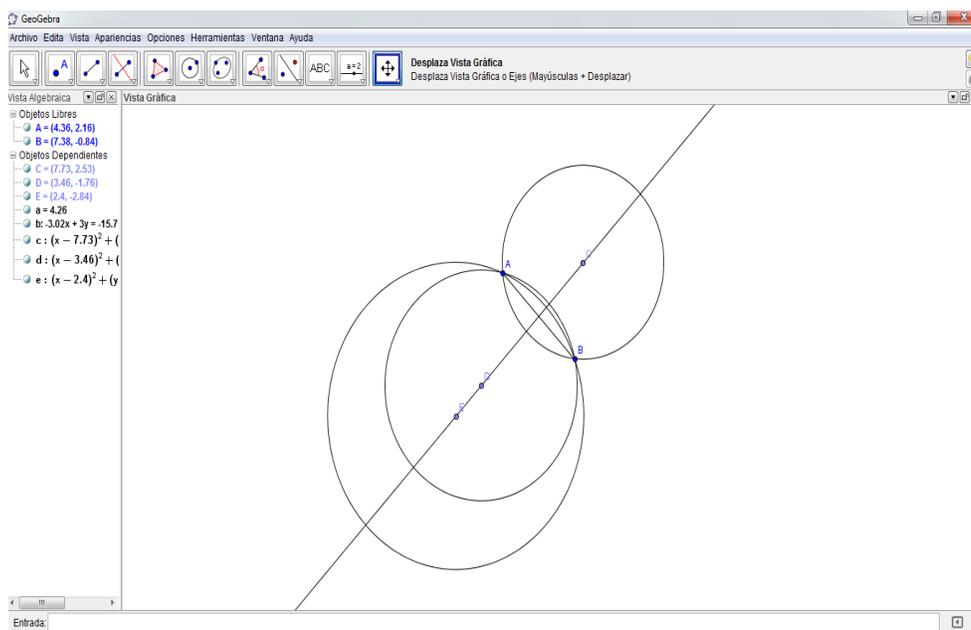


Imagen 18: trazos de Abril, fase 4, Actividad A

Para la actividad B de esta fase, Abril no tuvo problemas para construir el circuncentro generado por el punto de intersección de las mediatrices, así como realizar el trazo de la circunferencia que inscribe al triángulo. Es capaz de analizar que las medidas del circuncentro a cualquiera de los vértices son iguales entre sí, sin importar el tamaño del triángulo, correspondiendo esto a un nivel 2 de razonamiento geométrico.

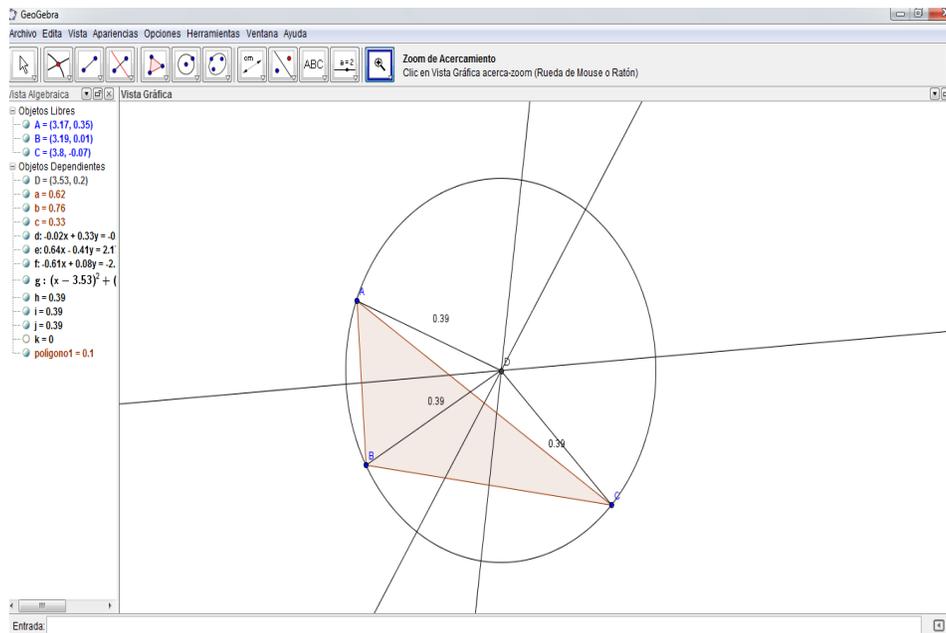


Imagen 19: trazos de Abril, fase 4, Actividad B

Para la actividad A de la fase 4, Mayté sin inconveniente alguno realiza los trazos de circunferencias a partir de dos puntos, ella inicia a dibujar su circunferencia tomando el segmento AB como diámetro, por eso a ella no le representa dificultad identificar y contestar que en algún momento ese segmento puede ser el diámetro. Pero la respuesta anterior cae en contradicción al mencionar que los dos círculos tienen como diámetro el segmento AB. Aunque es capaz de identificar que a partir de dos puntos pueden trazarse varias circunferencias que pasen por ellos, consideramos ubicarla en nivel 1 de razonamiento debido a que muestra contradicciones en los componentes identificados.

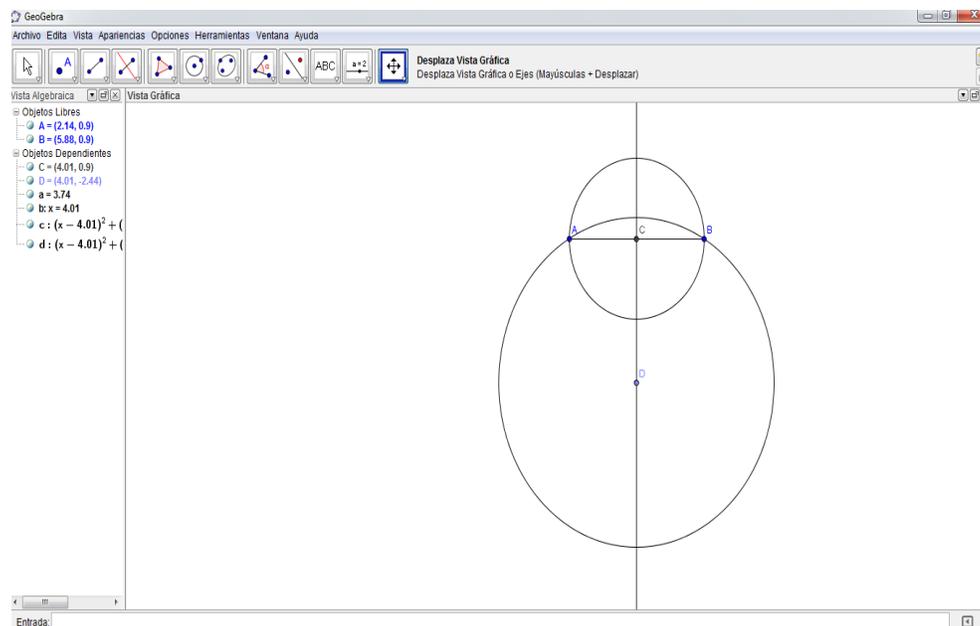


Imagen 20: trazos de Mayté, fase 4, Actividad A

En la actividad B de la fase 4, Mayté consigue realizar los trazos adecuados que le permiten ver que las distancias del circuncentro a los vértices del triángulo trazado son iguales entre sí sin importar si cambian las medidas de la circunferencia al arrastrar cualquiera de los vértices del triángulo inscrito en ella, lo que corresponde a un nivel 2 de razonamiento geométrico.

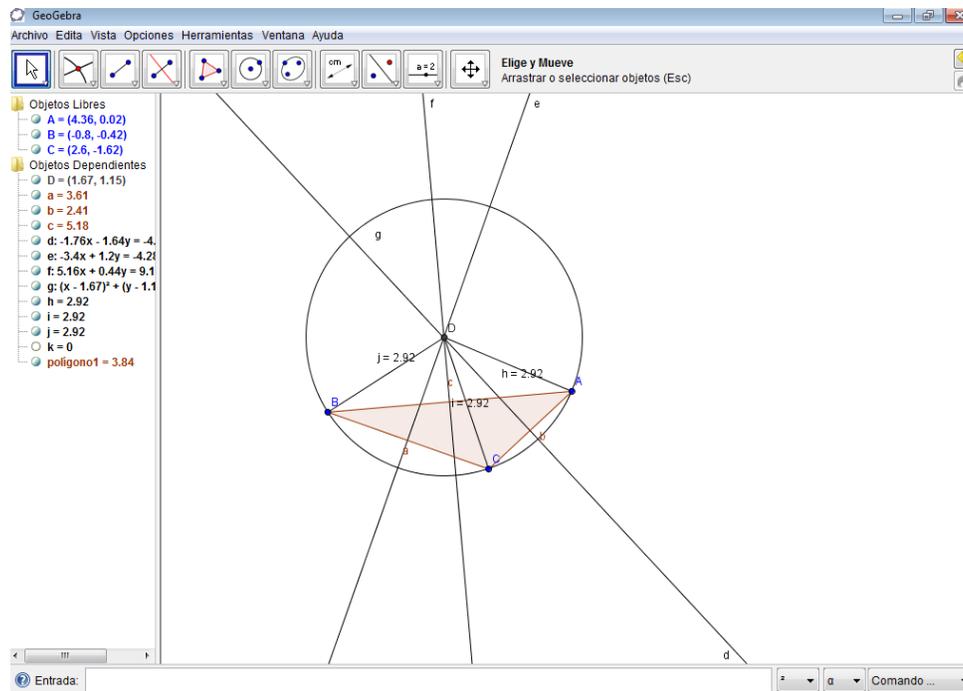


Imagen 21: trazos de Mayté, fase 4, Actividad B

Para William los trazos de la actividad A de la fase 4 no representan ningún obstáculo, pues pudo trazar hasta cuatro circunferencias que le ayudaron a contestar que se podían trazar muchas circunferencias que pasaran por los puntos “A” y “B”, los cuales forman un segmento. Sin embargo no es capaz de identificar qué función está jugando este segmento AB, el cual es común en todas las circunferencias trazadas, no es capaz de identificar que se trata de una cuerda y tampoco que en algún momento esta cuerda puede ser el diámetro de alguna circunferencia, por lo que es ubicado en un nivel 1 de razonamiento geométrico en esta actividad.

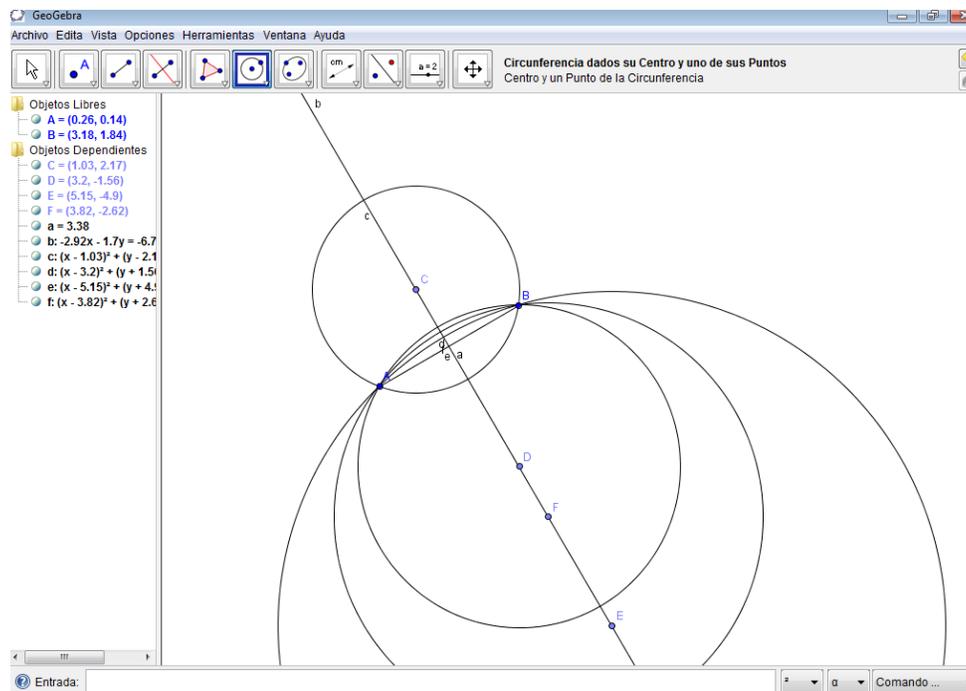


Imagen 22: trazos de William, fase 4, Actividad A

Al igual que Abril y Mayté, los trazos correspondientes a la actividad B de esta fase, no representaron dificultad para William. Construyó el circuncentro generado por el punto de intersección de las mediatrices, así como el trazo de la circunferencia que inscribe al triángulo. Fue capaz de analizar que la longitud del circuncentro a cualquiera de los vértices son iguales entre sí, sin importar el tamaño del triángulo, ubicándolo así en un nivel 2 de razonamiento geométrico.

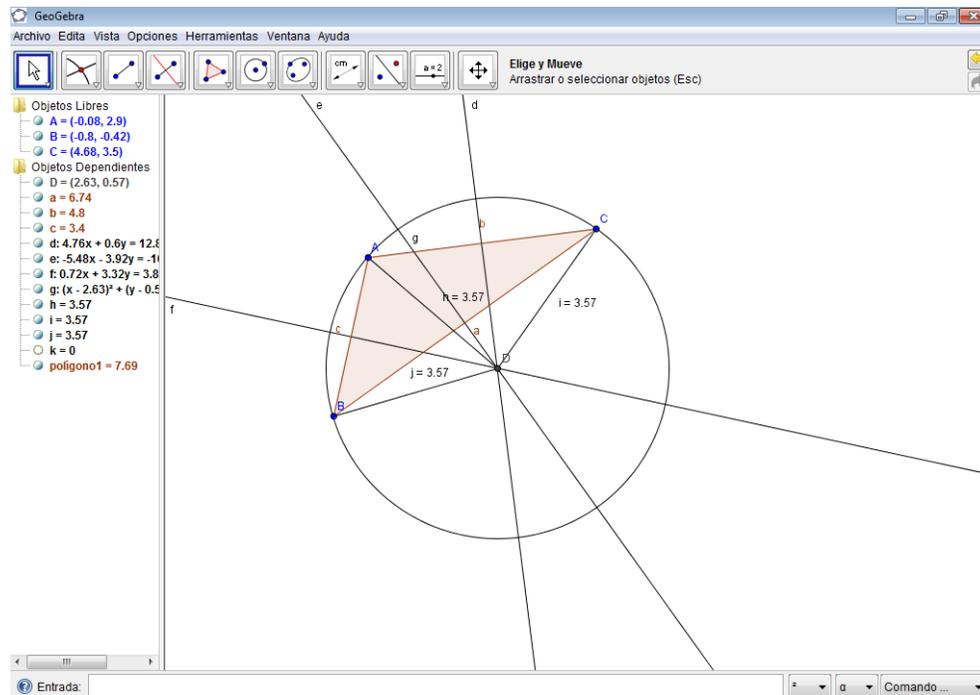


Imagen 23: trazos de William, fase 4, Actividad B

Fase 5: Integración

Durante esta fase se puso en juego todo lo aprendido, poniendo como actividades propuestas aquellas que permitieran comparar respuestas entre esta actividad integradora y algunas preguntas del cuestionario diagnóstico.

Para la actividad A, en los argumentos de Abril se observa que reconoce que la circunferencia está formada de elementos (diámetro, radio, longitud), correspondiente a un nivel 2 de razonamiento geométrico.

En la actividad B externa que es posible trazar una circunferencia que pase por los dos niños mostrados en dicha actividad de la fase cinco (dos puntos). A pesar que en los argumentos ella describe cómo lograr esto a partir del trazo del segmento entre los puntos y de una mediatriz (característico de un nivel 2), presenta contradicciones al mencionar aspectos para trazar una circunferencia que pase por tres puntos no alineados, lo que nos lleva a ubicarla en un nivel 1 de razonamiento.

Para la actividad C reconoce que se puede trazar una circunferencia que pasa por el dibujo de los tres niños quienes representan tres puntos no alineados. Sabe que se pueden trazar mediatrices de los segmentos formados entre niño y niño, y que a partir del circuncentro se traza la circunferencia, sin embargo el lenguaje que utiliza es informal, al referirse a las mediatrices como “líneas en medio” y al circuncentro como “punto en medio”. Por lo que para esta actividad C reconoce propiedades (característico de un nivel 2) pero su vocabulario es básico (característico de nivel 1).

Respecto a Mayté, en la actividad A de la fase de integración, podemos ver que sus argumentos se acercan a un nivel 2 de razonamiento geométrico cuando explica que para convencer a alguien que realmente la figura elegida es una circunferencia, les mostraría que “la distancia a cualquiera de los puntos son iguales”, faltando tal vez ser más explícita para decir que es del centro a cualquiera de los puntos de la circunferencia, pero podemos considerar nivel 2 en su respuesta.

Para la actividad B de esta última fase menciona que es posible trazar una circunferencia a partir del dibujo de los dos niños (dos puntos), pero sus argumentos no hacen mención a algún elemento o propiedad de la circunferencia, lo que nos lleva a ubicar esta respuesta como nivel 1 en la escala de van Hiele.

En la actividad C de la fase 5 está convencida que es posible que se pueda trazar una circunferencia que pase por el dibujo de los tres niños (tres puntos no alineados), sin embargo su lenguaje es básico para justificar sus respuestas como “trazar una raya”. Existe la idea de cómo lograr el trazo de la circunferencia al mencionar que a partir del trazo de las mediatrices puede “encerrar a los niños” más no hay un orden coherente y formal para ser un argumento de nivel 2 de razonamiento geométrico.

Lamentablemente los argumentos de William para la actividad A de esta fase están incompletos, lo que nos hace ubicarlo directamente en nivel 1.

Ya en la actividad B indica que es posible trazar una circunferencia que pase por donde están situados los dos niños, incluso retoma lo que aprendió en fases anteriores al hacer mención que “puede haber muchas circunferencias entre los dos puntos”, pero no anota detalladamente paso a paso cómo trazarla, por lo que queda a medias ese tránsito de nivel reflejado por su respuestas.

Mientras que para la actividad C no integra lo aprendido en fases anteriores, ya que dice que no es posible trazar una circunferencia que pase por los tres niños (tres puntos no alineados) pues dice que “la circunferencia es muy corta y no puede alcanzar los puntos”. Tal parece que cae en el engaño de que por estar muy separado uno de los puntos, no puede pasar la circunferencia por él. Parece haber retrocedido en el avance que mostró durante la fase 4, quedando así clasificada esta respuesta como nivel 1 de razonamiento geométrico.

Capítulo 5. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se mostraron los resultados de haber aplicado una secuencia didáctica con el apoyo del software de geometría dinámica GeoGebra, cuidando que las tareas que realizaron los estudiantes estuvieran secuenciadas en cinco fases de acuerdo al aspecto instructivo del Modelo de van Hiele

El aspecto descriptivo de la teoría utilizada nos permitió identificar la forma de razonamiento geométrico de alumnos de 1º de secundaria de la escuela Manuel Álvarez T.V., para así poder comparar los resultados obtenidos de un cuestionario de conocimientos previos, versus los resultados conseguidos después de aplicar la secuencia didáctica.

Los resultados presentados en el apartado 4.2.2 se sintetizan en la siguiente tabla en la que se observan los niveles correspondientes que alcanzaron los alumnos Abril, Mayté y William al término de cada fase de la secuencia didáctica:

Tabla 8: niveles de aprendizaje alcanzados

Alumno Actividad	Abril	Mayté	William
Fase 1	n/a	n/a	n/a
Fase 2 A	Nivel 1 y 2	Nivel 1	Nivel 1
Fase 2 B	Nivel 1 y 2	Nivel 1 y 2	Nivel 1 y 2
Fase 3 concepto de circunferencia	Nivel 2	Nivel 1	Nivel 1
Fase 3 concepto de mediatriz	Nivel 2	Nivel 2	Nivel 1
Fase 4 A	Nivel 1	Nivel 1	Nivel 1
Fase 4 B	Nivel 2	Nivel 2	Nivel 2

Fase 5 A	Nivel 2	Nivel 2	Nivel 1
Fase 5 B	Nivel 1	Nivel 1	Nivel 1 y 2
Fase 5 C	Nivel 1 y 2	Nivel 1	Nivel 1

En esta tabla se puede observar que Abril tiene respuestas en las que predomina el nivel 2 de razonamiento geométrico, por lo que consideramos que gracias al aspecto instructivo de la teoría de van Hiele y el software GeoGebra se logró el tránsito del nivel 1 (expuesto en el cuestionario diagnóstico) hacia el nivel 2 una vez finalizada la secuencia didáctica, mostrando haber adquirido conocimiento de las características básicas de la mediatriz y de algunos elementos básicos de la circunferencia.

De Mayté podemos observar que logra 4 respuestas consideradas nivel 2, siendo que en el cuestionario diagnóstico obtuvo todas las respuestas nivel 1. En ella concluimos que sólo se logró un tránsito parcial al siguiente nivel, pues hubo un avance considerable en la argumentación de respuestas e identificación de propiedades que la llevaron a tener respuestas de nivel 2.

En la fase 4 de orientación libre se cumplió con la elaboración de una propuesta de problemas para encontrar nuevas propiedades de la circunferencia usando las herramientas adquiridas de las fases anteriores (trazo de puntos, segmentos de recta, circunferencia y mediatriz), sin embargo se observó que casi todos tuvieron problemas en contestar las preguntas de la actividad A que implicaban descubrir que se pueden trazar varias circunferencias a partir de dos puntos, o a partir de una cuerda, formada por el segmento de recta entre esos dos puntos. En cambio la actividad B no les resultó complicada.

Finalmente, en la tabla podemos ver que William tiene 3 respuestas consideradas como nivel 2. Recordemos que a este alumno se le consideró nivel 1 aun cuando no era capaz de identificar o describir la circunferencia. Aunque al concluir la secuencia, su porcentaje de respuestas indica que no transita al nivel 2 de

razonamiento, se nota un avance considerable en dicho tránsito, como el intento de reconocer partes de las figuras así como un indicio en la deducción de propiedades a partir de la experimentación con el DGS.

Conforme avanzaron las actividades los alumnos dominaron más las funciones básicas para trabajar con el software GeoGebra. La exploración instrumental continuó de manera implícita en todas las instrucciones de la secuencia, y se fue puliendo cada vez más el uso de esta herramienta de trabajo, convirtiéndose así en un refuerzo instrumental, señalado por Brown y sus colaboradores (2009) como un modo de la integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

Fue un reto trabajar una secuencia didáctica con alumnos pertenecientes a una escuela que ha obtenido los resultados más bajos de la zona escolar, lo cual coincide con los resultados derivados de la aplicación del cuestionario de conocimientos previos.

Posiblemente el contexto académico descrito influyó para haber obtenido avances parciales de tránsito al nivel siguiente de la escala de van Hiele por parte de los alumnos, aun así hubo mejoras en su lenguaje y análisis, conforme avanzaban durante la secuencia didáctica.

En el trabajo de Kerlegand (2008), podemos ver que los alumnos de bachillerato al concluir las actividades se encuentran en un razonamiento geométrico 1 y 2 y sólo algunos casos logran transitar al nivel 3. Esto de manera indirecta da soporte a nuestros resultados, pues aunque no todos los alumnos alcanzaron un tránsito al nivel 2 en la escala de van Hiele, se pudo observar una fluctuación de respuestas nivel 1 y nivel 2, que indican una mejora gradual, muy importante y acorde para el nivel educativo con el que estuvimos trabajando.

Con la experiencia del trabajo realizado y en acuerdo a lo expuesto por Cabero (2004), consideramos que el DGS GeoGebra permite el ahorro de tiempo para la adquisición de habilidades, ya que de una manera más precisa y rápida se pueden realizar trazos, modificar figuras y medidas, visualizar y explorar para un análisis

geométrico, conllevando así a un aceleramiento en el aprendizaje en los alumnos. Lo que observamos coincide con la investigación de Hollebrands.(2007), quien manifiesta que los entornos multimedia pueden fomentar la comprensión en los contenidos matemáticos.

Sería interesante para investigaciones futuras hacer una comparación de resultados obtenidos al trabajar una secuencia didáctica y la teoría de van Hiele por alumnos de una escuela que ha estado en los primeros lugares en la prueba ENLACE y los alumnos de una escuela que ha mostrado bajo aprovechamiento, y así determinar cómo ese contexto puede influir en los resultados.

Al final de la aplicación de la secuencia didáctica y como complemento a esta investigación, se aplicó un pequeño cuestionario con cuatro preguntas abiertas dirigido a los alumnos, esto con la intención de saber si el uso de la tecnología fue de su agrado o no, así mismo, para saber si consideraban que GeoGebra les ayudaba o dificultaba a comprender su clase de matemáticas. De un total de ocho cuestionarios aplicados se puede concluir lo siguiente:

7 de los 8 alumnos afirmaron el gusto por el uso de la tecnología en las clases, sólo una alumna respondió que algunas veces es de su agrado. Las razones o argumentos que dieron fueron que se divierten mucho trabajando, que es más rápido que cuando se están haciendo las cosas a mano, se entiende más el tema y así es más fácil responder y aprenden cosas nuevas.

8 de los 8 alumnos encuestados están seguros de que GeoGebra les ayuda para tener una mejor comprensión en su clase de matemáticas, argumentando que les es más fácil aprender además de ser divertido, los cálculos son más precisos, se hacen más rápido los trazos y aprenden cosas que no sabían manejar con anterioridad.

Nos damos cuenta que la percepción que tienen los estudiantes acerca de GeoGebra, es afín a los resultados de las secuencias, ya que les ayudó a ir descubriendo propiedades de las figuras trazadas y en acuerdo con Edwards y

Jones (2006), atrajo la atención de los alumnos gracias al trabajo con imágenes dinámicas.

GeoGebra es un software de Geometría Dinámica que facilitó alcanzar el aprendizaje esperado que consistía en que los alumnos construyeran círculos que cumplieran con ciertas condiciones establecidas: dados tres puntos no alineados, tracen la circunferencia que los contiene; y dada una cuerda, aprendieran a construir el círculo al que ésta pertenece. Si bien al término de la secuencia didáctica los alumnos no obtuvieron todas las respuestas que los ubicaran en un nivel 2 de razonamiento geométrico, si obtuvieron un porcentaje significativo de respuestas en éste nivel, lo que nos dice que este tránsito se estaba logrando. De manera general a lo largo de las actividades se observa que GeoGebra les ayudó a hacer un análisis de los componentes y propiedades de la circunferencia, demostrando ser una herramienta de apoyo en cada tarea, y de forma similar al resultado presentado por Kerlegand (2008), observamos que nuestro software agiliza el tránsito total y parcial de los estudiantes desde un nivel de razonamiento geométrico al inmediato superior.

Referencias

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 254 -274.
- Brown, J., Goos, M., Kong, C. M., Laborde, C., Lavicza, Z., Miller, D., Sinclair, M. y Soury-Lavergne, S. (2009). Theoretical frameworks for researching teaching with digital technologies. En L. H. Son, N. Sinclair, J. B. Lagrange, y C. Hoyles (Eds.), *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain - ICMI 17 Study book*. New York: Springer.
- Buela-Casal, Gualberto y Castro, Ángel. (2009). Las tecnologías de la información y la comunicación y la evaluación de la calidad en la educación superior. *RU&SC. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 6(2)
Descargado desde: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=78012947007>
- Burger, W. y Shaughnessy, M. (1986). Characterizing The Van Hiele Levels of development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48
- Cabrero, Julio. (2004) Formación del profesorado en TIC. El gran caballo de batalla. *Comunicación y Pedagogía. Tecnologías y Recursos didácticos*, 195, 27-31.
Descargado desde:
<http://ecaths1.s3.amazonaws.com/cts/684729374.Formaci%C3%B3n%20del%20profesorado%20en%20TIC.%20El%20gran%20caballo%20de%20batalla..pdf>
- Crowley, M. L. (1987). *The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought*. USA: National Council of Teachers of Mathematics, 105-106
Descargado desde:
<http://www.csmate.colostate.edu/docs/math/mathactivities/june2007/The%20van%20Hiele%20Model%20of%20the%20Development%20of%20Geometric%20Thought.pdf>
- Edwards, J.-A. y Jones, K. (2006). Linking geometry and algebra with GeoGebra. *Mathematics Teaching*, 194, 28-30. Descargado desde: <http://eprints.soton.ac.uk/19198/>
- Fuchs, K y Hohenwarter, M. (2004). Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in the Software System GeoGebra. In: *Computer Algebra*

- Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference 2004. Pecs, Hungary. Descargado desde: http://www.GeoGebra.org/publications/pecs_2004.pdf
- Guillen, G. (2004). El modelo de van Hiele aplicado a la Geometría de los sólidos. *Educación Matemática*, 16(3), 103-125. Descargado desde <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516306>
- Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195 - 227.
- Hohenwarter, M. y Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, 7, ID 1448. Descargado desde http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html
- Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 164 -192.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Valencia. Descargado desde <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>
- Kerlegand, C. (2008) *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización* (Tesis de maestría no publicada). México: CICATA-IPN. Descargado desde http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/kerlegand_2008.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: Author.
- Real, M. (2009). La potencia de las TIC para el cálculo simbólico. *Suma*, 61, 55-61. Descargado desde <http://revistasuma.es/IMG/pdf/61/055-061.pdf>
- Secretaría de Educación Pública. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: Autor.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: Autor.
- Sträßer, R. (2002). Research on dynamic geometry software (DGS) – An introduction. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 34(3), 65.

Trouche, L. (2003). From artifact to instrument: Mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with Computers*, 15(6), 783 -800.