INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

¿A.B=0 ⇒ A=0 ∨ B=0?

Reflexiones e implicaciones en la enseñanza de la matemática

"Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa. Presenta: Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras"

Directores de Tesis:
Dra. Asuman Oktaç
Dr. Javier Lezama

2004, Montevideo - Uruguay.

". . . si bien prefería el carácter racional de las cosas, creía que la razón, sustentada en la lógica, es un juego que logra dar una justificación a posteriori y que en su camino no encuentra necesariamente la verdad. La realidad siempre es avasallante, impenetrable, incognocible, la modelación de la realidad es lo que conocemos porque es lo que creamos y es justamente por ello que la conocemos. Entonces crear la nada, bucear en el mar de la invención; descubrir una estructura racional, no es descubrir, es inventar. Pero no saquémosle méritos a la ciencia que sus buenos frutos, hemos de reconocer, ha dado."

G. Franco

(Uruguayo contemporáneo)

Quiero agradecer a todos los que me ayudaron con este trabajo: Gustavo, Mónica, Yacir, Mario, a los profesores Olga Cilento y Luis Menéndez que me cedieron sus grupos, a los estudiantes de la especialidad Matemática del Instituto de Profesores Artigas, a los estudiantes del Liceo Nº 4, del Liceo Nº 35 y del Liceo Jean Piaget que participaron, a mi directora de tesis, la Dra. Asuman Oktaç, por su permanente apoyo y contención, al Dr. Javier Lezama y principalmente a mi hija María José.

ÍNDICE

Glosario **4**

Relación de cuadros, tablas, imágenes y esquemas **5**

Resumen **8**

Summary **9**

Breve presentación del trabajo **10**

Introducción **15**

I. Fundamentación del tema de investigación y formulación de objetivos **17**

II. Consideraciones teóricas **27**

III. Investigación bibliográfica **71**

IV. Las estructuras algebraicas grupo y anillo **79**

V. Metodología **82**

VI. Los resultados inmediatos **107**

VII. Los resultados obtenidos a la luz de las consideraciones teóricas **148**

VIII. Conclusiones e implicaciones didácticas **162**

Referencias bibliográficas **167**

Sitios web consultados **171**

Anexo I: Secuencias **172**

Anexo II: Entrevistas **192**

GLOSARIO

Enseñanza secundaria: Se refiere a la enseñanza posterior a la primaria. Abarca un total de seis años que se dividen en tres de Ciclo Básico (1º, 2º, 3º) y tres de Bachillerato (4º, 5º, 6º). La enseñanza secundaria completa habilita al ingreso a la Universidad.

Ciclo Básico: Se refiere a los tres primeros años de enseñanza secundaria en Uruguay. Abarca la franja de edades que va de los 13 a los 15 años aproximadamente.

Bachillerato: Se refiere a los tres últimos años de la enseñanza secundaria en Uruguay. Abarca la franja de edades que va de los 16 a los 18 años aproximadamente.

Propiedad Hankeliana: Denominación que se utiliza en Uruguay para la propiedad que dice que: "Si a y b son números reales y $a.b=0$, entonces $a=0$ o $b=0$"

Imagen conceptual: Esta imagen es definida en (Vinner, 1991) como algo no verbal asociado en la mente al nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del objeto, si la tiene, o puede ser una colección de impresiones o experiencias relacionadas con el concepto.

Compartimentalización: Vinner (1990) hace referencia a este fenómeno, cuando esperamos que cierto detalle específico sea evocado en la mente de cierta persona, porque ese detalle es relevante en lo que la persona está pensando, pero resulta que éste no es evocado. Este fenómeno puede dar lugar a un comportamiento ineficiente.

Conocimiento intuitivo: Fischbein (1999) toma este concepto como primitivo. Se trata de un conocimiento que resulta autoevidente en contraposición a aquel que requiere de una prueba para que el individuo acepte su validez.

Variable: Ursini y Trigueros (2003) la tratan como una entidad conceptual que comprende diferentes usos, que están relacionados a diferentes concepciones del álgebra. Por ejemplo: aritmética generalizada, resolución de problemas, estudio de relaciones y funciones, estudio de estructuras.

RELACIÓN DE CUADROS, TABLAS, IMÁGENES Y ESQUEMAS

Descripción del cuadro, tabla, imagen o esquema	Página
1) Esquema que muestra cómo están distribuidos los estudiantes con los que trabajamos, en el sistema educativo uruguayo.	12
2) Imagen del texto Borbonet et al (1995). Matemática 1. Montevideo: Ediciones de la Plaza, donde se muestra cómo se presenta la propiedad Hankeliana en 1er. año de Ciclo Básico.	17
3) Esquema que muestra en forma sintética el error que estudiamos.	22
4) Imagen del texto Borbonet et al (1995). Matemática 1. Montevideo: Ediciones de la Plaza, donde se muestra cómo se presenta la propiedad Hankeliana en 1er. año de Ciclo Básico.	30
5) Imagen del texto Borbonet et al (1997). Matemática 3. Montevideo: Ediciones de la Plaza, donde se muestra una aplicación de la propiedad Hankeliana para 3er. año de Ciclo Básico.	31
6) Imagen del texto Belcredi, L. y Zambra, M. (2000). Gauss 3. Montevideo: La Flor del Itapebí, donde se puede apreciar la presentación que dan estos autores a la propiedad que estudiamos y algunas aplicaciones para 3er. año de Ciclo Básico.	32
7) Imagen de los Elementos de Euclides. Se muestra la proposición 29 del Libro VI.	41
8) Cuadros que ilustran los procesos de formación de un concepto según Vinner (1991)	57
9) Cuadro que ilustra la respuesta intuitiva de un estudiante según Vinner (1991)	58
10) Cuadro que muestra la categorización para el concepto de variable, según Ursini y Trigueros (2003).	66
11) Esquema que muestra cómo están distribuidos los estudiantes con los que trabajamos, en el sistema educativo uruguayo.	82
12) Tabla que muestra el porcentaje de alumnos por nivel que resolvieron y verificaron correctamente la ecuación propuesta.	107
13) Tabla que muestra el porcentaje de alumnos por nivel que resolvieron correctamente la ecuación propuesta (incluye los que verificaron y los que no lo hicieron).	108
14) Tabla que muestra el número de alumnos por nivel que conocen la propiedad Hankeliana y el número de alumnos que conocen la propiedad y no la aplican al momento de resolver la ecuación propuesta.	108
15) Imagen que muestra el trabajo de un estudiante de Bachillerato aplicando la fórmula cuadrática para resolver la ecuación que se le propuso.	109
16) Imagen que muestra el trabajo de un estudiante de Ciclo Básico que no pudo resolver la ecuación que se le propuso.	109
17) Imagen que muestra el trabajo de un estudiante de Ciclo Básico que resuelve incorrectamente la ecuación propuesta.	110

18) Imagen que muestra el trabajo de un estudiante de Ciclo Básico que aplica técnicas incorrectas para resolver la ecuación propuesta.	110
19) Tabla que muestra el número de alumnos por nivel que desarrollaron y aplicaron la fórmula cuadrática para resolver la ecuación propuesta y de estos cuántos lo hicieron correctamente.	111
20) Tabla que muestra el número de alumnos por nivel que aplicaron la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación propuesta y de estos cuántos lo hicieron correctamente.	111
21) Imagen que muestra el trabajo de una alumna, evidenciando que conoce lo que dice la propiedad Hankeliana.	112
22) Tabla que muestra el número de alumnos por nivel que intentan resolver la ecuación propuesta y el número de ellos que desarrollan la expresión.	114
23) Imagen que muestra el trabajo de un estudiante de Bachillerato en el cual desarrolla, para luego factorizar la ecuación propuesta.	114
24) Imagen del trabajo de un estudiante de Bachillerato en el cual desarrolla, para luego factorizar la ecuación propuesta.	115
25) Imagen del trabajo de un estudiante de Ciclo Básico que muestra cómo aborda la resolución de la ecuación propuesta.	117
26) Imagen del trabajo de un estudiante de Bachillerato que comete el error que estudiamos.	122
27) Tabla que muestra el número de alumnos que cometieron el error que observamos.	122
28) Imagen del trabajo de un estudiante de Bachillerato en el cual se evidencia la creencia de que si un producto es cero, los dos factores deben serlo.	123
29) Imagen del trabajo de un estudiante de Bachillerato que cree que si un producto es cero, los dos factores deben serlo.	123
30) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 10 de la Secuencia I.	132
31) Cuadro que muestra ejemplos de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 10 de la Secuencia I.	132
32) Cuadro que muestra las ecuaciones presentadas por los estudiantes como respuesta a la pregunta 10 de la Secuencia I y sus respectivos argumentos.	133
33) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 11 de la Secuencia I.	133
34) Cuadro que muestra las ecuaciones presentadas por los estudiantes como respuesta a la pregunta 11 de la Secuencia I y sus respectivos argumentos.	134
35) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 12 de la Secuencia I.	137
36) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 13 de la Secuencia I.	137
37) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 14 de la Secuencia I.	138

38) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 15 de la Secuencia I.	139
39) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 16 de la Secuencia I.	139
40) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la pregunta 17 de la Secuencia I.	140
41) Tabla que muestra qué porcentaje de los estudiantes que dieron alguna respuesta, afirma que uno u otra función es la nula, o que una u otra matriz es la nula.	141
42) Tabla que muestra el porcentaje de alumnos por nivel que responden correctamente a la pregunta sobre funciones y sobre matrices.	141
43) Tabla que muestra el porcentaje de alumnos por nivel que modifican su respuesta luego de realizar la Secuencia V.	141
44) Tabla que muestra qué porcentaje de alumnos por nivel reconocen únicamente números en las letras b y c de la expresión $b.c=0$.	145
45) Tabla que muestra el desempeño de los estudiantes en la Secuencia III.	147
46) Esquema que muestra cómo están distribuidos los estudiantes con los que trabajamos, en el sistema educativo uruguayo.	148
47) Esquema que ilustra cómo se consolida un modelo mental que no tiene restricciones para los objetos matemáticos involucrados y cómo puede provocar respuestas incorrectas.	160
48) Esquema que ilustra una posible imagen conceptual que podría consultar un estudiante frente a cierto estímulo y la respuesta que genera.	161

¿A.B=0 ⇒ A=0 ∨ B=0?
Reflexiones e implicaciones en la enseñanza de la matemática

RESUMEN

Presentamos una investigación sobre Pensamiento Algebraico realizada en Uruguay, con estudiantes de 3er. año del Ciclo Básico de enseñanza secundaria (14-15 años), 6º año de bachillerato de enseñanza secundaria (16-17 años) y 3er. año de profesorado de Matemática (mayores de 21 años con edades variadas), en torno a la propiedad que en nuestro país llamamos Hankeliana y cuyo enunciado dice:

"Si a y b son números reales y a.b=0, entonces a=0 o b=0"

Los estudios exploratorios revelaron que los estudiantes de bachillerato y también los de nivel terciario muestran cierta tendencia a generalizar la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde esta propiedad no es siempre válida. También observamos que cuando los estudiantes deben resolver ecuaciones en R como por ejemplo *(2x-6)(5x+10)=0*, no siempre aplican la propiedad, aun cuando sea la única herramienta disponible y hayan recibido instrucción sobre su aplicación a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero. Asimismo detectamos un error que los estudiantes cometen al momento de verificar las raíces de una ecuación de esta forma. El error consiste en la asignación simultánea de dos valores distintos a la incógnita, como ilustra el siguiente esquema

3 y –2 son las raíces de la ecuación (2.**3**-6) (5(**-2**)+10)=0	**VS**	*3 y –2 son las raíces de la ecuación* (2.**3**-6)(5.**3**+10)=0 y (2.(**-2**)-6)(5(**-2**)+10)=0

Nos fijamos entonces los siguientes objetivos para la presente investigación:

- Observar las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero, poniendo atención en los alumnos que conociendo la propiedad y constituyendo esta la única herramienta de resolución de estas ecuaciones, no la aplican.

- Examinar el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación polinómica que está dada en forma factorizada e igualada a cero y formular posibles explicaciones del mismo.

- Buscar elementos para destacar, en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto y observar cómo evoluciona la ampliación del repertorio de objetos matemáticos que los estudiantes interpretan cuando ven *a* y *b* en la expresión *a.b=0*, a lo largo de los años de instrucción.

¿A.B=0 ⇒ A=0 ∨ B=0?
Reflections and implications in the teaching of mathematics

SUMMARY

We present an investigation about Algebraic Thought carried out in Uruguay, with students of 3 rd form of middle school (14-15 years), students of 6th form of high school (16-17 years) and students of 3rd form that are studying to become a Maths Teacher (older than 21 years with varied ages), around the property, called Hankeliana in our country, and whose enunciated says:

"If a and b are real numbers and a.b=0, then a=0 or b=0"

The exploratory studies revealed that the high school students and those of tertiary level show certain tendency to generalize the property Hankeliana, from the real numbers to other algebraic structures where this property is not always valid. We also observe that w hen the students have to solve equations in R like for example *(2x-6)(5x+10)=0*, they don't always apply the property, even when it is the only available tool and have received instruction on their application to the resolution of factored polynomial equations. Also we detect an error that the students make to the moment to verify the roots of an equation like the one we mention above. The error consists on the simultaneous assignment of two different values to the unknown, like it illustrates the following outline:

3 and –2 are the roots of the equation (2.**3**-6) (5(**-2**)+10)=0	**VS**	*3 and –2 are the roots of the equation* (2.**3**-6)(5.**3**+10)=0 *and* (2.(**-2**)-6)(5(**-2**)+10)=0

The objectives for the present investigation are:

- To observe the strategies that the students that know the property Hankeliana of the real numbers use when they face the resolution of factored polynomial equations that involve expresions even to zero, putting attention in the students that knowing the property and constituting this the only tool of resolution of these equations, they don't apply it.

- To examine the error that students make when they substitute to the unknown for two different values in simultaneous form, when verifying the roots in a polynomial equation that is given in factored form and even to zero and to formulate possible explanations of it.

- To look for elements in order to highlight, in relation to the students that generalize the property Hankeliana from the real numbers to other algebraic structures where it is not valid, even when they have received specific instruction in this respect and to observe how the amplification of the repertoire of mathematical objects that the students interpret evolves when they see *a* and *b* in the expression *a.b=0*, along the years of instruction.

BREVE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

El presente trabajo se encuadra dentro del Pensamiento Algebraico y pretende realizar una aportación al conocimiento de la Matemática Educativa en referencia a las siguientes temáticas generales:

- resolución de ecuaciones de segundo grado
- análisis de errores
- generalización abusiva de propiedades

Los fenómenos que investigamos guardan relación con la aplicación de la propiedad, que en Uruguay[1] llamamos Hankeliana, cuyo enunciado dice:

Si a y b son números reales y a.b=0, entonces a=0 o b=0

Estudios exploratorios

Si bien los fenómenos a estudiar fueron detectados como problemas en mi práctica como docente, se realizaron estudios exploratorios en un grupo de 3er. año de Ciclo Básico[2] (16 alumnos), un grupo de 6º año de bachillerato opción Economía (14 alumnos) y a dos estudiantes de 3er. año de profesorado de matemática, para constatar que efectivamente se presentaban los problemas que se habían seleccionado y para tener una primera aproximación al tema encuadrado dentro de una investigación.

Algunas reflexiones que surgen a partir de los estudios exploratorios

- La gran mayoría de los estudiantes conoce la propiedad pero no todos la aplican para resolver una ecuación de segundo grado factorizada[3] de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$, aun cuando es la herramienta óptima. Muchos de ellos prefieren desarrollar. Los alumnos que aplican la propiedad cometen menos errores al resolver la ecuación que los que desarrollan y aplican la fórmula cuadrática. Los estudiantes que desarrollan y no conocen la fórmula cuadrática no pueden resolver la ecuación, aun cuando conozcan la propiedad.

- El error que observamos consiste en la sustitución simúltanea de la incógnita por dos valores distintos, al verificar una ecuación como la señalada más arriba. Por

[1] De acuerdo a la investigación realizada, parecería que únicamente en Uruguay esta propiedad se denomina Hankeliana. Generalmente el enunciado es conocido como Teorema de no existencia de divisores de cero.
[2] La enseñanza Secundaria en Uruguay se compone de 6 años en total. Un Ciclo Básico de tres años (1º, 2º y 3º) y un bachillerato también de 3 años (4º, 5º y 6º). El profesorado de matemática es una carrera de nivel terciario que consta de 4 años y para ingresar se debe tener aprobado el bachillerato.
[3] Con dos raíces reales y distintas.

ejemplo, si el alumno sabe que las raíces de la ecuación $(2x-6)(5x+10)=0$ son 3 y -2 verifica incorrectamente así: $(2.\mathbf{3}-6)(5(\mathbf{-2})+10)=0$ y deduce de ello que $0.0=0$, cuestión que no le permite autodetectar su error. Acerca de este error que observamos, formulamos posibles razones:

1. La aplicación de la propiedad para resolver la ecuación podría estar incidiendo, pues muchos estudiantes podrían ver que la ecuación dada se "fragmenta" en dos de primer grado y el estudiante verifica como si fueran dos ecuaciones de primer grado y no una de segundo grado.
2. Podría tratarse de un error del tipo lógico. El estudiante podría estar pensando que como la ecuación tiene dos raíces, las dos deben estar presentes en la expresión al momento de la verificación. Por ejemplo, la ecuación tiene raíces 3 **y** -2 entra en conflicto con $x=-2$ **o** $x=3$ que es la lógica que soporta la expresión algebraica en la que trabajamos.
3. Si bien los estudiantes explicitan que para que un producto sea cero uno u otro de los factores debe ser cero, parecería existir la creencia de que ambos factores deben ser cero.

- La generalización de la propiedad Hankeliana a estructuras donde no es válida, podría deberse a la permanencia de las características sintácticas de su enunciado y el poco énfasis que se da al significado de los objetos matemáticos involucrados. También podría estar relacionado con que los estudiantes tienen gran experiencia desde sus primeros años de estudio con el álgebra como generalización de la aritmética, consolidándose así un modelo de pensamiento donde la propiedad es siempre válida.

- Cuando se propuso: *Se sabe que b.c=0, ¿qué representan para ti b y c?*, la inmensa mayoría de los estudiantes interpreta a b y c como números, aun cuando hubieran estudiado álgebras de polinomios, matrices y funciones reales. Parecería que la ampliación de significados para b y c se desarrolla con ciertas restricciones.

Objetivos de esta investigación

Se formulan los siguientes objetivos para esta investigación:

- Observar las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero[4], poniendo atención en los alumnos que conociendo la propiedad y constituyendo esta la única herramienta de resolución de estas ecuaciones, no la aplican.
- Examinar el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación polinómica que está dada en forma factorizada e igualada a cero y formular posibles explicaciones del mismo.

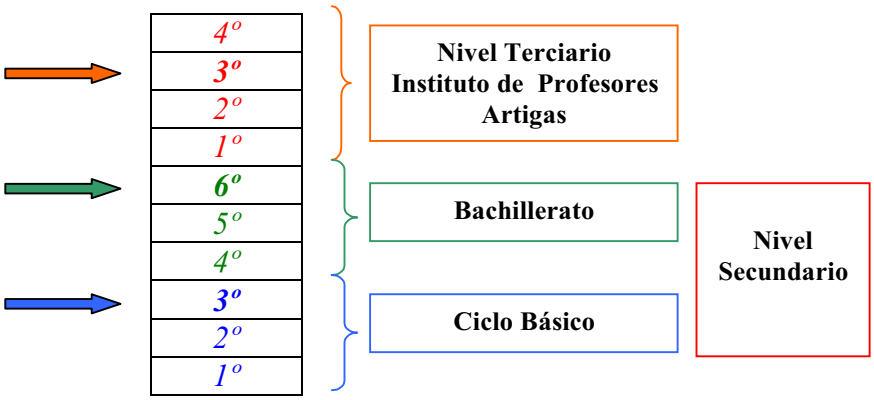
[4] Nos referimos a ecuaciones de segundo grado de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$, con dos raíces reales y distintas.

- Buscar elementos para destacar en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto y observar cómo evoluciona la ampliación del repertorio de objetos matemáticos que los estudiantes interpretan cuando ven a y b en la expresión $a.b=0$, a lo largo de los años de instrucción.

No tenemos conocimiento de trabajos previos que atiendan esta problemática, y dada su importancia, debido a su extensivo uso en la enseñanza, consideramos que dar una explicación a las posibles causas de los errores que cometen los estudiantes alrededor de esta propiedad, por un lado nos sensibiliza hacia posibles caminos a tomar como docentes, y por otro lado contribuye a la disciplina dentro de la línea de investigación del Pensamiento Algebraico.

Metodología de trabajo

Una vez finalizados los estudios exploratorios se decidió con qué estudiantes íbamos a trabajar. Se seleccionaron entonces grupos de estudiantes que guardaban entre sí una diferencia de 3 años de educación formal: 3º año del Ciclo Básico (14 alumnos), 6º año de bachillerato Opciones Medicina y Economía (24 alumnos) y 3º año de profesorado de matemática (23 alumnos).



Esta elección tiene que ver con diversas razones:

- Los estudiantes de 3º año de Ciclo Básico poseen como única herramienta para resolver las ecuaciones en las que nos hemos focalizado, la propiedad mencionada. Tenemos entonces un ámbito adecuado para observar por qué no la aplican, si esta constituye la herramienta disponible.
- Los estudiantes de bachillerato conocen la propiedad Hankeliana y la fórmula cuadrática. Nos sirve para observar preferencias. Además los estudiantes de bachillerato opción Economía han tenido un curso de matrices y funciones reales, lo que nos brinda las condiciones para observar la generalización abusiva de la propiedad.
- Los estudiantes de profesorado elegidos también tienen experiencia con matrices y funciones reales.

- Los tres niveles son adecuados para observar la aparición del error que se estudia. En particular interesa observar la persistencia del mismo en el nivel de bachillerato y profesorado.
- Como además se observará la ampliación de interpretaciones para las letras que intervienen en el enunciado: *Se sabe que b.c=0, ¿qué representan para ti b y c?*, a lo largo de los años de estudio, se tomaron alumnos que guardaban entre sí una distancia de 3 años de educación formal.

A estos alumnos se les aplicaron diversas secuencias por escrito y posteriormente se seleccionaron algunos para realizar entrevistas individuales.
En total fueron entrevistadas catorce personas, a saber: siete estudiantes de bachillerato, tres de Ciclo Básico, tres de profesorado de matemática y un docente de matemática. En el caso de los estudiantes, los criterios generales de selección fueron:

- Aparición en sus trabajos del error que estábamos estudiando u otros errores que guardaban relación con el tema de investigación.

- Estudiantes que conocían la propiedad pero no la aplicaban a la resolución de ecuaciones cuando vienen dadas en forma factorizada.

- Estudiantes que generalizaron la propiedad a estructuras donde no era válida habiendo recibido instrucción específica al respecto.

- Estudiantes que abordaron más de una estrategia de resolución de las ecuaciones de segundo grado dadas en forma factorizada.

- Estudiantes que mostraron buen desempeño en la realización de las secuencias.

- En particular, uno de los estudiantes de profesorado fue seleccionado por su manejo explícito de los dominios de integridad, cuestión que posteriormente le permitió rever sus respuestas dadas en primera instancia.

Cómo está organizado este trabajo

El presente trabajo consta de una Introducción y ocho capítulos. A continuación se describen brevemente, los contenidos de la Introducción y de cada capítulo.

INTRODUCCIÓN: Se presentan en forma sintética los fenómenos que vamos a estudiar y se problematizan dentro del contexto de la enseñanza en el Uruguay. Se presenta la propiedad que en este país llamamos Hankeliana.

CAPÍTULO I: En este capítulo se explica en qué cursos de la enseñanza secundaria del Uruguay se enseña la propiedad Hankeliana, qué tipo de presentación se le da y cuáles son las principales aplicaciones que se hacen con ella. También se reportan los estudios exploratorios realizados y se enuncian ciertas explicaciones a priori de los fenómenos que se van a observar. Por último, se formulan los objetivos de la investigación.

CAPÍTULO II: Aquí se desarrollan las componentes didáctica, epistemológica y cognitiva, que son las tres dimensiones para la reflexión que utilizaremos. En primer lugar se realiza un análisis del estado actual de la enseñanza, basado en los libros de textos más usados en Uruguay, aspecto que oportunamente se fundamenta. Posteriormente, se da una mirada histórica a lo que ha sido la evolución del álgebra en la rama de la resolución de ecuaciones hasta llegar a las ecuaciones factorizadas e igualadas a cero para luego situarnos brevemente en la aparición de álgebras abstractas con y sin divisores de cero. Se considera que esto nos brindará elementos epistemológicos que servirán para entender mejor las dificultades de los estudiantes. Por último se desarrolla la componente cognitiva donde se abordarán diversos marcos teóricos que permitirán una perspectiva amplia de análisis, en una temática como la nuestra que no ha sido abordada con anterioridad.

CAPÍTULO III: En este capítulo se presentan algunas investigaciones que por su naturaleza brindan elementos de reflexión que se cree enriquecerán el presente trabajo. Se complementan algunas ideas con datos históricos que se creen relevantes para la comprensión de los temas que nos interesan.

CAPÍTULO IV: Se recuerda al lector las estructuras algebraicas grupo y anillo, dada la relación que guardan con los temas que tratamos. Se presentan ejemplos de anillos con y sin divisores de cero, algunos de los cuales fueron propuestos a los estudiantes en las secuencias.

CAPÍTULO V: En este capítulo se explica con qué estudiantes trabajamos, con qué criterios fueron seleccionados de acuerdo a los propósitos de la investigación y se explican los objetivos y el diseño de las secuencias que fueron elaboradas para trabajar con los estudiantes. También se justifica por qué se realizaron entrevistas y a quiénes.

CAPÍTULO VI: En este capítulo se presentan los resultados inmediatos obtenidos a través de las secuencias y para profundizar en lo que los alumnos piensan cuando resuelven sus tareas por escrito, se irá complementando la reflexión con extractos de las entrevistas mantenidas con los estudiantes. También se incluyen algunas tablas con cifras que permiten una apreciación rápida de algunos de los resultados. Para la presentación de los resultados se seguirá el orden establecido en los objetivos de esta investigación.

CAPÍTULO VII: En este capítulo se analizan los resultados obtenidos, que ya fueron presentados en el capítulo anterior, teniendo en cuenta las consideraciones teóricas redactadas en el Capítulo II. Para realizar el análisis se sigue el orden de los objetivos propuestos.

CAPÍTULO VIII: Aquí se presentan las conclusiones y las implicaciones didácticas. Se realizan algunas sugerencias didácticas.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo a los estudios exploratorios que realizamos con alumnos de enseñanza secundaria[5] y terciaria[6], pudimos apreciar que existe una marcada tendencia a generalizar la propiedad Hankeliana[7] de los números reales a otras estructuras algebraicas donde esta propiedad no es siempre válida. Esta tendencia puede apreciarse aún cuando los alumnos hayan recibido instrucción específica al respecto. Los alumnos aplican esta propiedad a diferentes situaciones problemáticas, sin mediar un análisis de la situación, sin reflexionar que las propiedades no son siempre válidas, que están relativizadas a un contexto. Podríamos decir que la propiedad Hankeliana se convierte en un modelo mental[8].

Cuando enseñamos establecemos verdades en ciertos contextos que luego pasan a ser para los alumnos verdades universales. Como las primeras estructuras con las que el alumno toma contacto son en general las que corresponden a los conjuntos numéricos y las propiedades de las operaciones en ellos definidas, éstas pasan a constituir el universo de verdades de los alumnos y son transferidas a otros contextos como nociones transparentes, es decir, no cuestionables.

Consideramos que, las propiedades que recalcamos una y otra vez en la enseñanza como por ejemplo la propiedad conmutativa de la adición y de la multiplicación, la asociativa, la existencia de neutro, etc., adquieren su verdadera relevancia cuando podemos contrastarlas con operaciones que no cumplen estas propiedades. Nos preguntamos, ¿haríamos hincapié en estas propiedades si siempre fueran ciertas? ¿Por qué los docentes enseñan en forma reiterada que la adición en N es conmutativa, que la adición en Z es conmutativa, que la adición en Q es conmutativa, que la adición en R es conmutativa? ¿Es porque lo creen realmente importante dentro de los cursos que dictan o es porque los profesores conocen otras operaciones que no cumplen esta propiedad y conocen las consecuencias de ello, como por ejemplo la existencia de dos operaciones inversas para la potenciación en R? ¿Qué valor matemático puede asignarle un alumno a una determinada propiedad de una operación cuando a lo largo del estudio de los diferentes conjuntos numéricos va viendo que las propiedades de las operaciones que enfrenta son prácticamente inmutables? ¿Cuál es la riqueza de que una operación sea conmutativa, o asociativa, o tenga neutro, o cumpla la propiedad Hankeliana? ¿Todas las operaciones cumplen con estas propiedades? Sabemos que no.

Ahora bien, no podemos negar que los docentes en su práctica no contrastan las propiedades de las diferentes operaciones. Es bastante seguro que el docente haga notar por ejemplo que la resta no es conmutativa. En general, la mención de que la resta no es conmutativa, consiste solo en eso, en una mención. También existen algunas propiedades

---

[5] En Uruguay la Enseñanza Primaria abarca seis años de instrucción y la Secundaria otros seis que se dividen en dos ciclos. El primer ciclo tiene una duración de tres años (1º, 2º, 3º) y se denomina Ciclo Básico (alumnos de 12 a 14 años aproximadamente). El segundo ciclo, también de tres años (4º, 5º, 6º), se llama Bachillerato Diversificado (alumnos de 15 a 17 años aproximadamente).

[6] Los alumnos de nivel terciario estaban cursando tercer año de profesorado de matemática. Esta carrera se cursa en el Instituto de Profesores Artigas y tiene una duración de cuatro años.

[7] En la página 16 se explicará en qué consiste esta propiedad.

[8] En el sentido de (Fischbein et al, 1990).

que destacan bien a unos conjuntos numéricos de otros y éstas sí figuran en el discurso escolar porque fundamentalmente son las que permiten la ampliación del campo numérico, como ser la existencia de opuesto cuando el alumno sólo conoce a los números naturales y pasa a estudiar el conjunto de los enteros, o la existencia de inverso, cuando el alumno amplía su mundo numérico de los enteros a los racionales. Estas propiedades, como la existencia de opuesto y de inverso[9], son en general las que desde el punto de vista del discurso matemático escolar dan pie a la ampliación de los conjuntos numéricos. Así se convierten en estandartes caracterizadores de los conjuntos numéricos pero no existe en general, el planteo de ejercicios o también problemas que permitan al alumno evaluar la potencialidad de estas propiedades.

Para la presente investigación nos centraremos en el caso concreto de la propiedad Hankeliana de los números reales, propiedad que es abordada una y otra vez a lo largo de la instrucción[10], cuando el docente debe recorrer el camino de los números Naturales a los Reales.

Propiedad Hankeliana

Si $a, b \in R$ *y* $a.b=0$ *entonces* $a=0$ *o* $b=0$

Como ya dijimos al inicio, hemos observado que muchos alumnos realizan una generalización de esta propiedad, aún en el caso de que hayan recibido instrucción matemática específica al respecto, a contextos donde esta propiedad no es válida, como por ejemplo el producto de matrices.

También hemos detectado que muchos alumnos no la aplican en el contexto de la resolución de ecuaciones, aún cuando sea la única herramienta disponible y hayan recibido instrucción sobre su aplicación a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero[11]. También hemos observado un tipo de error que cometen algunos alumnos al momento de verificar las raíces de una ecuación dada en esta forma y nos cuestionamos si es consecuencia directa de la aplicación de esta propiedad. Este error consiste en realizar una sola verificación, usando simultáneamente las dos raíces que se han encontrado. Con esto queremos decir que, dada la ecuación $(ax+b)(cx+d)=0$ con dos raíces distintas, en lugar de realizar dos verificaciones, una para cada raíz, es frecuente que el alumno sustituya la x presente en el primer factor, por la raíz de ese factor y en el segundo factor, sustituya la x por la raíz de ese factor. En este procedimiento el alumno está asignando a x dos valores distintos a la vez.

[9] En Uruguay al inverso aditivo se le llama opuesto y se reserva la palabra inverso para nombrar el inverso multiplicativo.
[10] Este comentario es válido en el marco de la Educación Secundaria en el Uruguay.
[11] Nos referimos concretamente a ecuaciones de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$ con a y c diferentes de cero y con dos raíces **distintas**.

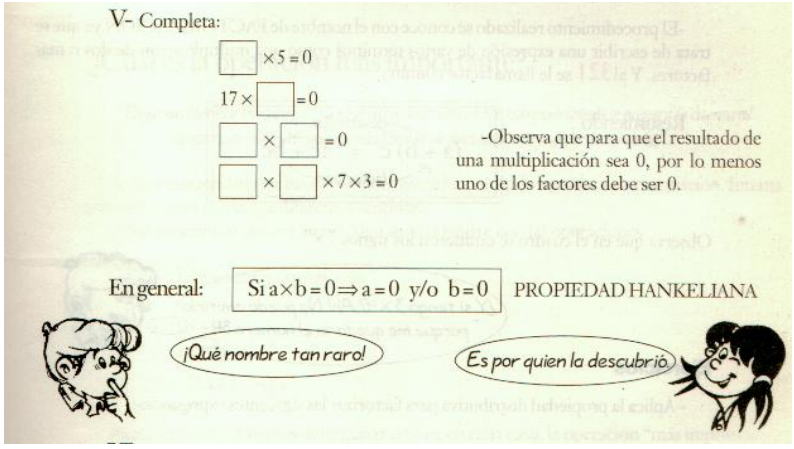
CAPÍTULO I

FUNDAMENTACIÓN DEL TEMA DE INVESTIGACIÓN Y FORMULACIÓN DE OBJETIVOS

En este capítulo se explica en qué cursos se enseña la propiedad Hankeliana, qué tipo de presentación se le da y cuáles son las principales aplicaciones que se hacen con ella. También se reportan los estudios exploratorios realizados y se enuncian ciertas explicaciones a priori de los fenómenos que se van a observar. Por último se redactan los objetivos de la investigación.

Presencia de la propiedad Hankeliana en la enseñanza secundaria en el Uruguay

Haremos una breve revisión sobre la enseñanza de esta propiedad y sus aplicaciones, a lo largo de la enseñanza secundaria en Uruguay.
Esta propiedad es enseñada en primer año de Ciclo Básico cuando el alumno estudia el conjunto de los números Naturales, las operaciones en él definidas y sus propiedades. También en segundo año cuando estudia el conjunto de los Enteros y los Racionales. A continuación podemos ver la presentación de esta propiedad en uno de los textos de primer año liceal más usados; sus autoras son uruguayas.


V- Completa:

$\square \times 5 = 0$

$17 \times \square = 0$

$\square \times \square = 0$

$\square \times \square \times 7 \times 3 = 0$

-Observa que para que el resultado de una multiplicación sea 0, por lo menos uno de los factores debe ser 0.

En general: $\boxed{\text{Si } a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ y/o } b = 0}$ PROPIEDAD HANKELIANA

¡Qué nombre tan raro!

Es por quien la descubrió

Borbonet et al., (1995) *Matemática 1*. Montevideo: Ediciones de la Plaza.

En tercer año se resuelven ecuaciones polinómicas a través de factoreo. Recordemos que en este nivel el alumno no conoce aún la fórmula cuadrática[12] y por tanto la herramienta que tiene para resolver ecuaciones polinómicas de grado mayor que uno es la factorización (siempre y cuando ésta sea posible). Por ejemplo, para resolver en R la ecuación $x^2-9x=0$, la transformamos en $x(x-9)=0$ y aplicamos la propiedad Hankeliana.

---

[12] $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \xleftrightarrow[b^2-4ac\geq 0]{} x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. A esta última expresión la llamaremos *fórmula cuadrática*.

$$x^2 - 9x=0$$
$$x(x-9)=0$$
$$x=0 \text{ o } x-9=0$$
$$x=0 \text{ o } x=9$$

El conjunto solución *S* de la ecuación propuesta es: S={0,9}
También es común proponer a los alumnos de tercer año, ecuaciones donde la expresión polinómica ya está factorizada, como ser $(2x-6)(5x+10)=0$. En el proceso de resolución se espera que el alumno aplique la bien conocida propiedad Hankeliana:

$$(2x-6)(5x+10)=0$$
$$2x-6=0 \quad o \quad 5x+10=0$$
$$x=3 \quad o \quad x= -2$$
$$S=\{3,-2\}$$

En 4 º año de bachillerato se estudia la resolución de la ecuación de segundo grado en su forma completa, pero es generalizada la práctica de enseñar previamente la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. Así, a través de factoreo se enseña a resolver ecuaciones de la forma $ax^2+bx=0 \ (a\neq 0)$:

$$ax^2+bx=0 \quad (a\neq 0)$$
$$x(ax+b)=0$$
$$x=0 \quad o \quad ax+b=0$$
$$x=0 \quad o \quad x= -b/a$$
$$S=\{0, -b/a\}$$

En 5º año de bachillerato el programa pide el estudio de los Números Reales y en general el abordaje de esta temática se realiza a través del enfoque axiomático. Los docentes eligen algunas propiedades para demostrar y en general, la propiedad Hankeliana aparece como una de las elegidas a tal efecto:

$$\boldsymbol{a \in R, \ b \in R, \ a.b=0 \ \rightarrow \ a=0 \text{ o } b=0.}$$

Caso I: Si $b=0$, queda demostrado.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Caso II}\text{: Si } b\neq 0 \longrightarrow \text{existe } \dfrac{1}{b} \\ \\ \text{Por hipótesis} \quad a.b=0 \end{array}\right\} \longrightarrow a.b.(\frac{1}{b}) = 0.(\frac{1}{b}) \xrightarrow[\text{de elemento absorbente}]{\text{Existencia de inverso y}} a.1=0 \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{de neutro}]{\text{Existencia}} a=0$$

En este nivel, otra unidad del programa es la de Polinomios. Se estudian, entre otros, el teorema del Resto, teorema de Descartes, teorema de Descomposición Factorial de Polinomios[13]. La resolución de ecuaciones polinómicas en *R* brinda un rico contexto de aplicación de la propiedad que estamos comentando.

En 6º año de bachilllerato Opción Ingeniería, Arquitectura, Economía, Medicina, Agronomía, aparece nuevamente en el programa[14] la temática de Número Real y el abordaje es en general, a través de la vía axiomática. Es casi seguro que el docente a cargo vuelva a revisar la propiedad Hankeliana ya que su aplicación al contexto de la resolución de ecuaciones aparecerá frecuentemente a lo largo del curso de Cálculo. Mencionaremos también que la opción Economía cuenta con un curso de Geometría Analítica que aborda el estudio de matrices y determinantes. Es habitual que se observe que el producto de matrices no cumple la propiedad en la que nos hemos centrado.

En suma, vemos que esta propiedad es abordada a lo largo de los seis años de enseñanza secundaria, vinculada principalmente a los diferentes conjuntos numéricos y su aplicación más relevante (quizás única) aparece en el contexto de la resolución de ecuaciones en *R*.

Estudios exploratorios

Se realizaron estudios exploratorios con varios propósitos. En primer lugar para obtener evidencias que permitieran justificar la presente investigación ya que las ideas iniciales estaban basadas en datos obtenidos de mi práctica como docente pero no poseía documentos escritos que permitieran evidenciarlas. En segundo lugar se pretendía ver cómo reaccionaban los alumnos frente a las preguntas del cuestionario que se planificó en primera instancia, qué dudas manifestaban los estudiantes frente a la redacción de las preguntas, para luego realizar las modificaciones que fueran pertinentes hasta lograr su formulación definitiva. También se conversó con los docentes a cargo de los grupos para conocer cuál era la instrucción previa que habían recibido los alumnos y conocer la notación matemática que se utilizaba.

En nivel tercer año de Ciclo Básico (14- 15 años) fueron testeados, en el mes de agosto de 2002, 16 alumnos que en el mes de abril de ese mismo año estudiaron la resolución de ecuaciones dadas en forma factorizada e igualadas a cero. Se deseaba constatar si recurrían o no a la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación (no conocen la fórmula cuadrática aún) y además ver cómo realizaban la verificación. En cuanto al proceso de verificación interesaba observar si asignaban un valor a x por vez o se detectaba el error que comentamos en la introducción y que yo había observado en mi práctica docente con anterioridad. Como ya dijimos, éste consiste en asignar a x dos valores distintos en forma simultánea.
El ejercicio (1) fue el siguiente:

[13] En general, se demuestran cada uno de ellos.
[14] El programa que se menciona es el que corresponde a la parte de Cálculo. Si bien en todas las orientaciones mencionadas se estudian los elementos necesarios para llegar a graficar funciones, estos programas tienen variaciones en los temas y en su alcance según la orientación profesional elegida.

Resuelve la ecuación (2x-6)(5x+10)=0
Verifica la o las soluciones que obtengas. Explica cada paso que realices.

Se observó que al momento de aplicar la propiedad para poder resolver la ecuación (no cuentan con otra herramienta) sólo 5 alumnos de 16 lo hacen correctamente, 9 alumnos aplican la propiedad Distributiva en el sentido de desarrollar y no pueden resolver la ecuación que obtienen (aún no conocen la fórmula cuadrática), y 2 estudiantes no hacen nada. En cuanto a las verificaciones, tomaremos como referencia los 5 alumnos que llegaron a las raíces de la ecuación, tres de ellos la realizan correctamente, un alumno no la realiza y el restante alumno verifica eligiendo solamente el factor que se anula, es decir, trabaja como si la ecuación inicial estuviera formada por dos ecuaciones de primer grado y plantea:

$$2.3-6=0 \qquad 5.(-2)+10=0$$

El ejercicio (2) fue el siguiente:

Se sabe que b.c =0. ¿Qué puedes decir sobre b y c a partir de esa información? Explica tu respuesta.
¿Qué representan para ti b y c? Explica tu respuesta.

El objetivo de la primera parte de esta pregunta era saber si los alumnos aplicaban a esta situación la propiedad Hankeliana y a pesar de ello no la aplicaban al contexto de resolución de ecuaciones, en otras palabras, se buscaba detectar la posible presencia del fenómeno de compartimentalización en el sentido de Vinner (1990): los alumnos conocen la propiedad pero no la aplican.

Por otra parte véase que no se especifica qué objetos matemáticos representan *b* y *c* con el fin de saber si esto es tenido en cuenta por los alumnos al momento de dar una respuesta. Si bien en este nivel los alumnos han trabajado solamente con multiplicación de números reales y multiplicación de polinomios, operaciones que cumplen la propiedad que analizamos, se pretendió ver si al momento de dar la respuesta, los alumnos requerían información sobre qué objetos designaban *b* y *c* o si simplemente generaban la respuesta de que *b* o *c* eran cero.

La segunda parte de la pregunta tiene por objetivo conocer el mundo de posibles representaciones para *b* y *c*. Se esperaba que en este nivel contestaran que *b* y *c* representaban números pues como ya se dijo solamente han trabajado con números y polinomios, siendo este último caso poco esperable ya que a este nivel se trabaja fundamentalmente con operaciones entre polinomios desde un punto de vista procedimental (cómo se suma, cómo se multiplica, etc.) pero no se estudia la estructura de anillo de los polinomios como tal. Como esta pregunta también iba a ser formulada en otros niveles para saber si a lo largo de la instrucción que reciben los alumnos se amplía el mundo de representaciones, era importante formularla para luego realizar comparaciones en la evolución del pensamiento de los alumnos.

Los resultados encontrados para esta última pregunta fueron que todos los alumnos encuestados contestan que *b* o *c* deben ser cero para que el producto sea cero y 14 alumnos

interpretan a *b* y *c* como números. Destacaremos aquí que todos los alumnos conocen entonces la propiedad Hankeliana pero solamente 5 de 16 la aplican a la resolución de ecuaciones.

Se planteó también el ejercicio (1) en un grupo de 14 alumnos de 6º año de bachillerato Opción Economía (en este grupo con edades comprendidas entre 17 y 20 años), con los siguientes resultados:
Al momento de resolver la ecuación $(2x-6)(5x+10)=0$, 8 alumnos aplican la propiedad Hankeliana y de ellos resuelven correctamente 7 (una alumna presenta un error en una división obteniendo solamente una raíz correcta). Los restantes 6 desarrollan la expresión queriendo aplicar la fórmula cuadrática. De estos seis sólo dos llegan a las raíces correctas.

De los datos dados más arriba, podríamos inferir que los alumnos que resuelven la ecuación aplicando la propiedad Hankeliana cometen menos errores que los que optan por aplicar la fórmula cuadrática y por tanto obtienen un mayor porcentaje de éxito que los segundos.

En los errores que aparecen al resolver este tipo de ecuaciones, nos concentraremos como ya dijimos, en uno en particular que corresponde a la etapa de verificación de las raíces obtenidas y que con anterioridad a esta experiencia lo había detectado en mi trabajo en el aula, como ya lo mencioné anteriormente. Tres de los siete alumnos que resolvieron correctamente la ecuación aplicando la propiedad Hankeliana, cometen el mismo error en la verificación, lo ejemplificamos a continuación:

$$(2.3-6)(5(-2)+10)=0$$
$$(6-6)(-10+10)=0$$
$$0.0=0$$

Es decir, sustituyen simultáneamente la *x* por distintos valores, y no reconocen la necesidad de realizar dos verificaciones: una para $x=3$ y otra para $x=-2$. Pensamos que es difícil que los alumnos autodetecten este error, ya que igualmente llegan a la igualdad $0=0$. Parecería que el propio error se retroalimenta, ya que lleva a los alumnos al resultado esperado.

La pregunta que también nos formulamos es si este error se debe a la aplicación de la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación o si el mismo aparece aun cuando la ecuación se haya resuelto por otro procedimiento. En el planteo que hacen los alumnos (si aplican la propiedad) se visualizan dos ecuaciones de primer grado, en donde una tiene raíz 3 y la otra raíz –2, lo que podría llevarlos, en el momento de la verificación, a sustituir en cada factor la raíz respectiva. La razón de esto podría ser la "fragmentación" que se produce de la ecuación inicial en dos ecuaciones de primer grado y el camino atrás que debe realizarse para la verificación, es decir, pasar de las dos ecuaciones de primer grado a la ecuación inicial de segundo grado. El hecho de que la ecuación esté factorizada, los paréntesis que encierran cada uno de los factores de primer grado como si fueran entidades separadas, podrían aún más favorecer el pensamiento erróneo del alumno, llevándolo a pensar que en uno de ellos la *x* puede tomar un valor y en el otro factor un valor diferente.

$$(2.x-6)(5x+10)=0$$
$$2x-6=0 \quad o \quad 5x+10=0$$
$$x=3 \quad o \quad x=-2$$
$$S=\{-2, 3\}$$

Se nos ocurren dos posibles explicaciones más para este error. Una de ellas es que podría tener que ver con un error del tipo lógico, con esto queremos decir que el alumno llega a raíces 3 y –2 para la ecuación planteada y piensa que como las dos son raíces, deben estar las dos también "juntas" al momento de realizar la verificación, cuestión que entra en conflicto con la lógica de la expresión algebraica ya que en ella $x = 3$ o $x=-2$.

3 y –2 son las raíces de la ecuación (2.**3**-6) (5(**-2**)+10)=0	**VS**	*3 y –2 son las raíces de la ecuación* (2.**3**-6)(5.**3**+10)=0 y (2.(**-2**)-6)(5(**-2**)+10)=0

La otra explicación que formularemos se refiere a una posible creencia del alumno sobre un producto igual a cero y está íntimamente relacionada con lo anterior. Quizás el alumno pueda pensar que los dos factores deben anularse simultáneamente para que el producto sea cero sin ver que el producto es cero cuando al menos uno de los factores es cero. Como se verá en el párrafo siguiente, la mayoría de los alumnos responde que si el producto es cero uno u otro de los factores debe ser cero, algunos aclaran que también los dos podrían ser cero. Sin embargo podría existir una compartimentalización entre la regla o el enunciado teórico de la propiedad y su aplicación. Con esto nos referimos a que los alumnos o bien no ven claramente la conexión entre ambas cosas (teoría y práctica), o bien que la ecuación no resulta un estímulo suficiente para la correcta aplicación de la regla.

Como recién mencionamos, en referencia al ejercicio (2), todos los alumnos de este nivel señalan que *b* o *c* deben ser cero y la inmensa mayoría dice que *b* y *c* representan números.
Los tres alumnos que cometen el error en la verificación contestan correctamente al ejercicio (2) descrito anteriormente, indicando que, o bien *b* es cero, o bien *c* es cero (una alumna agrega además que ambos podrían ser cero). Observemos que si bien estos estudiantes manifiestan que *b* o *c* deben ser cero, al momento de verificar están planteando que ambos factores se anulan en simultáneo.

De los alumnos que aplicaron la fórmula cuadrática y verificaron, uno de ellos lo hace correctamente usando la expresión factorizada y el otro lo hace correctamente en la expresión desarrollada, expresión que parecería no invitar tanto a los alumnos a sustituir la *x* por distintos valores en una misma expresión.

En suma, todos los alumnos conocen la propiedad Hankeliana y la explican correctamente pero muchos de ellos no la relacionan con el contexto de resolución de ecuaciones de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$.

El grupo de alumnos de 6º año opción Economía también fue testeado con preguntas como:

f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=0, ¿qué puedes deducir sobre las funciones f y g a partir de esta información? Explica

d y b son dos matrices. Se sabe que d.b=0, ¿qué puedes deducir sobre las matrices d y b a partir de esta información?

Si bien los alumnos están realizando un curso de Cálculo como ya se ha dicho, y también un curso de Álgebra y Geometría Analítica en donde han recibido instrucción específica sobre multiplicación de matrices (en particular el docente a cargo les había proporcionado situaciones para que vieran que la propiedad Hankeliana no se cumple en el producto de matrices), los estudiantes contestan en el caso de las funciones que $f=0$ o $g=0$ y en el caso de las matrices que $d=0$ o $b=0$. En sus respuestas señalan que uno u otro de los objetos matemáticos involucrados en cada pregunta debe ser cero. Se observa una transferencia de la propiedad Hankeliana de los números reales a otros tipos de estructuras matemáticas donde esta propiedad no es válida.

Debemos aclarar que para la secuencia final las matrices se notaron con mayúsculas (D y B en lugar de d y b) ya que es usual en los profesores usar esta última notación. También fue sustituido el 0 por una O para tratar de minimizar la confusión entre valor funcional cero y el nombre de la función nula.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la aplicación de la propiedad Hankeliana en el contexto de las ecuaciones no resulta inmediata ni obvia, podría sugerirse que la transferencia a estas otras estructuras responde a un modelo mental cuya aplicación tiene que ver con las características sintáctico visuales de la proposición, que consiste en ver "dos letras vinculadas por la operación multiplicación arrojando producto nulo". Parecería que independientemente de lo que representen estas letras el modelo será transferido si al alumno se lo cuestiona sobre un enunciado que tiene el aspecto sintáctico bajo el que se enuncia la propiedad Hankeliana en los reales.

Nos preguntamos por qué no resulta tan obvia la aplicación de la propiedad en el ámbito de la resolución de ecuaciones, ¿qué percibe el alumno cuando está frente a una de las ecuaciones mencionadas? ¿Qué cosas de su "aspecto" hacen que el alumno no vea la aplicabilidad inmediata de la propiedad cuando sabemos que al mismo tiempo el estudiante transfiere la propiedad a otros contextos donde además no es válida? ¿O es que estamos hablando de una compartimentalización del conocimiento que no permite a los alumnos relacionar la propiedad con su aplicación? Podría estar sucediendo que los estudiantes no identificaran $(x-c)(x-d)$ como $a.b$ o como números. Quizás no se hace conexión entre esta propiedad y su consecuencia en la resolución de ecuaciones, es decir, el alumno no llega a ver que esta propiedad puede serle útil para resolver ecuaciones de cierto tipo, entre otras propiedades que conoce.

Resumiendo podemos decir que, después de recibir instrucción matemática específica, el alumno no aplica la propiedad en el contexto de resolución de ecuaciones y por otra parte la transfiere a otros contextos donde la sintaxis visual conserva las características del enunciado de la propiedad para los números reales.

Veamos qué sucede cuando el alumno se enfrenta a una situación donde hay elementos diferentes del cero cuyo producto es cero, como ser las clases residuales módulo 6.
Se propuso una actividad, en los dos grupos señalados más arriba, donde los alumnos debían resolver la ecuación $3.x=0$ en el conjunto de las clases residuales módulo 6. Para esta tarea se les facilitaba la tabla de multiplicar correspondiente y se les explicaba cómo realizar la lectura de la misma.

En el grupo de tercer año los 16 alumnos lo hicieron correctamente y al volverles a plantear el ejercicio (1), tres de ellos contestaron que si $b.c=0$, no necesariamente b o c tenían que ser 0. En el grupo de 14 alumnos de 6º año, 3 de ellos resolvieron mal la ecuación propuesta (faltaron soluciones) y al plantearles el ejercicio (1) otra vez, todos contestaron nuevamente que si $b.c=0$ entonces $c=0$ o $b=0$. Parecería que los estudiantes más pequeños manejaron en forma más versátil las ideas matemáticas y fueron capaces de distinguir dos situaciones diferentes, una que cumple la propiedad y otra que no.

Es importante destacar que los alumnos de 6º año recibieron instrucción específica sobre Números Reales desde el punto de vista axiomático tanto en el año que cursaban al momento de la prueba como en el año anterior. Podríamos pensar que por ello la propiedad que comentamos está más fuertemente arraigada en este grupo que en el de alumnos más pequeños.

Intentemos buscar causas para la problemática planteada. Podemos pensar que el modelo mental de la propiedad Hankeliana que está actuando cuando los alumnos responden a ciertas cuestiones, si bien puede estar respondiendo a aspectos sintácticos visuales de las proposiciones que guardan estrecha similitud con la propiedad que los alumnos conocen de los números reales, también está íntimamente relacionado con el estrecho mundo de experiencias que el alumno enfrenta al estudiar matemática. El alumno ha cursado seis años de enseñanza secundaria, ¿en cuántas oportunidades se le ha mostrado que no siempre se cumple esta propiedad que estamos tratando? ¿En cuántas oportunidades se le ha propuesto a los estudiantes trabajar con operaciones que no sean conmutativas, o asociativas o que no tengan neutro? Pero no me refiero a la mención que realizamos cotidianamente en clase diciendo "la resta no es conmutativa", me refiero a un verdadero trabajo donde al alumno se le presente un universo amplio y representativo de estructuras. Hacerle ver al alumno la importancia del contexto, que no existen verdades universales sino que la validez de una u otra propiedad está ligada al contexto de aplicación. Esto nos invita a pensar en la relatividad de las propiedades matemáticas, en el hecho de que hay cosas que pueden estar bien o mal dependiendo del contexto donde las estemos aplicando. Creo que esta característica es lo que hace a la matemática inmensamente rica en la parte conceptual. Si las operaciones definidas en determinados conjuntos cumplieran siempre todas las propiedades conocidas, no sería necesario señalarlas una y otra vez. La importancia de que una operación sea por ejemplo conmutativa, como es el caso de la suma y la multiplicación

en R trae aparejado que exista una única operación inversa (en el sentido de una operación que "deshace" lo que la operación original hace) para cada una de ellas, la resta y la división respectivamente, sin embargo una operación no conmutativa como la potenciación, da lugar a dos operaciones inversas, la logaritmación y la radicación.

Las mismas preguntas que las realizadas en el grupo de 6º año de bachillerato opción Economía fueron formuladas a dos estudiantes de 3º año de profesorado de matemática. Destacaré algo más que revelan las pruebas realizadas y que tiene que ver con las representaciones. Tanto a nivel del grupo de 6º año de bachillerato opción Economía como de los dos estudiantes de tercer año de profesorado de matemática, en la pregunta (1) las letras involucradas son interpretadas como representando números. Aún cuando al estudiante se le ofrecen diversos ejemplos que involucran funciones, matrices, polinomios y se le vuelve a reiterar la pregunta (1), el alumno vuelve a contestar que "esas letras" representan números. Esto nos lleva a cuestionarnos si la ampliación del mundo de las estructuras algebraicas está efectivamente llevándose a cabo por parte de quienes impartimos la enseñanza. Parecería que la concepción de álgebra como generalización de la aritmética que es la primera concepción que se le presenta al alumno cuando inicia sus estudios de álgebra perdura (como una generalización contextualizada para el estudiante) a lo largo de su pasaje por enseñanza secundaria y quizás también terciaria, aún cuando haya estudiado otros objetos matemáticos, que no necesariamente son números, involucrados en estructuras algebraicas.

Formulación de objetivos

Las preguntas que surgen a partir de los estudios exploratorios realizados son muchas, así como también las interpretaciones y justificaciones que intentamos dar a priori sobre las respuestas que dan los alumnos. Para la presente investigación nos planteamos los siguientes objetivos:

- Observar las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero[15], poniendo atención en los alumnos que conociendo la propiedad y constituyendo esta la única herramienta de resolución de estas ecuaciones, no la aplican.
- Examinar el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación polinómica que está dada en forma factorizada e igualada a cero y formular posibles explicaciones del mismo
- Buscar elementos para destacar en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto y observar cómo evoluciona la ampliación del repertorio de objetos matemáticos que los estudiantes interpretan cuando ven a y b en la expresión $a.b=0$, a lo largo de los años de instrucción.

[15] Nos referimos a ecuaciones de segundo grado de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$, con dos raíces reales y **distintas**.

No tenemos conocimiento de trabajos previos que atiendan esta problemática, y dada su importancia, debido a su extensivo uso en la enseñanza, consideramos que dar una explicación a las posibles causas de los errores que cometen los estudiantes alrededor de esta propiedad, por un lado nos sensibiliza hacia posibles caminos a tomar como docentes, y por otro lado contribuye a la disciplina dentro de la línea de investigación del Pensamiento Algebraico.

CAPÍTULO II

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

A continuación desarrollaremos las componentes didáctica, epistemológica y cognitiva, que son las tres dimensiones para la reflexión y el análisis que utilizaremos. En primer lugar realizaremos un análisis del estado actual de la enseñanza, basado en los libros de textos más usados en Uruguay, aspecto que oportunamente se fundamenta. Posteriormente, daremos una mirada histórica a lo que ha sido la evolución del álgebra en la rama de la resolución de ecuaciones hasta llegar a las ecuaciones factorizadas e igualadas a cero para luego situarnos brevemente en la aparición de álgebras abstractas con y sin divisores de cero. Consideramos que esto nos brindará elementos epistemológicos que nos servirán para entender mejor las dificultades de los estudiantes. Por último desarrollaremos la componente cognitiva donde se abordarán diversos marcos teóricos que nos permitirán una perspectiva amplia de análisis, en una temática como la nuestra que no ha sido abordada con anterioridad.

Fundamentación de la elección de las tres componentes que dan el marco para la reflexión

Este capítulo está organizado en base a tres componentes: la epistemológica, la didáctica y la cognitiva. Esto nos permite tres dimensiones para la reflexión y el análisis de los fenómenos que vamos a observar, y por tanto, una visión compleja, y si se quiere sistémica, de la problemática a estudiar.

La dimensión epistemológica permite conocer los obstáculos que enfrentaron los hombres a lo largo de la historia en la construcción de los significados y conceptos matemáticos; conocerlos en profundidad nos brinda información acerca de los posibles obstáculos y dificultades que pueden enfrentar los estudiantes cuando deben abordar tales conceptos.

Consideramos que la historia nos sirve en la medida que aporta a las interpretaciones sobre el trabajo de los estudiantes, por ello en el desarrollo del presente trabajo, se irá mezclando la historia con la discusión de ejemplos de lo que los estudiantes hacen o piensan. No es de nuestro interés discutir la historia en forma apartada ni en sí misma ya que este trabajo no es sobre historia, sino que la toma como fuente para obtener posibles interpretaciones del trabajo que realizan los alumnos.

Los elementos que describiremos en la componente didáctica, nos permiten reflexionar acerca del estado actual de la enseñanza en relación a los tópicos en los que nos hemos concentrado y tener un panorama claro de lo que ilustran los libros de texto de los estudiantes en relación al tema.

Creemos que en un país donde solamente el 13,5 % de los profesores de matemática que dan clase poseen título habilitante, los libros de texto constituyen un reflejo de las prácticas de aula, ya que son el principal punto de referencia de los profesores que no han completado su formación inicial como docentes o que ni siquiera han pasado por ella. Estos textos entonces, nos permiten de alguna forma, introducirnos en las prácticas de aula y

tener una noción de qué se enseña y cómo se enseña. También nos brindan información acerca del discurso docente y los posibles enfoques didácticos de los temas.

La componente epistemológica y la didáctica también aparecerán interrelacionadas en la reflexión. El estudio de cómo surgen las ecuaciones a lo largo de la historia, a qué tipo de problemas prácticos responden y qué tipo de herramientas fueron utilizadas para resolverlas, permitirá realizar una comparación con las prácticas de aula. Es decir, cómo se presentan actualmente las ecuaciones, a qué tipo de problemas dan solución y qué tipo de herramientas se usan para resolverlas. Como se verá, las prácticas de aula no reflejan necesariamente las condiciones históricas. En el caso de las ecuaciones en las que nos hemos concentrado, podríamos decir que la principal actividad de aula que aparece ligada a ellas es la resolución de las mismas a través de la aplicación de la propiedad Hankeliana, es decir, se da una ecuación polinómica factorizada e igualada a cero y se pide hallar sus raíces. Pero históricamente, parecería que la factorización es utilizada como una herramienta para poder determinar una ecuación con raíces dadas, cuestión que hoy en día no aparece prácticamente en las actividades que se desarrollan en el aula. Quizás realizar los dos procesos: construir una ecuación conociendo sus raíces usando la factorización y hallar las raíces de una ecuación que está dada en forma factorizada, deban ser tratadas en el aula para que los estudiantes logren una mejor comprensión de lo que significa resolver una ecuación y cuál es el papel de la incógnita en ellas.

En la componente cognitiva se incluyen diversos aspectos teóricos que fueron elegidos para dar interpretación al pensamiento de los estudiantes. Abordaremos diversos marcos teóricos, pero nos centraremos en la noción de *Imagen conceptual* presentada en (Vinner, 1991), en el concepto de *compartimentalización* (Vinner, 1990), en la *Teoría de la Intuición* (Fischbein, 1987) en general y en la noción de *Autonomía de los modelos mentales* presentada en (Fischbein, Tirosh, Stavy & Oster, 1990) en particular para formular posibles explicaciones a los fenómenos que estamos estudiando. Como marco téorico específico del pensamiento algebraico usaremos el *Modelo 3 UV* presentado por Trigueros y Ursini (2003).
La inclusión de estas consideraciones teóricas se fundamenta en la necesidad de poseer elementos teóricos para interpretar las concepciones de los estudiantes y poder así, dar explicaciones acerca de la problemática que se estudia, la cual no ha sido previamente abordada.
A su vez, a lo largo del trabajo, se podrán apreciar las vinculaciones que se establecen entre esta componente y las otras dos.

La componente didáctica

Realizaremos una revisión de los textos de matemática más usados en las aulas en Uruguay para el nivel secundario. Veremos cómo es presentada la propiedad Hankeliana, en qué contextos aparece y relacionaremos la problemática que estamos estudiando con la presentación del tema en los libros de texto.

Pensamos que los libros de textos inciden en forma importante en la planificación que los docentes llevan al aula, por dos razones fundamentales. La primera es que en Uruguay es prácticamente nula la investigación en matemática educativa y no es fácil el acceso a

fuentes de conocimiento basadas en investigaciones. La segunda es que solamente el 13,5 % de los docentes de matemática de enseñanza secuandaria posee título de profesor. Esto significa que sólo ese porcentaje de los docentes acredita una formación técnica, pedagógica y didáctica.
La didáctica de la matemática sigue siendo concebida, en general, como un arte, y se cree que la eficacia de la enseñanza que se imparte depende de lo buen "transmisor" que resulte el docente. En esta realidad, la matemática a enseñar es llevada al aula sin que se reflexione demasiado sobre los aspectos cognitivos, didácticos y epistemológicos.

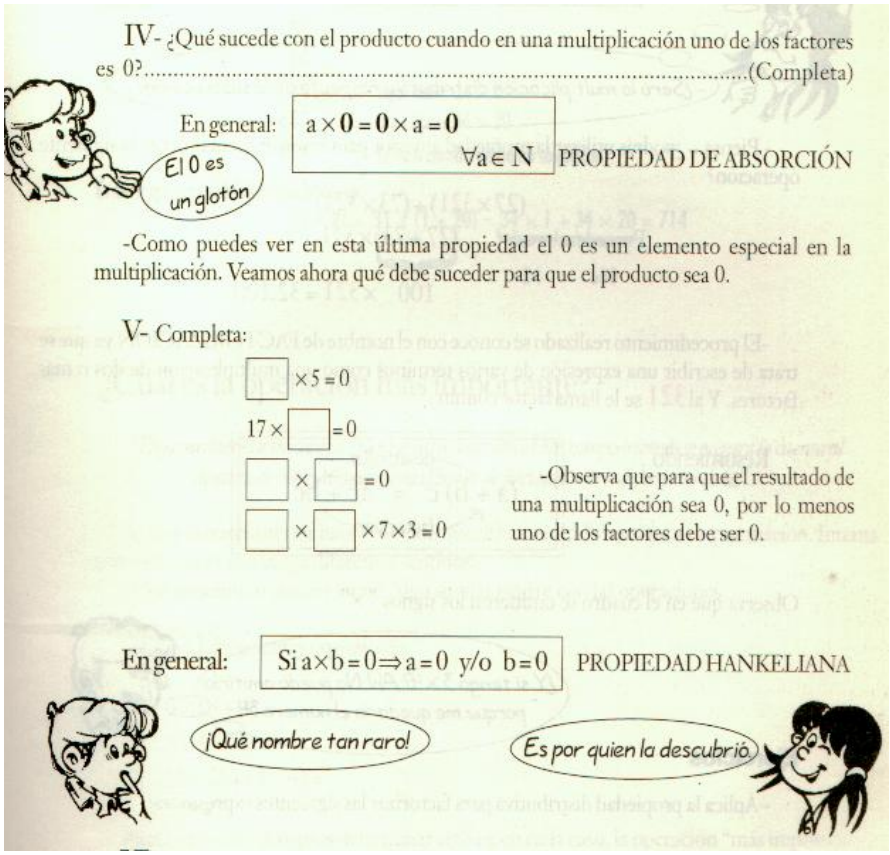
En estudios realizados por la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura[16] sobre los currículos de matemática se señala que, la enseñanza de la matemática y de las ciencias es muy deficiente en la mayoría de los países del área, pues persiste una confusión entre fines y orientaciones, lo que se suma a la incertidumbre, en el plano curricular, en relación a sus objetivos y programas. En particular sobre Uruguay se dice que, en su diseño curricular, no se manifiestan los criterios de selección de los contenidos:

"El diseño curricular uruguayo está constituido fundamentalmente por los contenidos de cada curso careciendo de cualquier otro elemento curricular. De manera que, explícitamente, no existe ningún tipo de reflexión (epistemológica, psicopedagógica, cultural o social) en la que se fundamenten los programas de los distintos cursos".

A continuación se describe brevemente la presentación de la propiedad que se está estudiando y sus aplicaciones, en diferentes libros de texto que son utilizados en nuestro país tanto por los estudiantes como por los docentes. Se incluirá también la presentación de la propiedad de absorción de la multiplicación, por la estrecha vinculación que existe entre ambas propiedades y porque en algunos casos podría suceder que los alumnos tuvieran ya sea confusión entre las dos o porque podrían pensar propiamente en la absorción al resolver una ecuación.

Borbonet et al. (1995). Matemática 1. Textos de Fin de Siglo. Uruguay.
En la unidad correspondiente a Número Natural aparecen la propiedad de absorción y la Hankeliana cuando se estudian las propiedades de la multiplicación. Para institucionalizar la absorción se pregunta: ¿Qué sucede cuando en una multiplicación uno de los factores es 0? En el enunciado de la propiedad se cuida el uso de cuantificadores y se aclara explícitamente que los números involucrados son naturales, no así en la presentación de la Hankeliana. El contexto que da lugar a la propiedad Hankeliana es implícitamente el de las ecuaciones.

[16] Este estudio fue realizado consultando los siguientes materiales:
- *Programas de matemática Ciclo Básico Único*, ANEP, Consejo de Educación Secundaria, 1987.
- *Programas de matemática Bachillerato Diversificado*, ANEP, Consejo de Educación Secundaria, 1989.



IV- ¿Qué sucede con el producto cuando en una multiplicación uno de los factores es 0?.....(Completa)

En general: $a \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times a = \mathbf{0}$ $\forall a \in N$ PROPIEDAD DE ABSORCIÓN

El 0 es un glotón

-Como puedes ver en esta última propiedad el 0 es un elemento especial en la multiplicación. Veamos ahora qué debe suceder para que el producto sea 0.

V- Completa:

$\square \times 5 = 0$

$17 \times \square = 0$

$\square \times \square = 0$

$\square \times \square \times 7 \times 3 = 0$

-Observa que para que el resultado de una multiplicación sea 0, por lo menos uno de los factores debe ser 0.

En general: Si $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ y/o $b = 0$ PROPIEDAD HANKELIANA

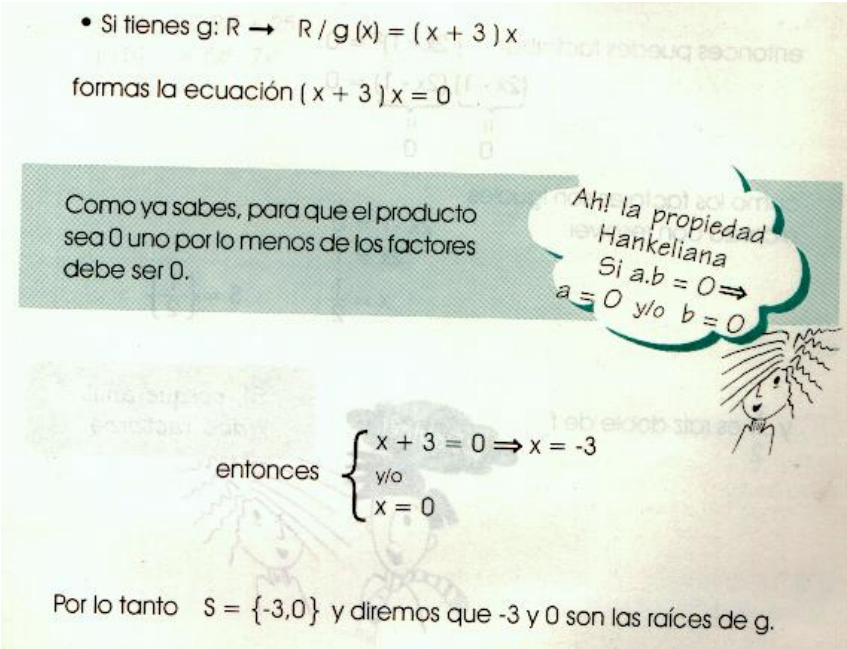
¡Qué nombre tan raro!

Es por quien la descubrió

Borbonet et al. (1995). Matemática 1. Textos de Fin de Siglo. Uruguay.

Borbonet et al. (1996). Matemática 2. Textos de Fin de Siglo. Uruguay.
Se repasa la propiedad de absorción cuando se enuncian las propiedades de la multiplicación en Z. No aparece mención explícita a la propiedad Hankeliana. No aparecen ecuaciones resueltas por aplicación de esta propiedad.

Borbonet et al. (1997). Matemática 3. Textos de Fin de Siglo. Uruguay.
En la unidad correspondiente a funciones polinómicas aparece el cálculo de las raíces de las mismas. Se resuelven las ecuaciones de segundo grado que pueden factorizarse de acuerdo a las herramientas que posee el alumno en este nivel (factor común, cuadrado de binomio, binomios conjugados). Aquí se rescata entonces la propiedad Hankeliana. En su enunciado se hace mención al producto de dos factores. No se explicita qué representan dichos factores aunque por el tema que se está tratando sería bastante claro que se refieren a números reales. No aparece en forma explícita la verificación de una ecuación resuelta por la vía del factoreo.



Borbonet et al. (1997). Matemática 3. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Belcredi, L., Zambra, M., (1998). GAUSS 1. La Flor del Itapebí. Montevideo, Uruguay.
En el capítulo correspondiente a *Cálculos con números Naturales*, capítulo en el que se repasan las operaciones en dicho conjunto numérico y sus propiedades, no se hace mención a la propiedad de absorción y no se aborda en forma explícita la propiedad Hankeliana.

Belcredi, L., Zambra, M., (1998). GAUSS 2. La Flor del Itapebí. Montevideo, Uruguay.
No aparece mención explícita a la propiedad Hankeliana. No aparecen ecuaciones resueltas por aplicación de esta propiedad. Las ecuaciones de la forma $ax=0$ ($a\neq 0$) son resueltas usando la operación división, es decir, se plantea $x=0/a$ deduciendo de aquí que $x=0$.

Belcredi, L., Zambra, M., (2000). GAUSS 3. La Flor del Itapebí. Montevideo, Uruguay.
En el capítulo *Expresiones Algebraicas* se estudia el cálculo de raíces de expresiones polinómicas que están factorizadas, llamándolas *Ecuaciones producto*. No se habla de la propiedad Hankeliana sino de *Producto de factores nulo*. No es explícito qué representan los factores cuyo producto es nulo, pero se pone por escrito que si el producto de dos factores es nulo, entonces al menos uno de ellos es nulo. Se enuncia: *Si* $a\times b=0$, *entonces* $a=0$ *o* $b=0$. Obsérvese en la imagen que sigue cómo se presentan conjuntamente la absorción con lo que sería la propiedad Hankeliana.
Se resuelve una *ecuación producto* escrita en forma genérica. No aparece explícitamente la verificación de ninguna ecuación de ese tipo.

3. Producto de factores nulo.

1 Si uno de los factores de un producto es nulo, entonces el producto es nulo.

2 Si un producto de factores es nulo, entonces al menos uno de los factores es nulo.

- Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $a \times b = 0$.
- Si $a \times b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

4. Ecuación producto.

En la ecuación: $(3x + 5)(x - 3) = 0$, tienes que el primer miembro: $(3x + 5)(x - 3)$ es un producto de factores de primer grado y que el segundo miembro es igual a 0.

Toda ecuación de este tipo se llama *ecuación producto*. Las soluciones de una ecuación producto se obtienen igualando a 0 cada uno de los factores.

En el caso anterior las soluciones son $-\frac{5}{3}$ y 3.

Si a y c son dos números distintos de cero, la ecuación producto $(ax + b)(cx + d) = 0$, es equivalente a: $(ax + b) = 0$ o $(cx + d) = 0$.

$$(ax+b)\,(cx+d) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \\ cx+d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c} \end{cases}$$

Belcredi, L. y Zambra, M., (2000). GAUSS 3. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Fernández, C., González, M. (1995). Matemática 2 c.b.u.(Parte 2) Editorial A. Monteverde y Cía. S. A. Montevideo, Uruguay.
En el capítulo *Otras operaciones* se aborda la multiplicación de números racionales y se enuncia luego de varios ejercicios, en los cuales está implícito el contexto de ecuaciones, la propiedad que dice *"Un producto de factores es igual a 0 si al menos uno de los factores es cero*".

Fernández, C., González, M., López, M. (1993). Matemática 3 c.b.u.(Parte 1) Editorial A. Monteverde y Cía. S. A. Montevideo, Uruguay.
En el capítulo *Funciones* se estudia la determinación de las raíces de las mismas. Se aborda entonces la resolución de ecuaciones y se presenta la factorización como una ayuda para resolver algunas ecuaciones de grado mayor que uno. Se dan ejemplos y se recuerda que: "*a.b=0, a=0 o b=0*" (esta redacción es textual del libro). No se explicita qué representan *a* y *b*. No se realiza en forma explícita la verificación de una ecuación resuelta por este procedimiento pero se sugiere calcular la imagen de los números obtenidos para verificar que efectivamente son raíces de la función considerada.

Tapia (1986). Matemática 2. Editorial Estrada. Argentina.
En el capítulo de *Números enteros y racionales* no se hace mención explícita a la propiedad Hankeliana ni a la propidad de absorción.

Tapia (1986). Matemática 3. Editorial Estrada. Argentina.
En el capítulo *Estructuras algebraicas* no se hace mención explícita a la propiedad Hankeliana. Se comenta solamente que la ley cancelativa de la multiplicación no es siempre cierta (propiedad equivalente a la Hankeliana[17]) sin dar ningún ejemplo.
En el capítulo *Ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita* se resuelven ecuaciones polinómicas de grado mayor que uno a través de factoreo. Se aplica la propiedad Hankeliana pero no se hace mención explícita a ella. No se justifica por qué se igualan a cero los factores que aparecen en la ecuación.

Tapia (1986). Matemática 4. Editorial Estrada. Argentina.
En el capítulo *Función polinómica de segundo grado*, se resuelven ecuaciones incompletas, esto es, $ax^2+c=0$ y $ax^2+bx=0$ con a distinto de 0, y para ello se utiliza la factorización y la propiedad que dice que *Si un producto de dos factores es cero entonces debe ser necesariamente cero uno de los factores*. No aparece la verificación de una ecuación de este tipo.

Realizaremos algunas reflexiones en virtud de la revisión de textos que hemos realizado y sus posibles repercusiones en la enseñanza y en la comprensión de los estudiantes.

Si los textos educativos son reflejo de la práctica educativa, podemos entonces justificar algunas de las dificultades que presentan los estudiantes. La propiedad Hankeliana cuya principal aplicación aparece en el contexto de las ecuaciones, es tomada en la mayoría de los casos como una noción transparente, incuestionable e intrínseca al producto nulo de dos factores. Con esto queremos decir que, en la mayoría de los casos, no se aclara qué representan esos factores. Pues en muchos casos ni siquiera es estudiada como propiedad de la multiplicación en N, Z o Q en los primeros años de secundaria, para hacer su aparición cuando se la necesita que es en el contexto de la resolución de ecuaciones. Si la mayoría de los enunciados de esta propiedad contienen la palabra *factores* en lugar de hacer referencia a qué representan esos factores, sería bastante entendible la generalización que realizan los estudiantes a otras estructuras algebraicas donde esta propiedad no se cumple. En otras palabras, al no enunciarse explícitamente qué representan a y b, parte de la semántica de la propiedad se pierde y se le termina transmitiendo al alumno una regla de valor universal, de la cual sólo recordará su estructura sintáctica que sí puede ser generalizable a otros objetos matemáticos. Además, no se menciona en ningún caso que cuando se está resolviendo una ecuación en R, los factores representan números reales y

---

[17] Estas dos propiedades, Hankeliana y Cancelativa, no tienen por qué cumplirse en un anillo, pero como veremos a continuación, si se cumple una, se cumple la otra y recíprocamente. Es decir que son propiedades equivalentes.

$$[a.b=a.c\ (a\neq 0) \Rightarrow b=c] \Leftrightarrow [m.n=0 \Rightarrow m=0 \vee n=0]$$

Directo:
Hipótesis) $(a.b=a.c\ (a\neq 0) \Rightarrow b=c)$ y $m.n=0$
Tesis) $m=0 \vee n=0$
Demostración:
Como $m.n=0$ si $m=0$ está probado.
Si $m\neq 0$ como además $m.0=0$, obtenemos:
$m.n=m.0$ $(m\neq 0)$ y aplicando hipótesis se deduce que $n=0$.

Recíproco:
Hipótesis) $a.b=a.c\ (a\neq 0)$ y $(m.n=0 \Rightarrow m=0 \vee n=0)$
Tesis) $b=c$
Demostración:
$a.b=a.c\ (a\neq 0) \Rightarrow a.b - a.c=0 \Rightarrow a(b-c)=0 \Rightarrow$
Exist. de opuesto *Distributiva* $a\neq 0$
$\Rightarrow b-c=0 \Rightarrow b=c.$
Exist. de opuesto

que por ello podemos aplicar esta propiedad, y en general, las propiedades de las operaciones comunes definidas en R. Quizás, cuando los alumnos se enfrentan a una ecuación como $(2x-6)(5x+10)=0$, difícilmente ven en las expresiones $2x-6$ y $5x+10$ dos números reales y tal vez por ello, no recurren a la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación, aun cuando ésta sea la única herramienta disponible.

Desde la perspectiva de Vinner (1991)[18], cuando un alumno se enfrenta a un problema matemático sería deseable que consultara las definiciones de los objetos matemáticos involucrados, pero dice que en los hechos esto no sucede así. Lo que el alumno consulta para contestar es la *imagen conceptual* del concepto. Esta imagen es definida como algo no verbal asociado en la mente con el nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del objeto, si la tiene, o puede ser una colección de impresiones o experiencias relacionadas con el concepto. Estas impresiones pueden ser traducidas a palabras pero esto no es lo primero que evocó la mente, sino que viene en una etapa posterior. Por ejemplo si nos dicen la palabra *función*, la mente evocará imágenes o experiencias relacionadas con dicho objeto, se podrá recordar $y=f(x)$ o quizás se visualice un gráfico o se recuerde $f(x)=x^2$ o $f(x)= cos(x)$, etc. Solamente es posible hablar de *imagen conceptua*l relacionada a un individuo específico y además éste podrá evocar diferentes aspectos de su imagen según la situación, por lo que debería hablarse *de imagen conceptual evocada*. Vinner considera que adquirir un concepto es formar una *imagen conceptual* de él. Destaca, que conocer la definición de un concepto no garantiza entenderlo. Entenderlo significa poseer una *imagen conceptual*. Cierto significado debe ser asociado al nombre del objeto.

Utilizando la idea de este autor podríamos explicar las generalizaciones de la propiedad que realizan los alumnos a otras estructuras.
Frente a la pregunta:

f y g representan dos funciones de dominio R. Se sabe que $f.g=O$[19],¿qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

El alumno podría responder consultando su *imagen conceptual* de funciones y operaciones con funciones, que seguramente le resultará insuficiente al no haber recibido instrucción específica sobre el aspecto que se pregunta. Pero teniendo en cuenta las características sintáctico visuales de la pregunta es posible que el estudiante responda consultando la imagen conceptual de la propiedad Hankeliana, que muy posiblemente, más que la propiedad Hankeliana (para lo cual debería especificarse qué representan a y b), posea la regla: si $a.b=0$, entonces $a=0$ o $b=0$. Como poco énfasis ha realizado la enseñanza en qué representan a y b, el valor de la regla ha tomado carácter universal. Agregado a esto tenemos el hecho de que no se han visto ejemplos de estructuras que no cumplan esta

[18] En la sección "La componente cognitiva" se amplía este enfoque teórico.
[19] Esta pregunta fue formulada en los cuestionarios usados para los estudios exploratorios. En dicha ocasión no se explicaba qué significaba el punto relativo a la operación ni el símbolo O. Se pretendía observar la reacción de los alumnos frente a esa sintaxis. Más tarde, se decidió agregar a la formulación final de esta pregunta, una oración en lenguaje verbal que explicitara el significado de $f.g=O$, para que no hubiera lugar a ambiguedades (por ejemplo que los estudiantes perdieran de vista que eran funciones y pensaran que fueran números reales).

propiedad, por tanto el alumno no posee en su *imagen conceptual* un conjunto de contra-ejemplos que lo ayuden a dudar de la aplicabilidad de la regla.

Trataremos ahora de formular una razón didáctica para el error en la verificación que estamos estudiando, usando la noción de *imagen conceptual*. En el análisis de los textos de estudio, pudimos observar que no aparece explícitamente la verificación. Al alumno se le informa que uno u otro de los factores debe ser cero, se hallan las raíces y queda a cargo del alumno la realización de la verificación. Podríamos decir entonces, que el alumno carece de experiencias relacionadas con este proceso y por tanto es escasa la información que puede integrar a su *imagen conceptual*. Como comentamos anteriormente, es muy posible que el alumno centre su atención en que se han resuelto dos ecuaciones de primer grado. Parece entendible entonces, que realice la verificación mediante una generalización de lo que hace para ecuaciones de primer grado: sustituyendo a x en cada factor (polinomio de primer grado) por la raíz de *ese* factor. En el proceso de resolución se "descompone o fragmenta" la ecuación de segundo grado en factores de primer grado para poder llegar a las raíces, pero el "camino de vuelta" a la ecuación propuesta no se realiza, no se vuelve a ver globalmente la ecuación dada, no se analiza por qué las raíces encontradas son efectivamente raíces de la ecuación propuesta. Nos cuestionamos si el procedimiento de verificación es relevante para los profesores o es considerado como algo poco importante; parecería que lo que más interesa es enseñar cómo se calculan las raíces.

La siguiente transcripción de unas notas de clase de una profesora de matemática, Dianne J. Keller (http://www.uoregon.edu/~dkeller/, 2002), ilustran bastante bien lo que quisimos explicar en el párrafo anterior. Estas notas nos muestran las ideas que se transmiten a los alumnos, que quizás, pasarán luego a formar parte de cierta imagen conceptual, y permiten explicar desde este punto de vista, algunos de los errores que los alumnos cometen, tanto en la generalización de la propiedad como en la verificación incorrecta de la ecuación. Se puede observar además, la carencia de una semántica para A y B, así como también la idea explícita de que el polinomio se descompone en pequeñas "partes".

"Section 5.7 - Polynomial Equations
Equations involving polynomials can be difficult to solve without the tools of factoring. Some types of equations (linear, quadratic) have formulas that we can use, but most polynomials (sic) equations do not have general equations. So we rely on factoring or computer approximation to solve. We'll emphasize factoring here.
The underlying rule for solving polynomial equations is the ZERO PRODUCT RULE, which states that if two or more quantities are multiplied together and the result is 0, then one of the original quantities must have been 0. In symbols:
If $A \cdot B = 0$; then $A = 0$ or $B = 0$
Ex: If $(x - 2)(2x + 3) = 0$, then $x - 2 = 0$ or $2x + 3 = 0$.
Using this rule, we can break a larger polynomial into smaller pieces. The goal is to reduce each polynomial to several linear factors, and then solve these easier equations."

Este texto representa parte de la transposición didáctica[20] que ha sufrido el conocimiento desde que es creado hasta que se convierte en matemática escolar. Los conocimientos que

[20] En el sentido de Chevallard, Bosch y Gascón (1997)

el ser humano ha construido, podemos concebirlos como una respuesta que la humanidad ha dado a diferentes situaciones o problemas que tuvo que enfrentar y resolver (veremos más adelante cómo surgen históricamente las ecuaciones de este tipo). Es claro entonces que estos conocimientos no fueron elaborados para ser enseñados en un aula, sin embargo por razones culturales muchos de estos conocimientos se han elegido para que sean transmitidos a las nuevas generaciones. Es decir que, el saber científico sufre una transformación para convertirse en saber escolar. En esta transformación el conocimiento se despersonaliza y se descontextualiza, perdiendo el vínculo con las situaciones reales que le dieron origen. Así, muchas veces, el saber que enseñamos en la escuela no conserva necesariamente las condiciones que lo hicieron germinar. En el acto de trasponer los conocimientos, las relaciones, enlaces y conexiones se rompen o destruyen para poder pasar a una matemática más secuenciada o linealizada en el entendido de que esto representará una simplificación para el aprendizaje de los alumnos.

"From Chevallard´s didactical transposition, it follows rather directly that scholar knowledge is best represented sequentially, not diagrammatically. Because scholar mathematics is usually linearized and algorithmetized, it is so presented to students and so preferred by them and so processed by them". (Dreyfus y Eisenberg, 1990)

Esta linearización se traduce muchas veces en la presentación de la matemática escolar como un cuerpo ordenado, lógicamente secuenciado y riguroso, que además, no siempre atiende los procesos cognitivos de quien aprende.
Como ejemplo de lo antedicho presentaremos a continuación el programa oficial de matemática para 5º año de bachillerato[21] (Orientación Humanística) en Uruguay:

1. *CONJUNTOS Y RELACIONES*
   Noción de conjunto. Notación. Relaciones de pertenencia e inclusión. Operaciones con conjuntos. Los símbolos lógicos. Relaciones. Funciones. Operaciones.
2. *NÚMERO REAL*
   Axiomas de cuerpo y orden. Consecuencias. Descripción de los conjuntos N, Z y Q. Inducción completa en N. Aplicaciones. Axioma de completitud.
3. *COMBINATORIA Y PROBABILIDAD*
   Problemas de conteo en conjuntos finitos. Arreglos, permutaciones y combinaciones. Sus aplicaciones a problemas. Noción de probabilidad. Ejemplos de problemas típicos. Espacios muestrales finitos. Definición de probabilidad. Propiedades. Equiprobabilidad.
   Probabilidad condicional. Sucesos independientes. Pruebas de Bernoulli.
4. *MATEMÁTICA FINANCIERA*
   Progresiones aritméticas y geométricas. Definición y suma. Interés simple y compuesto. Descuento comercial y racional. Anualidades de capitalización y de amortización. Uso de tablas.
5. *POLINOMIOS*
   El anillo de los polinomios. División entera. Funciones polinómicas. Factorización. Teorema de identidad.
6. *ECUACIONES E INECUACIONES*
   Resolución de ecuaciones e inecuaciones sobre los reales. Sistemas de ecuaciones.

[21] Este nivel corresponde a alumnos de 16 años aproximadamente. En general este programa es abordado con una perspectiva teoricista donde por ejemplo en la unidad de Polinomios son demostrados casi todos los teoremas respectivos; algunos de ellos son: el teorema del Resto, el de Descartes, teorema de unicidad de cociente y resto de la división entera, teorema de Descomposición Factorial, teorema de Identidad, las relaciones entre coeficientes y raíces, etc.

Como ya dijimos, el saber científico sufre una transformación para convertirse en saber escolar en el entendido de que esto facilitará la comprensión de los conceptos que se desean enseñar. En esa transformación se pierden, en general, las conexiones y problemas originales que dieron lugar a ese conocimiento. Consideramos importante observar el desarrollo de la evolución del conocimiento ya que mirando las dificultades históricas que tuvo el hombre para construir el conocimiento matemático podremos identificar posibles obstáculos que los estudiantes podrían reproducir en la construcción de los conceptos dentro de una situación escolar.

La componente epistemológica

Daremos entonces, una mirada histórica a lo que ha sido la resolución de ecuaciones polinómicas y en general el desarrollo del álgebra.
Hasta el descubrimiento y la traducción de tablillas babilónicas se consideró a la matemática egipcia como la más avanzada del segundo milenio anterior a Cristo. Los egipcios resolvieron ecuaciones lineales por el método de la falsa posición. Este método también fue utilizado por los babilonios, contemporáneamente con los egipcios, y posteriormente por los árabes. El siguiente problema aparece en el Papiro Rhind (S. XVII a.c.):

"Un montón, sus dos tercios, su mitad, todos juntos hacen trece. ¿Cuál es la cantidad?" (Guelli, 1989)

El problema se reduce a la ecuación:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13$$

Guelli señala que las ecuaciones venían expresadas totalmente con palabras pues el álgebra puramente simbólica estaba aún muy lejos de ser creada.

Los egipcios encontraban la solución de este tipo de ecuación a través de un método llamado *regla de falsa posición*:

1) Atribuían un valor falso al *montón*, por ejemplo, 12:

$$12 + \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{2}(12) = 12 + 8 + 6 = 26$$

2) Una regla de tres simple indicaba el valor verdadero del *montón*:

Valor verdadero $= \frac{12 \times 13}{26} = 6$, entonces el *montón* vale 6.

Este método es un ejemplo del uso de aproximaciones, en que se parte de un valor falso y se procura corregirlo para mejorar el resultado. En este caso dada la estructura del problema permite obtener la solución exacta.

Guelli aclara que esta regla solamente funciona para las ecuaciones de la forma $ax=b$. Si un problema exige la solución de la ecuación $ax+b=c$, la regla no funciona. Supuestamente, ya antes de Cristo, los babilonios y también los chinos, usaban en este caso la *regla de doble falsa posición*, que consiste en:
Para hallar x tal que $ax+b=c$, se atribuyen a x dos valores falsos x_1 y x_2 y se calculan ax_1+b y ax_2+b.

Sean $d_1= ax_1+b-c$ y $d_2= ax_2+b-c$, se plantea la proporción $\frac{d_1}{x_1-x}=\frac{d_2}{x_2-x}$ y se despeja x, obteniendo $x=\frac{x_1d_2-x_2d_1}{d_2-d_1}$, que es el número buscado.

No son conocidos registros del tratamiento de ecuaciones polinómicas de segundo grado por los egipcios, pero los historiadores sospechan que ellos dominaban alguna técnica de resolución de esas ecuaciones. Esa creencia se basa en el hecho de que se encontró en el papiro de Kahun, la resolución de una ecuación que hoy se escribiría $x^2+y^2=k$, k un número positivo, por el método de *falsa posición*.

El primer registro conocido de resolución de problemas que involucran una ecuación de segundo grado data de 1700 a.c., aproximadamente y fue encontrado en una tabla de arcilla, redactado a través de palabras. La solución era presentada como una receta matemática y se daba solamente la raíz positiva. Veamos un ejemplo:

"He sumado el área y los dos tercios del lado de mi cuadrado y el resultado es 0;35. Dos tercios es 0;40. La mitad del resultado 0;20, usted lo multiplica por 0;20 y obtiene 0;6,40** que añade a 0;35 y esta suma, 0;41,40, tiene a 0;50 por raíz cuadrada. 0; 20 que ya ha multiplicado usted por sí mismo, lo resta de 0;50 y 0;30 es el lado del cuadrado".*
(PRO Ciencia Conicet, 1987 a)

En el enunciado los números están expresados en forma sexagesimal y se desprende del enunciado del problema que se está resolviendo la ecuación que escribiríamos:

$$x^2+0;40x=0;35$$

y obtienen como solución:

$$x=\sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2+0;35}-\frac{0;40}{2}=0;30$$

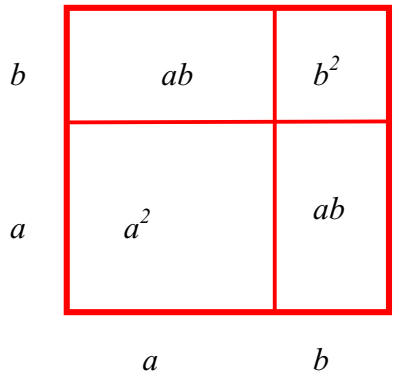
* La notación que se usa está en base sexagesimal. Para interpretarla en sistema decimal, hacemos la siguiente conversión: $0;35_{(60)}=[35\times60^{-1}]_{(10)}$

** $0;6,40_{(60)}=[6\times60^{-1}+40\times60^{-2}]_{(10)}$

Para su resolución están usando la fórmula cuadrática que usamos hoy en día. La única diferencia es que sólo obtienen la raíz positiva, que en este contexto, es además, la única que tiene sentido.
También reconstruían la ecuación de segundo grado a partir del producto y suma de sus raíces. Resolvieron ecuaciones de primer grado y, conocieron y utilizaron algunas identidades algebraicas que con nuestra simbología pueden expresarse:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Algunos historiadores suponen que pueden haber llegado a estos resultados a través de representaciones geométricas, como la conocida figura:



También resolvieron ecuaciones de tercer grado del tipo $x^3+x^2=a$, a partir de tablas en las que se daban las sumas de los cuadrados más los cubos de un mismo número. Mediante una conveniente sustitución de variables resolvían también ecuaciones de la forma $x^3+px-q=0$.

Del análisis de diversos textos babilónicos se desprende que resolvieron los siguientes tipos de ecuaciones con una incógnita, aunque las tres últimas sólo en algunos casos particulares (PRO Ciencia Conicet, 1987 a):

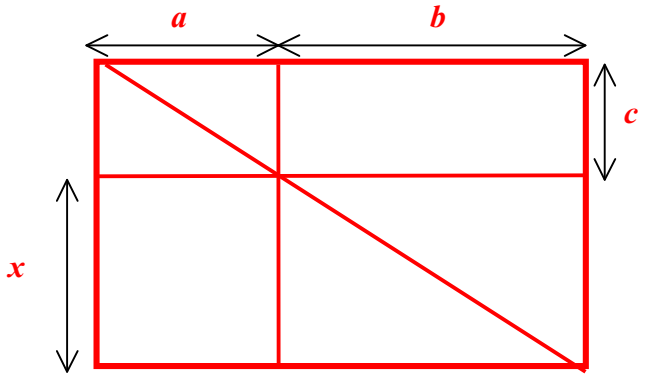
$$ax=b$$
$$x^2=a$$
$$x^2+ax=b$$
$$x^2-ax=b$$
$$ax^2+bx=c$$
$$x^3=a$$
$$x^3+x^2=a$$
$$x^3+px^2=a$$
$$mx^3+px^3=a$$

El estudio de los trabajos de los babilonios y los egipcios muestra que, en general, los resultados se obtienen por procedimientos empíricos, las soluciones son aproximadas, los problemas surgen de situaciones concretas de índole práctica, la justificación de los

resultados no se obtiene por deducción sino por la evidencia sensible y no abundan las generalizaciones.

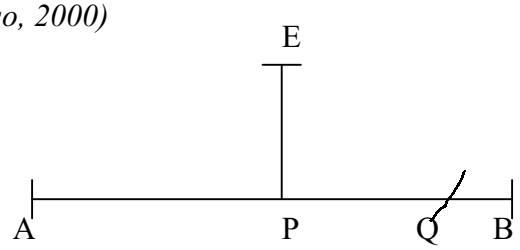
La civilización griega (500 a 200 a.c.) utilizó procedimientos geométricos para resolver muchos problemas, entre ellos la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Las razones que se atribuyen a esto estarían dadas por la aparición de los números irracionales unido a la falta de practicidad del sistema de numeración griega. Quizás esto hizo que los griegos se sintieran mucho más seguros ante las figuras geométricas que ante los números y por ello Euclides desarrolló gran parte de la aritmética y la teoría de números con ropaje geométrico. Las magnitudes eran representadas por segmentos y el producto de dos magnitudes a y b era representado por el rectángulo de lados a y b. No pasó inadvertido para los griegos que, mientras que la ecuación $x^2=2$ no admitía solución racional, tenía una solución trivial desde el punto de vista geométrico, pues x es la diagonal de un cuadrado de lado unidad. (PRO Ciencia Conicet, 1987 a)

De modo similar, la solución a la ecuación $x.a = b.c$ está dada por la figura siguiente, donde a, b y c se toman respecto de una unidad arbitraria:



A continuación se describe uno de los procedimientos usados por los griegos para resolver, por ejemplo, la ecuación que en nuestros días se escribe $x^2-10x+9=0$:

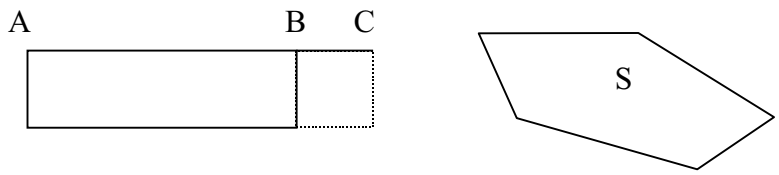
"Trace el segmento AB=10. Por P, punto medio de AB, levante el segmento perpendicular PE=3 (igual a la raíz cuadrada de nueve) y, con centro en E y radio PB, trace un arco de circunferencia que corta a AB en el punto Q. La raíz deseada está dada por la medida AQ". (Da Cunha Fragoso, 2000)



Por construcción, la medida del segmento AQ es $\frac{10}{2}+\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-\left(\sqrt{9}\right)^2}$ que corresponde a la raíz 9 de la ecuación.

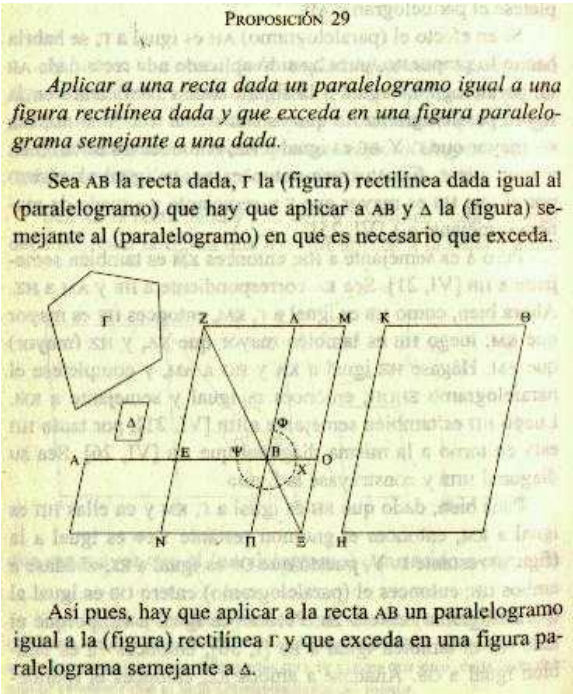
En los *Elementos* (Libro VI), Euclides desarrolla elementos teóricos para resolver en forma geométrica problemas como los siguientes:

1)Aplicar a un segmento dado *AB=a* un rectángulo de área dada S de forma que el exceso sea un cuadrado.



Este problema es equivalente a resolver la ecuación *x(a+x)=S*.

Cuando dice aplicar a un segmento dado *AB=a* un rectángulo de área dada S de forma que el exceso sea un cuadrado, el área dada S se daba a través de una superficie cualquiera cuya área es S. El mismo Euclides daba el área dada a través de una figura que él llamaba rectilínea. En los propios Elementos esa área aparece dada por un cuadrilátero o por un pentágono. Recordemos que Euclides manejaba las magnitudes a través de figuras geométricas, era la forma de dar un número positivo. En la Proposición 29 del Libro VI, Euclides resuelve este problema pero en forma general. Podemos apreciar en la imagen que sigue la presencia de la figura rectilínea Γ que representa el área dada.



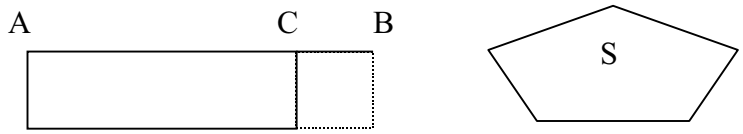
PROPOSICIÓN 29

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelograma semejante a una dada.

Sea AB la recta dada, Γ la (figura) rectilínea dada igual al (paralelogramo) que hay que aplicar a AB y Δ la (figura) semejante al (paralelogramo) en que es necesario que exceda.

Así pues, hay que aplicar a la recta AB un paralelogramo igual a la (figura) rectilínea Γ y que exceda en una figura paralelograma semejante a Δ.

2) Aplicar a un segmento dado $AB=a$ un rectángulo de área dada S deficiente en un cuadrado.



Haciendo BC=x, vemos que el problema equivale a resolver la ecuación $x(a-x)=S$.

Diofanto se destacó entre los griegos por ser el único que utilizó los números independizándose de su representación geométrica y en obtener reglas para manejarse con ellos. Introduce además, ciertas notaciones que marcan un primer paso hacia la escritura simbólica en el álgebra y un nuevo objeto al que llama *deficiencia*. Establece reglas para operar con él. Es decir, formula las reglas de los signos que ahora escribimos:

$$(-)\times(-)=(+)$$
$$(-)\times(+)=(-)$$

Diofanto no da reglas para la adición y la sustracción de números positivos y negativos aunque las usa en sus libros. Debe señalarse que si bien usó números negativos, éstos sólo aparecen en los cálculos intermedios pues para las soluciones considera solamente los racionales positivos. (Bashmakova y Smirnova, 2000)

La obra original de Diofanto está escrita en verso. De la misma forma procedieron los matemáticos hindúes en sus trabajos de álgebra. La matemática hindú se caracteriza por la utilización de un lenguaje poético y metafórico. Entre los aportes de los hindúes se señala el uso de cierto simbolismo, la introducción del sistema posicional decimal, la utilización del cero como operador y la resolución de algunas ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Brahamagupta (598-670), define al cero como la diferencia entre un número y sí mismo y enuncia reglas aritméticas en términos de *fortuna*s (números positivos) y *deudas* (números negativos), como ser:

"Una deuda menos cero es una deuda.
Una fortuna menos cero es una fortuna.
Cero menos cero es cero.
Una deuda que se sustrae a cero es una fortuna.
Una fortuna que se sustrae a cero es una deuda.
El producto de cero multiplicado por una deuda o fortuna es cero.
El producto de cero multiplicado por cero es cero"
(http://www-groups.acs.st-and.ac.uk/ ıhistory/Mathematicians/Brahmagupta.html)

Entre los métodos de resolución empleados por los hindúes figuran, entre otros, la regla de tres y el *método de inversión* para resolver ecuaciones que consiste en "desandar lo

andado", o sea realizar todas las operaciones en orden inverso. El siguiente es un ejemplo tomado del *Aryabhatiya*:

"Si entendiste bien el método de inversión, dime, hermosa niña de ojos radiantes, ¿cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado en las ¾ partes del producto, dividido después entre 7 y disminuido en 1/3 del cociente, multiplicado por sí mismo, restándole 52, extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por 10, da el número 2?" (Perero, 1994)

La solución es 28 y se puede obtener partiendo del número 2 y realizando todas las operaciones inversas, en orden inverso al que aparecen en el enunciado del problema, es decir de atrás hacia delante:

$$(2\times 10 - 8)^2 + 52 = 196$$
$$\sqrt{196} = 14$$
$$(14\times\frac{3}{2}\times 7\times\frac{4}{7})\div 3 = 28$$

Si bien los hindúes trabajaron con números negativos[22], como lo demuestran los enunciados de Brahamagupta donde da reglas aritméticas en términos de *fortunas* y *deudas*, la mayoría de los problemas planteados se relacionan con problemas de orden práctico y por tanto el número que les da solución es positivo. La cuestión que deseamos destacar es que los problemas matemáticos eran originados por situaciones de índole práctico y por tanto, admitieran o no soluciones negativas, estas no interesaban, ya que para el fin del problema solamente servían los números positivos.

Los árabes establecen lazos entre las diversas culturas. Por ello, un mismo matemático usa algunas veces el método geométrico heredado de los griegos o el método algebraico de los hindúes para resolver problemas similares:

"Confluyen en la ciencia árabe tres culturas matemáticas distintas: por una parte la babilónica, con su tradición astronómica y aritmética; por otra la griega, fundamentalmente platónica y aristotélica; y por otra parte la hindú, con una aportación básica, el sistema de numeración posicional, que habría de ser esencial para el desarrollo posterior de las matemáticas." (Casalderrey, 2000)

Entre las aportaciones de la cultura árabe mencionaremos las del gran matemático
Al- Khwarizmi (800) que en opinión de Cardano debe ser considerado el padre del álgebra. La obra principal de Al- Khwarizmi es *Al-jabr wa´l Muqabala*. Esta obra tuvo una influencia muy significativa en las matemáticas occidentales de la Baja Edad Media y del Renacimiento. La traducción exacta de su título es dudosa. La palabra *jabr* podría significar algo similar a restauración, y en la actualidad podríamos identificarla como nuestro "pasar de un miembro al otro" en una ecuación para luego reducir. La palabra *muqabala* significaría lo que en la actualidad denominamos cancelar, y consistiría en la eliminación

[22] Sin darles esta denominación.

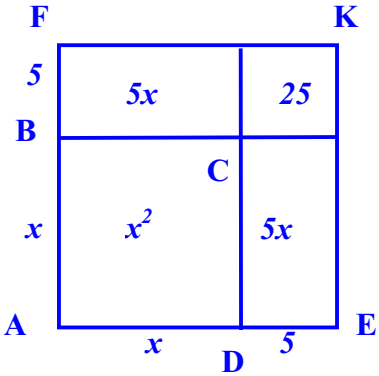
de los términos iguales que aparezcan en ambos miembros de una ecuación. Veamos un ejemplo tomado de Casalderrey (2000) para ilustrar mejor el significado de estas palabras árabes (en simbología actual):

$$x^2+3x=3-2x \text{ se transforma por al-jabr en } x^2+5x=3$$
$$x^2+3x+5=x+5 \text{ se transforma por al-muqabala en } x^2+3x=x$$

Al- Khwarizmi aborda la resolución de seis tipos diferentes de ecuaciones (con coeficientes numéricos). Los diferentes tipos surgen a partir de que este matemático no consideraba el cero ni números negativos. Usando lenguaje actual estas ecuaciones serían de la forma: $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $bx=c$, $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$, $ax^2=bx+c$. Describe en forma retórica la regla para resolver cada tipo de ecuación, no usa ningún tipo de simbolismo, inclusive los números en los enunciados los escribe usando palabras. En esencia, utiliza la conocida fórmula cuadrática que en cada caso es explicada para los coeficientes numéricos que aparecen, y luego da una prueba para cada ejemplo que consiste en el método geométrico de completar un cuadrado. Por ejemplo:

Resolver la ecuación, que usando simbología actual es $x^2+10x=39$.

Se construye un cuadrado ABCD, con AB=AD=x. Se extienden los lados AB y AD de forma que DE=BF=5 (5 es la mitad de 10, el coeficiente de x). Se completa el cuadrado AFKE. El área de AFKE se puede expresar como $x^2+10x+25$ pero la ecuación que hay que resolver es $x^2+10x=39$, por lo tanto hay que agregar 25 a los dos miembros de la ecuación, obteniendo: $x^2+10x+25=39+25$ o sea $x^2+10x+25=64$. Los miembros de la ecuación son ahora cuadrados perfectos: $(x+5)^2=8^2$ entonces $x+5=8$, y por tanto $x=3$. (Perero, 1994)



En el siglo XII comienza la decadencia de la ciencia islámica en oriente mientras que en España alcanza su culminación para también decaer. Simultáneamente, en el siglo XIII, comienza el renacimiento matemático occidental con Leonardo de Pisa (1170- 1240). Su labor no tiene seguidores de importancia y recién en el siglo XVI se produce un notable avance en Europa, gracias a los algebristas italianos: Cardano, Tartaglia, Del Ferro, Bombelli, entre otros. Del Ferro y Tartaglia resuelven la ecuación de tercer grado, Ferrari la de cuarto y Cardano publica ambas soluciones en medio de una gran polémica.

Los trabajos de Cardano son formulados en álgebra retórica y usa términos geométricos para las justificaciones. No da una demostración en el contexto del álgebra retórica pues en su época solamente eran consideradas demostraciones las que estaban basadas en razonamientos geométricos. Las soluciones a las ecuaciones de tercer y cuarto grado son expresadas por medio de radicales. Entre otros, los procedimientos empleados para obtenerlas consisten en: cambios de variable, sustituciones, completar un cuadrado. No reconoce como soluciones a los números negativos ni al cero y le produce un gran desconcierto la aparición de raíces cuadradas de números negativos, desestimándolas como soluciones. (Casalderrey, 2000)

Posteriormente, muchos matemáticos contribuyeron a la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, entre ellos, Viète, Harriot, Bezout y Descartes.
Por el tipo de ecuaciones en que nos hemos concentrado en esta investigación, nos interesa especialmente la contribución de Thomas Harriot (1560- 1621).

"[...] Harriot did outstanding work on the solution of equations, recognising negative roots and complex roots in a way that makes his solutions look like a present day solution. He made the observation that if a, b, c are the roots of a cubic then the cubic is (x-a)(x-b)(x-c)=0 [23]*. This is a major step forward in understanding which Harriot then carried forward to equations of higher degree".*
(http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Harriot.html)

Como podemos ver, Harriot acepta todas las soluciones ya sean reales o imaginarias e introduce simbología. Por ejemplo, escribe el cubo de la incógnita como *AAA*. En cuanto a la invención del lenguaje algebraico, paso fundamental en la evolución del álgebra, existe actualmente un debate sobre si Harriot fue influenciado por Viète, o si fue que este último se nutrió de las ideas del primero.

Tartaglia encontró un método general para resolver las cúbicas de la forma $x^3+px=q$. Este importante logro llegó a oídos de Gerolamo Cardano, quien invitó a Tartaglia a visitarlo para tratar de convencerlo de que le contara cómo era el método de resolución. Tartaglia se lo contó a condición de que Cardano mantuviera el secreto hasta que Tartaglia lo publicara. Cardano hizo caso omiso de su promesa y publicó antes que Tartaglia la solución de las ecuaciones cúbicas en su *Ars Magna* en 1545. (Casalderrey, 2000)
La fórmula que en nuestros días es conocida como de Cardano-Tartaglia es la que aparece en el siguiente cuadro.

$$x^3+px=q$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Leibnitz usa el resultado obtenido por Harriot para verificar que las raíces que se obtienen con la fórmula de Cardano-Tartaglia son correctas, reconstruyendo la ecuación cúbica a partir de sus tres raíces (dadas por la fórmula). Nadie antes que Leibnitz pareció pensar en este método directo de verificación. Esta constituyó la primera prueba algebraica de la fórmula pues todas las pruebas anteriores fueron de naturaleza geométrica.

Se le atribuye a Viète (1540- 1603), el teorema que establece que:

[23] En realidad la cúbica es de la forma $k(x-a)(x-b)(x-c)=0$ con k diferente de 0.

"[...] si un polinomio tiene como raíz $x=k$, el polinomio $p(x)$ es divisible entre $x-k$, o lo que es igual, que puede escribirse en la forma $p(x)= (x-k).c(x)$, siendo $c(x)$ un polinomio de un grado menos que $p(x)$". (Chica Bias, 2001)

Descartes (1596 - 1650) usa este resultado para probar la llamada *regla de los signos*, que iba a permitir saber, con sólo observar la secuencia de signos de los coeficientes de la ecuación, el número máximo de raíces reales positivas (que él llama *raíces verdaderas*) y negativas (*raíces falsas*) de la misma. Supone un polinomio ordenado según potencias decrecientes de la *x*, de coeficiente principal 1 e igualado a cero y enuncia que la ecuación tendrá *como mucho* tantas *raíces verdaderas* como cambios de signo y tantas *raíces falsas* como permanencia de signo. Cuando dice *como mucho* es para eliminar del cómputo las posibles raíces imaginarias y las raíces repetidas.

Lo explicó basándose en un caso particular, construyendo con la idea de Viète, una ecuación de cuarto grado a partir de una de primer grado a la que "iba añadiendo sucesivamente nuevas raíces". Partió de la ecuación $x-2=0$, en la que la única *raíz verdadera* es 2. La sucesión de coeficientes : 1, -2 da lugar a una sucesión de signos +, - con un cambio de signo. A partir de ella creó una ecuación de segundo grado multiplicando por $(x-3)$. La ecuación así obtenida $(x-2)(x-3)=0$, es equivalente a $x^2-5x+6=0$ y tiene dos raíces verdaderas 2 y 3. La sucesión de los coeficientes: 1, -5, 6 da lugar a una de signos +, -, + donde hay dos cambios. Para construir una ecuación de tercer grado multiplicó por el factor $(x-4)$. La nueva ecuación $(x^2-5x+6)(x-4)=0$, es equivalente a $x^3-9x^2+26x-24=0$. En esta ecuación, cuyas raíces 2, 3, y 4 son las tres *verdaderas*, se observa que la sucesión de signos de los coeficientes: +, -, +, - tiene tres cambios de signo. La regla enunciada parece cumplirse para *raíces verdaderas*. Finalmente, Descartes multiplicó por $(x+5)$ obteniendo la ecuación $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$. Esta ecuación de cuarto grado, con tres *raíces verdaderas* y una *falsa*, en la que la sucesión de signos de los coeficientes: +, -, -, +, - presenta ahora tres cambios y una permanencia, cumpliéndose la regla enunciada. (Chica Bias, 2001)

Resulta difícil resumir en pocos renglones la historia de la resolución de ecuaciones polinómicas, pero podemos observar primeramente que ya desde los babilonios se deja entrever en los enunciados retóricos un amplio dominio de las técnicas aritméticas y la marcada presencia de la operación radicación. La resolución de ecuaciones aparece ligada fuertemente a problemas de índole práctica, en particular problemas que involucran áreas y distancias. Quizás por ello son relacionados o interpretados desde la geometría y desde este contexto se les da solución y justificación. Este contexto geométrico invade la historia del álgebra hasta el renacimiento inclusive. Esto queda bien ilustrado en las siguientes palabras de Cardano:

"La sexta cosa a señalar [es] que en cuanto el hombre haya llegado a conocer todos los capítulos [ecuaciones] hasta el relativo al cubo, que son 19 [incluidos, hacemos notar, los de primer y segundo grado], tendrá cuanto basta para cualquier caso algebraico, porque hasta el cubo se encuentra la gradación en la Naturaleza: de hecho hay líneas, superficies y cuerpos. Y las líneas corresponden a la incógnita lineal, las superficies a los cuadrados y los cuerpos a los cubos. Por tanto, si sobre éstos hemos dado noticias suficientes, se conocerá todo lo

que es necesario. En realidad todo lo que añadiremos más allá, será por entretenimiento y no por el fruto que pueda obtenerse del [tal] estudio. Tales capítulos sucesivos no existen verdaderamente de por sí, sino por accidente, si bien existen [fórmulas] generales". (Cardano (1545), referido en (Casalderrey, 2000), pág. 135)

En estas palabras de Cardano queda reflejado que las ecuaciones de cuarto grado no eran consideradas como algo natural, sino como una especie de ejercicio intelectual, que va más allá de la naturaleza y de la utilidad práctica que motivaba los problemas algebraicos.

Comparemos la evolución histórica del álgebra con la que se aborda en el ámbito escolar. Las primeras ecuaciones que resuelven los alumnos no siempre son presentadas como solución a un problema real o de índole práctica. La resolución de ecuaciones de primer grado aparece comúnmente en el contexto de hallar un número desconocido. El procedimiento que se usa habitualmente para resolverlas, se encuadra dentro del procedimiento hindú de "desandar lo andado", es decir ir realizando todas las operaciones en sentido inverso o desde un punto de vista más formal, aplicar a ambos miembros las propiedades de la adición y la multiplicación definidas, por ejemplo, en Q o R, hasta lograr despejar la incógnita.

El contexto geométrico es poco usado como marco de resolución de ecuaciones, aunque es frecuente que se utilice para interpretar el cuadrado de un binomio, y en menor grado, otras identidades algebraicas. Se mencionó más arriba que históricamente aparece ya en los babilonios, un amplio dominio de las técnicas aritméticas y en particular del uso de la operación radicación. Sin embargo hoy en día, esta operación es mostrada muy tímidamente a los estudiantes, al menos en sus primeros años de estudios secundarios. Por otra parte, se les plantea tempranamente a los alumnos ecuaciones igualadas a cero donde la mejor herramienta a emplear parece ser la factorización y la aplicación de la propiedad Hankeliana. Vemos que la concepción de este tipo de ecuación aparece recién en el siglo XVI, en la puja por encontrar la solución a ecuaciones cúbicas.
En el caso de Harriot, que parte de las raíces para llegar a la ecuación[24], lo que está aplicando es la propiedad de absorción del cero y no la propiedad Hankeliana. Es decir que, si queremos que a sea raíz planteamos $x-a$ que es igual a cero cuando $x=a$ y si queremos que b sea raíz, será necesario también que la ecuación contenga el factor $x-b$ pues valdrá cero cuando $x=b$, por tanto formamos la ecuación $(x-a)(x-b)=0$. Vemos que el principio que genera el razonamiento para construir la ecuación es que $x-a$ vale 0 cuando x vale a y $x-b$ vale cero cuando x vale b. Implícitamente estamos pensando en que la ecuación debe contener los factores $x-a$ y $x-b$, y luego al hacer la sustitución para verificar, debemos pensar en $x=a$ o $x=b$. Podría estar sucediendo que la lógica para construir la ecuación entre en contradicción con la lógica necesaria tanto para la resolución aplicando propiedad Hankeliana, como para la verificación. Quizás este tipo de razonamiento sea el que lleva a los alumnos a sustituir x por distintos valores en la verificación de este tipo de ecuación y también el que se ha detectado en alumnos de 12 y 13 años al proponerles:

Los papelitos tapan números, ¿Puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

[24] Idéntico razonamiento puede apreciarse en el trabajo de Descartes que se describió más arriba, para obtener una ecuación de cuarto grado con raíces dadas.

$$(\square - 6)\times(\square - 19)=0$$

El 46% de los alumnos testados en los estudios exploratorios, da como respuesta 6 y 19, justificando con $(6 - 6) \times (19 - 19)=0$, explicando que $6-6=0$, $19-19=0$ y $0\times0=0$.
Si bien la respuesta no puede considerarse incorrecta ya que no se ha hecho intervenir a una incógnita en la expresión teniendo en cuenta la edad de los alumnos y su escaso contacto con el concepto de variable, nos muestra su forma de pensamiento intuitivo y la necesidad de que ambos factores se anulen simultáneamente.

No se pretende establecer que los alumnos deben abordar el estudio del álgebra siguiendo los mismos pasos que recorrió el hombre históricamente, pero sin duda la historia nos brinda información valiosa sobre el razonamiento usado por diferentes hombres para resolver ecuaciones. Es por ello que volveremos a continuación sobre la historia para poder interpretar mejor el fenómeno que observamos y vincular la componente epistemológica con la didáctica.

Si nos detenemos a pensar en el enfoque didáctico del tema que aparece en los libros de texto en referencia a la resolución de ecuaciones factorizadas e igualadas a cero, vemos que la ecuación aparece dada y se trata de hallarle las raíces, sin embargo para Harriot primero están las raíces y a partir de ellas genera una ecuación que las tiene. Actividades donde los alumnos crean sus propias ecuaciones, de acuerdo a ciertas condiciones, han sido dejadas de lado con el objetivo de enseñar la resolución de ecuaciones. Así, podríamos preguntarnos: ¿cuántas veces propusimos a nuestros alumnos escribir una ecuación que tuviera raíz 5 o cuántas veces les propusimos formar una ecuación que tuviera raíces 5 y 7 por ejemplo? ¿Usarían la expresión factorizada para hacerlo? ¿O usarían otros métodos como prueba y error hasta lograr el resultado deseado?

La preocupación por obtener fórmulas generales dependientes de los coeficientes para resolver una ecuación de cualquier grado, continuó dominando el álgebra. Galois (1811-1832) se pregunta cuáles son las ecuaciones resolubles por radicales y cómo dada una ecuación puede determinarse si es resoluble o no. Utilizando la idea de grupo indica el camino que conduce a la respuesta. Así, la teoría de grupos nace resolviendo un problema del álgebra tradicional.

Entre 1830 y 1850 los algebristas ingleses, entre ellos Boole, Hamilton y Cayley, ampliaron el dominio del álgebra mediante el concepto de ley de composición, a nuevos objetos matemáticos como vectores, cuaterniones y matrices.
Los cuaterniones fueron inventados por Hamilton en 1843. Son de la forma $a+bi+cj+dk$ con a, b, c y d reales, a es la parte escalar y el resto se denomina parte vectorial. La parte vectorial es la diagonal de un paralelepípedo de dimensiones b, c y d. Cuando Hamilton trató de introducir a los cuaterniones en el conjunto de los números complejos se encontró con algo que lo sorprendió: encontró un sistema que contenía divisores de cero. (Bashmakova & Smirnova, 2000)
En efecto, en el conjunto de los complejos, se cumple que:

$$x^2+1= (x+ i)(x - i)$$

Sustituyendo la unidad *j* por *x* se obtiene:

$$(j + i)(j - i)=j^2+1=0$$

"El álgebra de Hamilton (1853) introduce el cero como elemento operativo por medio de la fórmula ab=0 siendo a y b distintos de cero. Estos números fungen como "divisores del cero". La condición es que conformen un anillo, siendo ambos incongruentes con el cero". (http://www2.gratisweb.com/revsalamandra/columnahueca.html)

Otra observación importante es que mientras que la multiplicación de los complejos es conmutativa, la de los cuaterniones no lo es. Este descubrimiento, y también el de las matrices por parte de Arthur Cayley (1821-1865), otro ejemplo de álgebra no conmutativa y con divisores de cero, abrieron las puertas a nuevas álgebras abstractas. Este tipo de hallazgos unido al nacimiento de las geometrías no euclideanas impulsó a los matemáticos del siglo XIX a liberarse de las costumbres y los hábitos mentales. (PRO Ciencia Conicet, 1987 b)
Podríamos agregar que estos hallazgos producen una nueva visión hacia las verdades matemáticas tornándolas de absolutas a relativas o condicionándolas a un campo de validez.

Encontramos aquí un elemento epistemológico clave a tener en cuenta en nuestras prácticas educativas. Según lo planteado arriba, podríamos inferir, que lo que permitió cambiar los hábitos mentales de los matemáticos fue el hallazgo de nuevas estructuras cuyo comportamiento no es el de las estructuras bien conocidas por ellos. Esto nos muestra que difícilmente podemos aspirar a que un alumno esté alerta frente a la aplicación incorrecta de un modelo mental si no incorporamos desde los primeros años en la enseñanza, estructuras que le permitan ampliar los mundos posibles. Volvemos a insistir en el punto. Si todas las operaciones que se le presentan al alumno durante años de su formación, son conmutativas y asociativas y tienen neutro, si todas las estructuras que conoce no admiten divisores de cero, ¿cómo es posible hacerlo dudar frente a la aplicabilidad de una propiedad en cierto contexto? Si la deducción inmediata que realizan los alumnos ante la información $a.b=0$ es que $a=0$ o bien $b=0$, estamos en presencia de un conocimiento que se ha constituido en un modelo de pensamiento y quizás está actuando como un obstáculo, pues su campo de validez ha sido extendido más allá de la naturaleza de *a* y *b*, conduciendo al alumno a respuestas incorrectas. En palabras de Anna Sierpinska, es como si el alumno viviera en un mundo cerrado...

"Un obstacle est lié à une conviction profonde, a un sentiment d´une vérite évidente, au sentiment que ce qu´on sait sur une question fondamentale est le seul savoir possible. Cést comme si on vivait dans un monde clos. Pour franchir l´obstacle, il faut sortir de ce monde et voir d´autres mondes possibles ainsi que les relations entre eux". (Sierpinska, 1987)

Si bien en Uruguay se denomina Hankeliana a la propiedad en la que nos hemos concentrado en este trabajo, no fueron encontradas evidencias históricas que unieran el nombre del matemático Hankel a ella. De todas maneras, no podemos descartar la

posibilidad de la autoría de Hankel. La propiedad parecería estar ligada al nombre de Otto Stolz. En su "Théorie analytique des nombres rationnels" establece una serie de generalizaciones de reglas del álgebra en 1885. Así lo señala Jean Claude Pont en http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pont.pdf :

"Stolz établit une série de "généralisations des règles fondamentales de l´algèbre":
- *commutativité et associativité de la multiplication, distributivité;*
- *0.A = A.0 = 0;*
- *si un produit AB=0, alors l´un au moins des facteurs doit être nul;*
- *(-A)B=B(-A)= -AB, (-A)(-B) = AB, où AB désigne un nombre rationnel quelconque."*

La propiedad que estamos estudiando parece ser crucial entre las estructuras que tienen divisores de cero, y las que no tienen. Si hay confusión sobre esto, se presentan dificultades y errores. Como veremos, la distinción de las estructuras (la clasificación de ellas como teniendo o no divisores de cero) fue muy importante en el desarrollo del álgebra abstracta. Cuando la mente pudo hacer esa distinción, fue un logro muy importante.

Hacia fines del siglo XIX, la imagen del álgebra como la disciplina que trata de las ecuaciones polinómicas y de las formas algebraicas, va de a poco cambiando para transformarse en la disciplina que trata de las estructuras algebraicas.
El trabajo de Heinrich Weber (1842- 1913) fue una de las principales contribuciones en este sentido, pues posibilitó un importante movimiento hacia la comprensión de la idea de una estructura algebraica y hacia la adopción del acercamiento estructural. En las siguientes palabras de Weber pueden apreciarse estos conceptos:

"The theory appears here as a direct consequence of the concept of field, itself an extension of the concept of group. It appears as a formal law without any regard to the numerical meaning of the elements involved... The theory is thus conceived as a pure formalism, which acquires life and content only when the elements are assigned with numerical values". (Weber (1893), referido en Corry (1996), pág. 36)

Entre las propiedades de un cuerpo, Weber menciona que para que un producto sea cero, es necesario que por lo menos uno de los factores lo sea. También dice que podemos considerar estructuras con divisores de cero como las congruencias módulo *n*, tomando *n* compuesto en lugar de primo.

En 1910, Ernest Steinitz publica una teoría abstracta de cuerpos, que constituye un paso decisivo en la consolidación y adopción del enfoque estructural en álgebra. Steinitz trabaja en la formulación abstracta del concepto de cuerpo introducido por Weber. Una de las principales fuentes de inspiración del trabajo innovador de Steinitz proviene de las ideas de Kurt Hensel (1861- 1941).

A Hensel se debe la invención de la teoría de los números *p*-ádicos que no desarrollaremos, por estar fuera de los objetivos de este trabajo, pero sí mencionaremos que un número racional *g*-ádico es una serie de la forma:

$$A = a_r + a_{r+1} g^{r+1} + a_{r+2} g^{r+2} + ...$$

donde r es un entero, g es un entero positivo y los a_i son racionales expresados como fracciones irreducibles cuyo denominador no tiene factores comunes con g.
Hensel notó que si tomamos un número primo p como base, el producto de dos números p-ádicos es cero si y solo si uno de los factores es cero. Sin embargo, esto no sucede si tomamos un número no primo g como base. Para Hensel su teoría era una extensión de trabajos previos sobre números algebraicos y resultó poco natural para él considerar una estructura con divisores de cero. Sin embargo en su segundo libro comienza su trabajo con la definición más general, usando una base genérica g e introduce más tarde el caso en que se toma como base un número primo, como un caso particular. En este cambio parece haber influido su alumno Abraham Fraenkel.

Fraenkel también colaboró en los trabajos de su tío, el matemático Alfred Loewy (1873-1935). Loewy trabaja con los números enteros, define la adición y la multiplicación de enteros positivos y establece luego la regla para el producto de dos enteros negativos. No introduce el concepto de anillo pero señala que el sistema de los enteros no es un cuerpo. A pesar de esto dice que algunos de los teoremas válidos para cuerpos lo son también en este sistema. Este es el caso del teorema que establece que el producto de dos enteros es cero, si y solo si uno de ellos lo es. Para probar esto usa el hecho de que el producto de dos enteros positivos es siempre un número positivo, el producto de un positivo por un negativo es negativo, y el producto de dos negativos es siempre positivo. Como consecuencia de este teorema, se prueba la cancelativa respecto del producto. (Corry, 1996)

De los trabajos de Loewy surge un potencial interés hacia el estudio de los sistemas de números que contienen divisores de cero. Fraenkel dirige su atención al estudio de estos sistemas y redirige las ideas de Loewy y Hensel en una nueva dirección que conduce a la definición e investigación de los anillos abstractos. Fraenkel trabaja en la elaboración de una axiomática para el sistema de los números p-ádicos de Hensel. Este trabajo, conjuntamente al de Hensel sobre cuerpos abstractos, sugieren una nueva dirección, que Fraenkel toma en su último trabajo: la elaboración de una teoría abstracta de dominios similar a los cuerpos de Steinitz, pero con divisores de cero. (Corry, 1996)

En el libro de Hensel de 1913, los anillos son definidos como dominios que satisfacen todas las propiedades de los axiomas de cuerpo, excepto el último. Este axioma establece simultáneamente, la existencia de un elemento identidad para la multiplicación, la existencia de un inverso respecto de la multiplicación para todo elemento y la no existencia de divisores de cero. En el sistema de axiomas para un anillo que Fraenkel escribe en 1914, estos tres puntos son separados en axiomas. Es así que Fraenkel inicia el estudio de los anillos abstractos, definiéndolos como dominios muy similares a los cuerpos, pero que poseen divisores de cero. El análisis que realiza de los números p-ádicos permite clarificar la diferencia entre los dominios con y sin divisores de cero. La importancia del trabajo de Fraenkel radica en que amplió los casos de entidades que debían ser reconocidas como pertenecientes a algún tipo de estructura algebraica.

Esta breve reseña histórica nos permite observar, cómo, poco a poco, el estudio de las estructuras algebraicas se convierte en la principal tarea del álgebra, de cara al siglo XX. También podemos apreciar cómo la aparición de estructuras con divisores de cero posibilita

la delimitación del concepto de anillo, separándolo del concepto de cuerpo. Asimismo la no existencia de divisores de cero pasa a ser una propiedad característica de los cuerpos.

La componente cognitiva

En esta investigación se utilizarán diversos marcos teóricos para explicar las dificultades observadas. Creemos que esto permite ver el mismo fenómeno desde distintas perspectivas y lo consideramos de fundamental importancia en el caso de una temática no explorada anteriormente, como la nuestra.

Según Bachelard (1974), el problema del conocimiento científico debe ser planteado en términos de obstáculos:

" [...] es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. [...] se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización."

Esta concepción implica pensar al individuo, no como un recipiente vacío, sino como un ser complejo que tiene ideas y concepciones propias que fueron adquiridas en el marco cultural de la sociedad donde crece. Todas estas ideas y concepciones influyen cuando el individuo se enfrenta a una situación nueva. No es posible borrar ni descartar los conocimientos anteriores del sujeto aún cuando éstos no sean correctos; como señala Bachelard (1974):

"Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios".

Nuestro entorno nos ha condicionado, influye en nuestro modo de "ver" las cosas. En el acto de conocer el sujeto no es pasivo, sino que pone en juego sus ideas previas, sus mecanismos de pensamiento, sus valores y concepciones que ha adquirido en el marco de la cultura a la que pertenece.

El individuo posee una cierta organización cognitiva que es la que pone en juego cuando se le propone resolver un problema; si carece del conocimiento teórico adecuado para resolverlo apelará a otros conceptos de base. Estos conocimientos de base podrían resultar ineficaces frente a la nueva tarea conduciéndolo a cometer errores y es aquí donde podríamos estar frente a un obstáculo. El error que comete un individuo es la manifestación de sus conocimientos anteriores, los alumnos los utilizan para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. Cuando se usa ese conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas. Este sería el caso de los alumnos que responden aplicando la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras donde esta propiedad no es válida.

No solo los conocimientos anteriores interfieren en la visión de los estudiantes sino que también existen intuiciones y creencias que afectan sus respuestas.
Bachelard (1974) nos habla del juego existente entre el mundo sensible y la razón:

"Cuando el conocimiento empírico se racionaliza, nunca se está seguro de que los valores sensibles primitivos no afecten a los raciocinios".

Es importante señalar que el obstáculo se hace visible cuando el sujeto se enfrenta a la resolución de un problema o a una pregunta, es en esta situación donde pone en juego sus ideas y sus conocimientos anteriores para intentar buscar una solución:

"Para todo espíritu científico todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Si no hubo pregunta, no puede haber conocimiento científico. Nada es espontáneo. Nada está dado. Todo se construye". (Bachelard, 1974)

Guy Brousseau toma la noción de obstáculo presentada por Bachelard y la aplica a la didáctica de la matemática; ve en ella el medio para cambiar el estatus del error en el aprendizaje de las matemáticas:

"El error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se les quiere asignar. El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que, ahora se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido". (Brousseau, 1983)

Un obstáculo es una concepción que ha sido, en principio, eficiente para resolver algún tipo de problemas, pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo, se resiste a ser modificado o ser rechazado, actúa como una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores que son constantes y persistentes. Para superar esos obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para que los alumnos sean conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo.

Brousseau (1983) enfatiza en que un obstáculo es un conocimiento y no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente. El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber. El obstáculo presenta la característica de que aún después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose.

Este autor distingue los siguientes tipos de obstáculos:

- Obstáculos ontogénicos, llamados también obstáculos psicogenéticos. Son debidos a las características del desarrollo del individuo.

- Obstáculos didácticos, son los que resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.
- Obstáculos epistemológicos, son los intrínsecamente relacionados al propio concepto. Son evidenciados por un análisis histórico y son considerados como parte del significado del concepto. Por lo tanto, encontrarlo y superarlo, parece ser una condición necesaria para la construcción de una nueva concepción.

Como se ha dicho, un obstáculo es de la misma naturaleza que un conocimiento. Resistirá el rechazo, intentará adaptarse localmente y modificarse de la forma más económica. Será necesario que el alumno se enfrente a una gran cantidad de situaciones nuevas que lo desequilibren para que considere la posibilidad de rechazar ese conocimiento que se ha constituido como obstáculo. Franquear un obstáculo exige una relación dialéctica del sujeto con el objeto de su conocimiento. Los verdaderos problemas serían los que favorecen esta dialéctica.

Si estamos entonces ante la presencia de un obstáculo, analicemos desde la perspectiva de Brousseau cuál podría ser su naturaleza. El modelo de pensamiento que estamos analizando aparece en estudiantes tanto de nivel secundario como de nivel terciario. Es entendible en los alumnos que no han tenido contacto con estructuras donde la propiedad Hankeliana no es válida, pero no así en alumnos del último año de bachillerato y alumnos de nivel terciario. Descartamos por tanto un obstáculo de origen ontogénico ya que ha sido detectado en diversos niveles de evolución de los estudiantes.

Es difícil establecer la categoría de obstáculo epistemológico pues no se observa históricamente un estancamiento en la evolución del álgebra debido al hallazgo de estructuras con divisores de cero, sí como señalan Bashmakova y Smirnova (2000) para el caso de Hamilton y los cuaterniones, una *sorpresa* al encontrar esta nueva situación que iba en contra de sus anteriores conocimientos. Como veremos más adelante para M. Artigue (1990), los obstáculos epistemológicos no están necesariamente ligados a su determinación histórica, por lo que no se descarta un origen de esta índole para este obstáculo.

El conocimiento que estamos estudiando bien podría considerarse como un obstáculo didáctico, ya que las elecciones didácticas en cuanto a álgebras presentadas a los alumnos durante la mayoría de sus años de estudios corresponden a estructuras sin divisores de cero. Esto ha conformado un único universo posible para el alumno, una única visión de las cosas.

Anna Sierpinska (1992) desarrolla una perspectiva teórica basada en el concepto de obstáculo epistemológico y los *actos de entendimiento*, los cuales juegan el papel de marco epistemológico. La relación entre obstáculo epistemológico y *acto de entendimiento* consiste en que la superación del obstáculo es el criterio para seleccionar los actos de entendimiento y de ahí considerar las condiciones básicas del entendimiento. El *acto de entendimiento* juega el papel de control sobre el camino ideal del entendimiento previamente imaginado. Para seleccionar los actos de entendimiento que juegan este papel, se utiliza el análisis histórico. Este análisis permite saber cuáles fueron los mayores rompimientos de la historia de la teoría y cuáles fueron los entendimientos que causaron

estancamientos. Pero este análisis histórico debe ir acompañado de estudios empíricos de cómo los conceptos se desarrollan en el estudiante. Un acto de entendimiento será importante si marca una transferencia a un diferente nivel de pensamiento. Para juzgar que un acto de entendimiento es más importante que otro, el acto importante debe consistir en una superación de obstáculo ya sea evolucionista o epistemológico. Superar un obstáculo no significa conectarse a otro sistema de creencias o a otro esquema de pensamiento, sino más bien cambiar el estatus de esas cosas a una posible forma de ver las cosas. Sierpinska (1992) concibe el aprendizaje de la matemática como un camino de "saltos":

"[...] jumps from old ways of knowing to new ways of knowing".

Analicemos ahora la visión de M. Artigue (1990) que mencionábamos más arriba. Esta autora se cuestiona si para conferir el estatus de obstáculo epistemológico en didáctica, es absolutamente necesario proveer prueba histórica de dificultades análogas. También se cuestiona si una transposición didáctica eficaz de la noción de obstáculo epistemológico, debe quedar forzosamente ligada a la historia. Es por estas cuestiones que Artigue, concentra la atención en los mecanismos productores de obstáculos, más que en la atribución del estatus de obstáculo epistemológico a una determinada dificultad encontrada en la enseñanza. Identifica cierto número de procesos, a la vez históricamente y para los alumnos actuales, productores de obstáculos. Entre ellos señala un proceso que se ha manifestado históricamente como productor de obstáculos: *la regularización formal abusiva*. Este proceso se encuentra en ciertos errores tenaces de los alumnos como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ o $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ y parece obedecer a una lógica parecida al proceso de *generalización abusiva*, situándose al mismo tiempo en un registro de funcionamiento más estrictamente formal. (Artigue, 1990)

Si encuadramos la problemática que estamos estudiando dentro de este último tipo de proceso, las causas de la *generalización abusiva* que se está produciendo, podrían estar dadas por las mismas razones que señalamos más arriba, a saber, que las prácticas didácticas han restringido la visión de los alumnos al presentarle únicamente álgebras sin divisores de cero, unido a las características sintácticas comunes que posee la expresión $a.b=0$, independientemente de lo que representen a y b.

Como mencionamos anteriormente, Vinner (1991) explica las respuestas de los estudiantes recurriendo a la noción de *imagen conceptual*. Cuando las personas se desenvuelven en los ambientes cotidianos no aplican las definiciones para poder comunicarse y entender el mundo que las rodea. Si alguien nos dice "Qué bonito cielo azul" entendemos perfectamente esta oración y nuestro cerebro no consulta ninguna de las definiciones de las palabras involucradas en esa oración, tampoco sería posible encontrar una definición que nos describiera perfectamente lo que significa "azul". ¿Qué es entonces lo que consulta nuestro cerebro para poder comprender? Consulta las *imágenes conceptuales* asociadas a determinadas ideas o conceptos. La imagen conceptual es "algo" no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Esto puede ser una representación visual del concepto, en caso de que la tenga; también puede ser una colección de impresiones o experiencias asociadas al concepto.

Las representaciones visuales, las "fotos" mentales, las impresiones y las experiencias asociadas al nombre del concepto pueden ser trasladadas a formas verbales. Pero es importante recordar que estas formas verbales no fueron las primeras cosas evocadas por nuestra memoria, aparecen en una etapa posterior. Incluso cuando no conocemos el significado de alguna palabra que es esencial para comprender un contexto, recurrimos a su definición para entenderla pero una vez que ese significado se ha construido, pasamos a olvidar la definición y nos quedamos con la *imagen conceptual*. Se usa la metáfora del andamio para describir esta situación: el andamio se usa para construir el edificio, pero una vez que está construido, el andamio se quita.

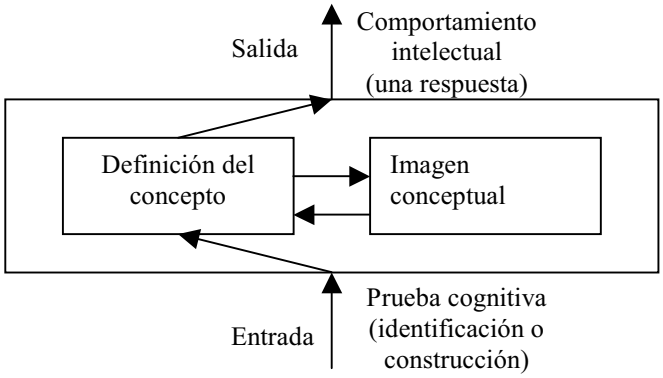
Los hábitos de pensamiento de los ambientes cotidianos son trasladados a los ambientes técnicos. Si la persona no está especialmente entrenada a funcionar en el modo técnico para lo cual es imprescindible consultar las definiciones, funcionará consultando las *imágenes conceptuales*, que pueden contener aspectos inconsistentes y que no necesariamente reflejan todos los aspectos del concepto. Encontramos en este sentido una posible explicación para los errores que cometen los alumnos: estos responden consultando la *imagen conceptual* que no necesariamente contiene los aspectos formales del concepto y que además puede contener aspectos contradictorios del mismo. Cuando los alumnos responden que si el producto de dos funciones es la función nula, una u otra es la función nula o que si el producto de dos matrices es la matriz nula, una u otra es la matriz nula, no necesariamente están evocando *imágenes conceptuales* asociadas a esos conceptos, sino que posiblemente evoquen cierta *imagen conceptual* asociada a la propiedad Hankeliana de los números reales.

Vinner (1991) modela la estructura cognitiva de un individuo asumiendo la existencia de dos celdas. Una celda es para la definición y la otra para la *imagen conceptual*. Una o las dos pueden estar vacías. La celda de la *imagen conceptual* se considera vacía hasta que algún significado se asocie al nombre del concepto. Esto sucede, en muchos casos, cuando se memoriza la definición sin entender el significado. Debería haber interacción entre estas dos celdas aunque se pueden formar independientemente.

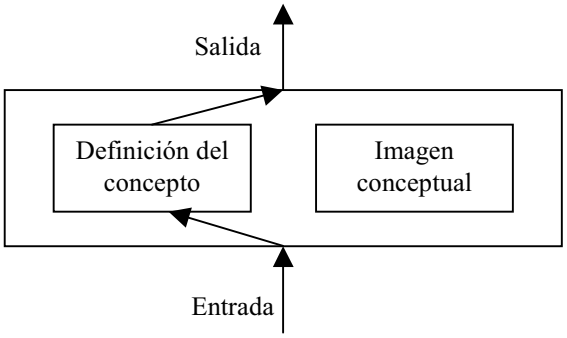
Cuando introducimos un concepto por primera vez a través de su definición, la celda de la imagen conceptual está vacía en un principio, pero luego de varios ejemplos y explicaciones se va llenando. No necesariamente refleja todos los aspectos de la definición del concepto. Por ejemplo la *imagen conceptual* podría contener la información de que si $a.b=0$ entonces $a=0$ o $b=0$, pero no contener la información de lo que representan a y b. Podría tener solamente la regla pero no aplicaciones de ella, como ser la resolución de ecuaciones factorizadas e igualadas a cero.

Además de los procesos de formación de conceptos están los de resolución de problemas o tareas. Muchos docentes piensan que el proceso intelectual envuelto en esas tareas será como algunos de los siguientes[25]:

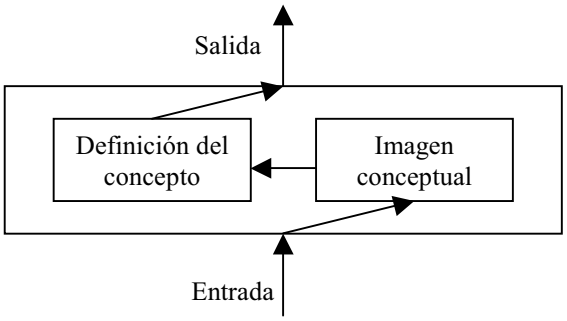
[25] Los cuadros que se insertan para ilustrar mejor el proceso que se describe fueron tomados de (Vinner, 1991).



Interacción entre definición e imagen



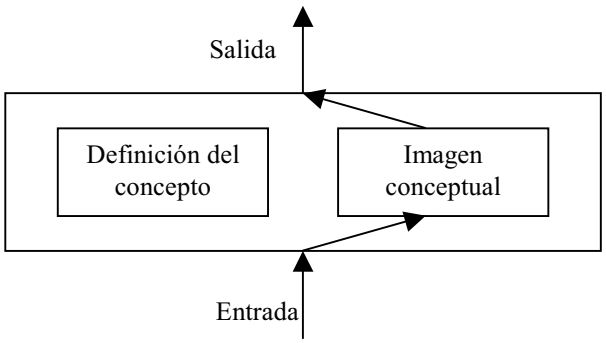
Deducción puramente formal



Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo

La característica general de estos procesos es sin importar cómo se presente la tarea o problema a resolver en un contexto técnico, el alumno no dará su solución hasta no consultar la definición. Sin embargo lo que se da en la realidad es muy diferente. Como ya se explicó más arriba, en los ambientes cotidianos o no técnicos las personas no están habituadas a consultar las definiciones porque no las necesitan para poder comunicarse o entender el mundo que las rodea, les alcanza con consultar las *imágenes conceptuales* asociadas a las ideas o conceptos. Esta situación que se da en los contextos cotidianos es

transferida a los contextos técnicos pues es difícil entrenar al sistema cognitivo a actuar en forma contraria a su naturaleza y forzarlo a consultar la definición ante la resolución de una tarea. En la práctica lo que realmente ocurre es:



Respuesta intuitiva

Aquí la celda de la definición no se consulta, los modos de pensamiento de la vida cotidiana dominan la situación. Como en la mayoría de los casos la referencia a la *imagen conceptual* dará resultado, los alumnos no son incentivados a consultar la definición. Proponer problemas no rutinarios aparece como una alternativa para cambiar esta situación. Vinner sostiene que una de las metas de la educación es la de cambiar los hábitos de pensamiento de la vida cotidiana a los modos de pensamiento de los contextos técnicos, donde es necesario consultar las definiciones para no cometer errores. Cree que los conceptos matemáticos deben ser adquiridos en el modo cotidiano de adquisición de conceptos y no en el modo técnico. Se podría comenzar por ciertos ejemplos y contra-ejemplos para que se forme la imagen conceptual. Esto no quiere decir que no deba ser enseñada la definición del concepto pero debe tenerse claro que no será lo primero que el alumno consulte al momento de dar una respuesta.
Pensamos que el éxito que tenga un alumno en la resolución de tareas dependerá de la riqueza de la *imagen conceptual* asociada al nombre del concepto, si el alumno posee una *imagen conceptual* pobre, seguramente fracasará frente a la resolución de muchos problemas matemáticos.

¿Pero cómo podríamos explicar el hecho de que el alumno aun teniendo conocimiento de la propiedad Hankeliana no la aplica a la resolución de ecuaciones, no solo cuando es la herramienta más adecuada, sino también, cuando es la única herramienta disponible?
Para explicar este fenómeno usaremos el concepto de *compartimentalización* que presenta Vinner (1990).

"By "compartmentalization", I refer to situations in which two pieces of knowlodge (or information) that are known to an individual and that should be connected in the person´s thought processes nevertheless remain unrelated". (Vinner, 1990)

Desde el punto de vista psicológico, la *compartimentalización* está más cerca del concepto de olvido que cualquier otro fenómeno. Sin embargo, aclara Vinner (1990), no es lo mismo

que el olvido. No es como olvidar un número de teléfono o una dirección. Se habla de *compartimentalización* cuando esperamos que cierto detalle específico sea evocado en la mente de cierta persona, porque ese detalle es relevante en lo que la persona está pensando, pero resulta que éste no es evocado. Este autor habla de que la mente no actuó en forma eficiente, pues de haberlo hecho, todas las cuestiones relevantes que guardan relación con lo que la persona está pensando deberían haber sido evocadas en el mismo momento que la idea principal. Si la mente del individuo es eficiente entonces todas las asociaciones relevantes a ese estímulo deberían ser hechas. Cuando el cerebro no realiza la asociación esperada podríamos estar ante el fenómeno de *compartimentalización*. Este fenómeno puede dar lugar a un comportamiento ineficiente. Es relevante señalar que una asociación que se ha hecho en la mente de una persona es algo que va más allá del control de ella misma. La persona enfrenta un estímulo. Si su mente es eficiente, entonces todas las asociaciones relevantes al mismo deberían ser realizadas. Lamentablemente se tiene muy poca información sobre como se almacenan los conocimientos en nuestra mente y como son recuperados.

Vinner (1990) distingue las *respuestas directas* a un estímulo y las *respuestas asociadas*. Se habla de *respuesta directa* cuando solamente se contesta lo que se pregunta. Por ejemplo, si nos preguntan dónde queda tal restaurante, seguramente responderemos dando las indicaciones necesarias para que la persona arribe a ese lugar (*respuesta directa*), pero si agregáramos además como parte de la información que en ese restaurante no se come muy bien (*respuesta asociada*), podría suceder que esta última información resultara totalmente irrelevante para la persona que está preguntando en el caso de que el restaurante solo sirviera como referencia para ubicar otro lugar. Parecería entonces que, desde un punto de vista práctico, no habría razones para alentar a los estudiantes a dar respuestas asociadas como parte de su educación general, ya que nunca se sabe si serán útiles o no. Más aun, desde el punto de vista cognitivo, no se sabe cómo formarlas.
Vemos nuevamente, siguiendo la línea de pensamiento de Vinner, que los modos de pensamiento en la vida cotidiana interfieren con los contextos técnicos. El tipo de respuesta que sería ideal para resolver problemas matemáticos no es congruente con el tipo de respuesta que da un individuo en un contexto de la vida real. Para ser eficiente en la resolución de problemas se necesita de la habilidad para evocar numerosas respuestas asociadas a cierto estímulo dado.

En el caso que estamos estudiando, de alguna manera, el conocimiento (la propiedad) está en algún lugar de nuestra mente pero lo que no siempre se produce es una evocación del mismo para poder aplicarlo. Muchos alumnos conocen la propiedad pero no todos la aplican, aun cuando sea la herramienta óptima. Parecería que la ecuación factorizada e igualada a cero no constituye un estímulo suficiente que les permita evocarla. Entonces no se produce una asociación que se supone debería realizarse y el alumno no obtiene éxito en la actividad que enfrenta, ya sea porque no relaciona el contexto de las ecuaciones con la propiedad y ésta es la única herramienta disponible o porque usa otras herramientas más costosas a nivel de la operatoria involucrada y comete errores.

Vinner (1990) también nos habla de que los estudiantes pueden tener ideas inconsistentes. Una persona difícilmente pueda decir que *p* y *no p* pueden verificarse simultáneamente, sin embargo, hay situaciones que pueden derivar contradicciones.

Pudiera ser que en cierto momento t_1 un estudiante creyera en la validez de cierta proposición *p* y en otro momento diferente t_2, creyera en la validez de *no p*, sin darse cuenta de que en t_1 pensó que *p* era verdadera. Este autor señala que esta situación puede verse como un caso especial de *compartimentalización*. También puede suceder que un estudiante tenga ideas inconsistentes, pero una idea no es la negación de la otra:

*"Usually, if a student is described as having inconsistent ideas and one idea is not the negation of the other idea, the student has ideas **p** and **q** from which ideas **r** and **~r** can be derived. However, [...] every derivation is carried out within a formal or informal system which has its own axioms and inference rules. When saying that **r** and **~r** can be derived from **p** and **q**, about whose system are we speaking? The teacher´s? The student´s? Perhaps and about an objective universal structure? But objective universal structures do not exist, and therefore it should be either the student´s or the teacher´s. If it is only the teacher´s, then the contradiction is not derived in the student´s system, and the student does not face a problem". (Vinner, 1990)*

Ejemplifiquemos esta situación tomando el caso del error en la verificación que hemos observado. Se le pide a un alumno resolver y verificar la ecuación $(x-5)(x-6)=0$. Supongamos que calcula las raíces 5 y 6, y realiza el siguiente planteo (incorrecto) como verificación de las mismas:

$$(5-5)(6-6)=0$$
$$0 \,.\, 0 = 0$$

Obsérvese que el estudiante está implícitamente aceptando que $x \neq x$, ya que para él, simultáneamente, una *x* vale 5 y la otra vale 6. Pero no es el estudiante el que se da cuenta de este error lógico sino que seguramente sea su docente, que bien sabe que *x* es igual a *x*. Por otra parte, si al estudiante se le preguntara si $x=x$, es bastante seguro que conteste que sí. Con esto queremos decir que, el estudiante no puede percibir la contradicción en el planteo que hace, aun cuando de alguna manera sabe que *x* debe ser igual a *x*. Posiblemente, lo que no hace el estudiante es la conexión. No se da cuenta que sustituir dos valores distintos equivale a utilizar dos diferentes *x* en la misma situación. Pero aún así, no tenemos la certeza si de evocarse estos dos comportamientos el alumno se daría cuenta de su error.

Vinner señala que si solamente el docente se da cuenta de la contradicción, entonces ésta no fue derivada en la estructura cognitiva del estudiante, y el alumno no está enfrentando un problema. Si se quiere convencer al estudiante de que tiene ideas que resultan contradictorias, entonces el estudiante deberá adquirir la misma, o prácticamente la misma, estructura matemática y principios lógicos que su profesor tiene, para poder percibir el error. Esto es difícil, y por tanto es poco probable que las ideas inconsistentes contribuyan al desarrollo matemático del estudiante. El punto que sostiene este autor es que los conflictos cognitivos no siempre conducen a un proceso de acomodación:

"The conflict there [in the learning of school mathematics] frequently does not disturb or engage the student, and therefore the student ignores it". (Vinner, 1990)

Supongamos ahora que la estructura cognitiva del estudiante le permita darse cuenta de que existe una contradicción. Vinner dice que diferentes escenarios son posibles. El estudiante puede llegar solo a la contradicción. Si la contradicción es inaceptable, el estudiante puede tratar de encontrar cuál es la idea incorrecta en el razonamiento que realiza. Si lo hace, entonces eso contribuye al desarrollo de su pensamiento matemático. Sin embargo, es posible que el estudiante reconozca como no válido algo que es matemáticamente correcto y termine desechando esa idea en lugar de la incorrecta. Volviendo al caso que analizamos más arriba, puede suceder que el estudiante sea capaz de seguir las argumentaciones del profesor que trata de llevarlo a un conflicto, pero esto no garantiza que el alumno deshechará las ideas incorrectas.

Las inconsistencias no necesariamente son una ayuda en el aprendizaje de la matemática. Es verdad que un estudiante tratará de realizar una acomodación cuando reconoce una contradicción. Pero esto sólo sucederá si el estudiante está convencido de que existe una contradicción. Incluso si el estudiante reconoce una contradicción y trata de realizar una acomodación, no hay garantía de que la acomodación se realice en la dirección deseada.

Veamos ahora el punto de vista de Efraim Fischbein desde la *Teoría de la Intuición*. Este autor considera a la cognición intuitiva como una componente fundamental de la actividad cognitiva. No hay una definición ampliamente aceptada sobre conocimiento intuitivo. El término *intuición* es usado como un concepto primitivo y el significado de intuición es considerado como intuitivamente evidente:

"There is no commonly accepted definition for intuitive knowledge. The term `intuition´ is used as one uses mathematical primitive terms like point, line, set, etc. The meaning of intuition is implicitly considered as being intuitively evident. The commonly, implicitly accepted property is that of self-evidence, that is opposed to a logical-analytical endeavor." (Fischbein, 1999)

Fischbein, en su trabajo, usa el término intuición como equivalente a *conocimiento intuitivo*, no es una fuente de conocimiento, no es un método para conocer, es un tipo de cognición. Se admite *intuitivamente* que el camino más corto entre dos puntos es el segmento que los une, que todo número natural tiene un sucesor, que el todo es mayor que cada una de sus partes, que un cuerpo caerá si no se lo sostiene, etc.

Todas estas premisas son aceptadas como inmediatas y autoevidentes, y no sentimos la necesidad de una prueba formal o empírica para aceptarlas como verdaderas. La autoevidencia es una característica del conocimiento intuitivo. Contrariamente, la premisa "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano", no es autoevidente, no es aceptada intuitivamente.

Fischbein distingue *percepción* e *intuición*. La percepción también es una cognición inmediata, podemos ver una ventana frente a nosotros y no tener duda de su existencia, pero no es lo que él llama conocimiento intuitivo. La intuición siempre excede los

elementos dados; una intuición es una teoría, implica una extrapolación que va más allá de la información dada.

Fischbein afirma que en la matemática, y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos, o cogniciones, aquellos que son autoevidentes y los que están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. A los primeros se les denomina intuitivos, y a los segundos, lógicos.

Las cogniciones intuitivas se caracterizan por ser autoevidentes, en el sentido de que no requieren de pruebas para convencer, ya sean formales o empíricas. Son persistentes en el tiempo; si son contradictorias con lo formal, es necesaria retroalimentación permanente del conocimiento para que no sustituyan al conocimiento correcto. Son globales en el sentido de que no son producto de un análisis y no provienen de razonamientos analíticos.

Debido a estas características de los conocimientos intuitivos, la intuición puede considerarse como un obstáculo, cuando la inmediatez de un resultado inhibe el proceso de análisis necesario para dar una respuesta adecuada. A veces, la teoría formal es incongruente con las intuiciones, y se pueden presentar problemas al momento de tener que resolver una determinada tarea. Si la intuición contradice los aspectos formales será difícil llegar a una solución adecuada del problema. Entonces, la necesidad de armonizar la intuición y los aspectos formales surge como una necesidad básica en la enseñanza de la matemática. El objetivo principal se situaría en la superación de conflictos, construyendo una correcta relación entre intuición y actitud teórica, o sea, una complementariedad entre el conocimiento formal y el intuitivo.

El conocimiento intuitivo se estructura en modelos, que sirven para interpretar alguna situación, al sustituir algún conocimiento complejo e inalcanzable por una representación accesible:

" A mental model is meant "to give the answers", that is, it has a heuristic function. Mental models are theories about certain realities. They allow us to make inferences and predictions. Mental models are structured entities and their structure must correspond to that of the reality they are supposed to represent." (Fischbein, 1990)

"Let us now try to define the meanings of the terms model and mental model as we understand them. "Given two systems A and B, B may be considered a model of A if, on the basis of a certain isomorphism between A and B, a description or a solution produced in terms of A, may be reflected, consistenly, in terms of B and viceversa." (Fischbein, 1989, p.9, referido en Fischbein et al, 1990)

Esta definición enfatiza ciertos aspectos. Primero, que un modelo debe tener la capacidad de actuar como un sustituto en un proceso de razonamiento. Es el caso de las representaciones pictóricas que usamos para recta, punto, etc.
En segundo lugar, la relación entre el original y el modelo debe estar basada en cierta correspondencia estructural, de lo contrario no se cumpliría la función heurística. Debe tenerse en cuenta, que algunas similitudes superficiales pueden perderse.

En tercer lugar, la distinción entre original y modelo, no es absoluta, pues ambos sistemas pueden intercambiar roles. Usualmente, uno de ellos es más adecuado para jugar el papel de modelo, porque, de alguna manera, la función heurística debe ser más accesible cognitivamente que el original, en una circunstancia dada. (Fischbein, 1990)

"Various types of models may be described. Models may be mental constructs (mental models) or objective, material constructions. Mathematical models are mental models, while the material model of a building has an objective existence. The distinction is relative because a material model expresses, usually, a mental representation and a mental model is related to some kind of objective representation. The mental, pictorial representation of a line corresponds to a drawn image of a line.
Models may also be intuitive (figural) and abstract. The function $y=ax^2+bx+c$ *is an abstract model of a parabola, while the corresponding graph is a figural model of the same function. Mental models may be tacit or explicit. Our mental operations, our solving strategies may be influenced by interpretations of which we are not aware." (Fischbein et al, 1990)*

Una de las principales características de las intuiciones es su resistencia a cambiar, su rechazo a admitir alternativas. Existen mecanismos que favorecen la perseverancia de las intuiciones. Uno de los principales es el de la experiencia. Las intuiciones básicas son formadas a través de una larga experiencia. La experiencia, implica un cierto grupo de restricciones y condiciones, pero también ofrece numerosas oportunidades de confirmar y reforzar las creencias correspondientes. Un segundo factor que incide en la perseverancia de las intuiciones, guarda relación con la naturaleza de nuestros esquemas mentales:

" The stability of intuitions is related to the stability and internal coherence of the mental schemas. As Piaget has frequently emphasized, mental operations are always organized in large systems working according to certain schemas. A number belongs to an infinite collection of numbers. The concept of number, in turn, is based on schemas like classification and order.
Intuitions are organized according to the same mental schemas as operations. Their specificity consists in their implicitness and in their tendency to attain the appearance of closed and self-consistent cognitions. These properties are obtained chiefly through a kind of automatization and condensation of the underlying mechanisms.
The resistance of intuitions to alteration expresses the tendency of the respective systems of schemas to conserve their unity, their hierarchy and their behavioral role. As already said, it is through a lasting experience that such systems of schemas are built and repeatedly reinforced. " (Fischbein, 1987)

El *efecto de primacía* es otro factor que también podría contribuir a la perseverancia de ciertas intuiciones:

"Primary effects in judgmental behavior are generally said to exist when, in judging an object or a person, the individual bases his/her inferences predominantly on early information and appears to be affected less by late information". (Kruglansky and Freund, 1983, p. 452; referido en (Fischbein, 1987))

El efecto de primacía significa que la primera impresión, la primera interpretación, etc., que tenga un individuo sobre una determinada cuestión, influye en la perseverancia de la actitud inicial del sujeto. El individuo tiende a favorecer o mantener la primera interpretación global de algún hecho, algunas veces contra otras alternativas e inclusive en discrepancia con argumentos sensatos o información posterior que contradiga la primera interpretación del individuo. Diversas investigaciones muestran la existencia de una tendencia en los individuos, a generar impresiones globales en base a cierta información inicial; a asentar esa impresión como una estructura aparentemente coherente y a mantenerla relativamente impermeable a evidencia posterior.

La aplicación de la propiedad que estamos analizando, parecería (a priori) tener las características de un conocimiento intuitivo. No tenemos evidencias de si dicha propiedad es de naturaleza intuitiva para alumnos que aún no la han estudiado (alumnos de nivel primario) o si deviene en intuitiva como consecuencia de la enseñanza. Hay mecanismos que favorecerían, en este caso, que la mencionada propiedad devenga en conocimiento intuitivo. Entre ellos, la larga experiencia del alumno con la misma y la escasa presencia de casos donde no es válida su aplicación. La experimentación que se le ha presentado al alumno no posee restricciones y por tanto las oportunidades de aplicación le han permitido confirmarla permanentemente, reforzando así sus creencias y confiriéndole la característica de estabilidad. Como ya se ha dicho, las intuiciones se organizan en esquemas y las experiencias repetidas por largo tiempo son tanto las que favorecen su formación como las que los refuerzan.

La propiedad que estamos estudiando y su validez en las estructuras algebraicas que se le presentan al alumno, constituyen el contacto inicial del estudiante con un tipo de estructuras que pueden generar un modelo de pensamiento, que podría obstaculizar el acceso a interpretaciones más generales o más abstractas. Este modelo condiciona las respuestas del alumno y tengamos en cuenta, como ya dijimos, que la inmediatez de un resultado (respuesta intuitiva) puede inhibir el proceso de análisis necesario para arribar a una respuesta correcta.

"The initial model may become an obstacle which can hinder the passage to a higher-order interpretation -more general and more abstract- of the same concept." (Fischbein, 1987)

En el caso de los estudiantes que han recibido instrucción específica sobre estructuras con divisores de cero, se aprecia igualmente una fuerte tendencia a generalizar la propiedad Hankeliana, ¿cómo podría ser explicado esto?:

"In seeking coherence for our cognitive organization, we tend in the course of our mental operations to integrate information that is easily available and to ignore information that requires a more sophisticated research effort. Also, we tend to rely on information that seems to be representative for an entire class". (Fischbein y Schnarch, 1997)

En la búsqueda de esa coherencia para nuestra organización cognitiva, los individuos tienden a generar impresiones globales sobre la base de cierta información inicial y a organizarlas en estructuras aparentemente coherentes, que se mantienen impermeables a

evidencias que no son congruentes con la información que poseen. Como señala Fischbein (1987):

"[...] the need for being able to take a firm decision is stronger than the need to know".

Diversas explicaciones se presentan para los errores que cometen los alumnos, entre ellas: obstáculos, mecanismos productores de obstáculos, hábitos de pensamiento de la vida cotidiana que interfieren en los ambientes técnicos, interferencia entre la intuición y la razón. No encontramos en ellas contradicciones sino complementariedad. Todas nos brindan elementos teóricos de gran valor al momento de la toma de decisiones para la implementación de la enseñanza.

Según Trigueros y Ursini (2003):

"The development of algebraic language and its use for different purposes requires the development of the concept of variable as a single multifaceted concept that includes different aspects".

Desde su punto de vista, la enseñanza debería hacer énfasis en la distinción entre los diferentes usos de la variable con el objetivo de que los estudiantes pudieran integrarlos en una única entidad conceptual: la variable. Reconocen diferentes usos de la variable que están relacionados a diferentes concepciones del álgebra, por ejemplo, aritmética generalizada, resolución de problemas, estudio de relaciones y funciones, estudio de estructuras. Estas diferentes concepciones del álgebra y los diferentes usos de la variable aparecen comúnmente mezclados en la enseñanza del álgebra escolar. Parecería que las prácticas docentes no hacen énfasis en la distinción entre cada uno de los usos y por tanto se hace difícil para los estudiantes diferenciarlos. Ursini y Trigueros señalan que en la enseñanza del álgebra elemental, los aspectos más usados del concepto de variable son: como una incógnita[26], como un número genérico, y como variables en una relacional funcional. Presentan la siguiente categorización para el concepto de variable[27]:

[26] Las autoras hablan de "*specific unknown*" que ha sido traducido, en este trabajo, como "incógnita".
[27] El diseño del cuadro corresponde a Ursini y Trigueros (2003)

Variable	Conceptualización y representación	Interpretación de símbolos	Manipulación
Incógnita	como una incógnita en una situación particular y/o en una ecuación	como incógnitas en una ecuación	Factorizar, simplificar, desarrollar, trasponer o aplicar métodos de balanza en una ecuación.
Número genérico	como un número genérico involucrado en métodos generales o reglas que se deducen de patrones numéricos y/o geométricos y/o familias de problemas similares	como una generalización en expresiones algebraicas o en la expresión de métodos generales	Factorizar, simplificar y desarrollar para transformar expresiones.
en relación funcional	de relaciones funcionales (correspondencia y variación) a través de tablas, gráficos o representaciones analíticas	Representando correspondencias y variación en representaciones analíticas, tablas y gráficos	Factorizar, simplificar, desarrollar para transformar una expresión, sustituir valores para determinar intervalos de variación, valores máximos/ mínimos y comportamiento global de la relación.

De acuerdo a esta categorización, establecen cuáles son las capacidades básicas necesarias para una comprensión del concepto de variable.

Respecto de la variable como incógnita, consideran que hay ciertos aspectos básicos que caracterizan su comprensión. Por ejemplo, es necesario reconocer en una situación o problema o ecuación, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado usando como información la que se presenta en la ecuación o en el problema. Por ello será necesario ser capaz de representar las entidades desconocidas en forma simbólica y plantear expresiones algebraicas para describir las relaciones entre los datos dados. Los datos podrían relacionarse a través de una única ecuación o a veces con varias. Cuando se enfrentan ecuaciones, dadas o construidas, es necesario ser capaz de realizar manipulaciones algebraicas para encontrar él o los valores de la incógnita o incógnitas que satisfacen la ecuación. Es también importante, ser capaz de sustituir la incógnita por él o los valores obtenidos para verificar que se obtiene una proposición verdadera.
Para desarrollar la comprensión de las variables como números genéricos, un prerrequisito es la habilidad de reconocer patrones y encontrar o deducir reglas generales. Para realizar esto satisfactoriamente es necesario distinguir los aspectos invariantes de los que son variables. Es necesario también ser capaz de introducir símbolos para representar proposiciones generales, reconocer un símbolo como representando un objeto indeterminado, y manipular (desarrollar, factorizar) expresiones que involucran variables como números genéricos donde no se requiere asignarles ningún valor específico como cuando se opera con polinomios. Números genéricos aparecen en expresiones como $(3x+5)$ o como parámetros en ecuaciones expresadas en forma general como $ax^2+bx=0$. Es necesario interpretarlos como cantidades generales y distinguirlos de las variables que representan una incógnita y pueden ser determinadas.

Para entender a las variables en una relación funcional es necesario reconocer situaciones donde la correspondencia entre variables y la variación están presentes. Estas situaciones pueden involucrar información dada en tablas, gráficas, expresiones analíticas o lenguaje verbal, es decir que la diversidad de registros estará presente. En cada una de estas representaciones es importante reconocer correspondencias entre variables y cómo la variación de una de ellas incide en la otra. El reconocimiento de una relación implica la capacidad de ver que cada variable puede tomar diversos valores posibles dependiendo del intervalo donde la relación está definida. La habilidad de determinar la correspondencia entre las variables se refleja en la capacidad de determinar el valor de una de las variables cuando las otras son conocidas, lo que sería el cálculo de imágenes o de preimágenes. En general para calcular preimágenes es necesario plantear ecuaciones, de forma que las diferentes concepciones de la variable aparecen entrelazadas en la resolución de problemas. La habilidad de trabajar con variación se puede observar en la capacidad para determinar intervalos o reconocer cuándo la función crece o decrece, es positiva o negativa, tiene un máximo o un mínimo, etc. También es necesario ser capaz de representar la información usando diferentes registros de representación y transitar entre ellos. Cuando se requiere de una expresión analítica es necesario introducir símbolos para nombrar las variables relacionadas y distinguir estas expresiones de ecuaciones.

"A good understanding of variable implies the comprehension of all these aspects and the possibility to relate them with the corresponding use of variable. Students should develop the ability to interpret the different uses of variable as required by specific problem situations and to acquire the capability to shift between them in a flexible way, integrating them as facets of the same mathematical object". (Trigueros y Ursini, 2003)

A manera de resumen, para cada uno de los usos de la variable, Trigueros y Ursini han especificado diferentes aspectos que corresponden a diferentes niveles de abstracción en los cuales deberían ser manejados. Los requisitos que señalan para una comprensión elemental del concepto de variable se presentan a continuación. Se respetará la notación introducida por ellas (U_i, G_i, F_i) que luego será utilizada en la etapa de análisis de los resultados.

"Consideramos que un estudiante entiende a la variable como incógnita si él o ella es capaz de:
U_1- reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema;
U_2- interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como representando ***valores***[28] *específicos que pueden ser determinados considerando las restricciones dadas;*
U_3- sustituir la variable por él o los valores que hacen a la ecuación una proposición verdadera;
U_4- determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando operaciones algebraicas y/o aritméticas;
U_5- simbolizar las cantidades desconocidas que sean identificadas en una situación específica y usarlas para representar la situación a través de una ecuación." (Trigueros y Ursini, 2003)

[28] La negrita es nuestra.

Según estas autoras, se podría argumentar que una incógnita no es la manifestación de una variable porque representa un valor determinado, sin embargo, ellas consideran que la primera percepción de un símbolo literal cuando se está trabajando en álgebra es, o debería ser, la de un símbolo que representa cualquier valor, y que solo en una segunda instancia puede definirse su rol en la expresión.

"Consideramos que un estudiante entiende a la variable como un número genérico si él o ella es capaz de:
G_1- reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas;
G_2- interpretar un símbolo como la representación genérica de una entidad indeterminada que puede tomar cualquier ***valor***[29]*;*
G_3- deducir reglas y métodos generales, distinguiendo los aspectos invariantes de los variables en secuencias y familias de problemas;
G_4- manipular los símbolos;
G_5- simbolizar proposiciones generales, reglas o métodos." (Trigueros y Ursini, 2003)

"Consideramos que un estudiante entiende a las variables en una relación funcional si él o ella es capaz de:
F_1- reconocer una correspondencia entre variables, independientemente de la representación usada: tablas, gráficas, expresiones verbales, representaciones analíticas.
F_2- si es posible, determinar los ***valores***[30] *de la variable considerada dependiente, dando condiciones apropiadas a la variable considerada independiente;*
F_3- si es posible, determinar los ***valores***[31] *de la variable considerada independiente, dando condiciones apropiadas a la variable considerada dependiente;*
F_4- reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional;
F_5- si es posible, determinar el rango de una variable cuando conoce el rango de la otra variable;
F_6- si es posible, simbolizar una relación funcional basándose en el análisis de los datos de un problema." (Trigueros y Ursini, 2003)

Como ya se dijo anteriormente, este marco teórico describe los aspectos básicos involucrados en el entendimiento de la variable como un concepto polifacético. Apuntan a las dificultades específicas que tienen los estudiantes con cada uno de los usos de variable y que determinan su éxito o fracaso en el aprendizaje del álgebra escolar y en tópicos matemáticos más abstractos.

En el marco teórico que presentan Trigueros y Ursini, podemos observar que en cualquiera de las facetas de la variable, ésta es interpretada como un valor, como un número genérico o como una cantidad. Creemos que esta es la interpretación que debe lograr un estudiante cuando comienza a estudiar álgebra pero que la misma debe ir evolucionando hacia

[29] La negrita es nuestra.
[30] La negrita es nuestra.
[31] La negrita es nuestra.

interpretaciones más complejas y más abstractas, para llegar a concebir, en estudios más avanzados, por ejemplo, funciones de funciones. Con esto nos referimos a que un estudiante de nivel terciario, pueda ver no solo números representados por letras sino también objetos matemáticos más complejos en una expresión del tipo $p.a=0$ o $A.B=0$. Estamos pensando, por ejemplo, en objetos matemáticos como funciones, polinomios o matrices.

Uno de los intereses de esta investigación es observar el mundo de representaciones que los estudiantes asocian a las letras involucradas en una expresión como $b.d=0$, es decir, qué reconocen los estudiantes en esas letras.

Para ubicar el problema que estamos analizando dentro de las categorías dadas por las autoras mencionadas anteriormente, analizaremos en primer lugar la naturaleza de la expresión que vincula a las variables. Consideramos que la expresión en sí misma tiene una naturaleza dual. Es decir, puede ser vista tanto como la representación de dos objetos matemáticos genéricos, como ser, dos funciones, dos matrices, dos polinomios, dos números, etc., vinculados por cierta operación[32] y arrojando como "producto" el elemento nulo de cierta estructura, y que será la expresión de la hipótesis del teorema de no existencia de divisores de cero (en el caso en que sea válido), o como una ecuación donde las incógnitas pueden ser no sólo números sino también dos funciones o dos matrices o dos números.

Por ejemplo, cuando trabajamos en teoría de números reales demostramos la propiedad Hankeliana o también llamado teorema de no existencia de divisores de cero:

$$a.b=0 \Rightarrow a=0 \quad o \quad b=0$$

En este caso a y b representan dos números reales cualesquiera, y existe una restricción planteada para ellos: su producto es nulo. $a.b=0$ representa la hipótesis de un teorema dentro de la teoría de números reales, elegimos las letras a y b para representar a dos reales cualesquiera cuyo producto es nulo.

La expresión $a.b=0$ puede ser interpretada también, como una ecuación con dos incógnitas, en ese caso obtendremos como conjunto solución de la ecuación el conjunto de todos los pares ordenados de números reales tales que una de sus componentes es nula, a manera de ejemplo:

$$S=\{.....,(0,7),....., (0,-8), ..., (0,0), ...,(5,0), ..., (\frac{1}{2},0),.....\}$$

Observemos cómo la respuesta requerida en cada caso es distinta. En el primero se espera demostrar que a o b son cero mientras que en el segundo la respuesta esperada es el conjunto solución de la ecuación. Claro que para poder dar ese conjunto solución debemos saber si el teorema enunciado en primer lugar es válido, pues el conjunto solución de la ecuación depende de la validez del teorema.

[32] Debemos aclarar que también podrían ser vistos como representando objetos de diferente naturaleza, por ejemplo, como el producto de un real por una matriz. No analizaremos en este trabajo este punto de vista por considerarlo aún más complejo que el tema que estamos estudiando.

Esta dualidad puede ser observada también cuando enunciamos la propiedad de absorción de la multiplicación en R. Comúnmente escribimos:

$$a.0=0, \quad \forall a \in R$$

En este caso nos proponemos demostrar que cualquier real multiplicado por cero da cero. La letra *a* usada en *a.0=0* representa un número real genérico.
Sin embargo la expresión *a.0=0* también puede ser interpretada como una ecuación a resolver en R. En ese caso se trata de hallar los números reales que multiplicados por cero dan cero. El conjunto S, solución de la ecuación, es entonces el conjunto de los números reales, es decir: S=R.

Encuadraremos entonces las expresiones del tipo *b.c=0* que aparecen en este trabajo dentro de los casos *variable como incógnita* y *variable como un elemento genérico* de cierto conjunto. Y pondremos atención en qué está viendo el estudiante en las letras usadas para escribir la expresión. Es decir, qué están representando para él o ella. De esta forma trataremos de observar cómo evoluciona el conjunto de representaciones asociadas a un símbolo, partiendo del tercer año del ciclo básico de secundaria, pasando por bachillerato, hasta llegar a un tercer año de nivel terciario que incluye a la matemática como una de las asignaturas más importantes del currículo. Proponemos entonces dos requistos más de entendimiento para el concepto de variable, uno se ubica en la categoría de *variable como incógnita* y el otro en el de *variable como número genérico*. En consecuencia, sugerimos para esta última categoría el nombre de *variable como elemento genérico*. Estos requisitos serían:

U_6- si corresponde, reconocer a la incógnita de una ecuación no sólo como un número sino como un objeto matemático de otra naturaleza como una función, una matriz, etc.

G_6- si corresponde, reconocer a un elemento genérico representado por cierto símbolo en una expresión, no sólo como un número sino también como un objeto matemático de otra naturaleza, como una función, una matriz, etc.

Decimos *si corresponde* porque este requisito sólo tendría sentido cuando no se especifica a qué conjunto pertenece la incógnita de la ecuación o el elemento genérico de la expresión. Además la intepretación depende también de otras cuestiones, como por ejemplo, la operación que vincula a los elementos. Es importante tener en cuenta que dado que ciertas letras se usan para representar determinados objetos matemáticos, ya poseemos una restricción de nuestro pensamiento que proviene de nuestro trabajo habitual en el mundo simbólico necesario para trabajar en álgebra.

CAPÍTULO III

INVESTIGACIÓN BIBLIOGRÁFICA

Nos centraremos ahora en algunas investigaciones que por su naturaleza brindan elementos de reflexión que creemos enriquecerán el presente trabajo. Complementamos algunas ideas con datos históricos que nos parecieron relevantes para la comprensión del tema que nos interesa.

Reglas intuitivas

Tirosh y Stavy (1996) en sus investigaciones referentes a reglas intuitivas, sugieren que las respuestas de los estudiantes a determinadas tareas matemáticas o científicas se ven afectadas por características externas y comunes a esas tareas, que accionan el uso de reglas intuitivas. Sugieren que la regla intuitiva "Igual A- Igual B" puede ser activada por información del tipo perceptual o lógico. Veamos algunos ejemplos donde los alumnos aplican esta regla. A niños de entre cuatro y catorce años se les presentaron dos tazas iguales, una llena de agua y la otra por la mitad. A ambas tazas se les agrega una cucharadita de azúcar y se revuelve, luego se le pregunta a los niños cuál de las dos tazas contiene agua más dulce. Varios de ellos responden que las dos son igualmente dulces, es decir que aplican la regla "Igual A (misma cantidad de azúcar)- Igual B (igualmente dulces)". Otro ejemplo se refiere a que muchos estudiantes y también adultos, creen que figuras con igual perímetro tienen igual área. Esta respuesta podría ser la consecuencia de la regla intuitiva "Igual A (igual perímetro)- Igual B (igual área)".
Los autores se cuestionan sobre el origen de esta regla, al que atribuyen que o bien es una regla innata o que proviene de una sobre- generalización de experiencias exitosas tanto en la vida cotidiana como en situación escolar.

En el caso de la generalización de la propiedad que estudiamos, estaríamos hablando de características externas de índole sintáctico que hacen a la redacción de la mencionada propiedad. Mientras que el objeto matemático va cambiando, las características sintáctico visuales permanecen prácticamente incambiadas. En este caso el alumno podría estar aplicando una regla del tipo "Igual hipótesis (producto nulo de dos factores)- Igual conclusión (uno u otro de los factores es nulo)", sin prestar atención a los aspectos semánticos de los objetos matemáticos involucrados.

Reglas prototípicas

English y Halford (1995), plantean el *uso inapropiado de analogías aritméticas y algebraicas*. Parecería que los individuos generan reglas incorrectas a través de la construcción de reglas prototípicas de las cuales extrapolan nuevas reglas. Estas nuevas reglas se ajustan al prototipo y éste les da una aparente justificación. Estos autores dan un ejemplo de un prototipo creado por una generalización de los signos de las operaciones, que intervienen en la propiedad distributiva.

Prototipo

$a \square (b \Delta c) = (a \square b) \Delta (a \square c)$

El prototipo especifica que cualquier operador pude ser distribuido respecto de cualquier otro, y no que la multiplicación puede ser distributiva respecto de la adición. Este prototipo puede ser visto como un modelo mental que el estudiante desarrolla a partir de la regla correcta atendiendo al patrón de transformación de letras y signos de las operaciones. Como el foco de atención se ha puesto en el patrón de cambio, las restricciones a los símbolos de las operaciones son ignoradas. Esto significa que los estudiantes perciben a *a* operado con *b* y luego con *c*, independientemente del tipo de operación. Como consecuencia de esto:

"The students can then use this mental model as a base for any example whose surface structure corresponds with this pattern. The absence of semantic structure in this model means that malrules are easily created [...]." (English y Halford, 1995)

Reglas incorrectas generadas por el prototipo

$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$

$\sqrt{b+c}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$

Con esta óptica podemos hipotetizar que la generalización de la propiedad que estamos estudiando, podría deberse a la creación de un prototipo, basado en las características externas de índole sintáctico que hacen a la redacción de la mencionada propiedad. Mientras que el objeto matemático va cambiando, las características sintáctico visuales permanecen prácticamente incambiadas. En este caso, los estudiantes estarían situando su atención en el patrón de escritura y no en la semántica de los objetos matemáticos involucrados.

Posible prototipo

@ × £=0 ⇒ @=0 o £=0

Los planos semántico y sintáctico en la enseñanza del álgebra y la sobre - generalización de modelos

Socas y Palarea (1997) analizan problemas específicos en la enseñanza–aprendizaje del álgebra escolar, detectando dificultades de distinta procedencia que se integran en redes complejas, que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan a través de errores en las respuestas de los alumnos. Por el tema que estamos tratando nos centraremos, en primer lugar, en las dificultades asociadas a los planos sintáctico y semántico, y luego, en la sobre-generalización de modelos.

"En el álgebra, entendida como "aritmética generalizada", todo cálculo algebraico se construye a partir de las cinco propiedades características del sistema numérico: a+b=b+a; (a+b)+c=a+(b+c); a.b=b.a; (a.b).c=a.(b.c); a.(b+c)=a.b+a.c y George Peacock (1791- 1858) afirma que todas las reglas anteriores que se verifican en los números naturales, siguen verificándose para los demás números y objetos representados por las letras. Por eso el nivel de comprensión del álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras, siendo una de las mayores dificultades con que se encuentran los alumnos y alumnas, la del uso y significado de las mismas, y de ahí que se piense que las dificultades del álgebra se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos". (Socas y Palarea, 1997)

Peacock escribe en 1842- 1845 una obra de dos volúmenes, donde marca el comienzo del pensamiento axiomático aplicado a la aritmética y el álgebra. En el primer volumen aplica las reglas a los números, en lo que él llama "álgebra aritmética"; en el segundo volumen, dedicado al "álgebra simbólica", extiende estas reglas al estudio de las magnitudes en general:

"Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma." (Peacock (1842- 1845), referido en (Boyer, 1992)).

Al respecto, Boyer (1992) señala:

"La justificación de una extrapolación tan atrevida no aparece clara en absoluto; Peacock se limita a aceptar esto como un "principio de permanencia de las formas equivalentes", [...]. Sin embargo, la forma algebraica de este difuso postulado sirvió, en un aspecto muy concreto al menos, como un freno al progreso, puesto que sugería claramente que las leyes del álgebra son las mismas no importa qué clase de número u otros objetos se manejen dentro del álgebra. Al parecer, Peacock pensaba básicamente en el sistema numérico de los enteros y en el de las magnitudes reales de la geometría (sistemas que no están regidos ciertamente por las mismas leyes formales), [...]."

El pensamiento de Peacock nos podría servir para ilustrar el pensamiento de los alumnos, cuando su único mundo posible, como consecuencia de la instrucción, es el de las propiedades que son válidas para las operaciones en los conjuntos numéricos N, Z, Q o R y su posterior generalización (a veces incorrecta) a toda operación planteada entre objetos

representados por “letras”. Podemos apreciar que hay fuertes razones epistemológicas que justifican el pensamiento de los alumnos cuando atribuyen a distintos objetos las mismas propiedades. No puede considerarse entonces el álgebra como una simple generalización de la aritmética, pues el alumno deberá enfrentar diversas dificultades; entre ellas, el significado de las letras, el uso de diferentes convenciones y el reconocimiento y uso de estructuras.

“Con relación a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del álgebra, observamos cómo estos operan a dos niveles, el nivel semántico – los signos son dados con un significado claro y preciso -, y el nivel sintáctico – los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado -. Son estos dos aspectos los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos. (Socas y Palarea, 1997)

El operar los signos sin atender a la semántica, que es un objetivo que muchos docentes se proponen en la enseñanza del álgebra, puede llevar al alumno a formar hábitos de trabajo donde no es necesario atender lo que esos signos representan, conduciéndolo a posibles errores en el caso de que ese significado sea imprescindible para aceptar o rechazar la validez de una proposición.

"[...] Los modos de pensamiento algebraico provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo, el saber algebraico.
Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos. Si se quedan implícitas, es muy difícil incorporar otro saber nuevo.
Veamos a título de ejemplo como al quedar implícito un modelo, éste constituye un conflicto para otros. Así por ejemplo a los modelos “ax+b”, “x^2”, “$\sqrt{x}$”, o “$\frac{1}{x}$”, se les suele aplicar las propiedades de linealidad:
$(a+b)^2=a^2+b^2$, $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, donde este primer error adquiere más fuerza a causa de la analogía con $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$”. (Socas y Palarea, 1997)

Los modelos implícitos son señalados como causa posible de los errores que cometen los alumnos. Posiblemente a causa de estos modelos implícitos se produzcan respuestas que tiene las características de las respuestas intuitivas: evidentes, globales, coercitivas, etc.

Sobre los métodos de enseñanza de las ecuaciones

Nos concentraremos a continuación en la enseñanza de la resolución de ecuaciones lineales en los primeros años del nivel secundario para compararlas con las prácticas de resolución de ecuaciones de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$.

Pirie y Martin (1997) sostienen que existen ciertos métodos estándar para enseñar cualquier concepto matemático, como ser:

1) referirlo a situaciones de la vida real. Lo más frecuente es comenzar con una situación real y a partir de ello sacar la parte matemática, o
2) introducir materiales para modelar el problema, es decir, comenzar con la situación matemática y trabajar en base a ciertos dibujos u objetos, o
3) enseñar algoritmos que permiten resolver problemas formulados matemáticamente.

En el caso de las ecuaciones es frecuente introducir el tema con la idea de "ecuación como balanza", que según estos autores se encuadra en el primer caso mencionado (también podría encuadrarse en el segundo, dependiendo de la presentación inicial de la ecuación). El alumno trata de hallar la masa de una pesa desconocida, realizando las mismas operaciones en ambos platillos para conservar siempre el equilibrio. Este modelo presenta la desventaja de que no es posible concebir pesas con masa negativa. Por tanto no permite darle explicación a toda la gama de posibilidades que pueden presentarse aún cuando tengan conocimiento de los números negativos.

Dentro del segundo método que señalan Pirie y Martin citaremos el trabajo de Gallardo y Pizón (2000), que reporta una investigación que utiliza un modelo de enseñanza concreto que consiste en un "Tablero de fichas". Este modelo concreto consiste en un tablero rectangular dividido en dos partes con un signo de igual en el medio y fichas con forma de dos figuras, triángulos y círculos y dos colores, blanco y negro. Estas fichas representan a x, $-x$, 1 y -1. Las reglas son: al pasar una ficha de un lado a otro cambia de color; dos fichas de la misma figura y distinto color, colocadas en el mismo lado, se anulan; si se quitan o ponen fichas de un lado o se cambian de color, también se debe hacer lo mismo al otro lado. Los autores reportan que este modelo contribuye, entre otras cosas, a adquirir el lenguaje algebraico y avanzar en el concepto de ecuación; sin embargo no permite el trabajo con números racionales, ni con números grandes, limitando su campo de aplicación. Tampoco favorece la aceptación de una fracción como solución.

Por otra parte la resolución de una ecuación se convierte en una memorización de un conjunto de reglas que no se diferencia demasiado, en este aspecto, de la aplicación del modelo de la balanza, ni del modelo que estos autores denominan "*viético*", que consiste en ir aplicando las operaciones inversas hasta lograr despejar la incógnita.

En cuanto al tercer método de enseñanza que consiste en la enseñanza de algoritmos para resolver ecuaciones mencionamos ya el método "*viético*", que resulta ser el *método de inversión* que aplicaban los hindúes. Tenemos también el procedimiento que consiste en ir aplicando las propiedades de la suma y la multiplicación en Q o R, como ser la existencia de opuesto, de inverso, de neutros, etc., hasta lograr despejar la incógnita.

Según Lins (1994) el conocimiento es un par: una creencia- afirmación, es decir, algo en lo que se cree y que es afirmado, enunciado, junto con una justificación para esta creencia-afirmación. Este conocimiento se genera y tiene su existencia en el ámbito del lenguaje, y se debe buscar el significado en la articulación entre creencias-afirmaciones y justificaciones. Para este autor cada uno de estos métodos para enseñar a resolver ecuaciones corresponde a un campo semántico diferente, que respectivamente son: *Campo Semántico de la balanza*, *Campo semántico de máquina estado-operador* y *Campo Semántico del pensamiento algebraico*. Los campos semánticos permiten producir significado y más importante aún, según qué método se elija se tendrán distintas justificaciones.

La enseñanza de las ecuaciones de segundo grado se divide en dos grandes casos: (a) Resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas; (b) Resolución de ecuaciones cuadráticas completas.
En el caso (a) si la ecuación es de la forma $ax^2+bx=0$, se procede a extraer factor común x para luego aplicar la propiedad Hankeliana. En el caso de las ecuaciones de la forma $ax^2+c=0$, se despeja x, aquí sí realizando las operaciones inversas que sean necesarias.
En el caso (b) se enseña la conocida fórmula cuadrática, quizás ofreciéndole al alumno algunas instancias previas con ejercicios sobre cómo completar un cuadrado.

La importancia dada a los aspectos procedimentales en la enseñanza del álgebra, unido al énfasis del docente en el aprendizaje de esa fórmula, hace que aún cuando la ecuación esté dada en forma factorizada e igualada a cero, los alumnos apliquen la propiedad distributiva en el sentido de desarrollar para luego aplicar la fórmula cuadrática. En relación a esto, Zaslavsky (1997) ha detectado en los alumnos una marcada preferencia por lo que la autora llama la *forma estandarizada* de la expresión analítica de la función de segundo grado, es decir $y = ax^2+bx+c$, frente a la forma canónica $y = a(x-m)^2+n$ o a la forma factorizada $y = a(x-x_1)(x-x_2)$, ($a\neq 0$ en todos los casos). Es posible que esta preferencia sea trasladada luego al ámbito de las ecuaciones cuadráticas y por ello los alumnos prefieran desarrollar y aplicar la fórmula.

Douady presenta en (Douady, 1995) una ingeniería didáctica para que surja la herramienta factorización para resolver ecuaciones de grado dos. La autora señala que en el caso de que la técnica de resolución con ayuda del discriminante no esté disponible, la factorización es la única esperanza para resolver la ecuación. El problema se plantea en dos *cuadros*, el algebraico y el gráfico, y el objetivo es que el alumno llegue a factorizar una expresión polinómica de segundo grado para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas E y F, asociadas respectivamente a las funciones cuadráticas dadas por

$$y = (x + 3)(8 - \frac{x}{2}) \qquad (E)$$

$$y = x^2 - 9 \qquad (F)$$

Entre las herramientas conceptuales que entran en juego, la autora señala:

"El teorema `para que un producto de factores sea nulo, es necesario y basta con que uno de sus factores sea nulo´, como herramienta implícita".

Como la autora escribe, el alumno cuenta implícitamente con esta herramienta, pero en los estudios exploratorios que realizamos, observamos que los estudiantes no siempre la relacionan con el contexto de resolución de ecuaciones dadas en forma factorizada e igualadas a cero, aún cuando sea la única herramienta posible para resolver la situación. Quizás más diseños en la línea que presenta Douady podrían ser implementados en la enseñanza, para lograr que la herramienta esté disponible para los alumnos al momento de necesitarla.

Observemos que el enunciado del teorema que da Douady, se da en términos de *factores* y no se discrimina sobre su significado, de ahí que se esté enunciado un teorema de validez universal. Nos referimos a que ese enunciado es independiente de los objetos matemáticos que representan esos factores. Aunque para los autores o maestros la naturaleza de los objetos y la estructura algebraica está implícitamente dada, para el estudiante que aún no conoce otras estructuras es difícil tener consciencia de que se trata de números reales y operaciones conocidas, y pueden luego generalizar a otras estructuras.

Entre los aspectos que el docente debe institucionalizar luego de la resolución del problema que Douady propone, ésta señala:

"Hay casos donde se sabe resolver ecuaciones de segundo grado: cuando no hay términos en x como en la ecuación de F, o cuando se puede escribirlo en la forma de un producto de factores, por ejemplo al señalar un factor común o una expresión frecuente. Entonces, si uno de los factores es nulo, el producto es nulo. De manera recíproca, si un producto A.B=0 es porque A=0 o B=0. Pero también la institucionalización se hace sobre un método: para resolver una ecuación de segundo grado de la forma A.B=0, se resuelven dos ecuaciones de primer grado: A=0 y B=0. Cada una de estas ecuaciones tiene una solución que al mismo tiempo es solución de la ecuación de segundo grado que se propuso". (Douady, 1995)

De la fase de institucionalización se desprende que el alumno no sólo deberá recordar la regla, sino también la regla para aplicar la regla. Aún cuando los diseños sean cuidadosamente planificados y en el marco de una ingeniería didáctica, nos preguntamos cuánto de relacional y cuánto de instrumental en el sentido de Skemp (1976) tiene la matemática que están aprendiendo los alumnos.

Si comparamos las metodologías sugeridas para resolver ecuaciones lineales con las que se utilizan para resolver ecuaciones cuadráticas, debemos decir que estas últimas se encuentran en clara desventaja. Quizás porque el alumno ya tiene experiencia con las ecuaciones, no se ve necesario generar modelos concretos de enseñanza o introducir Campos Semánticos. Quizás sea una de las instancias donde un aprendizaje instrumental (Skemp, 1976) es el más utilizado. No es claro si esto se debe a una falta de recursos didácticos o simplemente es consecuencia de decisiones didácticas de los docentes, que se apoyan en la enseñanza tradicional. Los conocimientos del alumno en relación a las ecuaciones lineales, le dan poco resultado o ninguno, desde el momento en que las

estrategias que conoce, no le son demasiado útiles para este tipo de ecuaciones. Si la ecuación es de la forma completa, el *método de inversión* que ha ensayado cientos de veces con éxito, lo conduce a un fracaso.

CAPÍTULO IV

LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS GRUPO Y ANILLO

Recordaremos brevemente las estructuras de grupo y anillo por ser subyacentes al tema que estamos investigando. Se presentan ejemplos de anillos con y sin divisores de cero, algunos de los cuales fueron usados con los estudiantes.

Estructura de grupo y grupo conmutativo

Consideremos un conjunto A no vacío, en el que se ha definido una operación binaria[33] a la que se notará con ♥.
Se dice que (A , ♥) tiene estructura de grupo, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) La operación ♥ es asociativa
   $\forall a, b, c \in A \quad (a \heartsuit b) \heartsuit c = a \heartsuit (b \heartsuit c)$
2) La operación ♥ tiene neutro
   $\forall a \in A, \exists\, e \in A \,/\, a \heartsuit e = e \heartsuit a = a$
3) Todo elemento de A tiene inverso
   $\forall a \in A, \exists\, a' \in A \,/\, a \heartsuit a' = a' \heartsuit a = e$

Si se cumple además que:

4) La operación ♥ es conmutativa
   $\forall a, b \in A, \quad a \heartsuit b = b \heartsuit a$

diremos que (A, ♥) es un grupo conmutativo

Estructura de anillo

Consideremos un conjunto A, en el que se han definido dos operaciones binarias que notaremos ♥ y ♦.
Se dice que (A , ♥ , ♦) tiene estructura de anillo, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1) (A, ♥) es un grupo conmutativo
2) La operación ♦ es asociativa
   $\forall a, b, c \in A \quad (a \diamondsuit b) \diamondsuit c = a \diamondsuit (b \diamondsuit c)$
3) La operación ♦ es distributiva frente a la operación ♥
   $\forall a, b, c \in A \quad a \diamondsuit (b \heartsuit c) = (a \diamondsuit b) \heartsuit (a \diamondsuit c)$

Sea (A, ♥, ♦) un anillo y sea *e* el elemento neutro de ♥. Si se cumple la siguiente propiedad diremos que el anillo no tiene divisores de *e*.

[33] Se entenderá por operación binaria una función definida de AxA en A. En estas condiciones la operación resulta interna y uniforme (el resultado es único).

$$\left.\begin{array}{l} a, b, e \in A \\ \\ a \blacklozenge b = e \end{array}\right\} \Rightarrow a=e \ \ o \ b=e$$

Si por el contrario no se cumple esta propiedad, es decir, si existen elementos de A diferentes del neutro *e*, tales que operados con ♦, dan como resultado el neutro *e*, se dice que la estructura admite divisores de *e*.

Ejemplos de anillos con y sin divisores de cero

- (Z, +, ×) es un anillo sin divisores de cero, ya que se cumple la propiedad anterior que es la que aludimos como propiedad Hankeliana.

- (Z_6, +, ×) siendo Z_6 el conjunto de las clases residuales módulo 6, tiene divisores de cero.
  Podemos ver en la tabla de ×, que existen elementos distintos de 0 cuyo producto es cero, por ejemplo 2 ×3=0. 2 y 3 se dicen que son divisores de cero.

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Veamos algunas implicaciones matemáticas. Cuando resolvemos, por ejemplo, la ecuación
$3 \times x = 0$ en el conjunto de las clases residuales módulo 6, aparece algo bastante sorprendente para quien está acostumbrado a trabajar solamente con números reales: existen elementos diferentes de *0*, cuyo producto es *0*. Lo podemos ver ayudándonos de la tabla de multiplicación:

$3 \times 0 = 0$ $\qquad$ $3 \times 2 = 0$ $\qquad$ $3 \times 4 = 0$

y tenemos por tanto el siguiente conjunto solución para la ecuación propuesta: $S=\{0,2,4\}$.

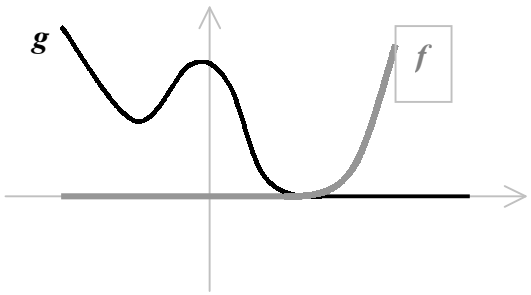
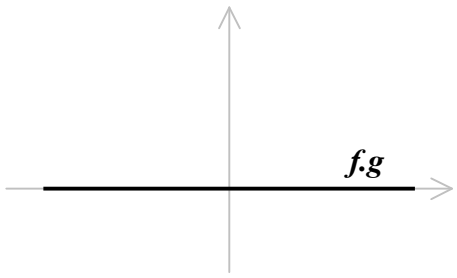
Nos planteamos ahora resolver la ecuación $4 \times x = 4 \times 1$ en el conjunto de las clases residuales módulo 6, ¿podremos cancelar el 4 en ambos miembros de la ecuación y deducir que $x = 1$?
Mirando la tabla de multiplicar nos damos cuenta que estaríamos perdiendo la solución *4* ya que $4 \times 4 = 4$. Por lo tanto no se cumple la propiedad cancelativa de la multiplicación y tenemos el siguiente conjunto solución de la ecuación propuesta: $S = \{1, 4\}$.

Como hemos podido ver a través de estos dos ejemplos, algunas propiedades que estamos habituados a manejar y aplicar en otros conjuntos numéricos, no son válidas en el conjunto de las clases residuales módulo *6*.

- $(\mathscr{P}, +, \times)$, siendo $\mathscr{P}$ el conjunto de todos los polinomios de coeficientes y variable real, es un ejemplo de anillo sin divisores de cero. Si el producto de dos polinomios es el polinomio nulo, entonces al menos uno de ellos es el polinomio nulo.

- La estructura $(\mathscr{F}, +, \times)$, siendo $\mathscr{F}$ el conjunto de todas las funciones de dominio R, es un anillo con divisores de cero, ya que si el producto de dos funciones es la función nula no es cierto que al menos una de ellas deba ser la función nula.

A continuación podemos visualizar las gráficas de dos funciones *f* (en gris) y *g* (en negro) no nulas cuyo producto es la función nula.

Las funciones *f* y *g*	**La función producto *f.g***
	

- Para cada $n \in N$, $n \geq 2$, $(\mathscr{M}_{n\times n}, +, \times)$ es un anillo con divisores de cero[34]. El producto de dos matrices puede ser nulo sin que lo sea ninguno de los factores.
  Veamos por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[34] Excluimos el caso de las matrices cuadradas de orden 1 porque en ese caso se cumple la propiedad Hankeliana y no sería válida la proposición que enunciamos, ya que este conjunto es isomorfo a R.

CAPÍTULO V

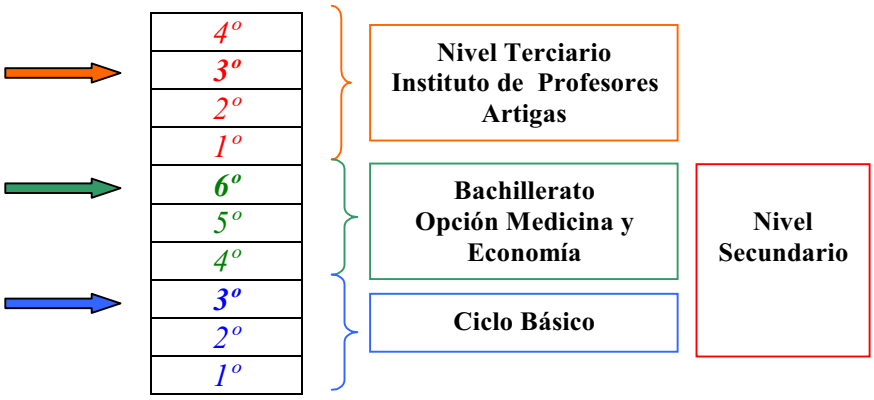
METODOLOGÍA

En este capítulo se explica con qué estudiantes trabajamos, con qué criterios fueron seleccionados de acuerdo a los propósitos de la investigación y se explican los objetivos y el diseño de las secuencias que fueron elaboradas para trabajar con los estudiantes. También se justifica por qué se realizaron entrevistas y a quiénes.

Con qué alumnos trabajamos

Como la resolución de ecuaciones factorizadas aparece por primera vez en el programa de 3º año de Ciclo Básico y teniendo en cuenta que los alumnos de 6º año de Bachillerato, cuya opción incluye a la matemática como asignatura del currículo, son los que han tenido mayor experiencia con la propiedad Hankeliana, se decidió trabajar con un grupo de 3º año de Ciclo Básico (14 alumnos) y luego ir observando la evolución del pensamiento de los alumnos cada tres años es decir en 6º año de bachillerato (24 alumnos divididos en 14 de opción Medicina y 10 de opción Economía) y en 3º año de una carrera de nivel terciario que incluyera matemática. En este último caso se eligió trabajar con estudiantes de 3º año de profesorado de matemática (23 alumnos). Debemos aclarar que no nos referimos a una evolución en el sentido de observar los mismos estudiantes a lo largo de los años, sino tomar niveles separados por 3 años de escolaridad entre sí. En el nivel de bachillerato y en el terciario nos interesa observar en especial, si se generaliza o no la propiedad a estructuras donde ésta no es válida y ver cómo evoluciona el mundo de representaciones del alumno para las "letras" involucradas en una proposición escrita en lenguaje simbólico. Es importante tener en cuenta que los alumnos de 3º año de Ciclo Básico no conocen la fórmula cuadrática (los restantes sí) y por tanto la única herramienta disponible para resolver la mayoría de las ecuaciones que se propondrán es la aplicación de la propiedad Hankeliana. Estos alumnos también recibieron instrucción específica al respecto.

El siguiente esquema nos muestra la organización del Sistema Educativo Uruguayo y se señalan los niveles donde trabajamos:



Justificación de la elección de los estudiantes con los que trabajamos

Esta elección tiene que ver con diversas razones, algunas de las cuales ya han sido señaladas:

- Los estudiantes de 3º año de Ciclo Básico poseen como única herramienta para resolver las ecuaciones en las que nos hemos focalizado, la propiedad mencionada. Tenemos entonces un ámbito adecuado para observar por qué no la aplican, si esta constituye la herramienta disponible.
- Los estudiantes de bachillerato conocen la propiedad Hankeliana y la fórmula cuadrática. Nos sirve para observar preferencias. Además los estudiantes de bachillerato opción "Economía" han tenido un curso de matrices y funciones reales, lo que nos brinda las condiciones para observar la generalización abusiva de la propiedad.
- Los estudiantes de profesorado elegidos también tienen experiencia con matrices y funciones reales.
- Los tres niveles son adecuados para observar la aparición del error que se estudia. En particular interesa observar la persistencia del mismo en el nivel de bachillerato y profesorado. Como además se observará la ampliación de interpretaciones para las letras que intervienen en el enunciado: *Se sabe que b.c=0, ¿qué representan para ti b y c?*, a lo largo de los años de estudio, se tomaron alumnos que guardaban entre sí una distancia de 3 años de educación formal.

Breve descripción de las secuencias

Se planificaron varias secuencias de acuerdo a la temática que se pretende investigar, para resolver en forma individual. Brevemente éstas consisten en:

SECUENCIA I: Secuencia de actividades que se sitúan principalmente en el contexto de la resolución de ecuaciones. Se incluyen instancias de verificación de las raíces encontradas. Se testea si el alumno conoce la propiedad Hankeliana. El objetivo principal es observar cómo enfrenta el alumno la resolución de ecuaciones de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$, cómo verifica y constatar que conoce la propiedad en la que nos concentramos. La diversidad de ecuaciones que se proponen se debe a que quisimos testar si expresiones del tipo $(x+b)$ o $(x-b)$, facilitan o no la evocación de la propiedad.

SECUENCIA II: Actividad planificada para la instancia de entrevista. Está dirigida a los alumnos que cometen el error que se está observando en la verificación. El objetivo específico es conducirlos a un conflicto que les permita reveer su error, por medio de una situación problemática en un contexto de la vida real.

SECUENCIA III: Secuencia de actividades para trabajar en el conjunto de las clases residuales módulo 6. El objetivo es observar cómo reaccionan los alumnos frente a una estructura que desconocen y tiene divisores de cero. Se desea observar si los alumnos modifican su idea inicial de que si el producto de dos factores es nulo, uno u otro factor es nulo. También se pretende observar si los alumnos amplían su mundo de representaciones

para las “letras” involucradas en una proposición escrita en lenguaje simbólico incorporando los elementos del nuevo conjunto que se les presenta.

SECUENCIA IV: Secuencia de actividades para observar si los alumnos realizaban o no, la generalización abusiva de la propiedad. Se incluye el producto de matrices y el producto de funciones de dominio R.

SECUENCIA V: Secuencia de actividades para los alumnos que generalizan la propiedad Hankeliana en el caso de dos funciones de dominio real cuyo producto es la función nula. El objetivo es hacerlos llegar a un conflicto para que puedan reconocer su error y reformular sus ideas iniciales. Se elaboró en dos versiones, una con gráficas y otra con tablas de valores, para contrastar dificultades en una y otra versión.

Entrevistas

A los estudiantes se les aplicaron diversas secuencias por escrito y posteriormente se seleccionaron algunos para realizar entrevistas individuales.
En total fueron entrevistadas catorce personas, a saber: siete estudiantes de bachillerato, tres de Ciclo Básico, tres de profesorado de matemática y un docente de matemática. En el caso de los estudiantes, los criterios generales de selección fueron:

- Aparición en sus trabajos del error que estábamos estudiando u otros errores que guardaban relación con el tema de investigación.
- Estudiantes que conocían la propiedad pero no la aplicaban a la resolución de ecuaciones cuando vienen dadas en forma factorizada.
- Estudiantes que generalizaron la propiedad a estructuras donde no era válida habiendo recibido instrucción específica al respecto.
- Estudiantes que abordaron más de una estrategia de resolución de las ecuaciones de segundo grado dadas en forma factorizada.
- Estudiantes que mostraron buen desempeño en la realización de las secuencias.
- En particular, uno de los estudiantes de profesorado fue seleccionado por su manejo explícito de los dominios de integridad, cuestión que posteriormente le permitió rever sus respuestas dadas en primera instancia.

Actividades de la SECUENCIA I y su justificación

Esta secuencia se planificó para ser aplicada en dos niveles: 3º año de Ciclo Básico y 6º año de bachillerato opción Medicina. A continuación se presentan las actividades seleccionadas y se justifica más abajo la elección de las mismas.

1) *i) Resuelve la ecuación* ***(2x-6)(18-2x)=0****. Explica cómo lo haces.*

ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

2) *i) Resuelve la ecuación* ***(x+6)(2x-8)=0****. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

3) *i) Resuelve la ecuación* ***(3x-6)(x-7)=0****. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

4) *i) Resuelve la ecuación* ***(x-5)(x+4)=0****. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

5) *5) i) Resuelve la ecuación* ***(x-9)(x-6)=0****. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

6) *i) Resuelve la ecuación* ***x(2x-10)=0****. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

7) *i) Resuelve la ecuación* ***x(x-8)=0****. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

8) *i) Resuelve la ecuación* $x^2=6.x$*. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

9) *i) Resuelve la ecuación* ***5.x=0****. Explica cómo lo haces.*
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

Estos ejercicios se entregan en forma individual y se retira la hoja después de que el alumno resuelve cada ecuación.
En todos los casos se desea observar qué estrategias emprenden los alumnos para resolver las ecuaciones. En particular nos interesa ver si aplican la propiedad Hankeliana y cómo realizan la verificación.
La ecuación 1) es la que se utilizará para observar cuál es el primer impulso del estudiante frente a una ecuación de este tipo, es decir, cuál es la estrategia que elige para resolverla. Suponemos que desarrollarán y aplicarán la fórmula cuadrática o aplicarán la propiedad Hankeliana. Si bien es una ecuación sencilla no se han incluido factores del tipo $(x \pm a)$ que podrían facilitar el cálculo mental de las raíces o permitir anticiparlas más fácilmente sin necesidad de cálculo. De todas formas reconocemos que existe la posibilidad de que el alumno calcule las raíces mentalmente.

Las ecuaciones 2) a 5) tienen por objetivo ver si la expresión del tipo $(x \pm a)$ facilita la aplicación de la propiedad, más que la del tipo $(ax+b)$ con a distinto de 1. En los ejercicios 6) y 7) se desea observar si la presencia del factor x facilita la aplicación de la propiedad. En el ejercicio 8) se desea ver si los estudiantes reconocen la raíz cero pues, como ya mencionamos anteriormente, históricamente no se la reconoce en las ecuaciones de la forma $x^2=ax$. En el ejercicio 9) se desea ver si aplican la propiedad Hankeliana o hacen $x=0/5$.

10) Escribe una ecuación que tenga raíz 8.

11) Escribe una ecuación que tenga por raíces a 4 y 3.

El objetivo de los ejercicios 10) y 11) es observar qué tipo de expresión generan los alumnos para cumplir con las condiciones que se exigen. En particular, en el caso del ejercicio 11) y suponiendo que los alumnos usen una expresión polinómica, se desea observar si generan una expresión desarrollada o una expresión factorizada.

12) Tenemos una ecuación ***(2x-4)(.....)=0****, en la que no conocemos el segundo factor.*
¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?
¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

El objetivo de este ejercicio es constatar si los estudiantes comprenden que alcanza con que uno de los factores se anule para que el producto resulte nulo. Específicamente, se desea observar si los alumnos creen que es necesario que los dos factores se anulen para que el producto sea nulo.

13) Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$(\square - 6) \times (\square - 19) = 0$$

Se elimina el uso de la incógnita y se habla de papelitos que tapan números. Con esto se consigue la posibilidad de que debajo de los papelitos pueda haber números iguales o distintos con tal de que uno de los dos factores sea nulo. Se desea explorar si los alumnos creen que debajo de los papelitos están los números 6 y 19 respectivamente (que es una de las posibles respuestas), pues esta creencia podría tener relación con el error en la verificación que se está investigando.

14) ¿Es 7 raíz de la ecuación ***(3x-21)(x-3)=0****? Explica tu respuesta.*

Se desea observar si los estudiantes consideran suficiente que se anule un factor para que el producto valga cero pues esto podría tener también relación con el error en la verificación. Pudiera suceder que los alumnos creyeran que ambos factores deben valer cero y por ello sustituyen la x en cada factor por la raíz de ese factor. De esta forma logran que ambos factores se anulen simultáneamente.

15) ¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación: ***(2x-12)(5x-10)=0****? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.*

Se observará qué estrategia abordan los alumnos para dar respuesta a la pregunta que se formula. A priori se nos ocurren dos opciones, la primera consiste en usar el procedimiento de verificación (con esto nos referimos a la sustitución de *x* por el valor respectivo para ver si se logra una igualdad) y otra es resolver la ecuación y ver si las raíces coinciden con las dadas. Si los estudiantes optan por realizar la sustitución de *x* por cada uno de los valores dados para investigar si verifican o no la ecuación, se pondrá atención en la forma en que realizan esta sustitución: asignando a *x* un valor por vez o asignando a *x* distintos valores en forma simultánea.

16) ¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación ***(2x-10)(3x-8)=0****?*

Las mismas consideraciones que en el ejercicio 13). En este caso se agrega el problema de que 4 no es raíz de la ecuación dada. También se desea explorar nuevamente si para el alumno es suficiente con que un factor se anule para que el producto valga cero.

17) ¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $\boldsymbol{x^2 - 7x + 12 = 0}$*?*
Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

En este caso la expresión polinómica está desarrollada. Si el alumno opta por sustituir los valores dados para ver si obtiene o no una igualdad, interesa ver cómo realiza la sustitución: asigna a *x* un valor a la vez o le asigna distintos valores en forma simultánea. Por la experiencia que tienen los alumnos en el trabajo con polinomios, en el cálculo de valores numéricos y por la ausencia de paréntesis en la expresión, pensamos que la expresión desarrollada disminuye la posibilidad de que el alumno asigne distintos valores a *x* en cada término.

18) i) Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y d?

Se observará si los estudiantes infieren que $b=0$ o $d=0$. Particularmente interesa contrastar esta respuesta con la estrategia que abordan los alumnos para resolver las ecuaciones anteriores, es decir si aplicaron o no esta cuestión a la resolución de ecuaciones. En cuanto a la parte ii) se desea explorar qué representan para los estudiantes esas dos letras y comparar las respuestas de los alumnos de 3º con los de 6º; ver si en tres años los alumnos logran ampliar su mundo de representaciones para las letras involucradas en el enunciado de la pregunta. Debe tenerse en cuenta que en 5º año los estudiantes tienen un curso de matemática que incluye una unidad de polinomios.

Actividades de la SECUENCIA II y su justificación

Las actividades 19) y 20) están dirigidas a los estudiantes que hagan la verificación de la ecuación sustituyendo *x* por dos valores distintos en la misma expresión. Se seleccionarán algunos de estos alumnos y se realizará una entrevista con la intención de que lleguen a un

conflicto, constrastando los planteos que realicen para resolver las partes a), b) y c) de la actividad 19) con el planteo que realizaron en la verificación del ejercicio 1).
Se verá si la presencia de un contexto ayuda al alumno a percatarse de que no puede asignarle dos valores distintos a *x* a la vez ya que estos representan una hora del día y no pueden ser al mismo tiempo las 3 y las 9, por ejemplo. A la pregunta b) se le dio esa formulación para que no pueda decirse que el alumno aquí no comete el error por pedírsele el cálculo para 3 y 9 por separado.

19) Para evaluar la necesidad de semáforos en un cruce de calles, entre las 3 de la tarde y las 9 de la noche de un día, se coloca un contador de autos. Los resultados del estudio vienen dados por la expresión:

$$A = (2x - 6)(18 - 2x)$$

*Donde **A** representa el número de autos que pasaron por el cruce en una hora **x** del día.*

a) ¿Cuántos autos pasaron a la hora 5? Plantea los cálculos necesarios.
b) Calcula cuántos autos pasaron a la hora 3 y a la hora 9. Plantea los cálculos necesarios.
c) *¿A qué hora no pasó ningún auto? ¿Por qué?*

20) ¿Encuentras alguna relación entre el problema 1) y el 19) parte c)? Compara la verificación que realizaste en el ejercicio 1) para las soluciones que obtuviste de la ecuación, con los cálculos que realizaste en el problema 17) parte b), ¿qué observas?

Se espera que al no estar involucrada la expresión factorizada con la resolución de una ecuación, los alumnos planteen y resuelvan correctamente la parte b) y puedan contrastarla con lo hecho en la verificación de la ecuación del ejercicio 1). Para esta confrontación se cuenta con el argumento de que *x* representa la hora del día y por tanto no puede tomar dos valores distintos a la vez.

Actividades de la SECUENCIA III y su justificación

Esta secuencia se plantearía después de la SECUENCIA I y está dirigida a los alumnos de 3º y 6º año de bachillerato opción Medicina. Se pretende ver si la aparición de una operación llamada multiplicación pero diferente a la que ellos conocen (se trata de la multiplicación definida en el conjunto de las clases residuales módulo 6 y además con una presentación muy simplificada), hace que el alumno amplíe su visión de que el cumplimiento o no de la propiedad Hankeliana está ligado al contexto de aplicación. Parafraseando a Anna Sierpinska: ver si el alumno puede salir de su mundo y ver otros mundos. Debemos aclarar que los alumnos de estos dos niveles no han trabajado, con anterioridad a la realización de la secuencia, con clases residuales. Sí tienen experiencia en el trabajo con tablas. Por ejemplo, han completado tablas de sumar, restar y multiplicar en los diferentes conjuntos numéricos.

(I) *Trabajaremos con los elementos del conjunto A. El conjunto A es el siguiente:*

A={0, 1, 2, 3, 4, 5}

Definiremos una operación en el conjunto A que llamaremos multiplicación y simbolizaremos con: **.**

Esta operación funciona de acuerdo a la siguiente tabla:

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Por ejemplo para calcular 2. 5 te fijas en la intersección de la fila con la columna como te muestra la figura y obtienes como resultado 4.

a) Usando la tabla de multiplicar que aparece arriba, calcula:
4. 2=
3. 3=
5. 4=

b) Usando la tabla, determina él o los valores de x que verifican la ecuación 3. x =0

Escribe en la línea él o los valores de x que encontraste.....

Explica cómo lo hiciste.

c) a y b son elementos del conjunto A que se indicó más arriba. Se sabe que a.b =0, ¿qué puedes decir sobre a y b a partir de esta información? Explica tu respuesta.

(II) *Se sabe que c.d=0. ¿Qué puedes deducir sobre c y d a partir de esta información? ¿Qué representan para ti c y d?*

Se observará si el alumno incorpora la situación que ha vivido y discute sobre las distintas posibilidades que pueden darse según qué representen *c* y *d* (números reales o "números" como los que trabajó en la actividad anterior); o de lo contrario persiste en la idea de que *c* o *d* son cero sin tener en cuenta la actividad realizada.

Actividades de la SECUENCIA IV y su justificación

Esta secuencia está dirigida a estudiantes de secundaria de 6º año opción Economía y estudiantes de nivel terciario. Recordemos que los estudiantes de la opción Economía

tienen además de un curso de Cálculo, otro curso de Álgebra y Geometría Analítica que incluye el trabajo con matrices.
El objetivo de esta secuencia es observar si los alumnos generalizan o no la propiedad Hankeliana. Se presentan al alumno distintas estructuras, en algunas esta propiedad es válida. Los ejercicios se entregan separadamente. Cuando el estudiante finaliza un ejercicio, se le entrega el siguiente y así sucesivamente, de esta forma se evita la recorrección.
A continuación se presentan las diferentes actividades de la secuencia junto a algunos comentarios sobre las mismas.

1) *Resuelve en R la ecuación $(2x-6)(5x+10)=0$*
   Realiza la verificación para la o las soluciones que obtengas.

Se desea observar qué estrategias abordan los estudiantes de nivel terciario para resolver la ecuación y poder compararlas con los estudiantes de otros niveles. Interesa también ver la forma en que realizan la verificación, en virtud del error que se está observando.

2) i) Se sabe que $b\times c=0$. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información? ¿Qué representan para ti c y d?

ii) En la parte (i), ¿qué representan para ti b y c? Explica.

El objetivo es ver si los estudiantes de este nivel, que han estudiado diversas estructuras con y sin divisores de cero, contestan que $b=0$ o $c=0$ a pesar de que la pregunta no aclara a qué conjunto pertenecen esos elementos o por el contrario contestan que no pueden inferir nada si no se aclara cuál es la estructura que enfrentan.

3)f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

Se desea observar si en este caso los alumnos infieren que *f* o *g* son la función nula. El contexto de funciones es el que se ha elegido para posteriormente trabajar en otra secuencia que le permita a los alumnos que han realizado esta inferencia, llegar a un conflicto y poder reformular su respuesta a esta pregunta.

Si bien no es necesario que el dominio de las funciones sea *R*, recordemos que el dominio de la función producto es la intersección de ambos dominios, se ha considerado este conjunto con la idea de simplificar la situación. Se evita al estudiante tener que pensar cuál es el dominio de la función producto en el caso en que se hubieran considerado, por ejemplo, como dominios dos subconjuntos cualesquiera A y B de *R* con intersección no vacía. Incluso en el caso en que ambas funciones hubieran sido de dominio A incluido en *R*, pensamos que esto podía actuar como distractor u originar ciertas dudas, pues este conjunto A cuyos elementos no se conocen podía resultarle al estudiante muy abstracto.

4) D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=0, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D y B a partir de esta información?

El objetivo de esta pregunta es observar si los alumnos contestan que B o D son la matriz nula, dan un contra-ejemplo o se abstienen de contestar ante la duda de que sea válida o no la propiedad Hankeliana.

5) p y q representan dos polinomios. Se sabe que p.q= o, es decir que el producto de los dos polinomios es el polinomio nulo. ¿Qué puedes deducir sobre p y q a partir de esta información?

Se le han presentado al alumno diversos contextos para observar su reacción. En este caso es válida la propiedad.

6) *i) Se sabe que $b \times c=0$. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información?*
ii) En la parte (i), ¿qué representan para ti b y c? Explica.

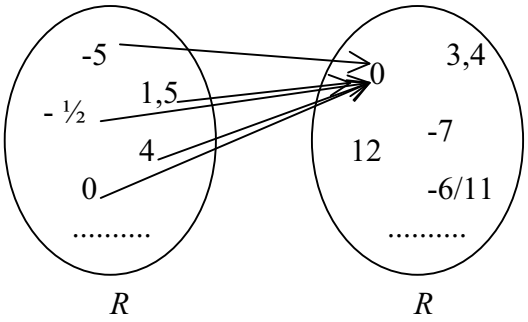
Se vuelve a formular la pregunta 2) para comparar su respuesta con la que ya dio. Interesa observar principalmente dos cuestiones. Si el estudiante detectó estructuras donde la propiedad no es válida, ver si las tiene en cuenta al momento de tener que hacer una inferencia ya que en la pregunta no se especifica qué representan *b* y *c*. La otra cuestión es observar qué tipo de objetos considera ahora que pueden representar *b* y *c* en comparación con lo que respondió en la pregunta 2). En otras palabras, se desea ver si el alumno amplía su mundo de representaciones para *b* y *c*, o existe una fuerte persistencia en pensar que *b* y *c* representan números.

Actividades de la SECUENCIA V y su justificación

Esta actividad está dirigida a alumnos de 6º año opción Medicina. Se presenta la función nula por si los alumnos no la tuvieran presente al momento de realizar la actividad. Se plantea más tarde la pregunta sobre qué se puede inferir sobre dos funciones cuyo producto es la función nula y pensando en que van a realizar una generalización incorrecta de la propiedad Hankeliana sigue una serie de actividades que tienen como objetivo provocar en el alumno un conflicto y que éste llegue a reformular su idea previa en relación a la validez de la propiedad mencionada.
Esta secuencia se presenta en dos versiones, una con tablas de valores y otra con gráficas. En un principio la versión con gráficas se pensó que era más apropiada para alumnos de nivel terciario pues se consideró que la lectura e interpretación de gráficas resultaría más difícil para alumnos de secundaria que la interpretación de tablas de valores. Más tarde se decidió aplicar las dos versiones tanto a alumnos de enseñanza secundaria como terciaria para poder comparar los desempeños en ambas pruebas. Asímismo debemos señalar que las dos versiones de esta secuencia tiene algunas diferencias en su presentación para nivel secundario y terciario. Como se verá, las diferencias son mínimas pero se tuvo en cuenta la autonomía de un estudiante de nivel terciario en comparación a un alumno de secundaria.

A continuación se presentan las actividades de la SECUENCIA V para alumnos de bachillerato, en la versión que usa tablas de valores junto a algunos comentarios sobre las mismas.

1) *Llamaremos función nula a aquella que a todo elemento del dominio le hace corresponder el cero.*
Si consideramos R como el dominio de la función nula, podemos visualizar la idea anterior a través del siguiente diagrama de flechas:



Usando la información del diagrama de flechas completa la siguiente tabla de valores. En este caso a la función nula la llamaremos O.

x	*O(x)*
-5	*0*
- ½	
0	
1,5	*0*
4	
.....	.....

Aunque se trata de alumnos que están realizando un curso de cálculo, se aclara qué entenderemos por función nula. Esta actividad no tiene otro objetivo que "refrescar" la idea de lo que es la función nula.

2) *a) p y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:*

$p(2)=6$ $\quad$ $q(2)= -6$
$p(-3)=5$ $\quad$ $q(-3)= 4$
$p(½)= -1$ $\quad$ $q(½)= 7$

Con esta información completa la siguiente tabla de valores.

x	*(p.q)(x)*
-3	
½	
2	

Si bien los alumnos estudiaron la función producto en el año que están cursando en el momento de aplicar la secuencia, se pretende constatar si los alumnos son capaces de calcular imágenes y completar la tabla.

3) f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

Se supone que los estudiantes van a deducir que *f* o *g* son la función nula. Si bien sería posible que pensaran un contra- ejemplo a esta situación se considera bastante difícil tal posibilidad.

4) t y a son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

t(2)=0	*a(2)= -6*
t(-3)=5	*a(-3)= 0*
t(½)= -1	*a(½)= 7*
t(4)=0	*a(4)=5,7*
t(-9,11)=0	*a(-9,11)=0*

a) Usando la información anterior, completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto t.a:

x	*(t.a)(x)*
-9,11	
-3	
½	
2	
4	

Aquí, se introducen en algunos casos, imágenes cero en una u otra función. Se espera que la actividad permita observar al alumno que cuando una u otra de las funciones (o ambas) toman valor cero, la función producto también toma este valor.

b)¿Qué debe suceder para que un real "x" tenga imagen cero en la función producto?

Se espera que el alumno redacte sus observaciones, esto es, que alcanza con que una de las dos funciones tome valor cero para cierto valor de *x,* para que la función producto valga cero para dicho valor de *x*.

5) j y p son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.

a) Completa la tabla de valores de j y p para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto j.p

x	*j(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	*p(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

6) En la pregunta anterior, ¿puedes completar las tablas de otra forma?
Si tu respuesta es negativa explica por qué.
Si tu respuesta es afirmativa, completa las tablas que siguen de forma diferente a como lo hiciste anteriormente.

x	*j(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	*p(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

7) m y q son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.
   a) Completa la tabla de valores de m y q para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto m.q

x	*m(x)*
-3	
-2	
-1	*6*
0	
1	
2	*3/4*

x	*q(x)*
-3	*4*
-2	
-1	
0	*-5*
1	
2	

Aquí se han completado algunas imágenes para evitar que el alumno coloque todos ceros en la columna *m(x)* y *q(x)* haciendo que ambas resulten la función nula. No le queda al estudiante otra alternativa que colocar ceros en forma alternada si bien en algunos casos podrá completar con dos ceros como por ejemplo en la imagen de –2, pero de todas formas no obtendrá la función nula.

b) Completa la tabla correspondiente a la función producto m.q

x	*(m.q)(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) ¿Es la función m.q nula? ¿Por qué?

d) ¿Son m o q la función nula? ¿Por qué?

e) Enuncia qué condición debe cumplirse para que el producto de dos funciones sea la función nula.

8) f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

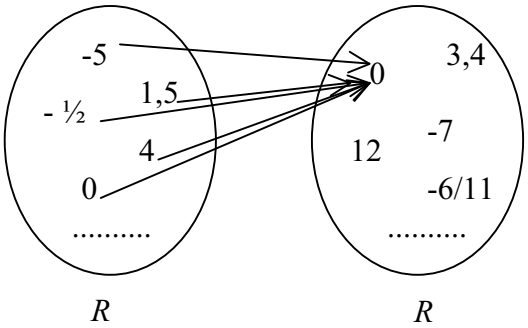
El objetivo es ver si el alumno incorpora la actividad realizada o persiste en la repetición de una regla a la que no le está dando sentido.

9) *i) Se sabe que b.q=0, ¿qué puedes deducir sobre b y q a partir de esta información?*
   ii) ¿Qué representan para ti b y q?

Se vuelve a formular una pregunta que ya se le ha hecho al alumno en la SECUENCIA I con la intención de observar si éste amplía su mundo de representaciones y discute lo que puede deducirse según qué representen *b* y *q* (números reales o funciones)

A continuación se presentan las actividades de la SECUENCIA V para alumnos de bachillerato en la versión que usa gráficas junto a algunos comentarios sobre las mismas. Como se verá, hay preguntas y ejercicios que se repiten en una y otra versión, para ellas valen idénticos comentarios a los ya realizados.

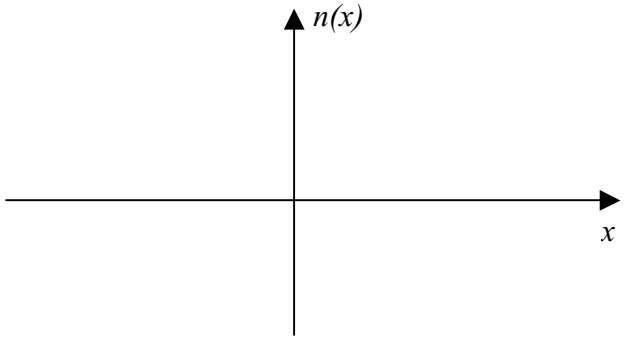
1) *Llamaremos función nula a aquella que a todo elemento del dominio le hace corresponder el cero.*
   Si consideramos R como el dominio de la función, podemos visualizar la idea anterior a través del siguiente diagrama de flechas:



Representamos la información que da el diagrama de flechas en una tabla de valores. En este caso a la función nula la llamaremos O.

x	*O(x)*
-5	*0*
- ½	*0*
0	*0*
1,5	*0*
4	*0*
.....	.....

a) Grafica la función nula ayudándote de la tabla de valores anterior.



Si bien por el nivel que cursan los alumnos deberían conocer la gráfica de la función nula, el objetivo de esta actividad es que los alumnos la construyan para que la tengan presente para las actividades subsiguientes.

2) a) r y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

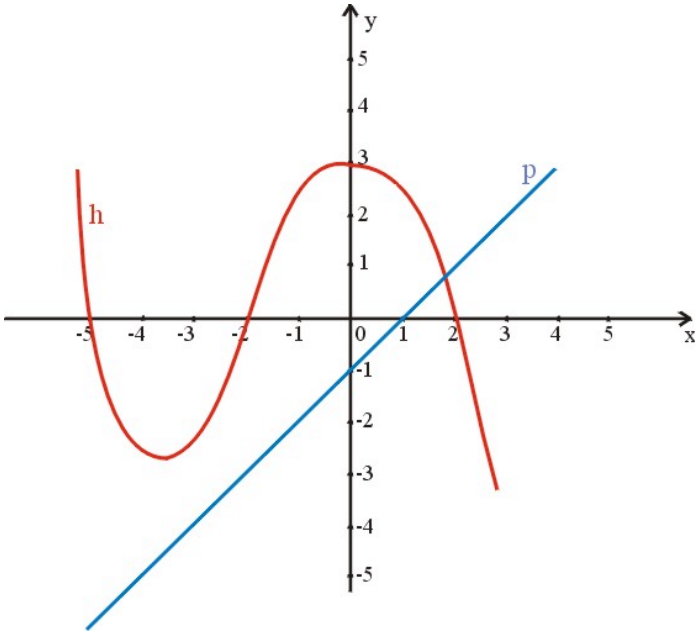
$r(2)=6$	$q(2)= -6$
$r(-3)=5$	$q(-3)= 4$
$r(½)= -1$	$q(½)= 7$

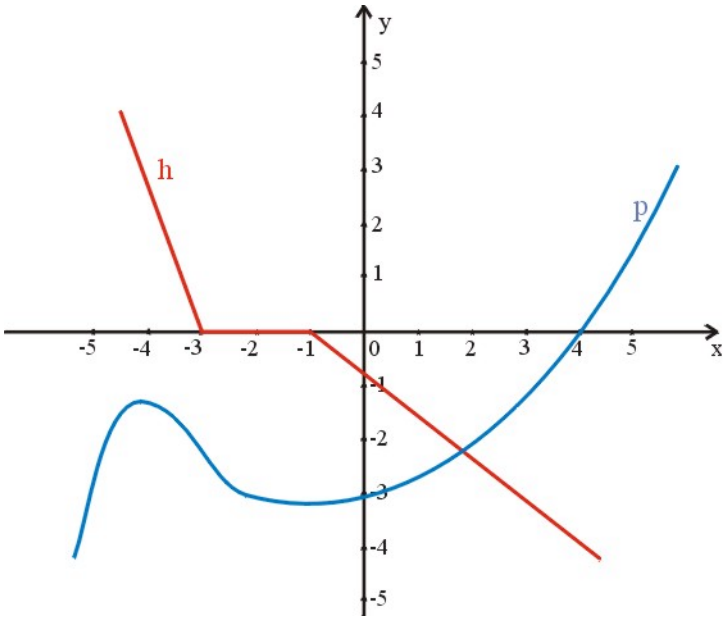
Usando la información anterior completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto r.q.

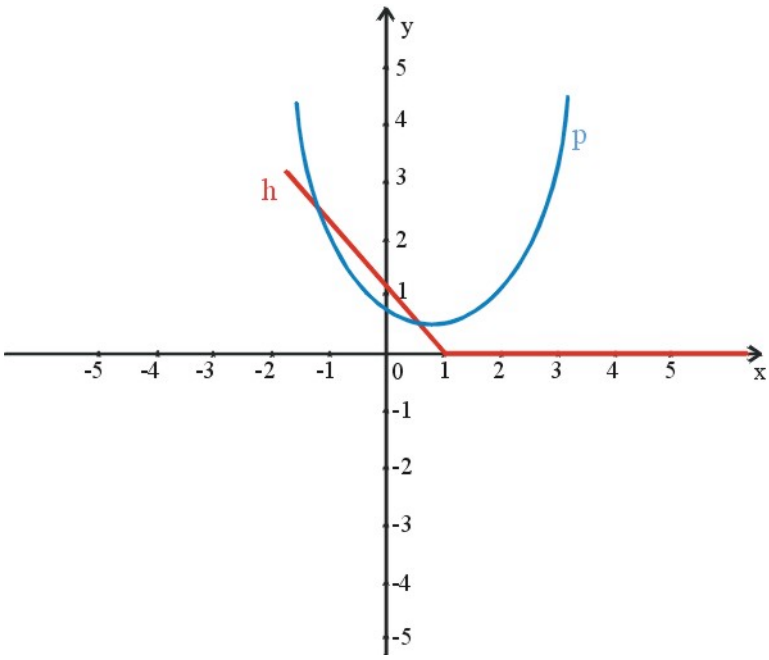
x	$(r.q)(x)$
-3	
½	
2	

3) f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

4) h y p son dos funciones de dominio R. Indica, en cada caso, cuáles reales tienen imagen cero en la función producto h.p.

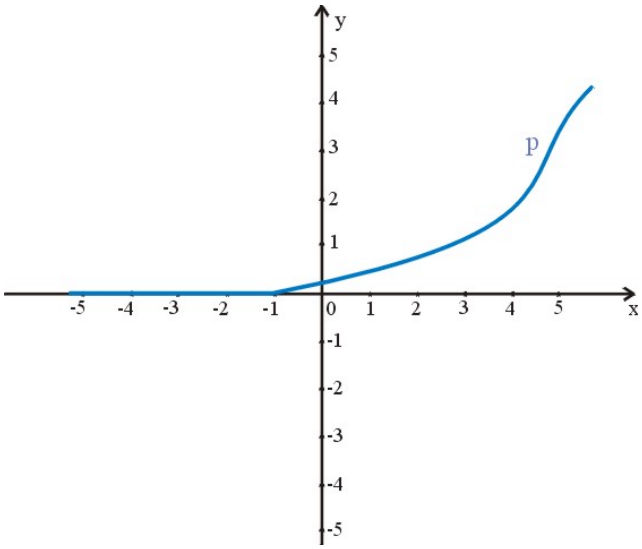






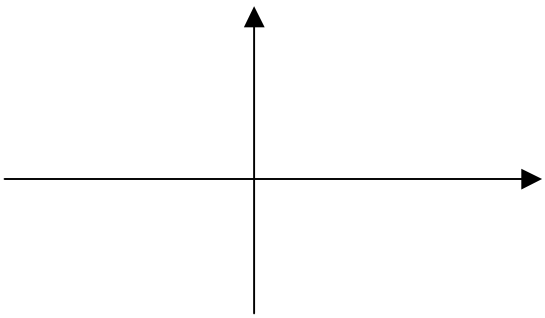
Se presentan tres situaciones gráficas para que el alumno interprete que mediante diversas combinaciones de imágenes nulas en una u otra función se pueden conseguir imágenes cero en la función producto.

5) A continuación aparece la gráfica de una función p. De ser posible, esboza la gráfica de una función h no nula, cuyo producto por p sea la función nula. Fundamenta tu respuesta.



Teniendo en cuenta la actividad anterior se espera que el alumno aproveche la "zona" donde *p* vale cero para generar una función no nula cuyo producto por *p* dé la función nula.

6) Si es posible, esboza los gráficos de dos funciones no nulas cuyo producto sea la función nula. Explica tu respuesta.



Esta actividad requiere tener en cuenta las situaciones anteriores. También es una actividad en la que el alumno puede volcar su creatividad en el diseño de las gráficas que debe realizar.

7) f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=0, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

8) i) Se sabe que b.j=0, ¿qué puedes deducir sobre b y j a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y j?

A continuación se presenta la SECUENCIA V para estudiantes de nivel terciario en la versión que utiliza tablas de valores. Como ya se dijo, tiene diferencias mínimas con la secuencia elaborada para estudiantes de secundaria.

Estos estudiantes realizaron en forma previa la SECUENCIA IV y en ella se les formuló la pregunta: *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?* Por esta razón esta pregunta no se incluye en esta secuencia.

En todos los casos valen para cada actividad iguales comentarios a los ya realizados en la secuencia respectiva para estudiantes de secundaria.

1) a) p y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

$p(2)=6$	$q(2)= -6$
$p(-3)=5$	$q(-3)= 4$
$p(½)= -1$	$q(½)= 7$

Con esta información completa la siguiente tabla de valores.

x	*(p.q)(x)*
-3	
½	
2	

2) t y a son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

t(2)=0	*a(2)= -6*
t(-3)=5	*a(-3)= 0*
t(½)= -1	*a(½)= 7*
t(4)=0	*a(4)=5,7*
t(-9,11)=0	*a*(-9,11)=0

a) Usando la información anterior, completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto t.a:

x	(*t.a*)(*x*)
-9,11	
-3	
½	
2	
4	

b) ¿Qué debe suceder para que un real "x" tenga imagen cero en la función producto?

3) j y p son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.
Completa la tabla de valores de j y p para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto j.p

x	*j(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	*p(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

4) En la pregunta anterior, ¿puedes completar las tablas de otra forma?
Si tu respuesta es negativa explica por qué.
Si tu respuesta es afirmativa, completa las tablas que siguen de forma diferente a como lo hiciste anteriormente.

x	*j(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	*p(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

5) m y q son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.
Completa la tabla de valores de m y q para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto m.q

x	*m(x)*
-3	
-2	
-1	*6*
0	
1	
2	*3/4*

x	*q(x)*
-3	*4*
-2	
-1	
0	*-5*
1	
2	

Como ya se explicó previamente, esta secuencia tiene el mismo diseño que la aplicada a estudiantes de secundaria, salvo detalles y por tanto valen los comentarios ya realizados. Aquí se han completado algunas imágenes para evitar que el alumno coloque todos ceros en la columna *m(x)* y *q(x)* haciendo que ambas resulten la función nula. No le queda al estudiante otra alternativa que colocar ceros en forma alternada si bien en algunos casos podrá completar con dos ceros como por ejemplo en la imagen de –2, pero de todas formas no obtendrá la función nula. En el diseño de estas tablas se han utilizados números enteros y mínimamente las fracciones sin que esto signifique querer reforzar el uso de ellos. El objetivo fue no agregar complicaciones al estudiante. Somos conscientes de las dificultades que tienen muchos alumnos para operar con números reales y no quisimos que esto fuera a distorsionar la actividad.

b) Completa la tabla correspondiente a la función producto m.q

x	*(m.q)(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) ¿Es la función m.q nula? ¿Por qué?

d) ¿Son m o q la función nula? ¿Por qué?

e) Enuncia qué condición debe cumplirse para que el producto de dos funciones sea la función nula.

6) *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*

7) *i) Se sabe que b.q=0, ¿qué puedes deducir sobre b y q a partir de esta información?*
ii) ¿Qué representan para ti b y q?

A continuación se presenta la SECUENCIA V para estudiantes de nivel terciario en la versión que utiliza gráficas.

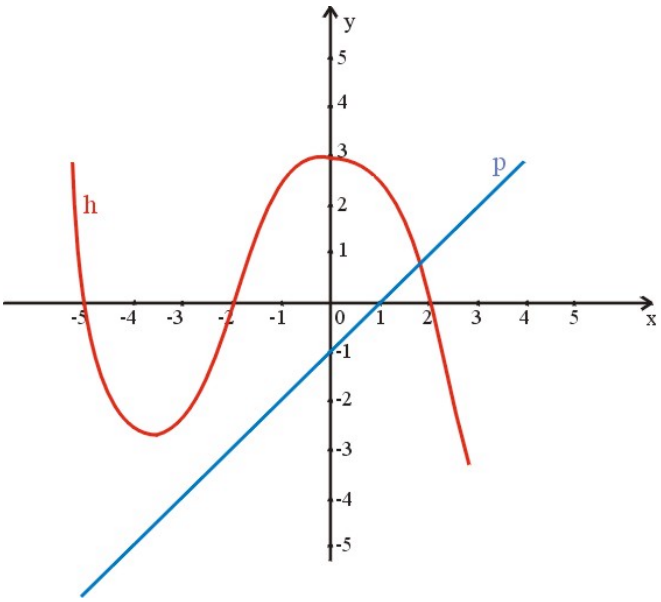
1) a) r y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

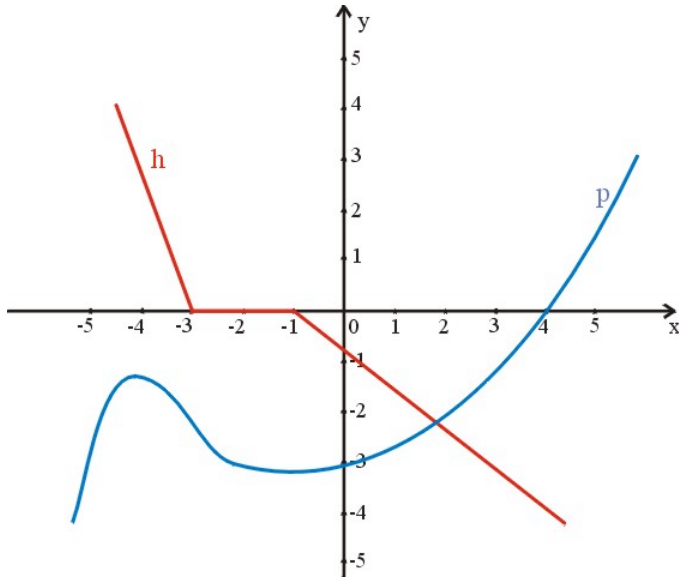
r(2)=6	*q(2)= -6*
r(-3)=5	*q(-3)= 4*
r(½)= -1	*q(½)= 7*

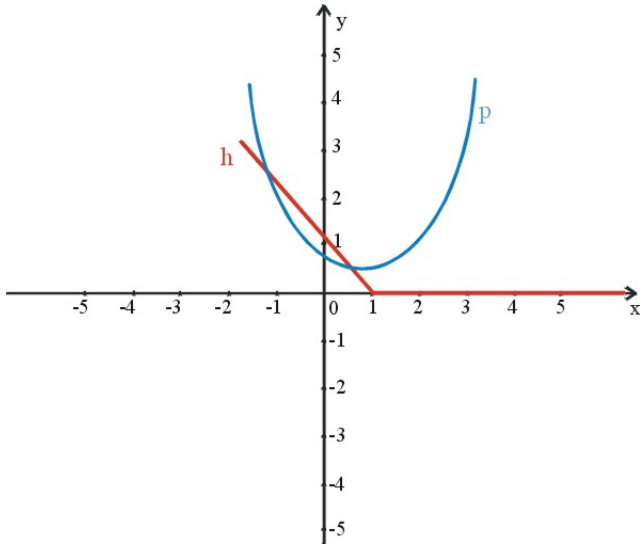
Usando la información anterior completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto r.q.

x	*(r.q)(x)*
-3	
½	
2	

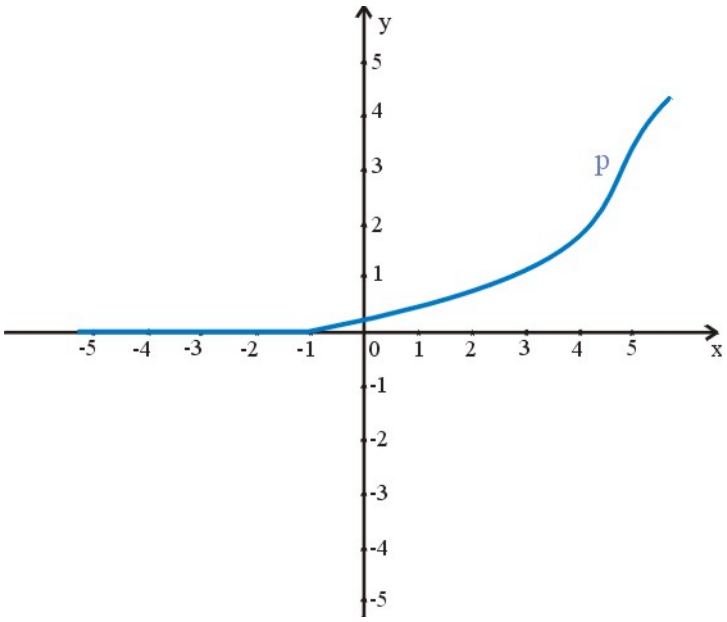
2)h y p son dos funciones de dominio R. Indica, en cada uno de los siguientes casos, cuáles reales tienen imagen cero en la función producto h.p.



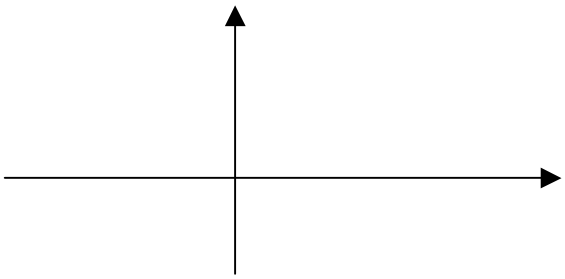

y
x
h
p
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5


y
x
h
p
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

3) A continuación aparece la gráfica de cierta función p de dominio R. De ser posible, esboza la gráfica de una función h no nula, cuyo producto por p sea la función nula. Fundamenta tu respuesta.



4) Si es posible, esboza los gráficos de dos funciones no nulas, cuyo producto sea la función nula. Explica tu respuesta.



5) *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*

6) i) Se sabe que b.j=0, ¿qué puedes deducir sobre b y j a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y j?

CAPÍTULO VI

LOS RESULTADOS INMEDIATOS

En este capítulo presentaremos los resultados inmediatos obtenidos a través de las secuencias. Para profundizar en lo que los alumnos piensan cuando resuelven sus tareas por escrito, iremos complementando la reflexión con extractos de las entrevistas mantenidas con los estudiantes. También se incluyen algunas tablas con cifras que permiten una apreciación rápida de algunos de los resultados. Para la presentación de los resultados se seguirá el orden establecido en los objetivos de esta investigación.

Resultados referidos a las estrategias utilizadas para resolver la ecuación factorizada

Comenzaremos presentando cifras basadas en la resolución del ejercicio 1 de la SECUENCIA I y el ejercicio 1 de la SECUENCIA IV. Estos dos ejercicios (recordemos que en ellos se pedía resolver y verificar una ecuación de segundo grado, donde la expresión polinómica está dada en forma factorizada[35]) constituyen el punto de partida de cada una de las secuencias y por tanto centraremos primeramente nuestra atención en ellos, porque consideramos que nos muestran la reacción inmediata de los estudiantes frente a una actividad de este tipo. Consideraremos el trabajo de 23 estudiantes de tercer año de profesorado de matemática, 14 alumnos de 3º año de Ciclo Básico y 24 estudiantes de 6º año de Bachillerato divididos en: 14 alumnos de la opción Medicina y 10 de la opción Economía.

La primera tabla nos muestra el porcentaje de alumnos por nivel que resolvieron y verificaron correctamente la ecuación y la segunda el porcentaje de estudiantes por nivel que resolvieron correctamente la ecuación aun en el caso de que verificaran o no. Cuando decimos *resolvieron y verificaron correctamente* nos referimos a que el estudiante obtuvo por algún procedimiento las dos raíces de la ecuación y verificó cada una de las raíces encontradas sustituyendo en la expresión polinómica dada.

Nivel	*Porcentaje del total de alumnos **por nivel**, que resolvieron **y** verificaron correctamente la ecuación*
TERCIARIO	***91***
BACHILLERATO	***33***
CICLO BÁSICO	***14***

[35] Para una consulta rápida de las actividades de las secuencias se puede consultar el ANEXO I.

Nivel	*Porcentaje del total de alumnos **por nivel**, que resolvieron correctamente la ecuación (incluye los que verificaron y no verificaron)*
TERCIARIO	***96***
BACHILLERATO	***67***
CICLO BÁSICO	***21***

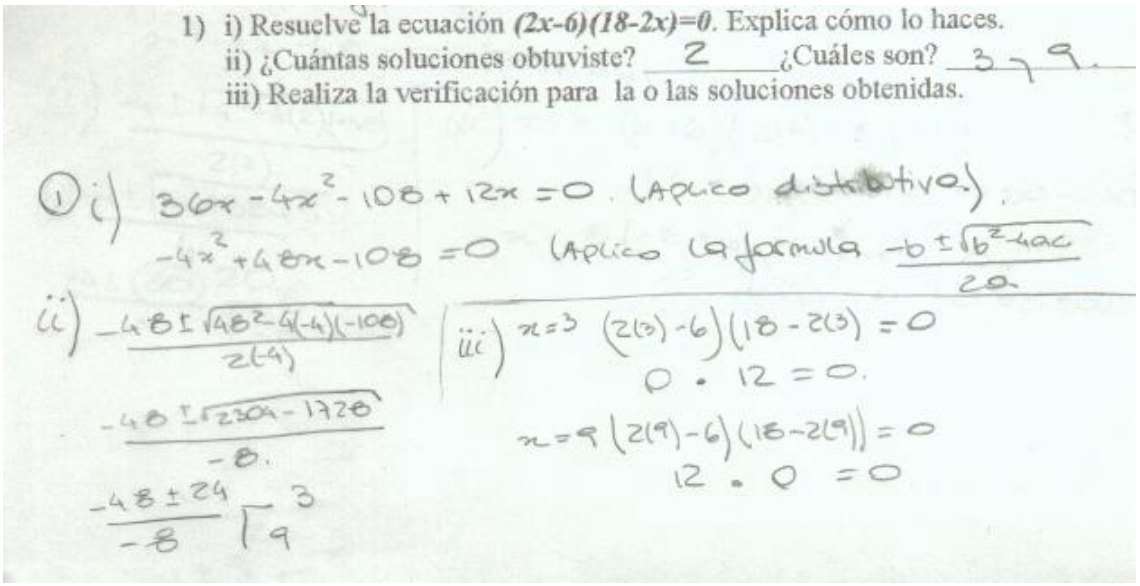
Lo que expondremos a continuación se refiere a los alumnos que conociendo la propiedad Hankeliana, no la aplican para resolver una ecuación polinómica factorizada e igualada a cero. La siguiente tabla nos muestra cuántos alumnos por nivel conocen la propiedad y de ellos, cuántos no la aplicaron para resolver el ejercicio 1.

NIVEL	*Número de alumnos por nivel que conocen la propiedad*	*Número de alumnos por nivel que conocen la propiedad y **no** la aplican al momento de resolver la ecuación*
TERCIARIO	**23**	**1**
BACHILLERATO	**21**	**12**
CICLO BÁSICO	**7**	**4**

Cuando decimos que los estudiantes conocen la propiedad nos referimos a que en la pregunta 18 de la SECUENCIA I o la pregunta 2 de la SECUENCIA IV contestaron que uno u otro de los factores es cero. Ningún estudiante constestó a estas preguntas diciendo que la respuesta depende de la estructura.

Cuando señalamos que no aplicaron la propiedad para resolver la ecuación, significa que:

a) Desarrollaron la expresión propuesta y aplicaron la fórmula cuadrática para hallar las raíces. Este procedimiento se observó en estudiantes de Bachillerato y nivel terciario. No así en estudiantes de Ciclo Básico ya que este conocimiento no se encuentra disponible.



1) i) Resuelve la ecuación ***(2x-6)(18-2x)=0***. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? 2 ¿Cuáles son? 3 y 9.
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

① i) $36x - 4x^2 - 108 + 12x = 0$ (Aplico distributivo).
$-4x^2 + 48x - 108 = 0$ (Aplico la formula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)

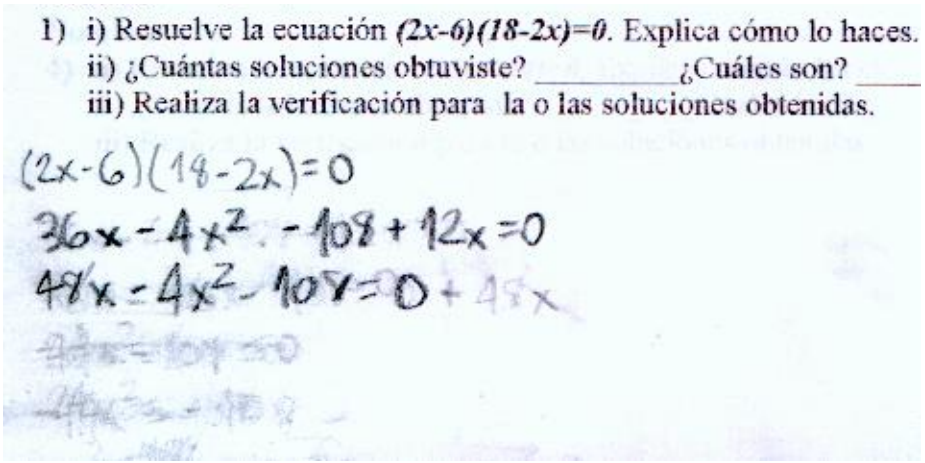
ii) $\frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4(-4)(-108)}}{2(-4)}$

$\frac{-48 \pm \sqrt{2304 - 1728}}{-8}$

$\frac{-48 \pm 24}{-8}$ 3 y 9

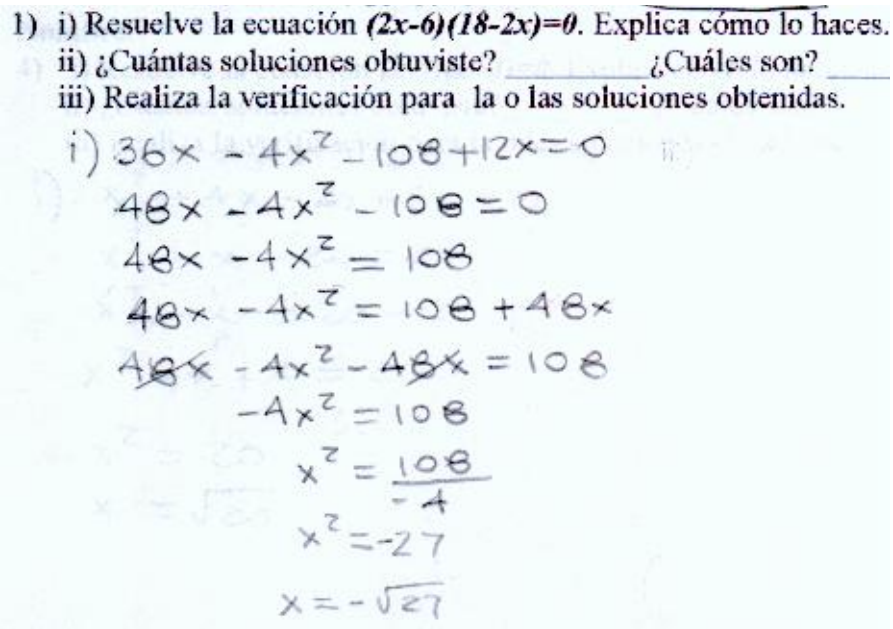
iii) $x=3$ $(2(3)-6)(18-2(3)) = 0$
$0 \cdot 12 = 0$.
$x=9$ $(2(9)-6)(18-2(9)) = 0$
$12 \cdot 0 = 0$

b) Desarrollaron la expresión propuesta y no pudieron despejar la incógnita por no conocer la fórmula cuadrática o lo hacen sin buenos resultados, intentando aplicar las técnicas que permiten despejar la incógnita en las ecuaciones lineales como por ejemplo sumar a ambos miembros de la ecuación una misma expresión. Este es el caso de los alumnos de Ciclo Básico.



1) i) Resuelve la ecuación ***(2x-6)(18-2x)=0***. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____ ¿Cuáles son? ____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

$(2x-6)(18-2x)=0$
$36x - 4x^2 - 108 + 12x = 0$
$48x - 4x^2 - 108 = 0 + 48x$



1) i) Resuelve la ecuación ***(2x-6)(18-2x)=0***. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____ ¿Cuáles son? ____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

i) $36x - 4x^2 - 108 + 12x = 0$

$48x - 4x^2 - 108 = 0$

$48x - 4x^2 = 108$

$48x - 4x^2 = 108 + 48x$

$\cancel{48x} - 4x^2 - \cancel{48x} = 108$

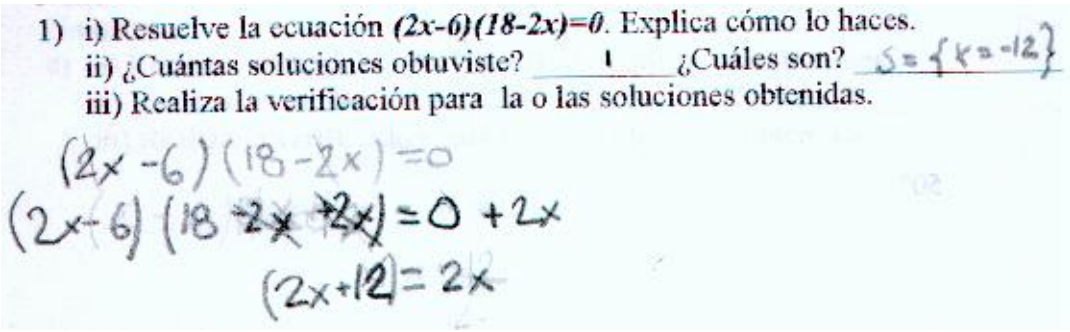
$-4x^2 = 108$

$x^2 = \frac{108}{-4}$

$x^2 = -27$

$x = -\sqrt{27}$

c) Trataron la ecuación como si fuera una ecuación lineal. Con esto queremos decir que ignoraron la multiplicación propuesta, suprimieron paréntesis y asociaron términos semejantes o intentaron aplicar alguna de las técnicas que permiten despejar la incógnita en las ecuaciones lineales.



1) i) Resuelve la ecuación ***(2x-6)(18-2x)=0***. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? ___1___ ¿Cuáles son? $S = \{x = -12\}$
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

$(2x - 6)(18 - 2x) = 0$

$(2x - 6)(18 \cancel{-2x} \cancel{+2x}) = 0 + 2x$

$(2x + 12) = 2x$

Comparemos los éxitos según la estrategia elegida para resolver la ecuación. Aplicando la propiedad Hankeliana se logran mejores resultados que desarrollando y aplicando la fórmula cuadrática. La segunda estrategia mencionada involucra mayor número de operaciones y por tanto mayor riesgo de cometer errores. En la primera de las tablas que siguen, no aparecen los alumnos de Ciclo Básico porque en ese nivel todavía no han estudiado la fórmula antedicha. Entre los estudiantes de bachillerato hay uno que no resuelve la ecuación, uno que resolvió la ecuación aplicando la propiedad y también desarrollando y aplicando la fórmula y por tanto está contado en ambas tablas, uno que

"adivina" las raíces y por tanto no se incluye en ninguna de las dos estrategias y otro que reduce la ecuación como si se tratara de una expresión polinómica vinculada por la adición, obteniendo una ecuación de primer grado.

Nivel	*Número de alumnos que desarrollaron y aplicaron la fórmula cuadrática*	*Alumnos de entre los anteriores que resolvieron bien la ecuación con esta estrategia*
TERCIARIO	***1***	***0***
BACHILLERATO	***13***	***8***

Nivel	*Número de alumnos que aplicaron la propiedad Hankeliana*	*Alumnos de entre los anteriores que resolvieron bien la ecuación con esta estrategia*
TERCIARIO	***22***	***22***
BACHILLERATO	***9***	***8***
CICLO BÁSICO	***3***	***3***

Dentro del primer objetivo de esta investigación nos propusimos observar las estrategias que empleaban los alumnos para resolver las ecuaciones en las que nos hemos concentrado, poniendo atención en los alumnos que conociendo la propiedad y constituyendo esta la única herramienta de resolución de estas ecuaciones, no la aplican. Recordemos además que todos los estudiantes con los que trabajamos han estudiado la propiedad y han aprendido a resolver ecuaciones usándola. Entendemos además que la mencionada propiedad constituye la herramienta óptima para resolver el tipo de ecuaciones en la que nos hemos focalizado.

A continuación analizaremos información extraida de las entrevistas realizadas a los estudiantes[36], que guardan relación con este objetivo. En el análisis de las entrevistas y de los trabajos de los estudiantes, se identificarán cuando corresponda, los requisitos correspondientes a las categorías dadas por Trigueros y Ursini, respetando la notación que ellas mismas introducen en su marco teórico (U_i, G_i, F_i). Los requisitos se señalarán en los siguientes casos: cuando se reconozcan los mismos en el trabajo del estudiante, cuando se demuestre buen desempeño en ellos y cuando se reconozcan dificultades con los mismos.

En total fueron entrevistadas catorce personas, a saber: siete estudiantes de bachillerato, tres de Ciclo Básico, tres de profesorado de matemática y un docente de matemática. En el caso de los estudiantes, los criterios generales de selección fueron:

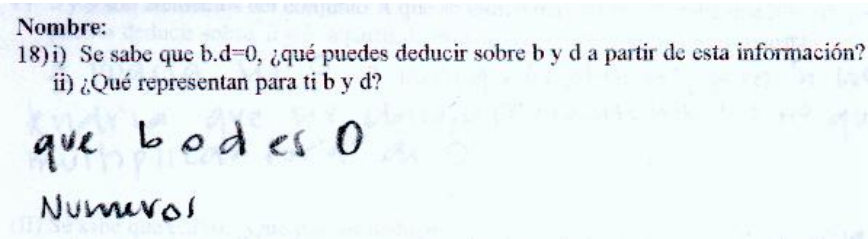
- Aparición en sus trabajos del error que estábamos estudiando u otros errores que

[36] Para hacer una lectura más detallada de las entrevistas, puede consultarse el ANEXO II.

guardaban relación con el tema de investigación.

- Estudiantes que conocían la propiedad pero no la aplicaban a la resolución de ecuaciones.
- Estudiantes que generalizaron la propiedad a estructuras donde no era válida habiendo recibido instrucción específica al respecto.
- Estudiantes que abordaron más de una estrategia de resolución de ecuaciones cuadráticas.
- Estudiantes que mostraron buen desempeño en la realización de las secuencias.
- Uno de los estudiantes de profesorado fue seleccionado por su manejo explícito de los dominios de integridad, cuestión que posteriormente le permitió rever sus respuestas dadas en primera instancia.

El primer caso que veremos es el de Clara. Ella es estudiante de 3º año de Ciclo Básico y tenía 15 años en el momento de realizar tanto las secuencias como la entrevista. Para resolver la ecuación *(2x-6)(18-2x)=0*, desarrolla y reduce la expresión del primer miembro de la ecuación con la intención de despejar la incógnita. No logra hacerlo, por tanto no evidenció buen desempeño en U_4. A las preguntas: *"i) Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información? ii)¿Qué representan para ti b y d?"*
Contesta en *i) "que b o d es 0"* y en *ii) "números"*.


Nombre:
18) i) Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y d?

que b o d es 0

Numeros

Clara reconoce en *b* y *d* números y es capaz de determinarlos según la restricción que impone el problema, por ello reconocemos aquí a U_2 y también a G_2.
El siguiente extracto corresponde a una parte de la entrevista realizada a esta estudiante.

Profesora: Entonces tú, de acuerdo a lo que me contestaste, en la pregunta 18 sabías que si el producto de dos factores te da cero, uno u otro tienen que ser cero.
Clara: Sí.
P: Sin embargo tú no lo aplicaste para resolver la ecuación. ¿Por qué no lo aplicaste Clara?
C: Porque después me puse a pensar, ¿no? O sea, era una cosa que yo deduciendo, tipo, sin ningún tipo de operación, digamos yo lo podía sacar, lo que yo no pude sacar es si viendo, o sea despejando la x.
P: O sea que tú, esta idea que tú me explicaste que la x tenía que valer 3 o 9 tú la tenías clara?
C: Claro, lo que no supe hacer es cómo llegar a partir de una fórmula o sea ya, como te puedo decir, ya, dicha, no pude seguir la operación, no pude hallar según todos los procedimientos que x era igual a 3 o x era igual a 9.
P: Y entonces, ¿qué fue lo que optaste por hacer aquí?
C: No entiendo.

P: ¿Qué planteo hiciste acá Clara? ¿Qué hiciste para obtener 36x, -4x^2, –108, ¿qué operación hiciste?
C: Una multiplicación.
P: ¿Y después te encontraste con qué cosa?
C: Con que la x era a la dos.
P: ¿Y entonces?
C: Y entonces no supe qué hacer.

Parecería que Clara se dio cuenta de cuáles eran las raíces de la ecuación (U_2), pero lo que ella intentaba hacer era "una operación", intentaba despejar la *x* siguiendo algún procedimiento o alguna fórmula (U_4), como ella misma lo dice. En la entrevista se pudo apreciar que Clara reconoce los símbolos que aparecen en la ecuación como números específicos que debe hallar de acuerdo a la restricción que impone la ecuación, esto fue identificado como el requisito U_2. La profesora le pregunta ahora por qué no aplicó la propiedad:

Profesor: ¿Y por qué pensás que no se te ocurrió hacer esto?
Clara: Porque no, no sé, porque capaz que fue porque siempre que me daban una operación yo tenía una fórmula para hacerla y tipo la compliqué más o sea al estar acostumbrada a que me dieran..., mismo, mismo no me acuerdo pero creo que yo un año hice eso, entonces fue tipo tener la operación y yo creo que sabía, por lo menos creía que había una fórmula que lo solucionara que debe haber, no?
P: Sí.
C: Y entonces no sé, busqué esa y no la más simple, era la más obvia, era la más lógica de pensar, porque aparte, mismo yo sabía que era eso, no se me ocurrió, o sea, hacerlo por ese camino y no por el otro, no sé por qué.

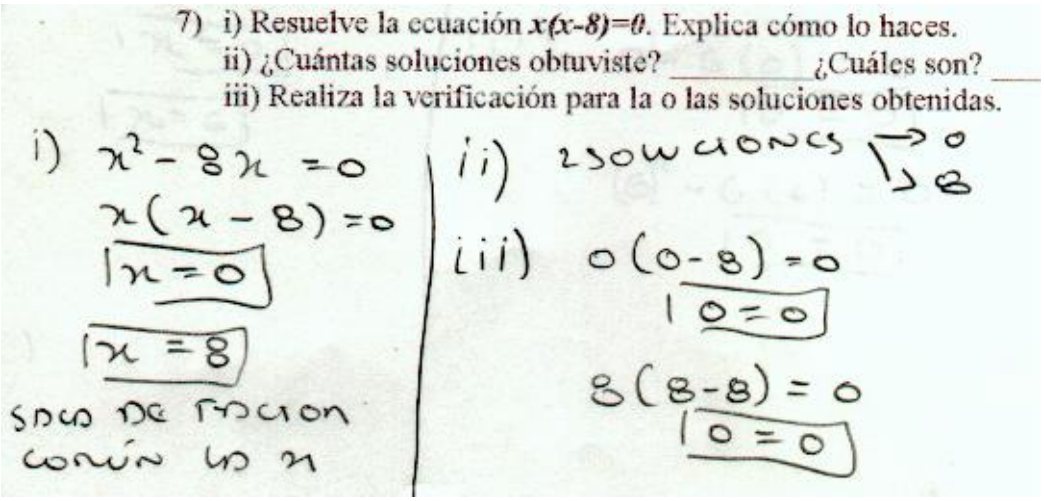
Clara reconoce que la aplicación de la propiedad constituye la forma de pensar *"más lógica"*, *" más obvia"*, *"más simple"*, sin embargo, en su trabajo, lucha por encontrar un procedimiento que le permita despejar la *x*. Cuando se le hace ver que podría haber resuelto la ecuación aplicando la mencionada propiedad, parece no quedar satisfecha, ella hubiese querido hallar la *x "según todos los procedimientos"*, como ella misma afirma. Quizás Clara esperaba poder aplicar un procedimiento similar al que aplicaba cuando resolvía ecuaciones de primer grado, quizás esperaba poder contar con una serie de pasos a seguir, con un proceso más algorítmico. Por otra parte, no se atreve a poner por escrito cuáles son las raíces de la ecuación, a pesar de haberse dado cuenta de cuáles eran, pues no ha podido obtenerlas como producto de un algoritmo sino de un cálculo mental. Tal vez, en ese cálculo mental que Clara realiza esté implícita la propiedad, pero ella necesita de todas formas que esas raíces sean obtenidas realizando cierto procedimiento o aplicando una fórmula. Es posible que el pensamiento de Clara y el de tantos otros estudiantes que prefieren desarrollar, reducir y aplicar la fórmula cuadrática, sea consecuencia de una enseñanza que privilegia los procesos algorítmicos.

La siguiente tabla nos muestra el número de estudiantes que desarrollaron la expresión dada en la ecuación (aun en el caso en que también hubieran incluido la resolución de la ecuación aplicando la propiedad), sobre el total de alumnos que intentan resolver la ecuación por algún método, es decir que no se consideran los estudiantes que entregaron la

hoja en blanco. Lo que queremos es, de alguna manera, mostrar a través de cifras "el impulso" de los estudiantes a aplicar la propiedad Distributiva en la primera ecuación que debían resolver.

Nivel	*Número de alumnos que intentan resolver la ecuación*	*Número de alumnos, de los anteriores, que desarrollan la expresión*
TERCIARIO	***23***	***1***
BACHILLERATO	***23***	***14***
CICLO BÁSICO	***14***	***8***

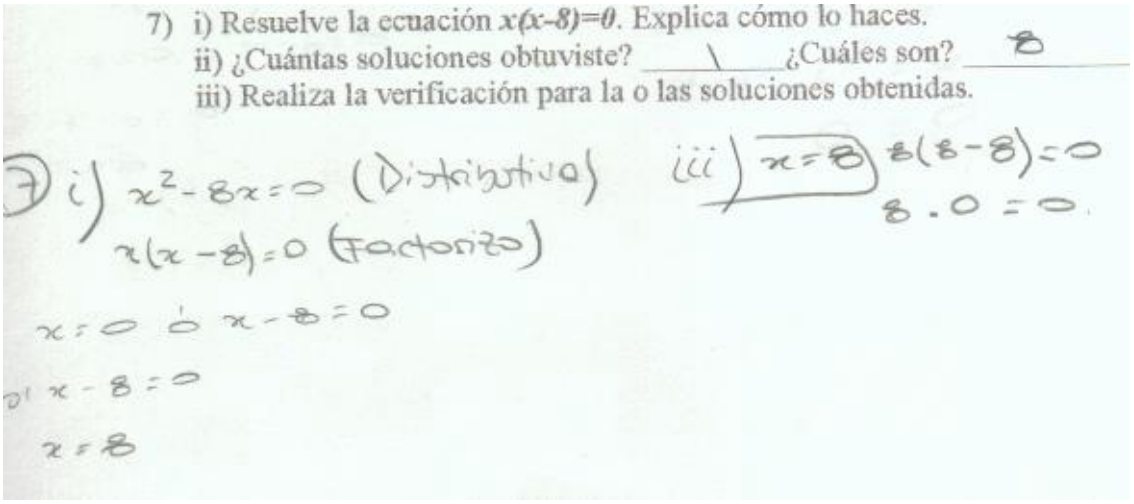
Podríamos decir que en Ciclo Básico y Bachillerato existe un fuerte impulso a aplicar la propiedad Distributiva, pero en los trabajos de los estudiantes de Bachillerato que eran los que poseían más de una estrategia resolutiva para enfrentar este tipo de ecuaciones observamos que a lo largo del trabajo cambiaban de estrategia.
Entre estos últimos, vimos que aplican la propiedad Hankeliana para resolver otras de las ecuaciones propuestas como $x(x-8)=0$ o $x(2x-10)=0$. Tal vez este tipo de ecuación, al tener x como factor, constituye un mejor estímulo para que el estudiante evoque la propiedad. Como ya explicamos más atrás, es usual que la enseñanza de la resolución de las ecuaciones de segundo grado se divida en varios casos. En el caso en que la ecuación sea incompleta de la forma $ax^2+bx=0$, se enseña a extraer factor común x para luego aplicar la propiedad. Quizás por ello Patricia y Virginia hacen los siguientes planteos para resolver la ecuación $x(x-8)=0$:


7) i) Resuelve la ecuación $x(x-8)=0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____ ¿Cuáles son? ____
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

i) $x^2-8x=0$
$x(x-8)=0$
$\boxed{x=0}$
$\boxed{x=8}$
SACO DE FACTOR COMÚN LA x

ii) 2 SOLUCIONES → 0, 8

iii) $0(0-8)=0$
$\boxed{0=0}$
$8(8-8)=0$
$\boxed{0=0}$



7) i) Resuelve la ecuación $x(x-8)=0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? \ ¿Cuáles son? 8
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

7) i) $x^2-8x=0$ (Distributiva)
$x(x-8)=0$ (Factorizo)
$x=0$ ó $x-8=0$
$x-8=0$
$x=8$

iii) $x=8$ $8(8-8)=0$
$8 \cdot 0=0$

Observamos que aplican propiedad Distributiva para luego factorizar, volviendo a obtener nuevamente la ecuación dada. Es interesante ver cómo necesitan pasar por ese proceso de "desarrollar". Las dos estudiantes evidenciaron el requisito U_4, resolviendo además la ecuación dada de la forma que creemos más económica.

Virginia, la estudiante que mencionamos más arriba, tenía 17 años en el momento que realizó el trabajo y la entrevista, cursaba el último año de Bachillerato. Conoce la propiedad Hankeliana, la aplica a veces, pero cuando no la aplica y podría aplicarla es *"por costumbre"*. Creemos que el pensamiento de Virginia podría ser producto de una pedagogía. Una pedagogía que tanto ha insistido en lo algorítmico, que cuando el alumno ve unos paréntesis indicando una multiplicación, inmediatamente la realiza, en lugar de detenerse a pensar si es realmente necesario.

Profesor: Vamos a mirar la pregunta 7 que decía: Resuelve la ecuación x(x-8)=0. Explica cómo lo haces. ¿Cuántas soluciones obtuviste? ¿Cuáles son?
¿Te acordás? Contame cómo lo hiciste.
Virginia: En realidad apliqué la Distributiva por costumbre de las otras pero...
P: O sea en las anteriores que habías resuelto, habías aplicado propiedad Distributiva.
V: Ta, pero podría hacerlo así, directamente. Si lo tengo así ya sé que x=0 o x-8=0.
P: Y cuando tú me decís x=0 o x-8=0, ¿qué es lo que estás aplicando?
V: El nombre no lo sé.
P: Aunque no sepas el nombre, ¿cuál es la idea de lo que estás aplicando?
V: ¿Cómo? Buscando las raíces.
P: Sí, pero, ¿por qué si x(x-8) =0 a ti te parece que x=0 o x-8=0?
V: Porque uno de los dos tiene que dar cero para que el resultado sea cero.

El diálogo que se transcribe a continuación corresponde a la entrevista de María Eugenia. Ella es estudiante del último año de Bachillerato y tenía 17 años en el momento de realizar

las secuencias y la entrevista. Fue capaz de hallar todas las raíces de las ecuaciones, desarrollando y aplicando la fórmula cuadrática (U_2, U_4). Si bien en este caso Mª Eugenia aplica la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación, podemos apreciar en su discurso que lo que está aplicando es una regla vacía de contenido, que solamente le dice cómo debe hacer para despejar *x*. En este caso la propiedad ha perdido la característica de ser una heurística como en el caso de Clara para pasar a ser un mecanismo, una regla, en definitiva un algoritmo.

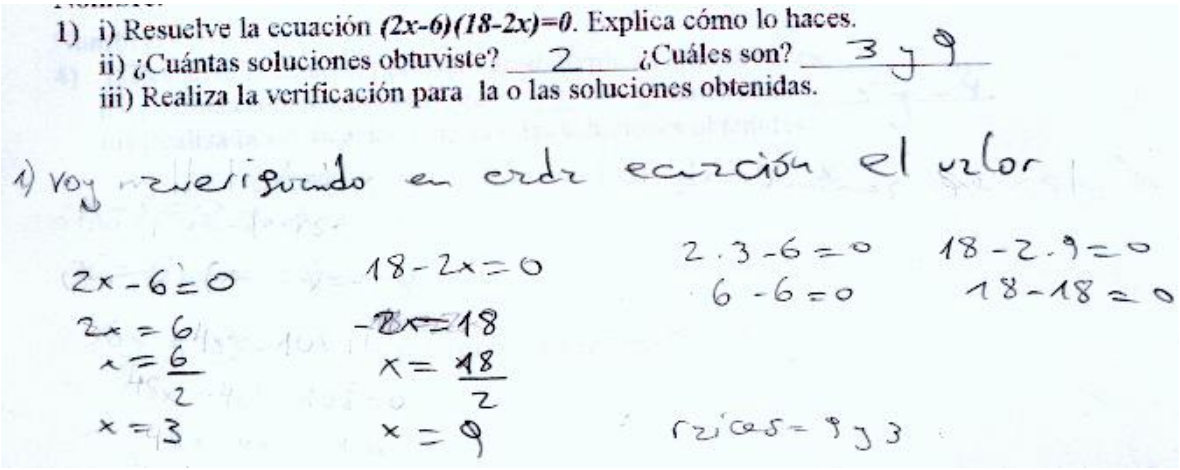
Profesora: Si yo te pregunto: ¿cómo resolvés la ecuación (6x-12)(x+5)=0?
Mª Eugenia: Ehhh, por dos formas o despejando la x en cada término.
P: ¿Y ahí qué estarías aplicando?
M: Hankeliana.
P: ¿Y te acordás lo que dice la Hankeliana?
M: No.
P: Más o menos en tus palabras.
M: Que en cada término si despejás la x te da la raíz y me da las raíces de la ecuación.
P: ¿Te animás a hacerlo?
M: (6x-12)(x+5)=0
6x-12=0 x+5=0
6x=12 x=-5
$x=\frac{12}{6}=2$
P: ¿Qué raíces encontraste?
M: 2 y –5.

A pesar de que para Mª Eugenia la propiedad Hankeliana le dice *"Que en cada término si despejás la x te da la raíz",* ella sabe que si el producto de dos factores es cero *"alguno de los dos términos tiene que valer 0"* [37], como ella misma lo afirma al responder la pregunta 18. Sin embargo la regla que aplica para resolver la ecuación se ha separado del enunciado de la propiedad. Podríamos decir que ha "operacionalizado" la propiedad pues ello le sirve para alcanzar el objetivo de resolver la ecuación. Tal vez Mª Eugenia esté privilegiando el saber hacer, más que el saber por qué lo hago. ¿Será esto una consecuencia de la pedagogía? Skemp (1976) lo llama "reglas sin razones". Notemos que en el caso de esta alumna, la razón existe pero no está asociada a la aplicación de la regla. Quizás estemos frente a un fenómeno de compartimentalización. Con esto queremos decir que la alumna sabe que si un producto es cero alguno de los factores debe ser cero pero en el momento de justificar lo que hace señala que si en cada factor despeja *x*, halla las raíces.

Diego está en 3º año de Ciclo Básico y tenía 15 años al momento de realizar la entrevista. Resolvió satisfactoriamente la ecuación (U_4) y cualquier profesor que hubiera visto su trabajo hubiera quedado más que satisfecho con el mismo. Es uno de los tres alumnos de un total de catorce que logran resolver toda la secuencia. Hasta que pudimos entrar en sus pensamientos a través de la entrevista...

[37] Durante toda la investigación se pudo apreciar que los alumnos usan la palabra términos cuando deberían usar la palabra factores. Más adelante volveremos sobre este punto.

Profesora: Acá, ¿por qué se te ocurre que uno u otro de los términos[38] tiene que ser cero?
Diego: Porque el resultado de la suma de los dos términos va a ser cero.
P: O sea que para ti lo que aquí está planteado es una suma.
D: Sí.
P: Y para que la suma sea cero, los dos términos decís tú, tienen que ser ...
D: Tienen que dar cero.
P: Tienen que dar cero... ¿Me podrías decir cómo te das cuenta que es una suma?
D: Al tener los paréntesis me señala que es una suma y los separa en un término y averiguo esa ecuación y con la siguiente hago lo mismo.


1) i) Resuelve la ecuación $(2x-6)(18-2x)=0$. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? 2 ¿Cuáles son? 3 y 9
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

1) voy averiguando en cada ecuación el valor

$2x-6=0$ $\quad$ $18-2x=0$ $\quad$ $2.3-6=0$ $\quad$ $18-2.9=0$
$2x=6$ $\quad$ $-2x=18$ $\quad$ $6-6=0$ $\quad$ $18-18=0$
$x=\frac{6}{2}$ $\quad$ $x=\frac{18}{2}$
$x=3$ $\quad$ $x=9$ $\quad$ raíces = 9 y 3

En el planteo que realiza Diego aparecen cada uno de los factores de la ecuación igualados a cero. Resultaba imposible predecir que pensaba en 0+0 =0 en lugar de 0×0=0. Véase cómo igualmente llega a las raíces correctas y cómo el planteo es además correcto. Se trata de un error imposible de detectar si no es a través de una conversación con el alumno.
De todas formas el alumno está actuando dentro de un campo semántico, le da un significado a lo que está haciendo. Diego posee desde el punto de vista de Lins (1994), un conocimiento, es decir, una creencia-afirmación junto con una justificación para esa creencia-afirmación. Un caso diferente al de Mª Eugenia. Diego posee además de una regla una razón.

Veamos qué piensa Diego en referencia a la pregunta 18. En este caso reconoce estar frente a una multiplicación y sabe que al menos uno de los factores tiene que ser cero (U_2).

Profesora: Vamos a la pregunta 18. Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información? ¿Qué representan para ti b y d?

[38] Se reconoce el uso incorrecto de la palabra término, pero se respeta la terminología que ya había usado anteriormente el alumno durante la entrevista para no agregar más conflictos a la situación que se discute.

Diego: Para mi representan números que al realizar la ecuación uno de ellos va a tener que ser cero porque la ecuación esa te da como resultado es igual a cero, b por d es igual a cero.
P: ¿Y por qué si el resultado es cero uno de los dos tiene que ser cero?
D: Porque al multiplicar, o sea b puede ser 5 y d es igual a cero, la multiplicación de esos dos números te tiene que dar como resultado cero.
P: O sea que para que el producto te dé cero, ¿qué tiene que pasar con los números?
D: Que uno de los números, que un número multiplicado por cero me dé cero.

Martín sabe que tiene que igualar cada factor a cero para poder hallar las raíces de la ecuación (U_2, U_4). No sabe bien por qué con esa estrategia se logran hallar las raíces de la ecuación, pero sí sabe que así *"es como me lo enseñaron"*.

Profesora: Te acordás que el primer ejercicio era resolver la ecuación (2x-6)(18-2x)=0.
Martín: Sí.
P: Tú la resolviste. Explicaste: "igualo cada término a cero". ¿Me podés explicar por qué igualás cada término a cero para resolver la ecuación?
M: Para no multiplicar término a término, o sea es más rápido igualar cada paréntesis a cero.
P: ¿Y qué es lo que estás aplicando cuando decís igualo cada paréntesis a cero?
M: No, no sé el nombre de la ley.
P: Pero decímelo con tus palabras, no importa que no sepas el nombre.
M: Estoy igualando a cero y despejo el término con x.
P: Pero por qué justo igualás a cero y no a otro número?
M: Ah!, porque es el neutro, porque cuando pase el otro número no voy a tener que sumar nada. O sea, es como me lo enseñaron.
P: ¿Lo hacés porque es como te enseñaron, Martín?
M: Sí, tiene su explicación pero no.

Más tarde Martín reflexiona:

M: El tema es que yo acá sustituyo, igualo a 0 porque cada término tiene que ser cero para que yo lo iguale a cero, o no sé, capaz que en este caso uno de los dos, para que al multiplicarlos... me tendría que dar cero.

Veáse cómo la primera argumentación que da Martín para justificar su accionar, se refiere a cómo se hacen las cosas, más tarde el estudiante pudo encontrar una razón.

En la entrevista con Martín también pudo detectarse lo que English y Halford (1995) señalan como una modificación inapropiada de un procedimiento conocido, esto consiste en la aplicación de un modelo mental que responde a una situación bien conocida por el estudiante. Nos referimos a que este alumno generaliza la aplicación de la propiedad Hankeliana a situaciones donde no es aplicable como $(ax+b)(cx+d)=k$ entonces ($ax+b=k$) o ($cx+d=k$). Finalmente Martín se da cuenta que la presencia del número 0 es esencial para poder aplicar la mencionada propiedad, reflexión que ya se destacó más arriba.

Profesora : ¿Lo hacés porque es como te enseñaron, Martín?

Martín: Sí, tiene su explicación pero no.
P: ¿Y si vos tuvieras (2x-6)(18-2x)=2 en lugar de igual a 0, ¿cómo lo resolverías?
M: Capaz que haría lo mismo, pasándolo, pero cuando paso el término igualando cada término a 2...
P: A ver cómo lo harías, Martín?
M: 2x-6=2
2x=8
x=4

18-2x=2
-2x=16
x=-8
P: ¿Y las raíces de la ecuación cuáles serían?
M: Estas dos, 4 y –8.
P: ¿Y podrías verificar si 4 es raíz Martín?
M: En el término que me dio sustituir por 4 la x. En 2x-6 sustituiría la x por 4, 2.4 pasaría así ... y tendría que restarle este 2 y me tendría que dar...
P: No te entendí Martín, ¿qué es lo que te tendría que dar?
M: No me daría, o sea, haciéndolo así igual a 2, haciendo ese método, igualando cada término, no me daría raíz, o sea, no sería la raíz.
P: No entendí. Cuando vos sustituís la x por 4, ¿qué pasa?
M: Sería 2 por 4... 8 menos 6... 2 no me daría. Me daría igual a...
P: ¿Y qué es lo que te tendría que dar?
M: Me tendría que dar 2 por 3, sería para que me dé 0 el término.
P: Pero acá...
M: El tema es que yo acá sustituyo, igualo a 0 porque cada término tiene que ser cero para que yo lo iguale a cero, o no sé, capaz que en este caso uno de los dos, para que al multiplicarlos... me tendría que dar cero.

Obsérvese cómo por un momento Martín dice que *cada término tiene que ser cero* y luego recapacita diciendo que *capaz que en este caso uno de los dos*. Quizás este pensamiento sea el que lo lleva a la sustitución de x por dos valores distintos a la vez cuando debe verificar...

En el caso de Bruno, alumno de Ciclo Básico que tenía 14 años en el momento de la entrevista, podemos apreciar cómo la aplicación de la propiedad Hankeliana, en forma totalmente implícita, es no tanto producto de la enseñanza sino que constituye una heurística que le permite resolver la situación satisfactoriamente (U_2, U_3). Él piensa en *"acomodar los números"* para que uno de los factores dé cero. Veamos sus argumentos:

Profesora: Vamos a ver el ejercicio 1 que vos resolviste. Decís "Para resolver la ecuación lo que debés hacer es acomodar los números de forma que en uno de los términos dé cero". ¿Por qué decís eso?
Bruno: Porque de esa forma la ecuación te queda más fácil de resolver.
P: ¿Y por qué lográs resolverla de esa forma?
B: ¿Cómo?

P: ¿Por qué decís que tenés que acomodar los números de foma que uno de los términos[39] *dé cero?*
B: Para resolver la ecuación. Pero... o sea no podés tener dos incógnitas en una operación, podés tenerlas pero necesitás resolverlo de otra manera.
P: ¿Cómo? No entiendo, ¿no podés tener dos incógnitas?
B: Claro si vos tenés dos incógnitas en una operación va a ser mucho más fácil que si tenés una sola, reducís el número.
P: Para vos esta ecuación[40]*, ¿cuántas incógnitas tiene?*
B: Para mí dos.
P: Tiene dos... ¿Dónde las ves?
B: Donde dice 2x y –2x, pero en ese caso sé...
P: ¿Qué?
B: No sé.
P: Entonces vos decís que la ecuación se complica por tener dos incógnitas. Entonces, ¿qué es lo que hacés?

Parecería que Bruno está visualizando la presencia de dos incógnitas y eso de alguna forma "complica" su pensamiento. Como veremos a continuación él mismo nos dice que para solucionar ese problema, "reduce" a una sola incógnita, planteando dos ecuaciones, cada una de ellas con una incógnita. Es decir que para el estudiante se trata ahora de dos ecuaciones en lugar de una. Como consecuencia del razonamiento de Bruno podría pensarse que este estudiante cometió el error en la verificación, pero no fue así. Este estudiante realiza dos verificaciones, una para cada valor de *x* hallado.

B: Reduzco a una sola. Igualo uno de los términos a cero y me quedo con uno solo y me queda una ecuación normal.
P: ¿A qué le llamás una ecuación normal?
B: De grado uno.
P: Y aquí, ¿qué es lo que está planteado? ¿Qué operación vincula esos dos paréntesis?
B: Una multiplicación.
P: Que da en este caso ¿cuánto?
B: Cero.
P: Y para que una multiplicación dé cero, ¿qué tiene que pasar?
B: Uno de los términos tiene que ser cero.
P: ¿Por qué tiene que pasar eso?
B: ¿Cómo es? ¿Cómo?
P: ¿Por qué para que un producto dé cero, uno de los factores debe ser cero?
B: Será por la propiedad de absorción.

Resumiendo, podemos decir que, los alumnos de Ciclo Básico que pudieron resolver todas las ecuaciones de la SECUENCIA I (3 de 14), aplicaron la propiedad Hankeliana, al menos implícitamente, y poseían una razón para la estrategia que eligieron que no se basaba en la

[39] Se reconoce el uso incorrecto de la palabra término pero se prefirió respetar la terminología que usa el alumno para no agregar conflictos a la comunicación.
[40] La ecuación es $(2x-6)(18-2x)=0$.

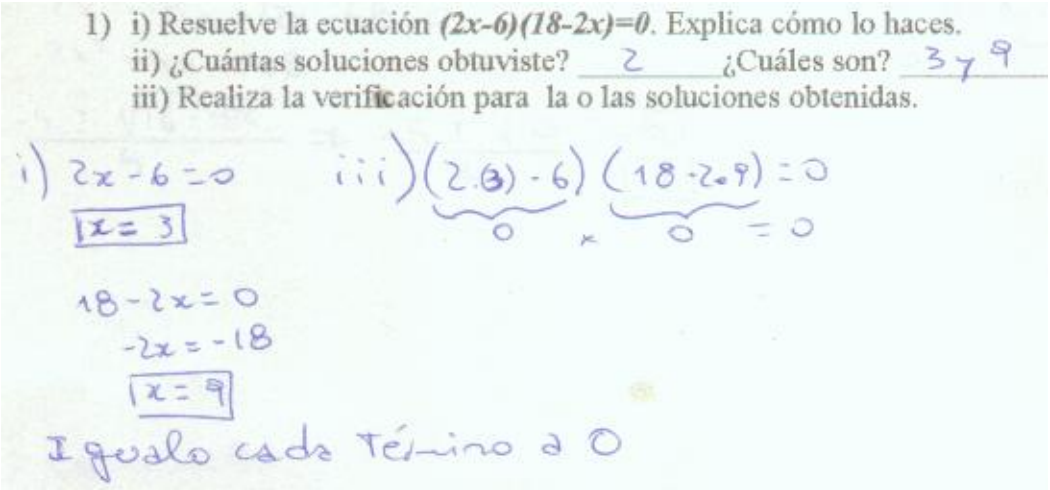
autoridad del docente que dice "esto se hace así" o en la simple aplicación de una regla. Con esto nos referimos a que ninguno de ellos argumentó que lo que hacía era porque se lo habían enseñado así, o porque "*en cada término si despejás la x te da la raíz"*. En estos casos reconocimos los requisitos U_1, U_2, U_3 y U_4. Es decir que los estudiantes reconocieron a la variable como una incógnita a determinar, algunos de ellos aplicaron la propiedad para resolver la ecuación, mostrando la presencia de una manipulación algebraica y un estudiante pudo hallar las raíces pensando qué valores debía tomar la incógnita para que la proposición fuera verdadera (sin manipulación algebraica), por ello en este último caso reconocemos el requisito U_3 como una heurística para resolver la ecuación y no solamente como instancia de verificación en el sentido tradicional. Los restantes alumnos de este nivel intentaron resolver las ecuaciones propuestas desarrollando para ver si podían despejar la *x* o aplicando alguna de las técnicas que permiten despejar la incógnita en las ecuaciones lineales. Si bien no tuvieron éxito (U_4) en su tarea, se reconoce el requisito U_2 ya que parecen tener presente que hay una incógnita a determinar e intentan despejarla por diversos procedimientos que ya fueron descritos.
En los alumnos de Bachillerato se observa un accionar fuertemente influenciado por una pedagogía que hace énfasis en el saber hacer. Parecería que los estudiantes no se detienen a pensar qué es lo más conveniente sino que en muchos casos proceden actuando por *"costumbre"*, como se pudo ver en los trabajos de Virginia y Patricia. Se aprecian los requisitos U_2, U_3 y U_4. En general los estudiantes reconocen una incógnita que deben determinar e intentan una manipulación algebraica para hallar las raíces. También algunos estudiantes son capaces de llevar a cabo el procedimiento de verificación.

En el caso de los alumnos de nivel terciario, solamente 1 estudiante de 23 optó por desarrollar y aplicar la fórmula cuadrática, los restantes aplicaron la propiedad Hankeliana (U_2, U_4). Es en este nivel donde encontramos una mayor autonomía en el accionar de los estudiantes, los estudiantes eligen qué hacer y saben por qué lo hacen:

Profesora: Juan, en la pregunta 1 que te pedían que resolvieras esta ecuación, tú decís que aplicaste propiedad Hankeliana. La pregunta es por qué no desarrollaste y aplicaste la fórmula cuadrática.
Juan: Porque yo sé que (R, +, ×, ≤) es un cuerpo totalmente ordenado y completo y cumple la propiedad Hankeliana. No necesita ser un cuerpo bla, bla, bla, pero es un dominio de integridad entonces se cumple la propiedad Hankeliana.
P: Pero de todas formas es una opción aplicar la Hankeliana, ¿por qué no desarrollaste y aplicaste la fórmula cuadrática?
J: Porque sé que a la solución que llego es la misma.
P: ¿Y por qué no optar por el otro camino?
J: Porque me resulta más sencillo.

Resultados referidos al error en la verificación de la ecuación

Otro de los objetivos de esta investigación es tratar de formular posibles explicaciones para un error que se detectó en la verificación de ecuaciones que están factorizadas e igualadas a cero. Como ya comentamos anteriormente, habíamos observado que al momento de verificar, algunos estudiantes sustituyen en cada factor por la raíz de ese factor, asignándole a *x* distintos valores en forma simultánea.


1) i) Resuelve la ecuación *(2x-6)(18-2x)=0*. Explica cómo lo haces.
ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? 2 ¿Cuáles son? 3 y 9
iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

i) $2x-6=0$
$\boxed{x=3}$

$18-2x=0$
$-2x=-18$
$\boxed{x=9}$

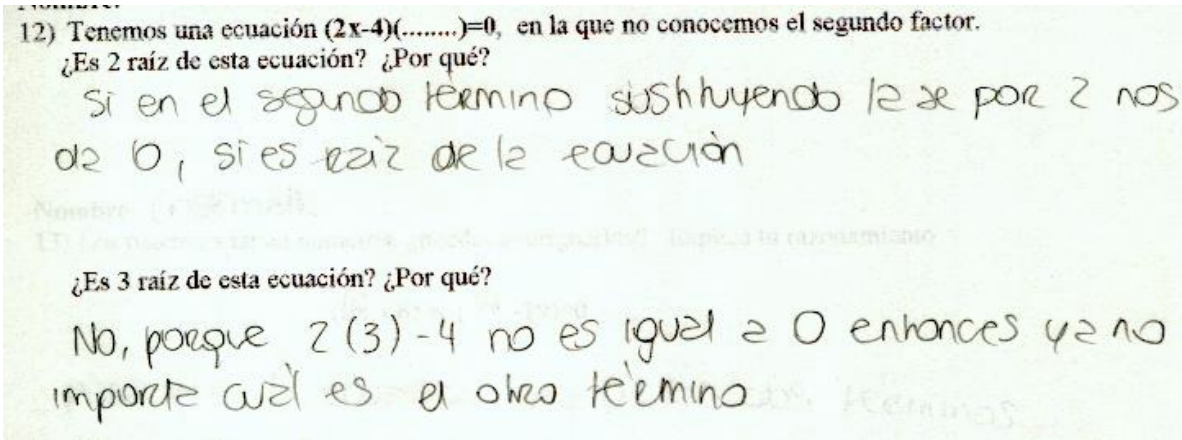
Igualo cada Término a 0

iii) $\underbrace{(2\cdot 3)-6}_{0} \times \underbrace{(18-2\cdot 9)}_{0} = 0$

Para cuantificar la aparición de este error, tomaremos como referencia el conjunto de los estudiantes que *resolvieron y verificaron* el ejercicio 1 de la SECUENCIA I o el ejercicio 1 de la SECUENCIA IV. En este caso, cuando decimos *resolvieron* el ejercicio, estamos considerando solamente a los estudiantes que obtuvieron las dos raíces de la ecuación dada por cualquier procedimiento y realizaron algún tipo de planteo (correcto o no) para verificar (U_2, U_3, U_4).

Nivel	*Número de alumnos que resuelven y verifican la ecuación*	*Alumnos de los anteriores que en la verificación cometen el error que observamos*
TERCIARIO	***22***	***1***
BACHILLERATO	***14***	***3***
CICLO BÁSICO	***3***	***0***

María Eugenia, estudiante de bachillerato, comete el error en forma reiterada a lo largo de toda la SECUENCIA I demostrando tener dificultades con el requisito U_3. Parecería que está pensando en que si el producto de dos factores es cero, ambos deben ser cero. Esto se evidencia en el ejercicio 12 cuando debe responder si 2 es raíz de la ecuación *(2x-4)(.....)=0*, y contesta *"si en el segundo término sustituyendo la x por 2 nos da 0, sí es raíz de la ecuación"*. Cuando se le pregunta si 3 es raíz de la misma ecuación, responde: *"No, porque 2(3)-4 no es igual a 0 entonces ya no importa cuál es el otro término"*.



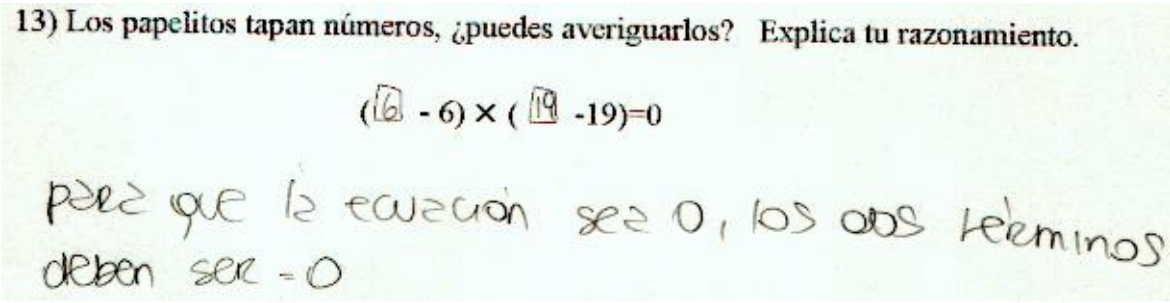
12) Tenemos una ecuación (2x-4)(.....)=0, en la que no conocemos el segundo factor.
¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

Si en el segundo término sustituyendo la x por 2 nos da 0, si es raíz de la ecuación

¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

No, porque 2(3)-4 no es igual a 0 entonces ya no importa cuál es el otro término

También pudimos apreciar que Mª Eugenia piensa que ambos factores deben ser cero para que el producto sea cero cuando resuelve el ejercicio 13 de la SECUENCIA I. En los papelitos coloca los números 6 y 19 y escribe que *"para que la ecuación sea 0, los dos términos deben ser = 0"*.



13) Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$(\boxed{6} - 6) \times (\boxed{19} - 19) = 0$$

para que la ecuación sea 0, los dos términos deben ser = 0

Más tarde, en la entrevista, Mª Eugenia reconoce que lo que hizo en el ejercicio 12 estaba mal y que para el ejercicio 13 hay otras posibilidades, aunque no llega a dar todas las soluciones posibles:

Profesora: Ok. A ver Mª Eugenia, aquí teníamos una ecuación: (2x-4)(.....)=0 en la que no conocemos el segundo factor. Te preguntan: ¿Es 2 raíz de la ecuación? ¿Por qué? Tú contestaste que "Si en el segundo término sustituyendo la x por 2 nos da cero, sí es raíz de la ecuación". Y si 3 era raíz de la ecuación, contestaste que "No, porque 2(3)-4 no es igual a 0 entonces ya no importa cuál es el otro término".
Mª Eugenia: Está mal.
P: ¿Por qué?
M: Por que podía ser que en el segundo término... ajá...éste está bien...es raíz, porque sustituyendo la x por 2 me da cero no importa el otro término.

Profesora: [...] ¿Se te ocurre otra posibilidad para los números que tapan los papelitos?

Mª Eugenia: Sí.
P: ¿Cuáles podrían ser?
M: Por ejemplo que éste sea 6 y éste sea uno cualquiera. Porque si éste me da cero, cero multiplicado por cualquier número da cero. No, no tienen por qué ser.
P: Entonces cómo podría ser, a ver. Éste podría ser...
M: Podría quedar así y el otro cualquiera, no importa.
P: ¿Y hay otra posibilidad?
M: No.

Esta estudiante reconoce en la situación presentada, valores que debe determinar en base a la restricción que plantea la situación pero tiene dificultades para dar todas las soluciones posibles (U_2, U_4). Si bien a partir del trabajo escrito, podríamos haber concluido que el error que comete Mª Eugenia radica en la creencia de que ambos factores deben ser simultáneamente cero, veamos cómo por otro lado, ella también sabe que alcanza con que un número anule uno de los factores para que sea raíz de la ecuación. Nos interesa también comentar cómo en la estudiante coexisten dos ideas que son contradictorias: es necesario que los dos factores sean cero para que el producto dé cero y alcanza con que uno de los factores sea cero para que el producto valga cero.

Veamos ahora los argumentos de Mª Eugenia cuando se le pregunta por qué realiza la verificación sustituyendo una *x* por 3 y la otra por 9:

Profesora: ¿Te acordás que el primer ejercicio que habías resuelto se refería a resolver una ecuación? Tú aplicaste la fórmula y luego verificaste y ¿qué encontraste?
Mª Eugenia: Que sustituyendo la x por esas raíces daba cero.
P: O sea...
M: O sea que eran las raíces.
P: Quería saber por qué en 2x-6 sustituiste la x por 3 y en 18-2x sustituiste x por 9[41]*. ¿Por qué hacés así la verificación?*
M: Porque si una raíz era 3 y la otra 9, una tenía que encajar en el primero y otra en el segundo y como me daba bien sustituyendo acá el 3 y sustituyendo en la otra el 9, lo hice así.
P: ¿Y cómo sabés en cual de los dos lo sustituís?
M: Ah, por tanteo.
P: Por tanteo, tú elegís, te fijás...
M: Claro, me fijo. Pruebo con las dos, una de las dos y sustituyendo esa si me da cero es esa.
P: ¿Y si no te da cero? ¿Qué hacés?
M: Puede ser la otra.
P: Y ahí cambiás de lugar?
M: Ajá.

Obsérvese cómo a pesar de que Mª Eugenia resuelve la ecuación desarrollando y aplicando la fórmula cuadrática, igualmente sabe que las raíces deben anular uno u otro factor. No podríamos decir entonces, que la razón por la cual no aplica la propiedad Hankeliana para

[41] Se refiere a la ecuación *(2x-6)(18-2x)=0.*

resolver la ecuación es porque no reconoce la situación como dos números que multiplicados dan cero.

Ahora bien, quizás la idea que ella tiene de que las raíces halladas deben anular uno u otro factor no esté siendo bien manejada desde el punto de vista lógico y por ello asigna a *x* dos valores distintos a la vez. Tal vez no pueda elaborar lógicamente que cuando decimos que 3 **y** 9 son las raíces, para realizar la verificación debe pensar en que *x=3* **o** *x=9*, un "**o**" que en este caso es excluyente.

Otra posible explicación para el error de Mª Eugenia consiste en que ella trata de conciliar dos cosas: por un lado que alcanza con que un número anule un factor para que anule la expresión y por otro lado que ambos factores deben ser cero para que el producto sea cero. Con la sustitución que ella realiza consigue que se cumplan estas dos cosas a la vez.

Veamos cómo los paréntesis de la expresión factorizada juegan un importante rol en el error que comete esta estudiante, pues durante toda la entrevista alude a las raíces de uno y otro *término*, como ella misma dice, y le cuesta ver a la ecuación en forma global. Parecería que en lugar de ver una ecuación es como si viera dos ecuaciones:

P: En esta función: g(x)= (x+5)(x-6). ¿Cómo hallarías la imagen de –5?
M: (-5+5)(-5-6)=0, ya sé que me da cero.
P: Y si te pido hallar la imagen de 6?
M: Te da cero
(6+5)(6-6)=0
P: ¿Y si te pido hallar las raíces de g cómo lo harías?
M: Despejo la x de cada término.
x+5=0 x-6=0
x=-5 x=6
P: ¿Qué hallaste Mª Eugenia?
M: Hallé, despejé la x para hallar las raíces.
P: Y te dio... que las raíces son?
M: -5 y 6. Las dos anteriores que me habían dado cero.
P: ¿Cómo verificás que –5 y 6 son las raíces Mª Eugenia?
M: Sustituyo por la x.
P: A ver cómo hacés la verificación?
M: (-5+5)(6-6)
0 0

Esto me da cero.
P: O sea que daría cuánto?
M: Cero.
P: Yo quiero saber Mª Eugenia por qué tú acá para hallar la imagen de –5, a la x le diste valor –5 en ambos factores, para hallar la imagen de 6 le diste a x valor 6 en ambos factores. En cambio aquí, tú a x le diste valor –5 en el primer factor y a x le diste valor 6 en el segundo factor. Quiero saber por qué acá lo hiciste de una forma y acá lo hiciste de otra.

M: Porque si me pedía hallar la imagen de –5, es solo la imagen de –5 y entonces tenés que sustituir por –5 para resolverlo, en cambio las raíces, ta, es por cada término.
P: ¿Se hacen por cada término?
M: Sí, sí, si están entre paréntesis o podés resolverlo pero...
P: ¿Qué te parece que quiere decir ese paréntesis que tú recién me nombraste?
M: Multiplicación.
P: Pero te da alguna otra sensación o te da alguna otra información ese paréntesis?
M: Como que son términos diferentes o sea...
P: Mm?
M: Que están separados.
P: De lo que ahí está escrito, ¿qué es lo que te da esa sensación de que están separados?
M: Los paréntesis.

Se trató de que Mª Eugenia llegara a un conflicto introduciendo el concepto de función y pidiéndole que calculara algunas imágenes (F_2) y las raíces de la función (F_3). No se logró este objetivo ya que ella tiene elaborados dos esquemas conceptuales que parecerían no estar relacionados: uno para trabajar con funciones y cálculo de imágenes y otro para trabajar con raíces, que pueden ser de una ecuación o de una función.

Veamos ahora, cómo Mª Eugenia siente que para estar segura de que tiene las dos raíces debe "ver" que los dos factores se anulan. Si ella sustituye en ambos factores el valor de una de las raíces encontradas, uno de los factores no será cero (ya que estamos trabajando con ecuaciones de segundo grado con dos raíces distintas) y eso le hace sentir que le falta una raíz aun cuando conozca las dos:

Profesora: La pregunta es qué pasa si tú sabés que –5 y 6 son las raíces y al momento de verificar, tú a una x le das valor –5 y a la otra x también le das valor –5, en la verificación.
Mª Eugenia: Me va a dar una sola de las raíces.
P: Ahí está, y ¿qué pasa?
M: Y, que me va a faltar una raíz.
P: Pero tú ya estás sabiendo que las raíces son –5 y 6, ta?
M: Sí.
P: Entonces al momento de verificar supongamos que a ti se te ocurre sustituir en ambos factores la x por –5, ¿qué está pasando allí?
M: Uno me va a dar cero y el otro, otro valor distinto de cero.
P: Entonces, ¿qué deduces de ello?
M: Que no es raíz de los dos términos.
P: ¿Y entonces?
M: El otro término tiene otra raíz.
P: Sí, ¿y?... pero en cuanto a lo que tú estás tratando de constatar si es raíz de la ecuación o no...
M: Va a ser raíz de la ecuación pero ta, porque sustituyendo en uno de los términos me da cero pero en el otro no, pero igual es raíz de la ecuación.
P: Y tú sentís la necesidad de que los dos tienen que dar cero para que los números sean raíces de la ecuación?
M: Y, si quiero encontrar las raíces, sí.
P: Si lo que estás buscando son las raíces ...

M: Si me pide un ejercicio y me dice encuentre las raíces, yo voy a tener que sí o sí, voy a tratar de despejar la x para encontrar la raíz.
P: Y en cuanto a la sustitución en los dos factores, qué tiene que pasar?
M: Me tiene que dar cero.
P: Los dos cero?
M: Claro.
P: Y puede ser que uno dé cero y el otro no?
M: Y, ahí no encontré la raíz de uno.

Podríamos concluir que el error que comete esta estudiante al sustituir *x* por dos valores distintos a la vez, se debe por un lado a la presencia de los paréntesis en la expresión que favorecerían la idea de que se trata de dos ecuaciones separadas y no de una sola ecuación, y por otro lado la sensación de que para estar segura de que los dos reales que tiene son las raíces de la ecuación ambos factores deben ser cero al sustituir por las correspondientes raíces de cada uno de ellos. Pero esto no es así, o al menos esta no es la única situación donde la estudiante comete ese error. Pudimos constatar que la estudiante comete el error al trabajar en otro tipo de ecuaciones:

Profesora: Después yo te pregunté si 3 y 4 eran raíces de $x^2-7x+12=0$ y me dijiste que...
Mª Eugenia: Que podía resolver la ecuación y capaz que también sin resolver, factorizando.
P: A ver, ¿cómo lo harías?
M: (Risas, no sabe cómo hacerlo)
P: Y sin factorizar, ¿no podrías hacerlo? Usando el método de verificación.
M: ¿Así sustituyendo 3 y 4?
P: A ver, ¿cómo lo harías?
M:...
P: ¿Lo hiciste?
M: No.
P: ¿Cómo se te ocurre que podrías hacerlo?
M:...
P: A ver, tú hoy me dijiste que para que un número fuera raíz de la ecuación, ¿qué tenía que pasar?
M: Que sustituyendo la x por esas raíces me dé cero.
P: ¿Entonces?
M: Capaz que sustituyendo por x me da cero.
P: Plantealo.
M: $3^2-7(4)+12=9-28+12=$
P: ¿No te da?
M: No.
P: ¿Entonces qué contestarías?
M: Que no son raíces[42].

[42] Sí son raíces de la ecuación propuesta.

Volvemos a la idea de la presencia de un conflicto lógico en el pensamiento de la estudiante, para que 4 y 3 sean raíces, la estudiante cree que deben verificar la ecuación al unísono.
El mismo fenómeno lo observamos en la entrevista que se mantuvo con Martín, también estudiante de Bachillerato. Martín comete el error que estamos analizando, cuando resuelve los ejercicios de la SECUENCIA I y también el error que cometió Mª Eugenia al trabajar con la ecuación $x^2-7x+12=0$:

Profesora: Vamos a la pregunta 17: Verifica si 4 y 3 son raíces de $x^2-7x+12=0$. Tú resolviste la ecuación. ¿Podrías hacerlo sin resolver?
Martín: Sí, sustituyendo.
P: ¿A ver cómo lo hacés?
M: $4^2-7.3+12=0$
$16-21+12=0$
$28-21=0$ ✕ *(El alumno hace una cruz al lado de lo que escribió)*
No me da.
P: A ver, verificá solamente si 3 es raíz.
M: $3^2-7.3+12=0$
$9-21+12=0$
$21-21=0$
P: ¿Por qué no habrá dado hoy?
M: Quizás porque sustituí en x^2 la x por 4 y en –7x la x por 3.
P: ¿Y por qué te pareció que podías hacerlo así?
M: Porque al ser las dos raíces, yo tenía la misma incógnita pero dos veces en la x, dos veces, como 4 y 3 son las raíces, sustituyendo una por 4 y otra por 3, pensé que me podría llegar a dar cero.

Parecería que para el alumno, decir que 4 y 3 son raíces, significa que debe obtener valor numérico cero, al sustituir los dos valores de *x* en forma simultánea en las respectivas *x* que aparecen en la expresión. Es decir que el conflicto se situaría en la presencia del "**y**", cuando decimos "*4* **y** *3 son raíces"*. Los estudiantes relacionan esto con la presencia simultánea de 4 y 3 en la expresión y no con $3^2-7.3+12=0$ y $4^2-7.4+12=0$.

Veamos ahora en la siguiente selección extraída de la entrevista, cómo reacciona cuando debe trabajar con una expresión factorizada:

Profesora: Bien. Vamos ahora a verificar si 3 es raíz de (2x-6)(18-2x)=0, ¿cómo lo harías?
Martín: $\underbrace{(2.3-6)}\underbrace{(18-2.3)}=0$

$0 \times 12=0$
Este término da cero y el otro doce. Cero por doce da cero entonces 3 es raíz de la ecuación.
P: Verifica si 9 es raíz de la ecuación.
M: $\underbrace{(2.9-6)}\underbrace{(18-2.9)}=0$

$12 \times 0=0$

Daría doce y este cero entonces 9 también es raíz.
P: ¿Cuáles son las raíces de la ecuación?
M: Serían 3 y 9.
P: ¿Cómo verificás que 3 y 9 son las raíces? (Se escribe en la hoja: Verifica que 3 y 9 son raíces de (2x-6)(18-2x)=0)
M: Haciéndolo por separado de nuevo o sustituyendo en este término el 3 y en este término el 9.
P: A ver hacelo.
M: $\underbrace{(2.3-6)}_{0}\underbrace{(18-2.9)}_{0}=0$
Me dan los dos términos cero.

Quizás Martín se da cuenta que lo debe hacer por separado, pero al insistir, dice que se pueden sustituir al mismo tiempo. En este caso tenemos dudas sobre si el estudiante está cometiendo un error, ya que algunas personas pueden aplicar las reglas implícitamente sin hacer énfasis en ellas. Podría estar sustituyendo al mismo tiempo por dos valores distintos de *x* pero teniendo la consciencia de que lo está haciendo en cada factor, sin importarle el rigor del formalismo.

P:Y para que el producto te dé cero, ¿los dos términos, como tu dices[43]*, tienen que ser cero?*
M: No, como me dio acá arriba, conque uno me dé cero, el producto en total me va a dar cero.
P: Bien, entonces tú dices que para verificar si 3 y 9 son raíces, lo podés hacer por este procedimiento o por este otro, las dos son para ti válidas...
M: Por dos formas, las dos son válidas.

Para tratar de que Martín opte por el procedimiento correcto a nivel del planteo escrito requerido, desechando la verificación simultánea, se lo confronta con su trabajo anterior en la ecuación $x^2-7x+12=0$, sin resultados positivos ya que él logra acomodar las dos situaciones en su mente como se verá:

Profesora: Y confrontando esto con lo que hiciste hoy, tu sustituiste una x por 4 y otra x por 3 y finalmente no verificaba y acá sustituiste por separado y verificó[44]*.*
Martín: En ecuaciones de este tipo no me sirve sustituir una x por un número y la otra por la otra raíz, tengo que hacerlo por separado.
P: Pero tu dices que en este otro tipo de ecuaciones que están factorizadas puedes hacerlo...
M: Por los dos tipos.

Se indaga ahora qué piensa Martín en referencia a la estructura de la ecuación:

[43] Se reconoce el uso incorrecto de la palabra término pero se decidió respetar la terminología usada por el alumno para no agregar conflictos a la situación.
[44] Se refiere al trabajo que realizó el alumno en $x^2-7x+12=0$.

Profesora: Por los dos tipos. Aquí, tú Martín, en esta expresión, cuántas ecuaciones ves[45]*?*
Martín: Depende. Una ecuación con dos términos.
P: Es una ecuación con dos términos...Cuando decís la palabra término a qué te referís concretamente, a ver si me lo podés explicar allí con lo que está escrito.
M: Que los paréntesis separan en dos términos la ecuación: 2x-6 y 18-2x.
P: ¿Y de qué grado sería la ecuación que está planteada?
M: Esta en realidad sería de segundo grado. O sea, si hago el producto de la ecuación, me quedaría que es una ecuación de segundo grado. Si la tomo como dos ecuaciones diferentes, como yo lo hago, para igualar a cero, serían dos ecuaciones de primer grado.
P: Lo que no entiendo bien es lo siguiente: o sea, esta ecuación tú la podés ver como una ecuación de segundo grado o también la podés ver como...
M: Para hallar las raíces yo la separo en dos ecuaciones y esas ecuaciones son dos ecuaciones de primer grado.
P: Claro, pero la ecuación, ésta, ¿es una ecuación de segundo grado o son dos ecuaciones de primer grado?
M: No, yo acá te diría que es una ecuación de segundo grado.
P: Y para resolverla?
M: Y para resolverla yo la tomo como dos ecuaciones de primer grado.

Aunque Martín no puede articular muy bien, parecería tener consciencia de que está trabajando con una ecuación de segundo grado que él "separa" en dos, para poder hallar las raíces.
Nos preguntamos si la presencia de esos paréntesis, que tanto a Mª Eugenia como a Martín le hablan de algo que está *separado*, es lo que hace que la mayoría de los estudiantes entrevistados usen la palabra término cuando deberían hablar de factores. Martín lo dice explícitamente: *"Que los paréntesis separan en dos términos la ecuación: 2x-6 y 18-2x"*. Tengamos en cuenta que los estudiantes están acostumbrados a escuchar de sus profesores la famosa oración que dice: *"separen términos"*. Con esto queremos decir que la idea de *separar* está asociada a la palabra *términos*.

Lo que finalmente dice Martín: *"Y para resolverla yo la tomo como dos ecuaciones de primer grado"*, nos hace pensar que quizás el error que comete en la verificación es producto de esta concepción y por ello realiza la verificación como si estuviera trabajando con dos ecuaciones de primer grado. Si estuviéramos verificando las raíces de dos ecuaciones de primer grado, sustituiríamos en cada una de ellas la raíz encontrada. Notemos también cómo la visión de este alumno es producto de que confunde el procedimiento que usa para resolverla con la ecuación propuesta en sí misma.

El error que analizamos también fue detectado en el trabajo escrito de una estudiante de nivel terciario. Entre la realización de la SECUENCIA IV y la entrevista, esta estudiante le contó a una profesora lo que había hecho en los ejercicios de la secuencia. Su profesora, persona de nuestro conocimiento, le dice que se equivocó al realizar la verificación de la ecuación y le muestra cómo se hace. De todas formas se decidió hacer la entrevista a esta estudiante para ver si igualmente afloraban las concepciones que se habían puesto en evidencia en su tarea. Vamos a ver, cómo a pesar de que ahora realiza correctamente la

[45] Se refiere a la ecuación *(2x-6)(18-2x)=0.*

verificación, igualmente admite que las x de la expresión pueden tomar valores distintos a la vez:

Profesora: Y si te preguntan: ¿4 y 7 son raíces de la ecuación (2x-8)(x+7)=0?
Carolina: Lo haríamos por separado.
(2.4-8)(4+7)=0
0 . 11 = 0
Te diría que 4 sí es raíz y después haría lo mismo con el 7.
(2.7-8)(7+7)=0
+5 . 14 ≠ 0
Te diría que 7 no es raíz.
P: ¿Y qué pasaría si tu sustituyeras aquí 4 y aquí 7?
C: Al sustituir aquí por 4, este factor ya es 0, entonces aquí x valga lo que valga, el producto ya va a ser cero y se va a verificar la ecuación.
P: ¿Y qué quiere decir eso?
C: No, pero aquí puede ser 7 o puede ser cualquier otro número, porque este factor no me está, o sea, el que está dando importancia es éste, no sé cómo decirlo, el que está determinando que la igualdad sea cero, porque éste se está haciendo cero cuando x vale 4, éste no importa la x que sea.
P: ¿Entonces eso qué quiere decir? ¿Qué aquí podés poner cualquier valor para que sea raíz de la ecuación?
C: Si este es 4 sí.

Carolina señala que *"Al sustituir aquí por 4, este factor ya es 0, entonces aquí x valga lo que valga, el producto ya va a ser cero"* y *"éste se está haciendo cero cuando x vale 4, éste no importa la x que sea"*. La estudiante debería haber dicho que lo que no importaba era el valor que tomase el otro factor y no la x del otro factor.

Obsérvese cómo la estudiante no rechaza de plano que una x pueda ser sustituida por 4 y la otra por 7, sino que entra en el juego de la entrevistadora y admite tal posibilidad. Esto nos invita a reflexionar sobre los errores que cometen los estudiantes y las correcciones que nosotros, sus profesores, les hacemos. A veces nos parece que un alumno cambió su parecer y aprendió, si ya no vuelve a repetir el error. Sin embargo puede suceder que en el esquema conceptual que consulta para dar una respuesta, estén coexistiendo informaciones contradictorias, llevándolo a pensar en forma inconsistente en dos situaciones que en el fondo son la misma. Si corregimos un error y logramos que el estudiante cambie su conducta, no necesariamente con ello logramos que sus concepciones hayan cambiado.

Comentarios generales sobre los resultados obtenidos en diferentes ejercicios de la Secuencia I

Haremos a continuación, algunos comentarios generales sobre los resultados obtenidos en diferentes ejercicios de la SECUENCIA I. Los datos reflejan el trabajo de 14 estudiantes de bachillerato opción Medicina (los 10 alumnos de opción Economía no realizaron esta secuencia) y 14 de Ciclo Básico. Como ya dijimos estos dos niveles guardan entre sí una diferencia de tres años de escolaridad. Los cuadros se realizaron mostrando el número de

estudiantes en cada categoría. No se creyó necesario usar porcentajes ya que los dos grupos de estudiantes tienen igual número de elementos.

Pregunta 10) *Escribe una ecuación que tenga raíz 8. ¿Cómo lo haces?*

	No contestan	*Resuelven con éxito*	*La ecuación encontrada no tiene raíz 8*
CICLO BÁSICO	***1***	***11***	***2***
BACHILLERATO	***0***	***12***	***2***

Los alumnos de Bachillerato presentan ecuaciones de segundo grado con mayor frecuencia que los de Ciclo Básico, aunque parecería que en ambos niveles la ecuación solución que prefieren los estudiantes es la de primer grado. En el siguiente cuadro se puede observar además que las ecuaciones presentadas por los alumnos más pequeños son menos "estructuradas", podríamos decir, que las de los más grandes. Con esto queremos decir que los más pequeños se permiten presentar, por ejemplo, ecuaciones no igualadas a cero, o ecuaciones ingeniosamente sencillas como $4+4=x$, donde además la incógnita figura en el segundo miembro, cuestión que muchas veces resulta compleja para quienes recién están dando los primeros pasos en la resolución de ecuaciones.

Ejemplos de ecuaciones presentadas por estudiantes de Ciclo Básico (correctas o incorrectas)	$x-8=0$ $8-x=0$ $x+50+14=x$ $4+4=x$ $16-8=x$ $x+2=10$ $\sqrt{8}=1,8x+3,2$ $-2+2x=14$ $x+8=16$ $2x+3=19$ $(x-8)x=0$
Ejemplos de ecuaciones presentadas por estudiantes de Bachillerato (correctas o incorrectas)	$2x^2-16x=0$ $x(x-8)=0$ $x-8=0$ $2x-16=0$ $16-2x=0$ $x^2=8$ $128x^2-2=0$ $4x-32=0$

La mayoría de los estudiantes no explican cómo lo hacen pero entre los que dan argumentos tenemos:

Ecuación presentada	***Argumento***
2.(8)=16 *2x-16* *2x-16=0*	*"Multiplico la raíz 8 por algún número"* *"le resto el resultado del paso anterior"*
x-8=0	*"En vez del 8 pongo la x y le resto 8 para igualarlo con 0"*
x+2=10 *x=10-2* *x=8*	*"Pensé en dos números que al restarse me diera 8"*
8-x=0	*"Busco el número opuesto a 8"*
16-8=x	*"Busqué un par de números que restándolos o sumándolos o haciendo una operación me diera 8"*

Vemos que la estrategia general consiste en pensar operaciones con números reales cuyo resultado sea un número deseado. La incógnita es interpretada como un número que estará determinado por las condiciones impuestas a la operación planteada; además los estudiantes son capaces de introducir un símbolo para designar la incógnita y usarlo para plantear la ecuación de acuerdo a lo que pide el problema (U_2, U_5).

Vayamos ahora a la pregunta 11): *Escribe una ecuación que tenga por raíces a 4 y 3. ¿Cómo lo haces?*

	No contestan o no concluyen	*Resuelven con éxito*	*La ecuación encontrada no tiene por raíces a 4 y 3*
CICLO BÁSICO	***5***	***4***	***5***
BACHILLERATO	***1***	***12***	***1***

Los estudiantes de Bachillerato presentaron en su inmensa mayoría la ecuación *(x-4)(x-3)=0* y muy pocos explican lo que hacen. Los estudiantes de Ciclo Básico emprenden diversas y sorprendentes estrategias que no siempre los conducen a un resultado exitoso. Sin embargo, poseen argumentos que dan sentido al trabajo que realizan. A continuación veremos una tabla con algunas de las ecuaciones presentadas, el nivel del estudiante y su argumento.

Nivel	*Ecuación presentada*	*Argumento*
Bachillerato	*(x-4)(x-3)=0*	*"Busco ecuaciones por las cuales al sustituir x por 4 y por 3 me dé 0"*
Bachillerato	*(x-4)(x-3)=0*	*"Los opuestos son las raíces"*
Bachillerato	*(x-4)(x-3)=0*	*"Escribo un producto que tenga 2 soluciones y que a cada factor si le sustituyo por la raíz me dé por lo menos un factor 0"*
Ciclo Básico	*(x-4)(y-3)=0*	*"Busco los números opuestos a 4 y 3"*
Ciclo Básico	*(x-4)(x-3)=0*	*"Realizo una ecuación donde esté la x y el opuesto a 4 y 3"*
Ciclo Básico	*2x+3x=18*	*"Pensé en una suma entre 2 números multiplicados uno por 4 y otro por un 3"*
Ciclo Básico	*3+2x=9* *2x=9-3* *2x=6* *x=6/2* *x=3* *4+2x=12* *2x=12-4* *2x=8* *x=8/2* *x=4*	*Sin argumento en lenguaje verbal*
Ciclo Básico	*x+1+x4+2=19* *4+1+3.4+2=19* *5+12+2=19* *19=19*	*Sin argumento en lenguaje verbal*
Ciclo Básico	*2x.1=2x* *2.4.1=2.4* *8=8* *2x.1=2x* *2.3.1=2.3* *6=6*	*Sin argumento en lenguaje verbal*
Ciclo Básico	*(x+3)=(y+1)+1*	*Sin argumento*

En la tabla se ha distinguido *Sin argumento en lenguaje verbal* de *Sin argumento*, para diferenciar el caso del estudiante que presenta una explicación en lenguaje simbólico y el que no presenta más que la ecuación.

En las ecuaciones presentadas por los estudiantes de Ciclo Básico sorprende el uso de ecuaciones con dos incógnitas, las ecuaciones con una sola incógnita a la que asignan valores diferentes en términos diferentes y el uso de dos ecuaciones diferentes, cada una de ellas satisfaciendo una de las condiciones pedidas. También observamos en este nivel el uso de la verificación (U_3) como elemento de control sobre la tarea realizada.
Los estudiantes que presentaron una ecuación con dos incógnitas perdieron de vista que las soluciones a dichas ecuaciones son infinitos pares ordenados de números reales de la forma (x, y), y no números reales. Aunque esto último debemos precisarlo desde el punto de vista formal, creemos valioso destacar que cuando el alumno verifica el par *(3,4)*, sustituye en la x el real 3 y en la y el real 4, cuestión que seguramente lo lleva a pensar en los reales 4 y 3 como raíces de la ecuación.

La estudiante que presenta la ecuación $2x.1=2x$, salva la situación, no sólo porque la ecuación admite las raíces 4 y 3, sino porque tiene infinitas raíces. El conjunto solución de la ecuación es R.

Concentrémonos ahora en el caso de Luz que es la estudiante que presenta el siguiente planteo:

$$x+1+x4+2=19$$
$$4+1+3.4+2=19$$
$$5+12+2=19$$
$$19=19$$

Ella da su solución al problema avalando la posibilidad de que la x tome distintos valores en distintos términos. Esta misma estudiante comete, más tarde, el error que estamos observando, cuando resuelve la pregunta 15):

¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación (2x-12)(5x-10)=0? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

Luz escribe y contesta así:

$$(2.6-12)(5.2-10)=0$$
$$(12-12)(10-10)=0$$
$$0.0=0$$
$$0=0$$

Sí

En todo su trabajo avala la posibilidad de que la incógnita tome distintos valores en una misma expresión. Lo podemos observar en la pregunta 16):

¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación (2x-10)(3x-8)=0?

La estudiante realiza el siguiente planteo pero no da una respuesta verbal al problema:

$$(2.5-10)(3.4-8)=0$$
$$(10-10)(12-8)=0$$
$$0.4=0$$
$$0=0$$

Del análisis de las preguntas 15) y 16) podríamos interpretar que esta estudiante piensa que para que un producto sea cero, los dos factores deben ser cero y por ello tiene dudas y no da una respuesta a la pregunta 16). Sin embargo, contesta correctamente a las preguntas 14) y 18).

14) ¿Es 7 raíz de la ecuación (3x-21)(x-3)=0? Explica tu respuesta.

Luz plantea y contesta así:

$$(3.7-21)(7-3)=0$$
$$(21-21)(4)=0$$
$$0.4=0$$

"Si porque si sustituimos las x por el valor 7 la ecuación da 0"

18) i) Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información?
ii) ¿qué representan para ti b y d?

Luz responde: *"Son números y me parece que aunque sea uno tiene valor 0 y el otro puede tener otro número cualquiera. Si no puede ser que tengan los 2 valores 0."*

La alumna reconoce números en los símbolos y puede determinarlos en base a la restricción que presenta la pregunta (U_2).
Para Luz es muy natural asignarle valores distintos a la *x* en una misma expresión (U_3). Y lo hace tanto en las expresiones factorizadas como en las desarrolladas. Veamos la solución que ofrece esta estudiante a la pregunta 17):

¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $x^2-7x+12=0$?

$$3^2-7.4+12=0$$
$$9-28+12=0$$
$$+21-28=-7$$
$$-7\neq 0$$

"No porque al sustituir los valores la ecuación no da 0"

El error que comete Luz en la doble asignación de valores a la incógnita parecería situarse en que al existir dos raíces, entonces deben estar las dos presentes en el proceso de verificación. Se trataría de un error lógico, es decir, el problema estaría situado en cómo conciliar 4 **y** 3 son las raíces, con la lógica de una expresión algebraica en donde *x=4* **o** *x=3*. Luz debe dar un salto en la comprensión de la lógica necesaria para el trabajo algebraico. Quizás la lógica de las situaciones cotidianas entra en contradicción con la lógica que requiere el trabajo formal en álgebra. Seguramente Luz sabe que cuando se pone su camisa blanca y su pollera gris para ir al liceo, las dos prendas se encuentran sobre su cuerpo. "Me puse la camisa blanca y la pollera gris". Sin embargo las expresiones algebraicas no soportan este mismo manejo cotidiano del "**y**" que Luz sí podría hacer con sus prendas y su cuerpo. La expresión algebraica requiere "de una prenda por vez". Y para hacer las verificaciones de las dos raíces, es necesario usar "el cuerpo" dos veces.

En el pensamiento de esta estudiante 4 y 3 son las raíces no implica, al menos naturalmente, que $3^2-7.3+12=0$ *y* $4^2-7.4+12=0$. Quizás esto deba constituirse en un objetivo específico de la enseñanza.

Veamos ahora la ecuación que presenta Ernesto, estudiante de Ciclo Básico, donde también avala que la *x* pueda tomar dos valores distintos en la misma expresión (U_3).

$$2x+3x=18$$

Si seguimos el pensamiento de Ernesto vemos que efectivamente $2.3 +3.4=18$.
Podríamos pensar que Ernesto, al igual que Luz, también comete el error de la doble sustitución en los ejercicios subsiguientes. Pero no fue así. Los resuelve correctamente. Presentamos la solución que ofrece a uno de ellos a modo de ejemplo.

16) ¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación (2x-10)(3x-8)=0?

Ernesto escribe y contesta:

Con 5) (10-10)(15-8)=0
Con 4) (8-10)(12-8)=0
el 5 sí es
el 4 no es

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la pregunta 12):
Tenemos una ecuación (2x-4)(.....)=0, en la que no conocemos el segundo factor.
a) ¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?
b)¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

Nivel	*No contestan*	*Responden que SÍ a la parte a)*	*Responden a) refiriéndose al segundo factor*
CICLO BÁSICO	***6***	*7*	***1***
BACHILLERATO	***0***	***13***	***1***

Los estudiantes que se refieren al segundo factor argumentan que:
"Al no saber el segundo factor no puedo saber las raíces de la ecuación" (Ciclo Básico)
"Si anula el segundo término, sí" (Bachillerato)

Nos ocuparemos ahora de la pregunta 13):

Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$(\square -6)(\square -19)=0$$

NIVEL	*No contestan*	*Dan la solución correcta*	*Contestan que en los papelitos están 6 **y** 19*	*Otras respuestas*
CICLO BÁSICO	***3***	***1***	***3***	*7*
BACHILLERATO	***2***	***1***	*7*	***4***

Fueron consideradas respuestas correctas las de Talira (alumna de Bachillerato) y Gerard (alumno de Ciclo Básico) que se presentan a continuación. Aunque la visión de estos dos estudiantes no es exactamente la misma, creemos que ambos realizan una discusión interesante de la pregunta. El resto de los estudiantes dieron respuestas parciales al problema, como por ejemplo, en los papelitos puede ir el 6 y otro número cualquiera.

Presentamos a continuación la argumentación de Talira:

$(p_1-6)(p_2-19)=0$

El p_1 puede ser 6 y cuando éste es 6 el p_2 puede ser cualquier otro nº ya que la multiplicación da 0. Y cuando el p_2 es 19 el p_1 puede ser cualquier otro nº por lo mismo.

De alguna forma esta estudiante sobreentiende que los papelitos tapan dos incógnitas, y así nos lo hace saber a través de los símbolos que introduce para su explicación (U_5).

Veamos ahora la solución que ofrece Gerard, estudiante de Ciclo Básico. El distingue las dos posibilidades, que los papelitos estén tapando una misma incógnita o dos:

"Pueden ser si son los mismos o 6 o 19 si no son los mismos el primero tiene que ser 6 o el segundo 19 el otro no importa".

Resulta interesante observar el manejo explícito que hace Gerard del "**o**" cuando nos dice 6 **o** 19. Quizás por ello no cometió ningún error en las múltiples verificaciones que debió realizar al resolver su tarea. Este estudiante mostró un excelente manejo del concepto de variable ya que es capaz de distinguir las soluciones a la ecuación en dos casos: una incógnita y dos incógnitas. (U_2, U_3, U_4)
No introduce simbología (U_5) para formular la explicación como sí lo hizo Talira.

Observamos en la tabla de arriba que con el aumento de edad parecería afianzarse la creencia de que en los papelitos están los números 6 y 19. Sin embargo, dada la muestra de estudiantes con los que trabajamos (14 de bachillerato opción Medicina y 14 de Ciclo Básico) no podemos sacar conclusiones más generales.

Presentaremos a continuación los resultados obtenidos en la pregunta 14):

¿Es 7 raíz de la ecuación (3x-21)(x-3)=0? Explica tu respuesta.

NIVEL	*No contestan*	*Para contestar resuelven o intentan resolver la ecuación*	*Para contestar usan el procedimiento de verificación*	*Contestan correctamente*
CICLO BÁSICO	***5***	***1***	***8***	***8***
BACHILLERATO	***0***	***7***	***7***	***13***

En este caso nos interesa contrastar las estrategias que emprenden los estudiantes de Ciclo Básico y Bachillerato. En la tabla puede observarse que a nivel de Bachillerato siete estudiantes eligen resolver la ecuación (U_4) y otros tanto emprenden la verificación (U_3). Sin embargo, a nivel de Ciclo Básico donde las herramientas que permiten resolver una ecuación como la que se propone no están del todo disponibles (U_4), ya sea porque todavía no conocen la fórmula cuadrática o porque todavía no manejan con soltura la aplicación de la propiedad Hankeliana, hace que la estrategia preferida sea la de verificación (U_3). Creemos que la resolución de la ecuación es una herramienta más costosa al nivel de la operatoria requerida que el procedimiento de verificación. Más aún para los estudiantes de Bachillerato que aplicaron la fórmula cuadrática para lo cual fue necesario desarrollar la expresión polinómica dada. Quizás los estudiantes de Bachillerato han incorporado herramientas eficaces para la resolución de ecuaciones pero no valoran críticamente su utilización, como en la situación problemática que se les presentó.

Veamos ahora la pregunta 15):

¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación (2x-12)(5x-10)=0? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

NIVEL	*No contestan*	*Para contestar resuelven la ecuación*	*Para contestar usan el procedimiento de verificación*	*Contestan correctamente*
CICLO BÁSICO	***5***	***1***	***8***	***9***
BACHILLERATO	***0***	***8***	***6***	***14***

Nuevamente nos interesa situarnos en la comparación de las estrategias preferidas por los estudiantes de los dos niveles para abordar el problema. Los resultados nos merecen idénticos comentarios a los realizados en la pregunta anterior.

Presentaremos a continuación comentarios generales sobre la pregunta 16):

¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación (2x-10)(3x-8)=0?

NIVEL	*No contestan*	*Para contestar resuelven la ecuación*	*Para contestar usan el procedimiento de verificación*	*Contestan sin hacer planteo*	*Contestan correctamente*
CICLO BÁSICO	***6***	***1***	***7***	***0***	***8***
BACHILLERATO	***0***	***8***	***4***	***2***	***14***

Si bien hay seis alumnos de Ciclo Básico que no contestan la pregunta, vemos que el 100% de los que intentan resolver el ejercicio dan una respuesta acertada; idéntico porcentaje que en Bachillerato. En cuanto a las estrategias preferidas por los estudiantes para resolver el problema, mantenemos las observaciones que hicimos en la pregunta 14), que se refieren a una marcada preferencia por la verificación en ciclo Básico (U_3) y no así en Bachillerato, donde la resolución de la ecuación (U_4) que se propone es una estrategia muy usada por los estudiantes para dar respuesta a la pregunta que se formula.

Nos centraremos ahora en la pregunta 17) de la SECUENCIA I:

¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación x^2-7x+12=0? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

NIVEL	*No contestan*	*Para contestar resuelven la ecuación*	*Para contestar usan el procedimiento de verificación*	*Contestan correctamente*
CICLO BÁSICO	***5***	***1***	***8***	***7***
BACHILLERATO	***0***	***9***	***5***	***14***

Nuevamente una marcada preferencia a resolver la ecuación propuesta (U_4), por parte de los estudiantes de Bachillerato. En este caso los estudiantes de Ciclo Básico no disponían de una herramienta para resolver la ecuación dada, ya que aún no han estudiando la fórmula cuadrática. Dos estudiantes de este último nivel mencionado no pudieron arribar a la respuesta correcta. Un caso es el de Luz, que realiza la doble sustitución (U_3) y que ya comentamos más arriba y el otro es el de Diego que intenta despejar la incógnita (U_4), ignorando el término en x^2 y trabajando con la ecuación lineal $-7x+12=0$.

Resultados referidos a la generalización incorrecta de la propiedad Hankeliana

Como tercer objetivo de este trabajo nos propusimos centrar la atención en los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida esta propiedad, aun habiendo recibido instrucción específica al respecto y observar cómo se amplía el mundo de representaciones a asignar a las letras que intervienen en una expresión, a lo largo de los años de estudio.

Para el análisis consideraremos 23 estudiantes de 3er. año de profesorado de matemática (nivel terciario) que realizaron las secuencias IV y V, 10 de bachillerato de la opción Economía que realizaron las secuencias IV y V, 14 de bachillerato de la opción Medicina que realizaron solamente la secuencia V porque no tienen experiencia con matrices. Todos estos estudiantes han realizado algún curso de cálculo y los que hicieron la secuencia IV realizaron además algún curso que incluía el estudio de matrices. Cuando decimos que realizaron un curso, significa que cursaron la materia pero que no necesariamente la aprobaron[46].

Nos concentraremos en las respuestas a los siguientes ejercicios:

- *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*

[46] Tanto los estudiantes de nivel secundario como los de nivel terciario con los que trabajamos aprueban los diferentes cursos de matemática rindiendo un examen final.

- *D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=0, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D y B a partir de esta información?*

La siguiente tabla nos muestra qué porcentaje de los estudiantes que dieron alguna respuesta, afirma que una u otra función es la función nula o que una u otra matriz es la matriz nula. Los porcentajes son por nivel.

Nivel	*Contestan que f o g son la función nula (%)*	*Contestan que D o B son la matriz nula (%)*
TERCIARIO	***61***	***44***
BACHILLERATO	***63***	***57***

Veremos a continuación qué porcentaje de los estudiantes que contestaron, dan una respuesta correcta. Por respuesta correcta consideraremos alguna de las siguientes:

- Contestan que no pueden deducir nada
- Dan un ejemplo de funciones no nulas que cumplen la condición y lo mismo en el caso de las matrices
- Contestan que para todo x del dominio $f(x)=0$ o $g(x)=0$ (una u otra imagen debe ser cero)
- Contestan que no necesariamente f o g son la función nula y lo mismo para matrices.

Nivel	*Responden correctamente a la pregunta sobre funciones (%)*	*Responden correctamente a la pregunta sobre matrices (%)*
TERCIARIO	***39***	***56***
BACHILLERATO	***37***	***43***

Observaremos ahora qué porcentaje de los estudiantes que contestaron que una u otra de las funciones era la función nula en primera instancia, modifican su respuesta luego de realizar la secuencia V, respondiendo correctamente.

Nivel	*Responden que f o g son la función nula* ***y*** *modifican su respuesta contestando correctamente luego de resolver la secuencia V (%)*	*Responden que f o g son la función nula y no logran modificar su respuesta después de resolver la secuencia V (%)*
TERCIARIO	***64***	***36***
BACHILLERATO	***60***	***40***

Vemos que la mayoría de los estudiantes logra aprendizaje después de resolver la secuencia V. Entre los alumnos que no logran modificar su respuesta, encontramos que la principal causa es que no logran terminar la secuencia ya sea porque no pueden completar las tablas o porque no logran interpretar las gráficas. No apreciamos que una u otra opción en particular ofreciera mayor dificultad.

Se realizaron algunas entrevistas con el fin de conocer la opinión de los estudiantes en referencia a la generalización de la propiedad Hankeliana, ya fuera a la pregunta sobre funciones o a la de matrices.

Sebastián es estudiante de 6º año de bachillerato de la opción Medicina, tiene 17 años. Cuando responde por primera vez a la pregunta sobre funciones contesta que *f* o *g* es la función nula. Luego de realizar la SECUENCIA V modifica su respuesta.
Veamos lo que piensa este estudiante sobre la primera respuesta que dio a la pregunta sobre funciones:

Profesora: Te acordás acá cuando contestaste: Se sabe que f y g son dos funciones de dominio R, se sabe que f por g es la función nula, ¿qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?, y vos contestaste que f o g eran la función nula. ¿Quiero saber por qué contestaste eso?
Sebastián: Si una de las dos funciones era la función nula, al multiplicar, el producto iba a serlo.
P: El producto es la función nula y vos contestaste que una u otra tienen que ser la función nula. A ver decímelo de vuelta.
S: Si una es la función nula, o sea que daba cero, al multiplicar por otra ya está, te daba cero, por eso.
P: ¿Y hubo algo en particular de lo que acá está escrito que te hiciera pensar en eso?
S: Esta parte "f.g=O"[47] *entonces tipo agarré y dije f es cero o g es cero, si no, no hay forma.*

Observemos que Sebastián no está pensando en que si el producto es la función nula, una u otra de las funciones es la función nula sino que su respuesta se basa en la consideración de que si una de las funciones es la función nula, entonces el producto de ambas es la función nula, que es correcto. Pudiera ser que estuviera pensando en la propiedad de absorción de la multiplicación de números reales. Si una de las funciones es la función nula, se cumple que el producto será la función nula pues en esa estructura es válida la propiedad de absorción. Aparentemente este estudiante pensó en una condición suficiente que además es correcta: es suficiente que uno de los factores sea nulo para que el producto lo sea. Pero como ésta no es siempre una condición necesaria, se pierden casos y se cometen errores. Si el alumno piensa en la absorción, obtendrá siempre la misma respuesta: uno u otro de los factores debe ser cero. Como esta estructura admite divisores de cero su razonamiento lo conduce a una implicancia incorrecta.

Teniendo en cuenta que este estudiante a veces habla de función nula y al final dice que "*f es cero*", podríamos pensar que pudiera estar a veces pensando en la función nula y otras en que la función toma valor cero.

Veamos ahora el caso de Ignacio, estudiante del mismo nivel que Sebastián. Ignacio responde a la pregunta que se refiere a funciones diciendo que *"una de las dos funciones es la función nula"*. Luego de realizar la secuencia reformula su idea inicial, dando finalmente

[47] Específicamente señala lo que está escrito con notación simbólica.

una respuesta acertada. El siguiente diálogo corresponde a la entrevista mantenida con Ignacio:

Profesora: En la pregunta 3: f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que el producto de f por g es la función nula, ¿qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?, vos contestaste que una de las dos funciones es la función nula. La pregunta es por qué esa fue tu respuesta.
Ignacio: Porque hasta acá no había visto la otra parte del ejercicio[48].
P: Quiero saber en qué pensaste.
I: Por propiedad de absorción. Un número por cero es cero.

Parecería que Ignacio y Sebastián han pensado en lo mismo. Su conclusión no proviene de una generalización de la propiedad Hankeliana sino de la aplicación de la propiedad de absorción que en este caso es válida.

Mariela tiene 37 años y es estudiante de tercer año de profesorado de matemática. Contestó que si el producto de dos funciones es la función nula, entonces una u otra son la función nula. Veamos en qué estaba pensando cuando dio esa respuesta:

Profesora: Quería que me aclararas un poco la pregunta 3. Dice: f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información? Quería que me aclararas un poco lo que habías contestado.
Mariela: Lo que contesté fue un poco aplicando la Hankeliana.
P: ¿Y qué es lo que contestaste? ¿Podrías traducirlo en palabras?
M: Sí, la función f es nula o la función g es nula. Después me di cuenta que eso no estaba correcto.
P: Bien. ¿Por qué fue que tú diste esa respuesta? ¿Basada en qué?
M: O sea sin analizarlo mucho, aplicando la propiedad Hankeliana.
P: ¿Qué fue en el enunciado de la pregunta, lo que te hizo pensar en la propiedad Hankeliana?
M: Que el producto de las dos es la función nula.

Parecería que Mariela sí está pensando en la propiedad Hankeliana para dar su respuesta. Más tarde Mariela reformula las ideas que manifestó en el diálogo anterior:

P: Bien, ¿podrías decirme cuál es la función nula?
M: Es aquella que tiene todas sus imágenes cero, les corresponde el cero.
P: ¿Y ahora estarías de acuerdo con esta respuesta que diste?
M: No.
P: ¿Por qué no?
M: Porque después siguiendo lo que seguía más adelante[49] *me di cuenta de que depende de la estructura algebraica de la que estemos hablando, si se cumple la propiedad Hankeliana*

[48] Se refiere al trabajo que posteriormente realiza en la SECUENCIA V y que le permite cambiar su idea inicial.

o no. Si la estructura algebraica que tenemos cumple la propiedad Hankeliana entonces se puede utilizar, si no, no, y la estructura de las funciones no la cumple.

Veamos ahora qué piensa Mariela en relación a la pregunta sobre matrices. Como se verá nuevamente está pensando en la propiedad Hankeliana para dar su respuesta:

Profesora: Ok, bien. Luego tenías la pregunta 4 haciendo la misma pregunta pero en relación al producto de matrices y dice que el producto de dos matrices es la matriz nula. ¿Y tú que respondiste?
Mariela: Igual que la anterior, o sea si el producto de las dos matrices es la matriz nula, bueno, una de ellas dos tiene que serlo, o sea aplicando la propiedad Hankeliana.
P: ¿Te acordás lo que es la matriz nula?
M: Sí, la que tiene todos los componentes cero.

Se continúa conversando con Mariela sobre las propiedades del producto de matrices para obtener evidencias de que en alguna oportunidad ella estudió este tópico:

Profesora: Ok. ¿Y te acordás si la propiedad Hankeliana se cumple en el producto de matrices?
Mariela: No, tampoco. Es una estructura que no cumple la propiedad Hankeliana.
P: ¿No la cumple?
M: O sea el conjunto de todas, todas las matrices no, hay un subgrupo, una subestructura de matrices que sí. O sea, las que tienen la posibilidad de que sea invertible la matriz y bueno ahí puede ser.
P: ¿Y por qué nombrás a la matriz inversa?
M: Y porque para que se cumpla la propiedad Hankeliana tiene que existir el inverso.
P: Ajá, ¿el inverso en la multiplicación decís tú?
M: Ajá.

La aseveración que formula Mariela sobre el final no es necesariamente cierta ya que por ejemplo (Z, +, **.**) es un dominio de integridad, es decir que se cumple la propiedad Hankeliana, y los elementos de Z no tienen inverso multiplicativo. No nos queda claro si Mariela está hablando de las matrices o en general.

A continuación podemos observar cómo la presencia de la información "*b.c=0*" no sólo hace que la estudiante evoque la propiedad Hankeliana sino también su validez en cierta estructura. Como veremos, la estudiante interpreta a *b* y *c* como elementos de una cierta estructura, mostrando concretamente, que no solo ve números en esos símbolos. Si bien no podemos distinguir con precisión si está pensando dentro de la categoría U_6 o G_6, nos inclinamos más por G_6 ya que su respuesta se corresponde con la tesis del teorema de no existencia de divisores de cero:

Profesora: Vamos ahora a la pregunta 6. Se sabe que b.c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información? ¿Y tú que contestaste?
Mariela: Que b es igual a cero o c es igual a cero.

---

[49] Se refiere a las actividades que realizó en la SECUENCIA V.

P: ¿Qué representan para ti b y c?
M: Son elementos de un conjunto, de una estructura que cumple la propiedad Hankeliana.

Más tarde Mariela reflexiona sobre otras posibles respuestas a la pregunta anterior:

Profesora: ¿Y podrías haber dado otra respuesta para la parte (i)?
Mariela: Y, podría quizás haber puesto que b es igual a cero o c es igual a cero si y solo si se cumple la propiedad Hankeliana. Porque claro, ahí no me aclaran nada qué son los elementos.
P: Pero a ti de alguna forma la pregunta te invitó a contestar que b era cero o c era cero, ¿Por qué ese aliento a contestar que b era cero o c era cero?
M: Y, por lo mismo. Viéndolo así como que me volcaba a aplicar la propiedad Hankeliana sin tener en cuenta los elementos. Cuando me preguntaba, bueno, qué representan b y c, ahí me di cuenta que estaba faltando algo en los elementos que me estaban dando continuamente. Como que no tuve reparo desde el comienzo quiénes eran los elementos que se estaban multiplicando. Y después cuando me dijeron funciones o lo que fuera tampoco me puse a pensar si se cumplía la propiedad Hankeliana.

Mariela acepta que no reflexiona acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos que podrían estar representados por *b* o *c* (U_6, G_6). Tal vez su mente consulta el esquema conceptual que contiene la propiedad Hankeliana de la multiplicación en R y ello constituye el modelo mental que le hace dar esa respuesta sin detenerse a pensar en la validez de la propiedad según lo que representen *b* o *c*. Véase asimismo, que tácitamente Mariela está reconociendo a *b* y *c* como números. Encuadraremos esta concepción en U_2 y G_2, entendiendo que *b* y *c* pueden tomar cualquier valor pero atendiendo la restricción impuesta por el producto nulo.

La mayoría de los estudiantes con los que trabajamos también identifican a *b* y *c* únicamente con números (U_2 y G_2). Los porcentajes que se muestran en la tabla se calcularon sobre el total de alumnos que dieron algún tipo de respuesta a la pregunta: *¿qué representan para ti b y c?*

Nivel	*Alumnos que reconocen únicamente números en b y c (%)*
TERCIARIO	***74***
BACHILLERATO	***68***
CICLO BÁSICO	***100***

Entre los alumnos de Ciclo Básico y los estudiantes de nivel terciario con los que trabajamos, existen como mínimo 6 años de diferencia en su educación formal. Nos preguntamos si la ampliación de representaciones asociadas a *b* y *c* en *b.c=0*, evolucionó en forma significativa (U_6, G_6).

Le preguntamos a Mariela qué era, en su consideración, lo que a ella la llevaba a generalizar la propiedad Hankeliana:

Profesora: ¿Qué es lo que a vos te parece que te lleva a contestar que b es cero o c es cero, sin digamos, sin mediar demasiada reflexión? Como que uno tiende, no sé si por reflejo a contestar eso. ¿Qué es lo que te parece que incide en la respuesta que vos das? [50]
Mariela: Es una propiedad que aplicamos muchísimo en la resolución de ecuaciones. Como que automáticamente la queremos trasladar a otras estructuras sin pensar bien qué propiedades cumplen esas estructuras o sea en primera instancia. Quizás si fuera otra pregunta la reflexionamos, pero es una propiedad que la tenés incorporada, que la aplicamos continuamente en la resolución, tratamos siempre de factorizar para hallar las raíces más pronto o cosas de ese tipo.

Nos preguntábamos posibles razones por las que los estudiantes podrían generalizar la propiedad Hankeliana a otras estructuras donde no es válida, Mariela nos dice que es una propiedad que tenemos muy incorporada porque la hemos ensayado cientos de veces en la resolución de ecuaciones: "*la aplicamos continuamente en la resolución, tratamos siempre de factorizar para hallar las raíces más pronto o cosas de ese tipo"*.
Anteriormente habíamos mirado con preocupación que los estudiantes no aplicaran esta propiedad a la resolución de ecuaciones factorizadas e igualadas a cero porque la consideramos una herramienta óptima para esos casos. También observamos que los estudiantes de nivel terciario la han incorporado para aplicarla cuando resulta conveniente. Luego consideramos que era un problema que los estudiantes generalizaran en forma abusiva esta propiedad. *Sin embargo parecería que la reiterada aplicación de la misma en el contexto de la resolución de ecuaciones es lo que refuerza que esta propiedad quede tan íntimamente ligada al pensamiento de los estudiantes.* Entonces, ¿cómo disolver este círculo?

Creemos que los resultados que presentaremos a continuación aportan evidencias a la afirmación del párrafo anterior que se señaló en cursiva. Corresponden a las respuestas de 14 alumnos de bachillerato de la opción Medicina (aproximadamente 17 años de edad) y 14 estudiantes de Ciclo Básico (aproximadamente14 años de edad) a la SECUENCIA III. Recordemos que en esta secuencia se trabajaba con las clases residuales módulo 6 y ninguno de los estudiantes tenía experiencia anterior en ese tema.
La tabla muestra el porcentaje de estudiantes por nivel, que resuelven correctamente la parte *I) b)* y *I) c)*:

I) b)Usando la tabla, determina él o los valores de x que verifican la ecuación 3.x=0.
Escribe en la línea él o los valores de x que encontraste.....
Explica cómo lo hiciste.

I) c) a y b son elementos del conjunto A que se indicó más arriba. Se sabe que a.b=0, ¿qué puedes deducir sobre a y b a partir de esta información? Explica tu respuesta.

[50] Aunque somos conscientes de que preguntas directas de este tipo a los estudiantes no dan una información adecuada para explicar los fenómenos observados, queríamos saber qué explicación ellos daban a estos hechos.

Nivel	*Porcentaje de alumnos que dan todas las soluciones de la ecuación I) b)*	*Porcentaje de alumnos que tienen en cuenta que a y b son elementos del conjunto A, discutiendo todos los casos posibles para responder I) c)*
BACHILLERATO	***85***	***31***
CICLO BÁSICO	***100***	***73***

La diferencia de porcentaje en las respuestas a la parte *I) c)* radica en que los estudiantes de bachillerato persisten en afirmar que o bien *a* es cero o bien *b* es cero. Como decíamos, parecería que cuanto más se afianza una idea en los estudiantes (el conocimiento de la propiedad Hankeliana y su validez en R), mayor es la pérdida de versatilidad en el pensamiento. Con esto queremos decir que los estudiantes de Bachillerato se adaptan menos que los de Ciclo Básico a la situación propuesta. Podríamos decir que los esquemas conceptuales que la mente consulta para dar una respuesta, se fortalecen cuando son permanentemente retroalimentados por una misma idea. Si el campo de validez de esta idea no es universal, se presentarán problemas.

Pensamos que una alternativa didáctica a esta problemática podría consistir en presentarle a los estudiantes un universo rico de situaciones, donde no sólo se le muestren estructuras donde las operaciones definidas cumplen con las propiedades bien conocidas por todos, un ejemplo es la actividad de la SECUENCIA III que es accesible para cualquier estudiante de secundaria, sino que también se incluyan actividades que permitan a los alumnos confrontar sus ideas con las nuevas situaciones que se presentan, enriqueciendo así sus esquemas conceptuales y permitiéndoles enfrentar situaciones nuevas con otras perspectivas.

CAPÍTULO VII

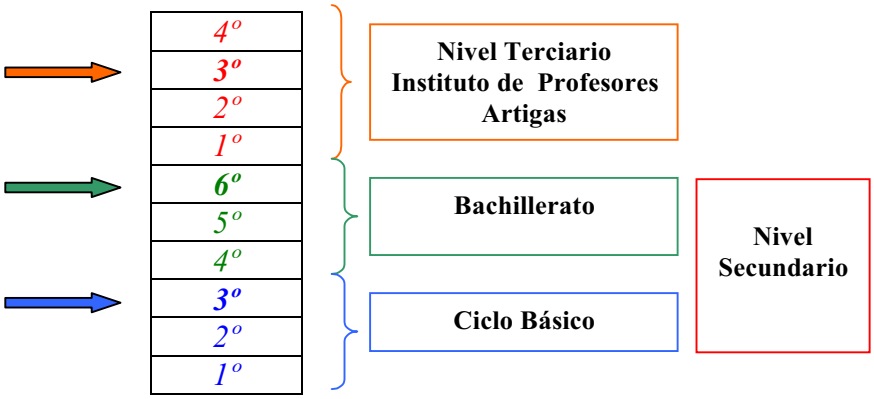
LOS RESULTADOS OBTENIDOS A LA LUZ DE LAS CONSIDERACIONES TEÓRICAS

En el presente capítulo se analizan los resultados obtenidos teniendo en cuenta las consideraciones teóricas redactadas en el Capítulo II. Para realizar el análisis se sigue el orden de los objetivos propuestos, es decir:

- Observar las estrategias que utilizan los estudiantes que conocen la propiedad Hankeliana de los números reales cuando se enfrentan a la resolución de ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero, poniendo atención en los alumnos que conociendo la propiedad y constituyendo esta la única herramienta de resolución de estas ecuaciones, no la aplican.
- Examinar el error que cometen los estudiantes cuando sustituyen a la incógnita por dos valores distintos en forma simultánea, al verificar las raíces en una ecuación polinómica que está dada en forma factorizada e igualada a cero y formular posibles explicaciones del mismo
- Buscar elementos para destacar en relación a los estudiantes que generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales a otras estructuras algebraicas donde no es válida, aun cuando hayan recibido instrucción específica al respecto y observar cómo evoluciona la ampliación del repertorio de objetos matemáticos que los estudiantes interpretan cuando ven a y b en la expresión $a.b=0$, a lo largo de los años de instrucción.

Los alumnos con los cuales trabajamos

Recordemos que para la presente investigación trabajamos con alumnos de tres niveles que guardan entre sí una diferencia de tres años de educación formal, como se puede observar en el esquema que se presenta más abajo. Estos niveles son: 3º año de Ciclo Básico, 6º año de bachillerato opciones Medicina y Economía y 3º año de profesorado de matemática que corresponde al nivel terciario.



Nos propusimos observar las respuestas de estos estudiantes frente a varias actividades que fueron planificadas de acuerdo a los tres puntos principales que pretendíamos estudiar. El primer punto tiene que ver con las estrategias de resolución que usan los estudiantes para resolver ecuaciones de segundo grado, dadas en forma factorizada e igualada a cero. Uno de los centros de interés estaba en observar si aplicaban la propiedad Hankeliana, herramienta que consideramos óptima en estos casos por la economía que implica a nivel de la operatoria, que a nivel de 3º año de Ciclo Básico era además, la única herramienta posible a usar ya que los estudiantes no han estudiado todavía la fórmula cuadrática.
Como segundo punto pretendimos observar y explicar la ocurrencia de un error en la verificación de este tipo de ecuaciones, que consiste en la asignación simultánea de distintos valores a la incógnita.
El tercer objetivo consistió en observar si los estudiantes generalizan la propiedad Hankeliana a estructuras donde no es válida esta propiedad, aun en el caso de que los estudiantes hubieran recibido instrucción específica al respecto. También nos propusimos observar la ampliación de interpretaciones para las letras que aparecen en una expresión, a lo largo de los años de estudio.

Análisis de los resultados relacionados con las estrategias utilizadas para resolver la ecuación factorizada

Discutiremos en primer lugar el caso de los alumnos que conociendo la propiedad Hankeliana, no siempre la aplican para resolver ecuaciones factorizadas e igualadas a cero.
En el caso de los alumnos de Ciclo Básico, ya se explicó que esta propiedad sería la única herramienta disponible ya que los estudiantes todavía no han estudiado la fórmula cuadrática. En este nivel se observó que solamente el 50% de los estudiantes manifestaron una respuesta de la cual inferimos que conocían la propiedad, aun cuando no hicieran referencia a ella por su nombre. 3 estudiantes en 14 pudieron resolver la ecuación aplicando que uno u otro de los factores debía ser cero y el resto del grupo no pudo resolver la ecuación.

Reiteramos que cuando decimos que los estudiantes conocían la propiedad, no estamos diciendo que esta propiedad fuera mencionada por su nombre específico, sino que aparecen planteos en donde cada uno de los factores de la ecuación está igualado a cero o se hace mención explícita a que se buscaron números para que el producto de los factores fuera cero. De los trabajos de estos estudiantes puede inferirse que más que la aplicación de una propiedad o de una regla, los alumnos tenían cierto significado asociado al trabajo que hacían. A partir de la entrevista mantenida con uno de los estudiantes se pudo saber que éste pensaba en "*0+0=0*" y por ello igualó cada factor a cero, obteniendo igualmente las raíces correctas. Otro estudiante señaló que *"Para resolver la ecuación lo que debés hacer es acomodar los números de forma que en uno de los términos dé cero"*. Si bien el alumno habla de términos, pudimos constatar que sabía que se trataba de una multiplicación. Asimismo una estudiante que no aplicó la propiedad para resolver la ecuación, manifestó haber tenido la idea de buscar números convenientes para que el producto fuera cero pero pensó que debía resolver la ecuación aplicando algún procedimiento o alguna fórmula. Nos da la impresión de que la alumna buscaba aplicar algún procedimiento similar al que utiliza para resolver ecuaciones de primer grado. La aplicación de la propiedad le pareció algo demasiado "*obvio*", "*simple*" y aparentemente por ello desechó la idea de aplicarla. De la

entrevista se deduce la necesidad de la alumna por aplicar un procedimiento más algorítmico o de mayor requerimiento operatorio. La inmensa mayoría de los estudiantes de este nivel, trató de desarrollar la expresión polinómica para tratar de despejar la incógnita, tarea que no tuvo resultados exitosos. En general, los estudiantes de este nivel reconocen en la incógnita un cierto valor que deben hallar (U_2). Aparecen dificultades con el requisito U_4 pero en muchos casos el uso de U_3 permite sustituir la falta de recursos algebraicos. Esto revela una buena comprensión del significado de una ecuación, esto es, determinar todos los valores que permiten convertir la expresión en una proposición verdadera. También se pudo apreciar un buen trabajo en relación a U_5, cuando a los estudiantes se les requirió dar ecuaciones que tuvieran una cierta raíz dada. Fueron capaces de elegir un símbolo para representar la incógnita e imponer ciertas condiciones a través de la ecuación que construyeron. En este sentido mostraron mayor creatividad que los estudiantes de bachillerato para diseñar las ecuaciones.

La idea de igualar ambos factores a cero aparece más que nada como una estrategia heurística que implícitamente está usando el resultado que dice que si un producto es cero, uno u otro factor es cero o que cero más cero es cero. Uno de los estudiantes no planteó las ecuaciones sino que dedujo mentalmente cuáles eran los valores que le permitían obtener una igualdad. No resulta claro que los estudiantes hayan evocado la propiedad, si bien todos la conocían porque la habían estudiado y aplicado a la resolución de ecuaciones siete meses antes de la realización de la secuencia. Por las respuestas de los alumnos, nos da la impresión de que la *imagen conceptual evocada* contenía informaciones del tipo artimético $0.5=0$, $0.k=0$, $0+0=0$, $0.0=0$ o la idea incorrecta de que el producto de dos números opuestos es cero. Esto último fue evidenciado cuando se les propuso a los estudiantes resolver la ecuación $5.x=0$. Tres estudiantes de bachillerato contestaron que $x=-5$. Uno de ellos planteó la "verificación" así: $5(-5)=0$.

Aparentemente la formación de una *imagen conceptual* asociada a esta propiedad se iría fortaleciendo con el uso reiterado de la misma, en el contexto de la resolución de ecuaciones fundamentalmente, como manifestó una estudiante de nivel terciario. Cuando decimos que existe en la mente del estudiante una imagen conceptual asociada a esta propiedad, nos referimos a que la presencia de una ecuación factorizada e igualada a cero constituye un estímulo que permite evocar la propiedad, aun cuando el estudiante no sea capaz de verbalizar qué es lo que está usando, y aplicarla para resolver la ecuación. Debemos aclarar que en varios casos, la resolución que presenta el estudiante por escrito parece reflejar la aplicación de la propiedad Hankeliana y sin embargo está aplicando la absorción. En el caso de estar trabajando con números reales permitió llegar a resultados exitosos, ya que resuelven la ecuación hallando las raíces correctas.
Esta imagen se iría consolidando a lo largo del bachillerato donde hay una marcada presencia de esta propiedad tanto a nivel de la teoría cuando se estudian los números reales como en la parte práctica de los cursos. En el caso de los estudiantes de este nivel, el 88% conoce la propiedad, la mayoría no por su nombre y algunos la confunden con la propiedad de absorción. Un 57 % de los anteriores no la aplica a la resolución de ecuaciones. Sin embargo, parecería que los que no la aplican, no es debido a la presencia de un fenómeno de *compartimentalización*, sino de una práctica educativa que hace énfasis en la operatoria y la algoritmización. Varios de los alumnos que aplicaron la fórmula cuadrática en la primera ecuación a la que se enfrentaron (ejercicio que se usó para dar las cifras),

demostraron luego que podían cambiar de estrategia o manifestaron que podían resolver la ecuación por cualquiera de las dos formas. No obstante, se observa una preferencia por la aplicación de la fórmula cuadrática, que creemos se fundamenta en las elecciones pedagógicas que los docentes llevan al aula.

La *imagen conceptual evocada* por los estudiantes de bachillerato para resolver la ecuación, podría contener a la propiedad pero más que nada como un medio para hallar las raíces de la ecuación. Con esto queremos decir que no habría un significado claro, asociado a la aplicación de la misma, sino que la propiedad proporciona una regla que permite resolver la ecuación.

Los estudiantes de bachillerato conocen las herramientas algebraicas que permiten resolver la ecuación (U_4), pero muchos cometen errores en la aplicación de la fórmula cuadrática, reduciendo por esta vía de resolución el arribo a resultados exitosos. El uso de una estrategia que se encuadraría en U_3, es decir buscar mentalmente o por escrito números que permitan obtener una proposición verdadera no mostró un uso privilegiado en este nivel. Prefieren ubicarse en U_4 y demuestran cierto rechazo por la instancia de verificación, muchos ni siquiera la realizan a pesar de haber sido solicitud expresa. Aun en el caso en que se dieran las raíces de una ecuación, prefirieron resolverla y ver si las raíces obtenidas coincidían con las dadas.

Pensamos que demostrar un buen desempeño en U_4 no alcanza para poder decir que el estudiante sabe resolver ecuaciones, aun cuando obtenga las raíces correctas. Como vimos, varios estudiantes saben calcular las raíces pero no saben por qué lo hacen de tal o cual forma o qué es lo que están aplicando. Con esto queremos decir, que resolver bien una ecuación no es equivalente a saber qué es lo que se está haciendo, inclusive en el caso en que el estudiante diga que está despejando la incógnita o que está hallando un número desconocido. Al igual que Skemp (1976), creemos válido reconocer dos tipos de entendimiento, el instrumental y el relacional. En el trabajo de muchos de los estudiantes de bachillerato encontramos un entendimiento instrumental de la matemática (saben hacer pero no saben por qué lo hacen). Por lo antedicho sostenemos que el requisito U_4 solamente refleja un saber hacer.

En el caso de los estudiantes de nivel terciario se detectó la presencia de una *imagen conceptual* asociada a la propiedad Hankeliana, haciendo los estudiantes mención explícita a ella y con marcada inclinación a interpretar como números reales los objetos matemáticos b y c que intervenían en el siguiente ejercicio: *Se sabe que b.c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información?¿Qué representan para ti b y c?*; cuestión que nos lleva a pensar, que se ha construido una *imagen conceptual* consistente con la propiedad en el conjunto de los números reales. Con esto queremos decir que, estos estudiantes no sólo contestan que b o c son cero sino que agregan, escriben, que b y c son números reales, es decir, completan la condición dada, agregando el conjunto al que pertenecen estos elementos. Parecería que, de alguna manera, sienten la necesidad de explicitar la naturaleza de b y c como números reales, aún cuando esto no figura en el texto de la pregunta. Dada la marcada tendencia en este nivel a interpretar a b y c como números, consideramos que no se han alcanzado los requisitos U_6 y G_6, evidenciando un conjunto restringido de objetos matemáticos a ser asociados con los símbolos dados.

Los estudiantes de este nivel mostraron autonomía al momento de decidir cuál es la forma más simple de resolver una ecuación del tipo que les presentamos. Ya no les da lo mismo aplicar la propiedad o la fórmula cuadrática como en el caso de los estudiantes de secundaria, sino que ahora están en condiciones de decidir y elegir, cuál es el método más simple para resolverla. Esto revela fluidez en U_4, siendo los estudiantes no sólo capaces de resolver la ecuación sino de elegir la herramienta más económica o conveniente. Sin embargo, debemos comentar que estos estudiantes prefieren U_4 aun cuando la ecuación propuesta fuera muy sencilla para este nivel de estudios. No referimos a que en este nivel ningún estudiante presentó como solución de la actividad, la sustitución de las raíces (que podían obtener mentalmente) en la ecuación dada (U_3), mostrando que privilegian los procesos algorítmicos.

Análisis de los resultados relacionados con el error en la verificación

Nos concentraremos ahora en el error que cometen algunos estudiantes en la verificación de las raíces de una ecuación. Hemos puesto nuestra atención en un error que consiste en la sustitución simultánea de la incógnita por dos valores distintos.
La mayor frecuencia de aparición de este error fue detectada en los estudiantes de bachillerato. Es menor su aparición en los estudiantes de nivel terciario y Ciclo Básico, aunque en este último nivel, la asignación de distintos valores simultáneos a la variable fue una estrategia usada para obtener ecuaciones con ciertas raíces dadas. En el estudio de este error pudimos detectar que varios alumnos tenían imágenes conceptuales inconsistentes y también el comportamiento que describe Vinner (1990), cuando señala que el aprendizaje a través de conflictos no siempre es una ayuda en la enseñanza, ya que si el alumno detectara una contradicción, nada puede asegurar que va a desechar una idea matemática incorrecta.

En una entrevista a un alumno de bachillerato, se trató de confrontar el procedimiento de verificación con el cálculo de imágenes en una función (U_3, F_2). Para que el alumno pudiera detectar con mayor facilidad una contradicción en la doble sustitución que realizaba al verificar, se definió una función que permitía encontrar cuántos autos pasaban por la esquina de una calle según la hora del día[51]. En particular, interesaba que el alumno calculara a qué hora no pasaba ningún auto ya que en ese caso debía plantear una ecuación igualada a cero (F_3), que es el caso que estamos estudiando. El alumno se dio cuenta que no podía darle a x valores distintos, ya que no podían ser al mismo tiempo las 3 y las 9 de la mañana por ejemplo (F_2). Sin embargo al momento de descontextualizar la situación y volver a la ecuación inicial, el alumno señaló que como allí la x no indicaba la hora del día, entonces sí podía tomar dos valores distintos a la vez (U_3). El alumno se desempeña correctamente en F_2 pero no en U_3. Es importante destacar que en el buen desempeño logrado en F_2 el contexto jugó un papel fundamental. Observemos que si bien no es lo mismo verificar una ecuación que calcular una imagen de un real en cierta función, pensamos que ambas actividades están íntimamente relacionadas pues en ambas existe una sustitución de la incógnita/variable por un cierto valor.

[51] La actividad puede leerse en la SECUENCIA II.

Si bien en el caso de U_3 y F_2 hay un contexto de por medio que de alguna forma permitió el buen desempeño del estudiante en F_2, vimos que esto no asegura el buen desempeño en el requisito U_3:

Profesora: Y para que tú me pudieras decir cuántos autos pasan a las 3 de la mañana y a las 9 de la mañana, ¿qué planteo habría que hacer Martín?
Martín: Sustituir las dos x por el mismo número o sea, por la misma raíz, las dos por 3 o las dos por 9.
P: Bien. Entonces, entre este planteo que hiciste aquí y el que hiciste aquí, ¿cuál te parece adecuado para contestar al problema de los autos y los semáforos?
M: (Señala el correcto)
P: Y si nosotros ahora salimos del contexto del problema y nos olvidamos de que estamos hablando de autos y semáforos y solamente queremos evaluar si 3 y 9 son raíces de la ecuación?
M: Sí.
P: Allí, puedes hacer...
M: ***Puedo hacer cualquiera de los dos.***
P: Y en el contexto del problema por qué te parece que la x no podía valer a la vez 3 de la mañana y 9 de la mañana?
M: ¿En el contexto de autos?
P: Ajá.
M: Porque estamos hablando de horas. No puede ser, no sería una situación posible.

Veamos qué se observa en relación con el tránsito entre $U_4 \leftrightarrow F_3$:

Profesora: [...] ¿A qué hora no pasó ningún auto Martín?
Martín: A la 0 hora.
P: A la 0 hora te va a dar que no pasó ningún auto?
M: O sea la ecuación me va a dar cero.
P: ¿A ver cómo lo plantearías?
M: Ah, no. No me va a dar cero. Ponele a las 3 horas y a las 9 horas.
P: O sea que a las 3 y a las 9 no pasó ningún auto, daría...
M: Cero.
P: ¿Cómo lo hiciste Martín?
M: Es la misma ecuación que tenía cuando hallé las raíces.

El estudiante no tiene dificultades en darse cuenta que las raíces de la función las obtiene de la ecuación que ya había resuelto. En este sentido la transferencia de F_3 a U_4 parecería no presentar problemas para el estudiante.

En el caso de la estudiante de nivel terciario, también encontramos una imagen conceptual inconsistente. Una profesora de matemática la previno de que la verificación que había realizado era incorrecta, por tanto en la entrevista ella manifestó que no sabía cómo se había equivocado y que efectivamente lo correcto era asignarle a x un valor por vez. Sin embargo, cuando en la entrevista se maneja la posibilidad de asignarle a x distintos valores a la vez sin mencionarle la palabra *verificación*, ella acepta tal posibilidad y elabora una respuesta. Vemos que a pesar de que señala explícitamente que la verificación debe hacerse

por separado (porque x debe tomar un valor por vez), en su mente coexisten todavía las dos posibilidades:

P: Y si te preguntan: ¿4 y 7 son raíces de la ecuación (2x-8)(x+7)=0?
C: Lo haríamos por separado.
[...]
P: ¿Y qué pasaría si tu sustituyeras aquí 4 y aquí 7?
C: Al sustituir aquí por 4, este factor ya es 0, entonces aquí x valga lo que valga, el producto ya va a ser cero y se va a verificar la ecuación.

Uno de los objetivos que teníamos era tratar de explicar por qué los estudiantes cometen este error. Encontramos dos razones posibles, que de ninguna manera significa que sean las únicas.
Una de ellas consiste en la idea de que en las ecuaciones de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$, en las condiciones ya dichas, los estudiantes ven dos ecuaciones de primer grado. Con esto interpretamos que los estudiantes confunden la ecuación propuesta, con el procedimiento que utilizan para resolverla, cuando plantean $ax+b=0$ o $cx+d=0$. Entonces elaboran el proceso de verificación como si se tratara de dos ecuaciones de primer grado, es decir, sustituyendo en cada factor por la raíz de ese factor. Los paréntesis colaboran con esta concepción, ya que los estudiantes sienten que de alguna manera esos paréntesis *separan* algo. No los ven tanto como indicando una multiplicación (si bien saben que indican una multiplicación), sino como *separando* "términos". Todos los estudiantes de bachillerato usan la palabra *término* para referirse a cada uno de los factores que aparecen en la ecuación. También detectamos que los estudiantes no tienen la certeza de que la expresión factorizada es de grado dos. Varios manifestaron que si hacían la multiplicación, entonces sí era de segundo grado. Un alumno manifestó que para resolverla la tomaba como dos ecuaciones de primer grado. Esto nos lleva a pensar que el estudiante no piensa que está resolviendo una ecuación de segundo grado sino que debe resolver dos ecuaciones de primer grado. Cuestión que incide posteriormente en la etapa de verificación, pues como ya dijimos, el error puede ser interpretado como la verificación de dos ecuaciones de primer grado realizadas en una única expresión.

En relación al marco teórico de Trigueros y Ursini (2003) y teniendo en cuenta las observaciones realizadas anteriormente, pensamos que para que el estudiante entienda la variable como incógnita es necesario además que posea un entendimiento estructural de la ecuación. Con esto nos referimos a que no solo debe interpretar los símbolos como valores específicos que pueden ser determinados considerando las restricciones dadas, sino que también debe comprender la estructura de la ecuación a la que se enfrenta, esto es, qué grado tiene, cuántas incógnitas posee, que operaciones están presentes en ella, etc.

La segunda interpretación del error, tiene que ver con un problema de orden lógico. El estudiante resuelve la ecuación y halla sus dos raíces. Supongamos que llega a que ciertos reales α y β distintos, son las raíces. Cuando verifica *"necesita ver"* que ambos factores se anulan, para poder verificar que *las dos* son raíces. La sustitución de una sola de las raíces en la expresión, haría que uno de los factores no se anulara, y esto parecería indicarle al alumno que le falta una raíz, aun cuando conozca ambas. Parecería, que concebir a α **y** β como raíces exige verlas *"al mismo tiempo"* anulando los dos factores. La lógica de que en

la expresión $x = \alpha$ **o** $x = \beta$, tratándose de un "**o**" excluyente pues en nuestro caso era $\alpha \neq \beta$, entra en contradicción con que α **y** β son las raíces.

En relación a este error, mantuvimos una entrevista con un docente de matemática y le preguntamos si era posible realizar la verificación de una ecuación de este tipo sustituyendo a x en cada factor por la raíz de ese factor. Primeramente el profesor trató de acudir a la noción de función para justificar que la x debía tomar un valor por vez, pero no pudo arribar a una justificación contundente, ya que no pudo explicitar en qué parte de la teoría formal se menciona explícitamente dicha cuestión. Parecería que se trata de un mensaje implícito, o al menos sobreentendido y en los hechos los docentes no lo hacen explícito a sus estudiantes. Se trata de una noción que los estudiantes deberían sobreentender, pero en los hechos no lo hacen. Aquí tendríamos entonces una tercera razón para justificar el error que cometen los alumnos y sería una razón de orden didáctico, desde el momento en que el docente no hace explícitas las reglas de juego de los objetos matemáticos, quizás por sobreentender que son obvias. Encontramos en esta situación una congruencia con lo que señala Vinner (1990), cuando dice que en muchos casos, los docentes perciben contradicciones que para los alumnos no son tales. En este caso, con la palabra contradicción nos referimos a que el docente sabe, desde el punto de vista formal, que no se puede asignar más de un valor a x "por vez", mientras que el estudiante no (al menos no siempre). No tenemos certeza de si el profesor en su mente percibe que de asignar dos valores distintos a x, sería $x \neq x$.

Si bien el docente mostró durante la entrevista algunas dificultades en encontrar una explicación al problema pudo encontrar finalmente una justificación que se basa en uno de los principios de la Lógica Aristotélica:

G: [...] por otro lado cuando aparece la x, en principio pretendo quizás por una cuestión de identidad, que cuando en esa expresión está la x, la x sea sustituida las veces que aparece por un mismo número. No, no pienso en que la x vaya a valer 2 y 3 al mismo tiempo, si está representada por una letra x.
P: ¿Me estás hablando de una función o de una ecuación?
G: No importa, lo que sea.
P: ¿Eso que vos me estás diciendo es algo que está explícito en la obra matemática o es algo que se asume tácitamente?
G: Eh..... quizás sea como un acuerdo tácito, no, no sé si se explicita, creo que no, creo que se entiende o se sobreentiende, quizás, que cuando en un momento determinado se está trabajando puntualmente con una expresión, el valor que se le asigna a esa letra en ese momento puntual es el mismo.
P: ¿Cómo catalogarías eso? ¿Una convención entre profesor y alumno? ¿O tiene un respaldo teórico?
G: Quizás tenga una raíz en los propios principios de la lógica Aristotélica, en el Principio de Identidad.
P: ¿Y cuál es el principio de Identidad?
G: Cada cosa es igual a sí misma, no sé si cosa o ... Entonces x=x y si x vale 3, en ese momento puntual en que la estoy utilizando, cuando sustituya la x, si bien aparece más de

una vez, siempre la voy a sustituir por el mismo valor, no se me ocurre que x pueda admitir, ya digo, en un momento puntual, más de un valor.

Aparentemente, la estructura cognitiva de los estudiantes no les permite inferir, que si por ejemplo, $x=2$ y $x=3$ entonces sería $x \neq x$; que estaría en contradicción con el principio aristotélico de identidad. Con esto no queremos decir que un alumno es capaz de argumentar que $2=3$, sino que éste no puede inferir la contradicción a partir de la situación que tiene planteada. Ahora bien, supongamos que explicamos al estudiante que al sustituir dos valores distintos al mismo tiempo, implicaría que x no iguala a x, no sabemos si esto cambiaría la forma de comportarse de los alumnos frente al problema. Vinner (1990) señala que aun cuando el alumno detecte una contradicción, nada puede asegurar que va a abandonar la idea matemática incorrecta.

Según E. Fromm (1956):

*"Desde Aristóteles, el mundo occidental ha seguido los principios lógicos de la filosofía aristotélica. Esa lógica se basa en el principio de identidad que afirma que **A** es **A**, el principio de contradicción (**A** no es no **A**) y el principio del tercero excluido (**A** no puede ser **A** y no **A**, tampoco **A** ni no **A**). [...]*
En oposición a la lógica aristotélica, existe lo que podríamos llamar lógica paradójica, que supone que A y no-A no se excluyen mutuamente como predicados de X. La lógica paradójica predominó en el pensamiento chino e indio, en la filosofía de Heráclito, y posteriormente, con el nombre de dialéctica, se convirtió en la filosofía de Hegel y Marx".

Quizás los docentes damos por sobreentendido que los razonamientos que emergen de cualquier individuo deben responder a nuestra lógica, lo damos por descontado. Nuestra forma de razonar lógicamente, es parte de nosotros mismos, no reflexionamos sobre ella, es algo que sucede solo, no depende de nuestra voluntad y tal vez por ello no tenemos en cuenta que es un aprendizaje que el alumno debe realizar. Parecería importante entonces, que los profesores lleváramos a un nivel consciente la necesidad de trabajar con nuestros estudiantes, estos aspectos de la lógica, como los principios que mencionamos. Esto sería una ayuda en la evolución de su pensamiento matemático. Al respecto, reflexionó el docente (G) que entrevistamos:

G: Es que los principios de la lógica, son de algunas forma un convenio. ¿De dónde salen? Y, ¿saldrán quizás de un análisis de cómo funciona el pensamiento? Al menos el pensamiento occidental, porque el pensamiento oriental admite principios que no admiten las leyes Aristotélicas.
P: ¿Vos crees que esos convenios habitualmente, o en lo que es tu experiencia docente, esos convenios son explicitados por el docente al alumno o se dejan, digamos, como algo encubierto que no amerita ser conversado o que el docente teme que no es lo suficientemente matemático como para ser explicitado a los alumnos?
G: Me parece que no es un tema de que amerite ser o no explicitado. Me parece que pasa por una cuestión de sobreentender y quizás de no tener la capacidad de percibir que eso necesita ser explicitado. Me parece que no es una cuestión de subestimar determinadas ideas sino que me parece que pasa, quizás, por una incapacidad de darnos cuenta cuándo determinados conceptos o determinadas ideas que resultan obvias o más bien son

incuestionadas porque las manejamos con tanta frecuencia y con tanta soltura que no nos hemos puesto a pensar que quizás sea necesario especificar su uso.
P: ¿Y vos crees que para el alumno son obvias esas reglas de juego?
G: No pero ese es el desafío o quizás uno de los desafíos de la didáctica de la matemática. Claro porque de algún modo, que se vuelvan consciente determinados usos.....me parece entonces, decía, de la importancia de volver consciente determinadas prácticas que en ellas deliberadamente se establecen supuestos y que quizás para quienes están aprendiendo no sean obvios, eso me parece que es uno de los problemas a los que se tienen que enfrentar los docentes.

Haremos una última reflexión, en el marco teórico presentado en (Vinner, 1990). Aun cuando el alumno conozca los principios de la lógica aristotélica, esto no asegura que detecte la presencia de una contradicción. Con esto queremos decir, que el conocimiento de dichos principios no asegura que el alumno pueda derivar en su estructura cognitiva la contradicción. Además, en el caso en que pudiera inferirla, todavía quedaría la posibilidad de que ésta no fuera un problema para él. Más aún, en el caso en que detectara la contradicción y la viera verdaderamente como un problema, no podemos asegurar que para realizar una acomodación, va a abandonar una idea matemática incorrecta para quedarse con una que sí lo es. Podría suceder todo lo contrario.

Análisis de los resultados referidos a la generalización incorrecta de la propiedad Hankeliana

Nos concentraremos finalmente, en el tercer objetivo de esta investigación. Éste consiste en explicar por qué los estudiantes generalizan la propiedad Hankeliana de los números reales, a otras estructuras donde ésta no es válida, aun en el caso en que hayan recibido instrucción específica al respecto. Habíamos hipotetizado que las características sintácticas de la expresión $A.B=0$, independientemente de los objetos representados por A y B, hacían que el estudiante evocará la mencionada propiedad y contestara que $A=0$ o $B=0$.
Recordemos que a un grupo de estudiantes de bachillerato le propusimos:

f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

Los estudiantes de bachillerato que entrevistamos infirieron, en primera instancia, que f o g eran la función nula. Cuando les preguntamos por qué habían dado esa respuesta, dos de ellos pensaron en que si una era la función nula, el producto iba a ser nulo y el otro aludió a la propiedad de absorción. En ambos casos, podríamos decir que se está invocando al cero como elemento absorbente en la multiplicación y no la propiedad Hankeliana. Observamos un error en la implicación que realizan los estudiantes. Si una de las funciones es la función nula, el producto será nulo en virtud de la propiedad de absorción pero como la estructura admite divisores de cero, ésta no es la única solución al problema y es allí donde aparecen los errores. Es decir que los estudiantes realizan una implicación incorrecta basados en que si uno de los factores es la función nula el producto lo será.
Si bien estos estudiantes tenían conocimientos de cálculo, no habían estudiado específicamente este problema. De modo que es entendible que su mente evocara cierta

imagen conceptual que incluyera, entre otras cosas, las propiedades de las operaciones en R y transfirieran su validez al contexto de funciones.

La estudiante de 3º año de profesorado de matemática que entrevistamos, nos explicó que cuando dio su respuesta a la pregunta sobre funciones, evocó la propiedad Hankeliana.
En la pregunta que se refería a matrices la estudiante contestó, diciendo que una u otra era la matriz nula. En este caso, la estudiante había estudiado con anterioridad que a partir del producto nulo, no podía inferir que una u otra de las matrices fuera la matriz nula, sin embargo, en ese momento esta información no fue evocada.

Le preguntamos a esta estudiante qué era lo que a ella le parecía que la llevaba a contestar que uno u otro de los factores intervinientes eran cero, aun en el caso en que no se especificara qué representaban esos factores. Nos dijo que es una propiedad que se aplica muchísimo en la resolución de ecuaciones, que la tiene muy incorporada y que "*automáticamente*", "*en primera instancia*", como ella misma dice, la termina trasladando a otras estructuras, sin pensar bien qué propiedades cumplen las operaciones de esas estructuras. Mariela dice:

"Quizás si fuera otra pregunta la reflexionamos, pero es una propiedad que la tenés incorporada".

Como ya se señaló anteriormente, la reiterada aplicación de esta propiedad en el contexto de resolución de ecuaciones favorecería la consolidación de la idea de que su validez es universal. Esto concuerda con lo que señala Fischbein (1987), cuando dice que la experiencia es un factor fundamental en la formación de conocimientos intuitivos:

"[...] basic source of intuitive cognitions is the experience accumulated by a person in relatively constant conditions". (Fischbein, 1987)

Pongamos ahora especial atención en las palabras que usa Mariela, cuando trata de explicar por qué generalizó la propiedad: *"Automáticamente", "en primera instancia", "Quizás si fuera otra pregunta la reflexionamos"*.
Estas palabras nos hacen pensar en la posibilidad de que la propiedad Hankeliana se haya transformado en un conocimiento intuitivo o al menos, que posee algunas de las características de estos. Parecería que este conocimiento se impone con carácter de verdad obligatoria, y de ahí que no sea desplazado por otro que resulte contrario, como ser, por ejemplo, la no validez de este conocimiento en la teoría de matrices. La entrevista a esta estudiante permitió también evidenciar que acepta la propiedad como válida sin una necesidad extra de justificación. Observamos además que algunos estudiantes extrapolan esta propiedad a contextos donde no es válida (matrices), aun habiendo recibido instrucción específica al respecto.

"[...]one tends to believe in the absoluteness of the concept, one tends to confer on this notion, based on conventions, the absoluteness of a given, objectively existing fact". (Fischbein, 1987)

Recordemos un ejercicio de las secuencias:

Se sabe que $b \times c=0$. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información?

En este caso no se hace referencia a qué objetos matemáticos representan *b* y *c*, por tanto, la información dada resulta incompleta. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes contesta que o bien *b* es cero o bien *c* es cero. Parecería que estos estudiantes sacan conclusiones con menor cantidad de información que la que sería necesaria; lo que nos permitiría reafirmar la característica de *extrapolación*:

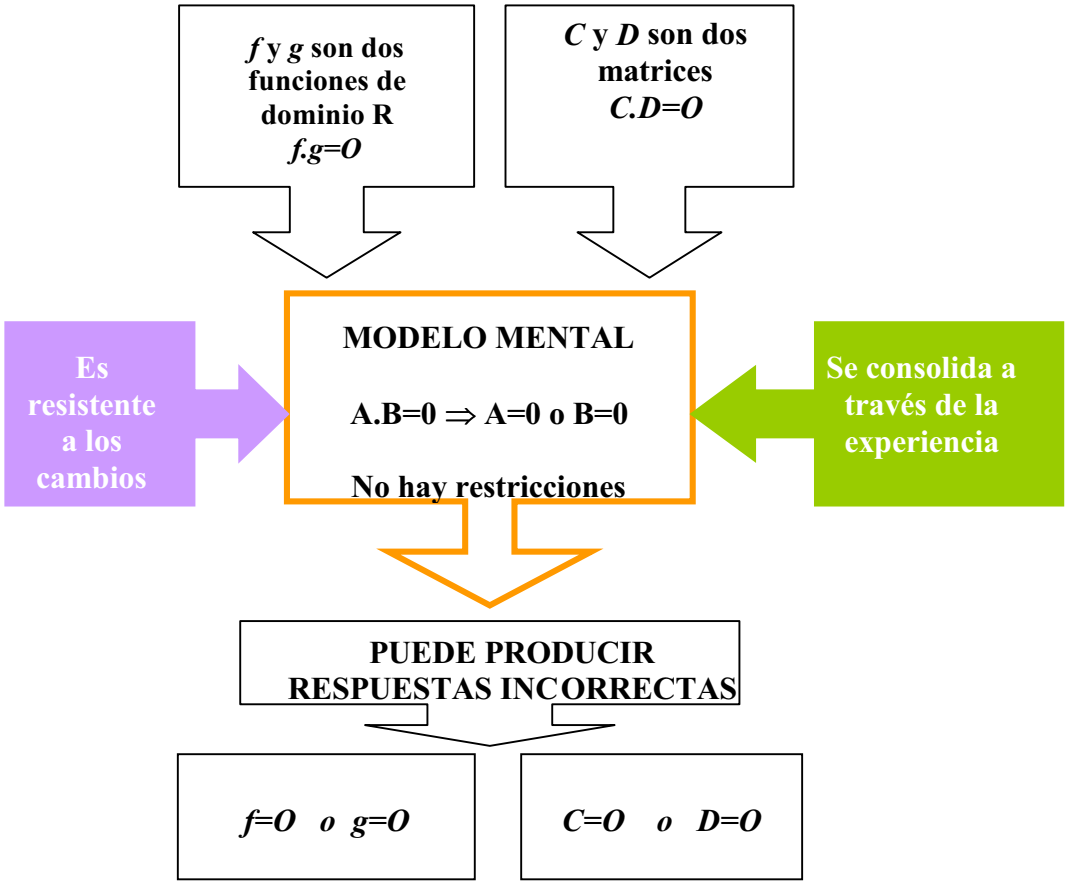
"This brings us the property of extrapolativeness. "It appears", writes Westcott, "that intuition can be said to occur when an individual reaches a conclusion on the basis of less explicit information that is ordinarily required to reach that conclusion". (Westcott, 1968, p.97, referido en Fischbein, 1987, pág 50)

El conocimiento intuitivo se estructura en modelos tácitos (implícitos) que sirven para interpretar alguna situación o resolver algún problema. De alguna manera sustituyen un concepto complejo o inalcanzable por una representación accesible. Esto es, asignan un significado único y directamente accesible a un conjunto de datos (Fischbein, 1999). Fischbein señala que esta necesidad de usar modelos es por la ineficacia natural del hombre por usar símbolos cuyas únicas restricciones son formales, por ello, producimos modelos que les confieren un sentido práctico o quizás más simple. En el caso que analizamos, tendríamos un modelo mental que permite dar una respuesta a partir de un cierto producto nulo conocido, sin atender las restricciones de los objetos matemáticos involucrados.
Cabe preguntarse por qué razón algunos estudiantes que han recibido instrucción específica referida a la no validez de la propiedad en ciertas estructuras, no la han integrado a este modelo. Recordemos lo que dice Fischbein (1997):

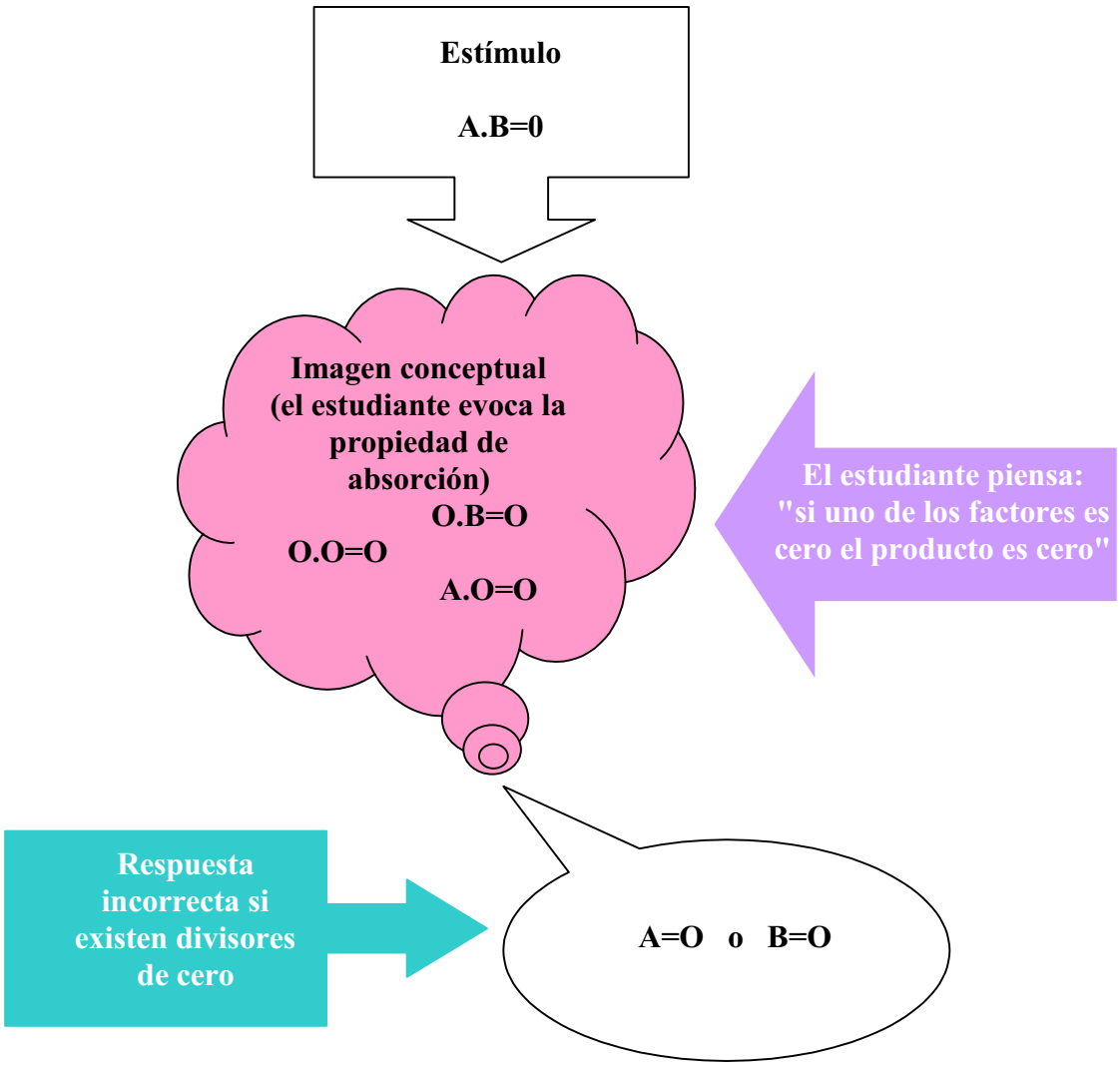
"In seeking coherence for our cognitive organization, we tend in the course of our mental operations to integrate information that is easily available and to ignore information that requires a more sophisticated research effort. Also, we tend to rely on information that seems to be representative of an entire class".

El *efecto de primacía* (Fischbein, 1987) de las intuiciones determina la supervivencia de las impresiones iniciales, inclusive en los casos en que se provee posteriormente de evidencia contraria. Las intuiciones son de la misma naturaleza que los esquemas mentales, se resisten a las alteraciones y tratan de mantener su equilibrio. Como consecuencia del *efecto de primacía*, el primer modelo que se le presenta al estudiante que es el de *"a.b=0 entonces a=0 o b=0"*, y que en general es enseñado sin restricciones para *a* y *b*, se convierte en algo rígido y será muy díficil deshacerse de él posteriormente. Como este modelo se refuerza a través de la experiencia, es entendible que los estudiantes de Bachillerato hayan mostrado menor versatilidad en su pensamiento que los estudiantes de Ciclo Básico, cuando se enfrentaron a la secuencia de las clases residuales módulo 6. Recordemos que la mayoría de los estudiantes de Ciclo Básico incorporaron la nueva situación (existencia de divisores de cero) a su respuesta final donde se les preguntaba qué se podía inferir sobre *b* y *c* sabiendo que *b.c=0*, mientras que los estudiantes de bachillerato mostraron mayor resistencia a integrar a su respuesta la nueva situación. Fischbein señala que el modelo inicial puede convertirse en un obstáculo que puede entorpecer el pasaje a una interpretación de nivel

más alto, más general o más abstracto del concepto, como ser la de este último ejemplo que mencionamos.



Entendemos que habría otra razón por la cual los estudiantes persisten en contestar que si un producto es cero, uno u otro de los factores es cero. En varias entrevistas detectamos que cuando los estudiantes daban esa respuesta, estaban pensando en la propiedad de absorción de la multiplicación. Si una de las funciones es la función nula, se cumple que el producto será la función nula y si una de las matrices es la matriz nula también el producto será la matriz nula, pues se cumple la propiedad de absorción en todas las estructuras que le presentamos a los estudiantes. En este caso los alumnos pensaron en una condición suficiente que además es correcta: *es suficiente que uno de los factores sea nulo para que el producto lo sea*. Pero como ésta no es siempre una condición necesaria, se pierden casos y se cometen errores. Si el alumno piensa en la absorción, obtendrá siempre la misma respuesta: uno u otro de los factores debe ser cero. Lo visualizamos en el siguiente esquema:



En el análisis que hicimos al inicio de este trabajo habíamos hipotetizado que la generalización de la propiedad Hankeliana a estructuras donde no es válida podía deberse a la aplicación de una regla intuitiva del tipo "Igual A (producto nulo)- Igual B (uno de los factores es nulo)" discutida en (Tirosh & Stavy, 1999). La aplicación de esta regla se debería a que los estudiantes reaccionan en forma similar frente a diferentes problemas cuando éstos muestran ciertas características comunes externas. En este caso, esas características comunes estarían dadas por la sintaxis de la expresión *f.g=O* o *C.D=O* o *b.c=0*, donde aparecen dos factores cuyo producto es igual al elemento absorbente de la multiplicación. En las entrevistas detectamos, que ya fuera que los estudiantes estuvieran pensando en la propiedad Hankeliana o en la propiedad de absorción, todos señalaron la parte simbólica de lo que estaba escrito, como aquello que los motivó a contestar que uno u otro de los factores era nulo. Esto sería congruente con la creación de prototipos que plantean English y Halford (1995). El prototipo sería generado por las características sintácticas comunes en la escritura de la expresión en las diferentes estructuras. Los estudiantes estarían situando su atención en lo simbólico y no en la semántica de los objetos matemáticos involucrados.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Hemos visto que cuando se les propone a los estudiantes de Ciclo Básico resolver ecuaciones polinómicas factorizadas e igualadas a cero, en general, éstos aplican la propiedad distributiva para luego tratar de aplicar las técnicas conocidas por ellos para resolver ecuaciones de primer grado. En general, no logran éxito en su tarea, debido a la complejidad de la ecuación que obtienen, ya que no poseen los recursos técnicos para poder resolverla. Un porcentaje pequeño de estudiantes logra resolver la ecuación, igualando cada uno de los factores a cero para hallar las raíces. Éstos últimos pueden formular una explicación para lo que están haciendo, dentro de algún campo semántico ya sea correcto o no.

Hemos observado que muchos estudiantes optan por emplear un proceso algorítmico que involucre cierta operatoria para resolver una ecuación polinómica factorizada e igualada a cero. En algunos casos esto podría deberse a que la matemática es enseñada como un conjunto de reglas o procedimientos a emplear, según sea el caso. Cuando el estudiante se enfrenta a una situación que no le es familiar, tratará de aplicar cierta algoritmia, según las herramientas que disponga. Si bien en muchos casos podría dar una solución al problema sin necesidad de realizar ninguna operación, tan solo a través de cierta heurística que se gestiona a nivel mental, parecería que esto no lo satisface ya que no ha ensayado ningún procedimiento algorítmico para resolverlo. Esto de alguna manera justificaría la preferencia de los estudiantes por trabajar con la expresión polinómica desarrollada.

Algunos alumnos de bachillerato que aplican la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación, lo hacen porque sus profesores le han enseñado que así se hace y no siempre pueden elaborar una explicación para lo que están haciendo.
Los estudiantes de nivel terciario son los que han generado una autonomía suficiente, como para decidir y elegir qué herramienta les conviene usar según la situación a la que se enfrenten. La herramienta óptima sería la más económica al nivel de la algoritmia involucrada y por tanto la más sencilla de aplicar.

A partir de las evidencias obtenidas en el estudio que hicimos, parecería que los docentes realizan más énfasis en cómo se resuelve una ecuación que en por qué puede hacerse de una u otra forma. Pensamos que antes de que al alumno de Ciclo Básico se le enseñe a aplicar la propiedad Hankeliana, se le debería enfrentar a la ecuación de segundo grado factorizada para que intente ensayar diversos procedimientos *sui generis* para despejar la incógnita, que en la mayoría de los casos le resultarán ineficaces. De esta forma, quizás pueda valorar la herramienta que se desea enseñar y pueda ver que no siempre es necesario realizar una larga secuencia de operaciones para poder resolver una ecuación, que es lo que ellos esperan.

Si la enseñanza no hace énfasis en el contraste, es difícil que el alumno aprenda a valorar la potencialidad de las herramientas matemáticas. Creemos que ensayando diversas posibilidades para resolver una ecuación y viendo que los caminos que se toman no conducen a la solución buscada, el estudiante aprenderá a valorar la economía y sencillez

que le aporta la utilización de la propiedad Hankeliana en la resolución de ecuaciones que se prestan para su aplicación.

En la enseñanza de la resolución de ecuaciones quizás resultara positivo incorporar actividades como la de construir una ecuación conociendo sus raíces. Podríamos comenzar construyendo una ecuación de primer grado con una raíz dada y luego ir "agregando" raíces, tal como lo hizo Descartes. En este proceso podríamos observar qué estrategias aborda el estudiante, y qué argumentos dan sentido a lo que hace.

Por lo que hemos visto, presentarle una ecuación a un estudiante y enseñarle a resolverla, no representa un aprendizaje, aun cuando en corto plazo demuestre saber aplicar la técnica que le hemos mostrado. Los aprendizajes duraderos parecerían ser lo que están cargados de significado y no los que contienen solamente un conjunto de procedimientos o reglas. Dentro del marco teórico que hemos elegido, diríamos que los alumnos construyen imágenes conceptuales más ricas si éstas contienen algún significado asociado al concepto. Si enseñamos una regla, vacía de significado, el estudiante podrá recordar quizás sus características sintácticas y tal vez pueda también enunciarla, pero no siempre podrá evocarla y aplicarla para resolver una situación, ya que no posee significados que le permitan reconocer en la situación que debe resolver su aplicabilidad.

En cuanto al error en la verificación de las raíces de la ecuación que estuvimos observando, vimos que él aparece tanto cuando se utiliza la propiedad Hankeliana para resolver la ecuación como cuando se usa la fórmula cuadrática. El error no es exclusivo de la ecuación que está dada en forma factorizada pues también apareció al momento de verificar las raíces de una ecuación cuya expresión polinómica aparecía desarrollada. La expresión desarrollada le permite al estudiante darse cuenta de su error, mientras que en la factorizada fue imposible que los estudiantes lo reconocieran. Aun apelando a una situación contextualizada donde era imposible que la variable (hora del día) tomara dos valores distintos a la vez o trabajando en el contexto de funciones y cálculo de imágenes, no se logró que los estudiantes reconocieran posteriormente la imposibilidad de asignarle dos valores distintos a la incógnita a la vez. Los estudiantes lograron aislar el caso de la verificación de las raíces de la ecuación como una situación especial, separándola del cálculo de imágenes en una función y de la situación contextualizada que se les propuso, manteniendo así la coherencia de sus esquemas mentales y mostrándonos el efecto de primacía sobre las concepciones iniciales. Podríamos decir que en este caso, el fenómeno de compartimentalización aparece como un recurso de la mente que le permite evitar contradicciones y por tanto mantener la coherencia interna, aislando las tres situaciones y reconociéndolas como cosas diferentes no interconectadas.

Como al calcular imágenes en una función, los estudiantes que participaron en esta investigación parecían tener claro que la variable puede tomar un valor por vez, sugerimos que una alternativa didáctica posible para evitar el error, sería la de enseñar la resolución de ecuaciones en el contexto de las funciones, es decir, dada una función f de R en R de la forma $f(x)=(ax+b)(cx+d)$, para hallar sus raíces resuelvo la ecuación $(ax+b)(cx+d)=0$. Para verificar las raíces encontradas debo verificar que cada una de ellas tienen imagen cero según f. Como de esta forma estarían calculando imágenes no se cometería el error de la doble asignación. Lo que acabamos de sugerir constituye solamente una recomendación

didáctica pero no posee la fuerza de una conclusión. Más investigación es necesaria para averiguar si esto podría ser una propuesta viable.

Teniendo en cuenta la presentación del tema en los textos de estudio de los estudiantes y considerando, como ya dijimos, que éstos son reflejo de las prácticas educativas, podríamos sugerir a los docentes que el procedimiento de verificación de una ecuación debe ser enseñado al estudiante y no tomarse como una noción implícita que el estudiante debe conocer (recordemos que ningún texto presenta una verificación hecha). Los hechos demuestran que el proceso de verificación no es nada obvio, así como tampoco la idea de que la incógnita no pueda ser sustituida por dos valores distintos a la vez. Como vimos, una estudiante de nivel terciario cometió este error y mientras que los documentos escritos mostraban que aparentemente lo había corregido, en su mente todavía avalaba la posibilidad de que en una ecuación la incógnita pudiera tomar dos valores diferentes a la vez. Quizás podría aprovecharse la enseñanza del procedimiento de verificación para hacer explícito a los estudiantes el principio aristotélico de identidad. Esto será posible si los docentes logramos llevar a un nivel consciente, la necesidad de comenzar a hacer explícitos una inmensidad de conceptos que tenemos tan internalizados que se nos hace imposible concebir que nuestros semejantes no los tengan incorporados. Como ya dijimos, el pensamiento lógico de un individuo es un aspecto a construir o desarrollar.

La asignación de distintos valores a la variable en forma simultánea fue un recurso usado por los estudiantes más pequeños al momento de tener que construir una ecuación con dos raíces dadas. Este procedimiento junto al de concebir una ecuación con dos incógnitas resultó para ellos más natural o espontáneo, que concebir una ecuación de segundo grado que tuviera las dos raíces dadas. Quizás el hecho de concebir una ecuación de segundo grado con **una** incógnita y la consiguiente posibilidad de que existan **dos** raíces sea mucho más complejo para los estudiantes de lo que los docentes creemos. Esto sería congruente con lo reportado por Trigueros y Ursini (2003) donde señalan que la gran mayoría de los estudiantes con los que trabajaron, consideraban que la incógnita involucrada en una ecuación cuadrática podía tomar solamente un valor.

Nos referiremos ahora al tercer objetivo de esta investigación. Nos interesaba observar si los estudiantes generalizaban la propiedad Hankeliana a estructuras donde ésta no es válida y por qué lo hacían, aun en el caso de que hubieran recibido instrucción específica al respecto. Para ello formulamos, entre otras, tres preguntas claves: una que se refería a dos factores cuyo producto era cero pero no se especificaba la naturaleza de los mismos, otra que se refería a dos funciones de dominio R cuyo producto era la función nula, y la tercera con dos matrices, cuyo producto era la matriz nula. Se les preguntaba a los estudiantes qué podían inferir ya fuera sobre los factores que arrojaban producto nulo, sobre las funciones o sobre las matrices respectivamente. Los estudiantes de bachillerato cursaban al momento de realizar la prueba un curso de cálculo y los estudiantes de nivel terciario ya lo habían cursado. En el caso de las funciones, no poseemos evidencias de que algún profesor hubiera observado que no se cumplía la propiedad en dicho contexto. En cambio en el caso de las matrices todos los estudiantes que realizaron la prueba habían visto, en alguna oportunidad o curso anterior, que la propiedad no era válida. En estos tres casos que presentamos, un alto porcentaje de los estudiantes contestó que uno u otro de los factores, era cero, o la función nula o la matriz nula.

En el caso de los estudiantes de bachillerato, varios de ellos contestaron pensando en la propiedad de absorción, es decir, si una de los dos factores es cero, el producto lo será; cuestión que siempre es cierta en las estructuras que se presentaron. Si bien este razonamiento es válido, no siempre permite obtener todas las posibilidades para los factores involucrados ya que si la estructura tiene divisores de cero, hay otras opciones. Con esto queremos decir que si uno de los factores es cero, el producto es cero; pero no necesariamente uno de ellos debe serlo para que el producto sea cero.

En el caso de los estudiantes de nivel terciario, la presencia de la propiedad Hankeliana es más fuerte y clara. En las entrevistas hicieron explícito que cuando dieron esa respuesta pensaron en dicha propiedad en el conjunto de lo números reales. En estos estudiantes esa propiedad aparece sumamente arraigada a la experiencia, en el sentido de que tratan de aplicarla siempre que sea posible, factorizando en forma conveniente.

Al incio de este trabajo formulamos la hipótesis de que las características externas de índole sintáctico que hacen a la redacción de la mencionada propiedad, favorecerían la aplicación de la misma por parte de los estudiantes. Mientras que el objeto matemático va cambiando, las características sintáctico visuales permanecen prácticamente incambiadas. En este caso los estudiantes podrían estar aplicando una regla del tipo "Igual hipótesis (producto nulo de dos factores)- Igual conclusión (uno u otro de los factores es nulo)", sin prestar atención a los aspectos semánticos de los objetos matemáticos involucrados o una regla basada en un prototipo, como ya se ha explicado. Si bien no tenemos evidencia a este respecto, recordemos que, aunque en una de las preguntas no se decía qué representaban los factores cuyo producto era nulo, la inmensa mayoría de los estudiantes contestó que uno u otro eran cero. Este aspecto también sería favorecido por los textos de estudio del alumno, que en general enuncian la regla $A.B=0 \Rightarrow A=0$ o $B=0$, sin especificar qué representan A y B, desconociendo que su validez no es universal.

Pensamos que la regla antes enunciada podría tener las características de un modelo implícito de pensamiento cuyo disparador reside en las características sintáctico visuales de la expresión involucrada. Como en la experiencia el alumno ha reforzado una y otra vez la validez de esa regla, le resulta difícil incorporar información contraria que se le ha proporcionado en forma posterior, como es el caso concreto de la multiplicación de matrices.

Se aplicó una misma secuencia de actividades sobre clases residuales módulo 6, a estudiantes de 3º año de Ciclo Básico (14-15) años y a estudiantes de 6º año de bachillerato (17-18 años). En ella, se enfrentaron a la existencia de una estructura con divisores de cero. Finalizada esta actividad se preguntó a los estudiantes de ambos niveles qué podían inferir sobre dos factores cuyo producto era cero. Los estudiantes de 3º año incorporaron la existencia de divisores de cero en su respuesta, mientras que los estudiantes de bachillerato restringieron su respuesta a la idea de que uno u otro de los factores era cero. Los estudiantes de 3º año demuestran un pensamiento más versátil que los de bachillerato. Quizás porque el factor de la experiencia, todavía no ha incidido demasiado en la consolidación de esquemas estables.

Si tenemos en cuenta la didáctica que se utiliza comúnmente en las aulas, las operaciones aritméticas y sus propiedades son la puerta de entrada al entendimiento de las operaciones algebraicas y sus propiedades. Desde el punto de vista cognitivo esta primera interpretación podría obstaculizar generalizaciones posteriores más abstractas como señala Fischbein (1987). Agreguemos a esto el elemento epistemológico que encontramos en Peacock cuando éste construyó los axiomas del álgebra simbólica a partir de las leyes fundamentales de la aritmética. Sin querer, produjo un estancamiento en la evolución del álgebra al institucionalizar la validez universal de esas leyes, que no avalaban, por ejemplo, la existencia de operaciones que no fueran conmutativas. En base a las consideraciones anteriores tendríamos argumentos didácticos, epistemológicos y cognitivos para sostener que el primer acercamiento que los estudiantes tienen en la actualidad al álgebra escolar, les ofrece una visión parcializada y restringida que podría obstaculizar una visión posterior más general y abstracta.

Como sugerencia didáctica planteamos la posibilidad de que el estudio del álgebra no sólo se inicie a partir de las operaciones aritméticas y sus propiedades, sino también poniendo en contacto al alumno con otras estructuras que estén a su alcance y que le ofrezcan una visión más amplia de las propiedades algebraicas, en todos los sentidos. De esta forma creemos que se minimizarían los obstáculos para que en un futuro el estudiante pueda conceptualizar estructuras más abstractas o más generales.

Referencias bibliográficas:

Artigue, M. (1990). *Épistémologie et Didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques 10(2-3), pp. 241-286.

Bachelard, G. (1974). *La Formación del Espíritu Científico*. (3ª Ed.). Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

Bashmakova, I. y Smirnova, G. (2000). *The Beginnings & Evolution of Algebra*. The Dolciani mathematical Expositions, 23. United States of America: The Mathematical Association of America.

Belcredi, L. y Zambra, M. (1998). *Gauss 1. Matemática para el primer año liceal*. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Belcredi, L. y Zambra, M. (1999). *Gauss 2. Matemática para el segundo año liceal*. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Belcredi, L. y Zambra, M. (2000). *Gauss 3. Matemática para el tercer año liceal*. Montevideo: La Flor del Itapebí.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. y Ravaioli, N. (1995). *Matemática 1*. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. y Ravaioli, N. (1996). *Matemática 2*. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. y Ravaioli, N. (1997). *Matemática 3*. Montevideo: Editorial Fin de Siglo.

Boyer, Carl. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos. Pp. 685-737.

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques.* Recherches en Didactique des Mathématiques , 4(2), pp. 165 –198.

Casalderrey, Francisco Martín. (2000). *Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Nivola libros y ediciones, S. L. Madrid.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de Educación, 22. Barcelona: Horsori Editorial.

Chica Bias, Ángel. (2001). *Descartes. Geometría y método*. Nivola libros y ediciones, S. L. Madrid. Pp. 127-130

Corry, L. (1996). Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures, Birkhäuser Verlag.

Da Cunha Fragoso, W. (2000). *Uma abordagem histórica da equaçao do 2º grau*. Revista do Professor de Matemática, 43, pp. 20-25.

Del Río Sánchez, J., Hernández Encinas, L. & Rodríguez Conde, M. (1992). *Análisis Comparado del Currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) y Mare Nostrum Ediciones Didácticas, Madrid.

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento*. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez P. (eds). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pp. 61 - 96. Una Empresa Docente. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). *On Difficulties with Diagrams: Theoretical Issues*. Proceedings of PME 14 Conference, Vol. 1, pp. 27-34. México.

English, L. y Halford, G. (1995). *Mathematics Education. Models and Processes*. Mahwah, New jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Euclides. *Elementos* (Libros I-VI). Madrid: Planeta De Agostini (1999).

Fernández, C. y González, M.(1995). *Matemática 2º c.b.u. Parte I*. Montevideo: Editorial Monteverde.

Fernández, C., López, M., & González, M. (1993). *Matemática 3º c.b.u*. Montevideo: Editorial Monteverde.

Fischbein, E. y Baltsan, M. (1999). *The Mathematical Concept of Set and the `Collection´ Model*. Educational Studies in Mathematics, 37, pp. 1-22.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). *The Evolution With Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions*. Journal for Research in Mathematics Education, 28, pp. 96-105.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Dortretch: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1999). *Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning*. Educational Studies in Mathematics, 38, pp. 11-50.

Fischbein, E. Tirosh, D., Stavy, R. & Oster, A.(1990). *The Autonomy of Mental Models*. For the Learning of Mathematics, 10, pp. 23-30.

Fromm, E. (1956). *The art of loving*. New York : Harper.

Gallardo, A. y Pizón, M. (2000). *Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales*. Educación Matemática, 12 (2), pp. 81-96.

Guelli, O. (1989). *A regra da falsa posiçao*. Revista do Professor de Matemática, 15, pp. 18-22.

Lins, R. (1994). *Campos Semánticos y el problema del significado del álgebra*. UNO Revista de Didáctica de matemática, 1, pp. 45-56.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). *The Equation, The Whole Equation and Nothing but The Equation! One approach to the Teaching of Linear Equations*. Educational Studies in Mathematics, 34, pp. 159-181.

PRO Ciencia Conicet. (1987 a). *Álgebra. Su Enseñanza. Estructura Modular 3*. Buenos Aires: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. (Documento Nacional Argentino).

PRO Ciencia Conicet. (1987 b). *Álgebra. Su Enseñanza. Estructura Modular 4*. Buenos Aires: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. (Documento Nacional Argentino).

Sierpinska, A (1992). *On understanding the notion of function*. En G. Harel & E. Dubinsky, The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA,vol. 25, 25-58.

Sierpinska, A. (1987). *Sur la relativité des Erreurs*. Proceedings of the 39th CIEAEM´s meeting, pp. 70-87. Varsovie: Sherbrooke.

Skemp, R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding.* Mathematics teaching 26(3), pp. 9-15.

Socas Robayna, M. & Palarea Medina, M. (1997). *Las fuentes del significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar*. UNO Revista de Didáctica de Matemáticas, 14, pp. 7-24.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12 (2), pp. 151-169.

Tapia, N., Tapia, A. y Tapia, C. (1986). *Matemática 2*. Buenos Aires: Editorial Estrada.

Tapia, N., Tapia, A. y Tapia, C. (1986). *Matemática 3*. Buenos Aires: Editorial Estrada.

Tapia, N., Tapia, A. y Tapia, C. (1986). *Matemática 4*. Buenos Aires: Editorial Estrada.

Tirosh, D., y Stavy, R. (1999). *Intuitive rules: A way to explain and predict students' reasoning*. Educational Studies in Mathematics, 38, pp. 51-66.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). *"First-year Undergraduates´ Difficulties in Working with Different Uses of Variable"*, en CBMS, Research in Collegiate Mathematics Education, Vol. 12, pp. 1-29.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in teaching and learning*. En Tall, D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer. Dordretch/Boston/London. Pp. 65-81.

Vinner, S. (1990). *Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 12 (3 & 4), pp. 85-98.

Zaslavsky, O. (1997). *Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Functions*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 19 (1), pp. 20-45.

Sitios web consultados:

http://www.uoregon.edu/~dkeller/

http://www-groups.acs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Harriot.html

http://www-groups.acs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Brahmagupta.html

http://www2.gratisweb.com/revsalamandra/columnahueca.html

http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pont.pdf

ANEXO I

SECUENCIAS

ANEXO I

SECUENCIAS

SECUENCIA I

1) *i) Resuelve la ecuación* ***(2x-6)(18-2x)=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

2) *i) Resuelve la ecuación* ***(x+6)(2x-8)=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

3) *i) Resuelve la ecuación* ***(3x-6)(x-7)=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

4) *i) Resuelve la ecuación* ***(x-5)(x+4)=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

5) *5) i) Resuelve la ecuación* ***(x-9)(x-6)=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

6) *i) Resuelve la ecuación* ***x(2x-10)=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

7) *i) Resuelve la ecuación* ***x(x-8)=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

8) *i) Resuelve la ecuación* $x^2=6.x$*. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

9) *i) Resuelve la ecuación* ***5.x=0****. Explica cómo lo haces.*
   ii) ¿Cuántas soluciones obtuviste? _____¿Cuáles son? _____
   iii) Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.

10) *Escribe una ecuación que tenga raíz 8.*

11) Escribe una ecuación que tenga por raíces a 4 y 3.

12) Tenemos una ecuación ***(2x-4)(.....)=0****, en la que no conocemos el segundo factor.*
¿Es 2 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?
¿Es 3 raíz de esta ecuación? ¿Por qué?

13) Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.

$$(\square - 6) \times (\square - 19) = 0$$

14) ¿Es 7 raíz de la ecuación ***(3x-21)(x-3)=0****? Explica tu respuesta.*

15) ¿Son 6 y 2 raíces de la ecuación: ***(2x-12)(5x-10)=0****? Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.*

16) ¿Son 5 y 4 raíces de la ecuación ***(2x-10)(3x-8)=0****?*

17) ¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación $\boldsymbol{x^2 - 7x + 12 = 0}$*?*
Explica tu respuesta. Realiza los planteos que sean necesarios.

18) i) Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y d?

SECUENCIA II

19) Para evaluar la necesidad de semáforos en un cruce de calles, entre las 3 de la tarde y las 9 de la noche de un día, se coloca un contador de autos. Los resultados del estudio vienen dados por la expresión:

$$A = (2x - 6)(18 - 2x)$$

Donde ***A*** *representa el número de autos que pasaron por el cruce en una hora* ***x*** *del día.*

d) ¿Cuántos autos pasaron a la hora 5? Plantea los cálculos necesarios.
e) Calcula cuántos autos pasaron a la hora 3 y a la hora 9. Plantea los cálculos necesarios.
f) *¿A qué hora no pasó ningún auto? ¿Por qué?*

20) ¿Encuentras alguna relación entre el problema 1) y el 19) parte c)? Compara la verificación que realizaste en el ejercicio 1) para las soluciones que obtuviste de la ecuación, con los cálculos que realizaste en el problema 17) parte b), ¿qué observas?

SECUENCIA III

(I) *Trabajaremos con los elementos del conjunto A. El conjunto A es el siguiente:*

A={0, 1, 2, 3, 4, 5}

Definiremos una operación en el conjunto A que llamaremos multiplicación y simbolizaremos con: **.**

Esta operación funciona de acuerdo a la siguiente tabla:

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Por ejemplo para calcular 2. 5 te fijas en la intersección de la fila con la columna como te muestra la figura y obtienes como resultado 4.

b) Usando la tabla de multiplicar que aparece arriba, calcula:

4. 2=

3. 3=

5. 4=

b) Usando la tabla, determina él o los valores de x que verifican la ecuación 3. x =0

Escribe en la línea él o los valores de x que encontraste.....

Explica cómo lo hiciste.

c) a y b son elementos del conjunto A que se indicó más arriba. Se sabe que a.b =0, ¿qué puedes decir sobre a y b a partir de esta información? Explica tu respuesta.

(II) *Se sabe que c.d=0. ¿Qué puedes deducir sobre c y d a partir de esta información? ¿Qué representan para ti c y d?*

SECUENCIA IV

1) *Resuelve en R la ecuación (2x-6)(5x+10)=0*
   Realiza la verificación para la o las soluciones que obtengas.

2) i) Se sabe que b× c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información? ¿Qué representan para ti c y d?

ii) En la parte (i), ¿qué representan para ti b y c? Explica.

3)f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

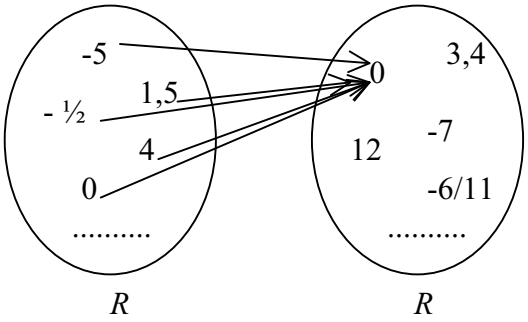
4) D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=0, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D y B a partir de esta información?

5) p y q representan dos polinomios. Se sabe que p.q=o, es decir que el producto de los dos polinomios es el polinomio nulo. ¿Qué puedes deducir sobre p y q a partir de esta información?

6) *i) Se sabe que b× c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información?*
   ii) En la parte (i), ¿qué representan para ti b y c? Explica.

SECUENCIA V

1) *Llamaremos función nula a aquella que a todo elemento del dominio le hace corresponder el cero.*
   Si consideramos R como el dominio de la función nula, podemos visualizar la idea anterior a través del siguiente diagrama de flechas:



Usando la información del diagrama de flechas completa la siguiente tabla de valores. En este caso a la función nula la llamaremos O.

x	*O(x)*
-5	*0*
- ½	
0	
1,5	*0*
4	
.....	.....

2) *a) p y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:*

$p(2)=6$ $\qquad$ $q(2)= -6$
$p(-3)=5$ $\qquad$ $q(-3)= 4$
$p(½)= -1$ $\qquad$ $q(½)= 7$

   Con esta información completa la siguiente tabla de valores.

x	*(p.q)(x)*
-3	
½	
2	

3) *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*

4) t y a son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

$t(2)=0$	$a(2)= -6$
$t(-3)=5$	$a(-3)= 0$
$t(½)= -1$	$a(½)= 7$
$t(4)=0$	$a(4)=5,7$
$t(-9,11)=0$	$a(-9,11)=0$

a) Usando la información anterior, completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto t.a:

x	(t.a)(x)
-9,11	
-3	
½	
2	
4	

b)¿Qué debe suceder para que un real "x" tenga imagen cero en la función producto?

5) j y p son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.

b) Completa la tabla de valores de j y p para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto j.p

x	j(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	p(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

6) En la pregunta anterior, ¿puedes completar las tablas de otra forma?
Si tu respuesta es negativa explica por qué.
Si tu respuesta es afirmativa, completa las tablas que siguen de forma diferente a como lo hiciste anteriormente.

x	*j(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	*p(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

7) m y q son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.
c) Completa la tabla de valores de m y q para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto m.q

x	*m(x)*
-3	
-2	
-1	*6*
0	
1	
2	*3/4*

x	*q(x)*
-3	*4*
-2	
-1	
0	*-5*
1	
2	

b) Completa la tabla correspondiente a la función producto m.q

x	*(m.q)(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) ¿Es la función m.q nula? ¿Por qué?

d) ¿Son m o q la función nula? ¿Por qué?

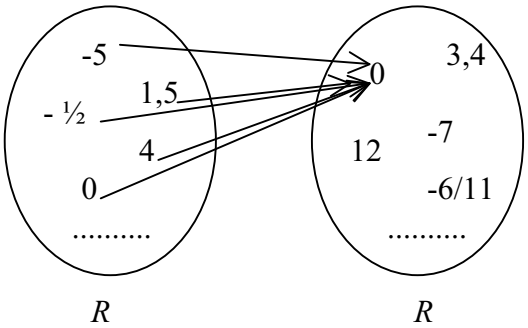
e) Enuncia qué condición debe cumplirse para que el producto de dos funciones sea la función nula.

8) f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

9) i) Se sabe que b.q=0, ¿qué puedes deducir sobre b y q a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y q?

SECUENCIA V
VERSIÓN CON GRÁFICAS

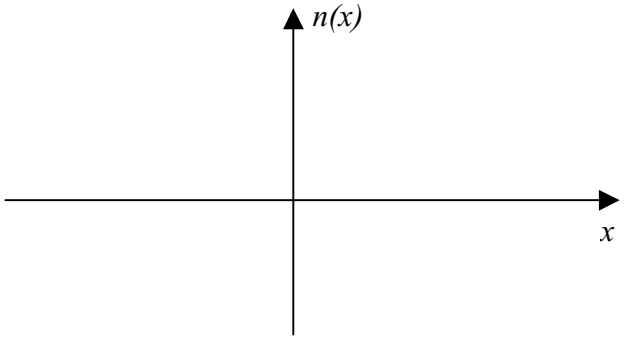
1) *Llamaremos función nula a aquella que a todo elemento del dominio le hace corresponder el cero.*
Si consideramos R como el dominio de la función, podemos visualizar la idea anterior a través del siguiente diagrama de flechas:



Representamos la información que da el diagrama de flechas en una tabla de valores. En este caso a la función nula la llamaremos O.

x	*O(x)*
-5	*0*
- ½	*0*
0	*0*
1,5	*0*
4	*0*
.....	.....

b) *Grafica la función nula ayudándote de la tabla de valores anterior.*



2) a) r y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

$r(2)=6$	$q(2)= -6$
$r(-3)=5$	$q(-3)= 4$
$r(½)= -1$	$q(½)= 7$

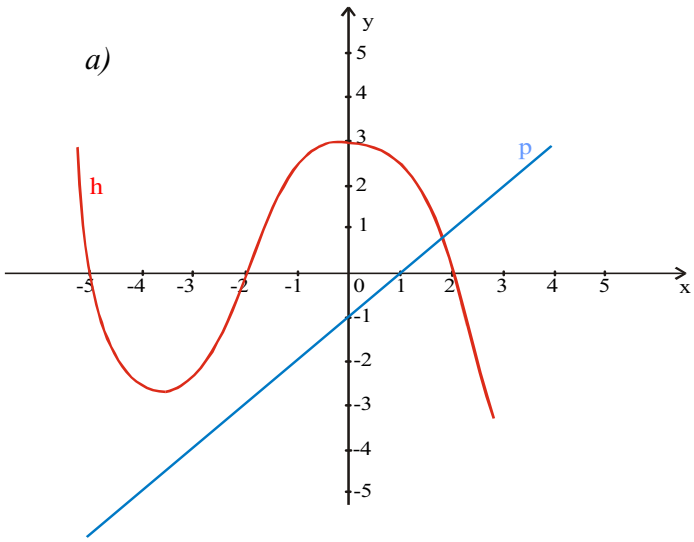
Usando la información anterior completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto r.q.

x	$(r.q)(x)$
-3	
½	
2	

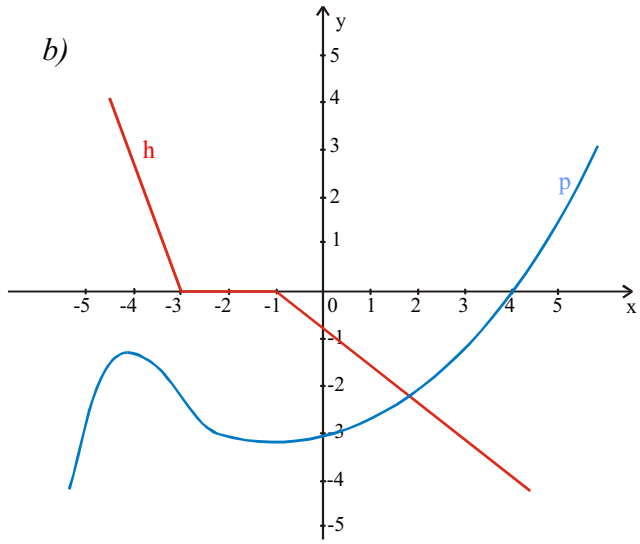
3) f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

4) h y p son dos funciones de dominio R. Indica, en cada caso, cuáles reales tienen imagen cero en la función producto h.p.

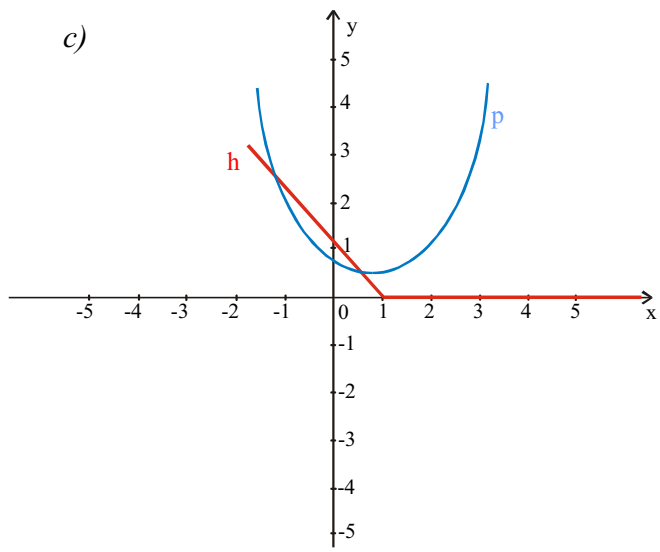
a)



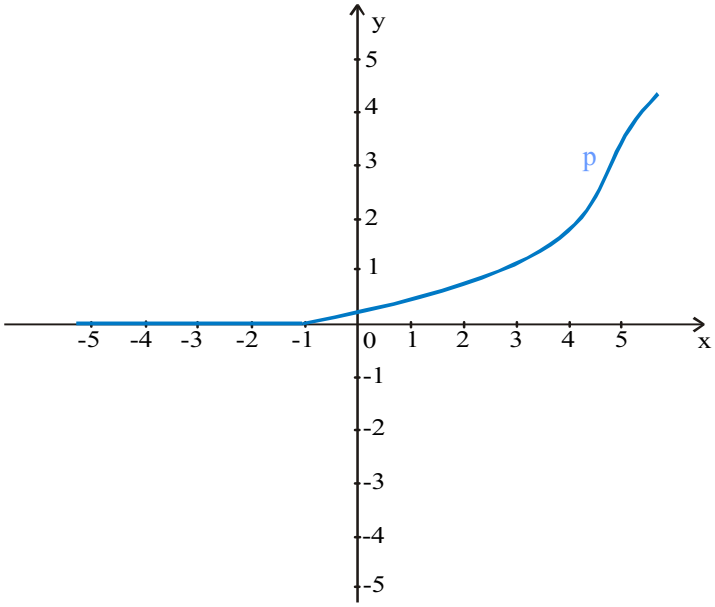
b)


y
x
h
p
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

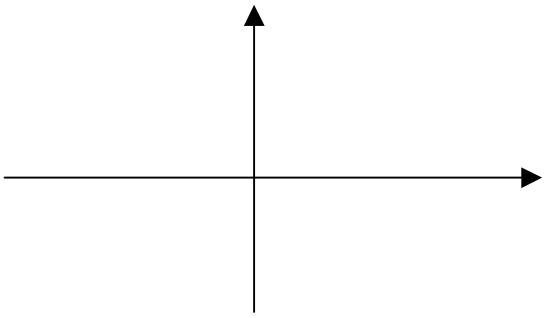
c)


y
x
h
p
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

5) A continuación aparece la gráfica de una función p. De ser posible, esboza la gráfica de una función h no nula, cuyo producto por p sea la función nula. Fundamenta tu respuesta.



6) Si es posible, esboza los gráficos de dos funciones no nulas cuyo producto sea la función nula. Explica tu respuesta.



7) f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=0, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?

8) i) Se sabe que b.j=0, ¿qué puedes deducir sobre b y j a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y j?

SECUENCIA V
NIVEL TERCIARIO
VERSIÓN CON TABLAS DE VALORES

1) *a) p y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:*

$p(2)=6$	$q(2)= -6$
$p(-3)=5$	$q(-3)= 4$
$p(½)= -1$	$q(½)= 7$

Con esta información completa la siguiente tabla de valores.

x	$(p.q)(x)$
-3	
½	
2	

2) *t y a son dos funciones de dominio R. Se sabe que:*

$t(2)=0$	$a(2)= -6$
$t(-3)=5$	$a(-3)= 0$
$t(½)= -1$	$a(½)= 7$
$t(4)=0$	$a(4)=5,7$
$t(-9,11)=0$	$a(-9,11)=0$

a) Usando la información anterior, completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto t.a:

x	$(t.a)(x)$
-9,11	
-3	
½	
2	
4	

b) ¿Qué debe suceder para que un real "x" tenga imagen cero en la función producto?

3) j y p son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.

d) Completa la tabla de valores de j y p para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto j.p

x	*j(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	*p(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

4) En la pregunta anterior, ¿puedes completar las tablas de otra forma?
Si tu respuesta es negativa explica por qué.
Si tu respuesta es afirmativa, completa las tablas que siguen de forma diferente a como lo hiciste anteriormente.

x	*j(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	*p(x)*
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

5) *m y q son dos funciones de dominio {-3, -2,-1, 0, 1, 2}.*
Completa la tabla de valores de m y q para que los reales que se indican en la columna correspondiente a valores de "x" tengan imagen 0 en la función producto m.q

x	m(x)
-3	
-2	
-1	6
0	
1	
2	3/4

x	q(x)
-3	4
-2	
-1	
0	-5
1	
2	

e) *Completa la tabla correspondiente a la función producto m.q*

x	(m.q)(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) ¿Es la función m.q nula? ¿Por qué?

d) ¿Son m o q la función nula? ¿Por qué?

e) Enuncia qué condición debe cumplirse para que el producto de dos funciones sea la función nula.

6) *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*

7) *i) Se sabe que b.q=0, ¿qué puedes deducir sobre b y q a partir de esta información?*
ii) ¿Qué representan para ti b y q?

SECUENCIA V
NIVEL TERCIARIO
VERSIÓN CON GRÁFICAS

1) a) r y q son dos funciones de dominio R. Se sabe que:

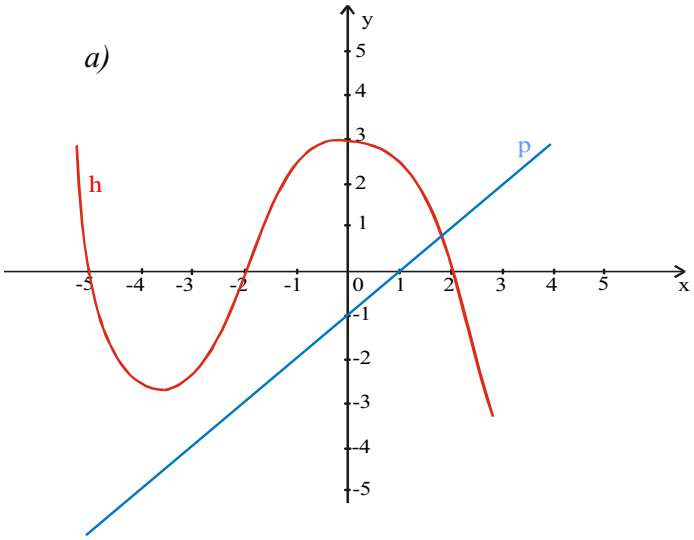
$r(2)=6$	$q(2)= -6$
$r(-3)=5$	$q(-3)= 4$
$r(½)= -1$	$q(½)= 7$

Usando la información anterior completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función producto r.q.

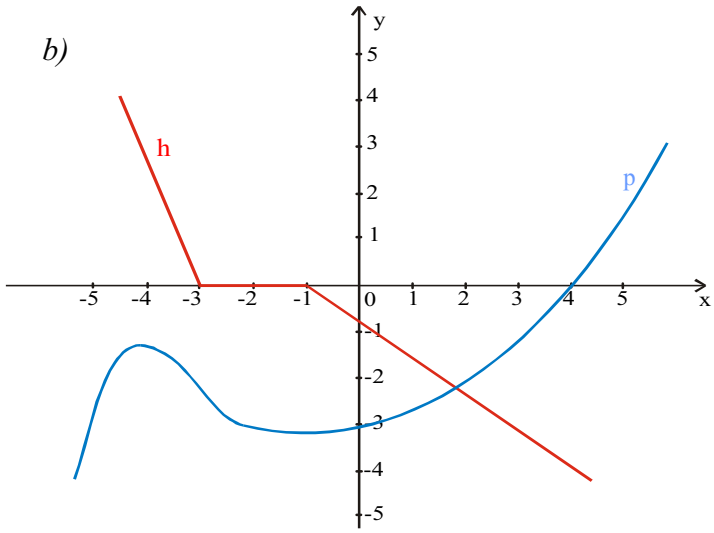
x	$(r.q)(x)$
-3	
$½$	
2	

2)h y p son dos funciones de dominio R. Indica, en cada uno de los siguientes casos, cuáles reales tienen imagen cero en la función producto h.p.

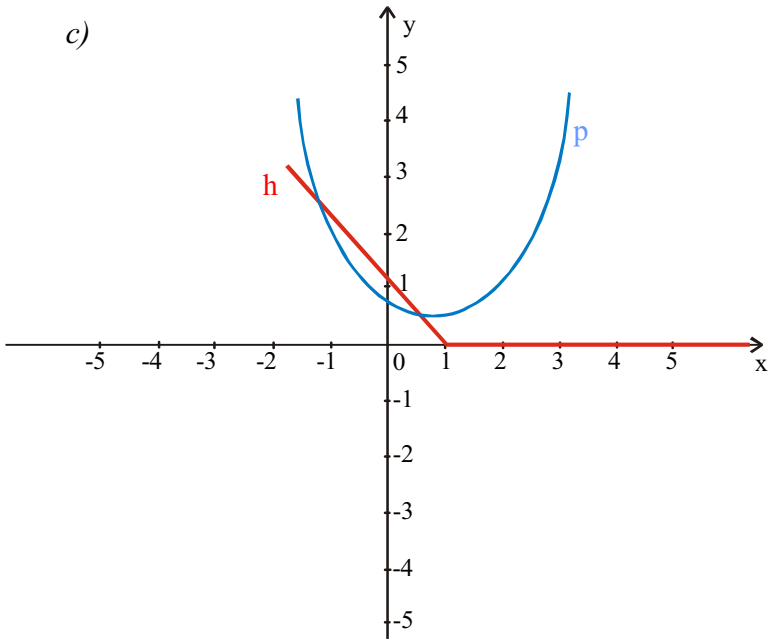
a)



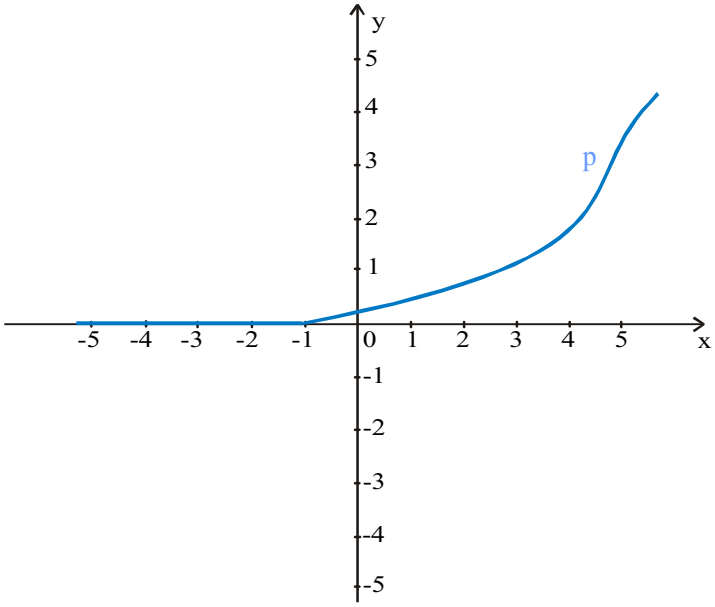
b)


y
5
4
3
2
1
h
p
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5

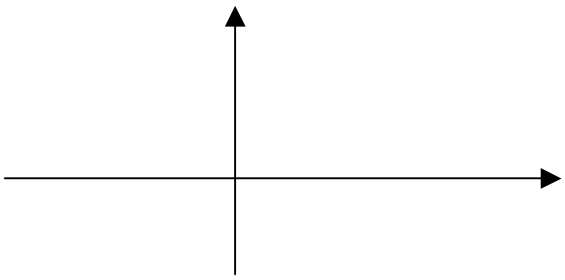
c)


y
5
4
3
2
1
h
p
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
-1
-2
-3
-4
-5

3) A continuación aparece la gráfica de cierta función p de dominio R. De ser posible, esboza la gráfica de una función h no nula, cuyo producto por p sea la función nula. Fundamenta tu respuesta.



6) Si es posible, esboza los gráficos de dos funciones no nulas, cuyo producto sea la función nula. Explica tu respuesta.



7) *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*

6) i) Se sabe que b.j=0, ¿qué puedes deducir sobre b y j a partir de esta información?
ii) ¿Qué representan para ti b y j?

ANEXO II

ENTREVISTAS

ANEXO II

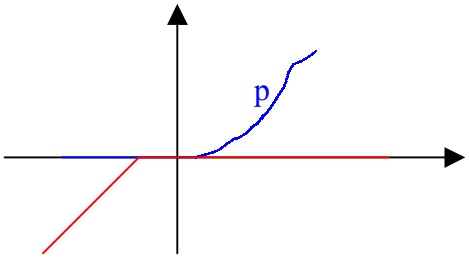
ENTREVISTAS

Andrés Costa	194
Bruno Munro	199
Carolina Marrero	202
Cecilia Petich	207
Clara García	217
Diego Olivera	220
Ignacio Farías	224
Juan Morelli	225
Mª Eugenia Costa	227
Mariela Santías	237
Martín Alvarenga	240
Sebastián Pereira	247
Virginia Brunett	248
Gustavo Fernández	251

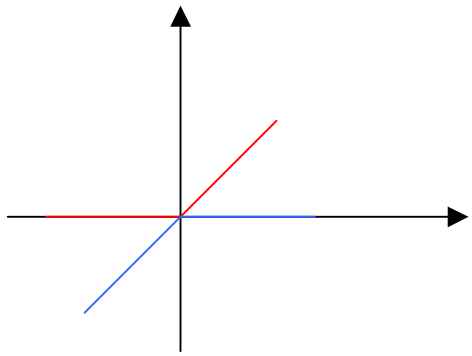
ENTREVISTA A ANDRÉS COSTA
6º AÑO, OPCIÓN MEDICINA. LICEO Nº 4.

Profesor: Bueno, aquí graficaste la función nula sin problema, completaste los correspondientes en la función producto, y aquí deduces que una u otra es la función nula.
Andrés: O las dos.
P: O las dos agregas. Bueno, aquí se te preguntaba qué valores de *x* tenían imagen cero en la función producto *h.p*. Tú contestaste que –3, -2, -1, y también 4, sí? Eso es cierto. Ahora, entre –3 y –1, ¿cuántos números reales tenemos?
A: ¿Reales? Infinitos.
P: Y los números reales que están entre –3 y –1, pongamos uno como ejemplo, a ver decí uno.
A: -2,9.
P: -2,9 por ejemplo, ¿-2,9 que imagen va a tener en *p.h*?
A: Cero, sí cero, ¿no?
P: ¿Por qué?
A: Porque algo por cero da cero.
P: Exactamente, sí? Entonces, los números reales que van a tener imagen cero en la función producto, ¿son solamente –3, -2, -1, y 4?
A: Y también todos los reales incluidos entre –3 y –1.
P: ¿Te acordás como se nombra ese conjunto? Todos los reales que están comprendidos entre –3 y –1?
A: No.
P: Con Yacir no estudiaste la notación de intervalos?
A: Sí, con paréntesis, eso sí.
P: ¿Cómo lo harías?
A: Paréntesis recto –3 coma –1 paréntesis recto.
P: Perfecto. Y aquí pasó más o menos algo parecido. Tu decís que 1, 2, 3, 4, 5, etc., tienen imagen cero en la función producto, que es cierto, ¿pero solamente son esos números naturales?
A: Pero acá también sigue hasta más infinito.
P: Entonces, ¿cómo escribirías el conjunto de los números reales que tienen imagen cero en la función producto?
A: Lo escribo así $[1, +\infty)$.
P: Bueno, vamos a ver qué pasó acá: *A continuación aparece la gráfica de cierta función p. De ser posible, esboza la gráfica de una función h no nula, cuyo producto por p sea la función nula. Fundamenta tu respuesta*. ¿Qué pasó allí?
A: No, me equivoqué. Tendría que haber hecho...
P: A ver, hacelo aquí. (Se le dibuja la función dada en la pregunta 5)
A: Tengo que dibujar otra que esté bien.
P: ¿Qué quiere decir que esté bien?
A: Que no se repitan los términos.
P: Que no tenga... no entiendo lo que querés decir.
A: Claro, no entiendo cuál es el error y al no entender cuál es el error, tampoco entiendo lo que hay que hacer.

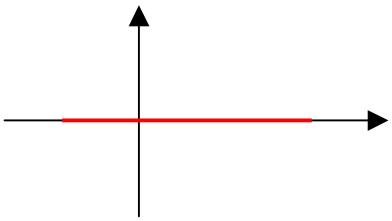
P: Bien, ajá. La función que tú aquí dibujaste es no nula como se pedía. La pregunta es si el producto de la que vos dibujaste por *p*, te da la función nula.
A: Sí, sí, pero...
P: A ver, vamos a tomar un número cualquiera, el 2. El 2, en la función *h* que vos dibujaste, ¿qué imagen tiene?
A: Uno, no sé.
P: Pongamos que fuera uno. Entonces en el producto *h.p*, ¿cómo va a ser la imagen de 2?
A: Positivo.
P: Y vos lo que querés es que la función producto *h.p* sea la función nula.
A: O sea que tiene que estar así la función para que al buscar me dé nulo, tiene que ser cero.
P: O sea, tiene que ser la función nula, dices tú? La gráfica cómo sería Andrés?
A: Sería así, agregaría esto, podría ser así. *(En rojo)*



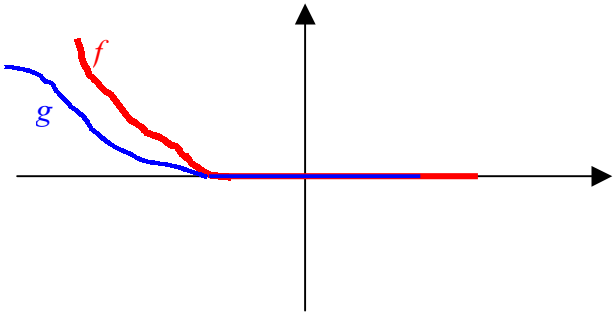
P: Ahí está, y en este pedacito, no tiene por qué coincidir con el eje Andrés?
A: No porque ya está cero. Es lo mismo que para esta.
P: Perfecto. Tú aquí contestaste que para que el producto de las dos funciones fuera la función nula, una u otra serían la función nula. Quiero saber en qué pensaste cuando contestaste esta pregunta. Por qué te pareció que una u otra eran la función nula.
A: Porque si una es nula y la multiplicás por otra no nula, te da nula.
P: ¿Y qué estás aplicando cuando decís eso?
A: Una multiplicación común y corriente.
P: O sea entre qué?
A: O sea entre dos gráficas, entre dos números, entre dos cosas comunes, es una multiplicación.
P: Entre qué objetos?
A: En este caso gráficas. Si te ponés a pensar que son números las gráficas, es entre números.
P: Y las gráficas son para ti lo mismo que los números?
A: No, pero en las gráficas están comprendidos los números. Los puntos que son números.
P: Mj. Aquí se te vuelve a preguntar Andrés, después de que tú hiciste este trabajo, que *f* y *g* son dos funciones de dominio R. Se sabe que *f* por *g* nos da la función nula, ¿qué puedes deducir sobre *f* y *g* a partir de esa información?
A: Sobre el gráfico, que *f* es nula o *g* es nula o las dos son nulas.
P: Cuando decís que f es nula, a ver si me podés explicar qué querés decir.
A: Como que f es algo así como cero.
P: Te animás a hacer acá la gráfica?
A: Ponele que *f* sea esto y *g* sea esto, algo así



Que en alguna parte, los puntos de *f* o de *g* estén sobre la línea del cero, sobre el eje del cero y la otra... o no, pueden estar repetidos y dar cero.
P: Claro, eso es lo que vimos acá. ¿Pero vos viste cuál es la función nula Andrés? ¿Qué es lo que hiciste acá al principio? ¿Cómo es la función nula?
A: Todo cero.
P: ¿Cómo es la gráfica?
A: Puede ser así:

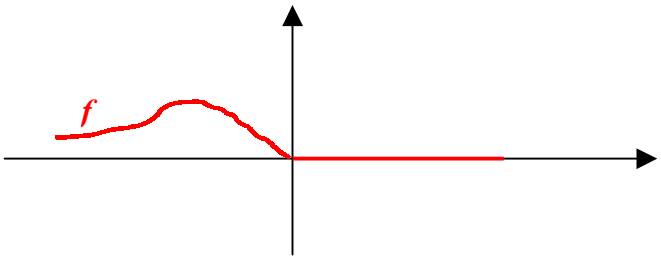


P: Prolongala un poquito... esta es la gráfica de la función nula. Cuando tú me respondés que *f* es nula, me estás diciendo que *f* o *g* son como está que tú dibujaste acá.
A: Claro, o sea que gran parte de los números de *f* estén en el cero como lo hice la otra vez.
P: Pero... ¿tú estás de acuerdo con la respuesta que diste a: *qué puedes deducir sobre f o g partir de esa información*?
A: No, porque esto podría ser así y no tiene por qué ser solo así (se refiere a la función nula).
P: Bien, entonces, ¿cómo darías la respuesta Andrés?
A: Algunos términos de *f* tienen imagen cero o algunos términos de *g* tienen imagen cero.
P: ¿Y en cualquier lado puede pasar eso?
A: ¿Cómo?
P: Por ejemplo, puedo dibujar así:



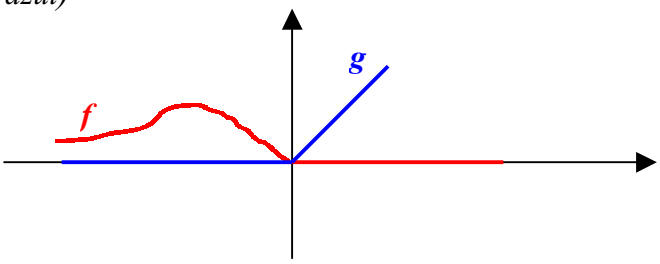
¿Estás de acuerdo en que *f* a veces vale cero?
A: Sí, ta, pero acá no es nula.

P: Pero acá no es nula. Entonces, ¿alcanza con que alguna de ellas a veces valga o tome valor cero?
A: No, o sea que tendría que decir que para los términos en que *g* no tenga valor cero, *f* debe tener valor cero.
P: Bueno, y vamos a ver ahora...
A: Ta, acá copié lo mismo que arriba.
P: *Se sabe que b.j =0, ¿qué puedes deducir sobre b y j a partir de esta información? ¿Qué representan para ti b y j?*
A: Para mi son dos gráficas.
P: ¿Y las gráficas se multiplican Andrés?
A: No, pero es un conjunto de números. Pero si me decís *b.j =0* y estamos dando todo gráficos, para mí son gráficos.
b.j como en el repartido anterior eran números, para mí son números. Según el entorno para mí son lo que es *b* y *j*, lo que representan.
P: Según el contexto en el que estás trabajando, bien, entonces si son funciones, ¿qué respuesta das a esta pregunta?
A: Que son dos funciones cualquiera y que para los términos de *b*, es lo mismo que la respuesta anterior.
P: ¿Y si *b* y *j* fueran números?
A: Serían dos números cualquiera, de los cuales uno tiene que ser cero.
P: Entonces Andrés, esa propiedad que tú conoces, que si dos números reales multiplicados dan cero, uno u otro tiene que ser cero, ¿se cumple cuando lo que multiplicamos son funciones?
A: Se cumple porque si *h.p* nos da cero en el caso de las funciones, una de las dos, la imagen de algo tiene que ser cero, para el entorno considerado.
P: O sea que lo que tiene que ser cero son las imágenes?
A: Las imágenes de *f(x)* cuando a partir de que el otro gráfico no tiene imágenes cero, el otro tiene que tener imágenes cero porque multiplicados...
P: ¿Entendiste bien lo que era la función nula?
A: Una sola? Todas las imágenes tienen que ser cero.
P: Y si yo te pregunto, ¿esta gráfica es de la función nula?



A: Esta parte sí.
P: Si yo te pregunto, *f*, ¿es la función nula? Esta gráfica, a partir del cero, vamos a decir, es el eje.
A: ¿*f* es la función nula a partir de la cual si yo multiplico por otra me tiene que dar cero?
P: No, yo te estoy preguntando si *f* es la función nula.
A: Para mí no.
P: ¿Por qué?
A: Porque acá no da cero.

P: Entonces *f* no es la función nula. Ahora, ¿hay algunos reales que en *f* tienen imagen cero?
A: Sí.
P: ¿Cuáles?
A: Desde el cero hasta más infinito.
P: Muy bien, a ver si dibujás una función *g* que no sea la función nula y que multiplicada por *f* dé la función nula...
A: ¿Por esta *f*?
P: Sí.
A: *(Realiza gráfica azul)*



P: *f.g* da la función nula, entonces de aquí, ¿se deduce que *f* es nula o *g* es nula?
A: No, se deduce que algunos términos, algunas imágenes de *f* son cero y que algunas imágenes de *g* son nulas, pero no que son nulas.
P: Bien, entonces, esa propiedad que conocemos de los números reales, verdad, que dice que si el producto de dos números reales nos da cero, uno es cero o el otro es cero, ¿se cumple cuando los objetos que multiplicamos son funciones?
A: No, para algunas imágenes sí, pero para todas las imágenes no.
P: Pero para las funciones, ¿se cumple?
A: No, no se cumple.

ENTREVISTA A BRUNO MUNRO
3º AÑO CICLO BÁSICO, LICEO JEAN PIAGET

Profesora: Vamos a ver el ejercicio 1 que vos resolviste. Decís "Para resolver la ecuación lo que debés hacer es acomodar los números de forma que en uno de los términos dé cero". ¿Por qué decís eso?
Bruno: Porque de esa forma la ecuación te queda más fácil de resolver.
P: ¿Y por qué lográs resolverla de esa forma?
B: ¿Cómo?
P: ¿Por qué decís que tenés que acomodar los números de foma que uno de los términos[52] dé cero?
B: Para resolver la ecuación. Pero... o sea no podés tener dos incógnitas en una operación, podés tenerlas pero necesitás resolverlo de otra manera.
P: ¿Cómo? No entiendo, ¿no podés tener dos incógnitas?
B: Claro si vos tenés dos incógnitas en una operación va a ser mucho más fácil que si tenés una sola, reducís el número.
P: Para vos esta ecuación[53], ¿cuántas incógnitas tiene?
B: Para mí dos.
P: Tiene dos... ¿Dónde las ves?
B: Donde dice $2x$ y $-2x$, pero en ese caso sé...
P: ¿Qué?
B: No sé.
P: Entonces vos decís que la ecuación se complica por tener dos incógnitas. Entonces, ¿qué es lo que hacés?
B: Reduzco a una sola. Igualo uno de los términos a cero y me quedo con uno solo y me queda una ecuación normal.
P: ¿A qué le llamás una ecuación normal?
B: De grado uno.
P: Y aquí, ¿qué es lo que está planteado? ¿Qué operación vincula esos dos paréntesis?
B: Una multiplicación.
P: Que da en este caso ¿cuánto?
B: Cero.
P: Y para que una multiplicación dé cero, ¿qué tiene que pasar?
B: Uno de los términos tiene que ser cero.
P: ¿Por qué tiene que pasar eso?
B: ¿Cómo es? ¿Cómo?
P: ¿Por qué para que un producto dé cero, uno de los factores debe ser cero?
B: Será por la propiedad de absorción.
P: Ajá. ¿Te acordás de eso? Vamos a la pregunta 8. Tú encontraste una solución y decís que son (0,0)...Ah! esa pregunta me quedó en el tintero ¿por qué escribís (0,0) o (3,3)?
B: Porque en Física me acostumbré en las gráficas, me confundo a veces pero sé que es 3.
P: ¿Y la otra?

---

[52] Se reconoce el uso incorrecto de la palabra término pero se prefirió respetar la terminología del alumno para no agregar conflictos a la comunicación.
[53] La ecuación es $(2x-6)(18-2x)=0$.

B: Cero.
P: Aquí[54] tú decís que encontraste una solución y decís que es cero, ¿cómo hiciste para encontrar esa solución cero?
B: Esa parte era fácil porque si vos te das cuenta que los dos tienen el mismo término o sea x y x, los dos x tienen el mismo valor en los dos casos, entonces tenés que buscar un número que multiplicado por sí mismo te dé el mismo número que multiplicado por 6 y el número que te daba eso era cero. Cero por cero cero y seis por cero cero.
P: ¿Y se te ocurre que podría haber otra solución?
B: No que yo sepa.
P: Bueno, supónte que te formulan nuevamente la pregunta que apareció en varios casos: Te dicen que $a.b=0$, ¿qué puedes deducir a partir de esa información?
B: Que uno de los dos términos, o sea que a o b tienen que ser cero.
P: Y para ti, ¿qué están representando a o b?
B: Números.
P: Vamos a la pregunta 11. Se te pedía que escribieras una ecuación que tuviera raíces 4 y 3, y tú escribiste $(x-4)(y-3)=0$. Dijiste que "busco los números opuestos a 4 y 3".
B: Opuestos... no está bien el término. Tampoco se puede decir polaridad porque es física pero...
P: Decilo con tus palabras.
B: Claro, si es positivo ponés el mismo número pero negativo o lo inverso.
P: ¿Y por qué usás dos incógnitas diferentes[55]?
B: Eh... porque para mí podía ser cualquiea de los dos números en esas ecuaciones, no? O sea, vos podés poner o x que fuera ... si x, 4, o x el 3, te queda cero por cero o también podía ser x, x y puede ser –4 en una y ... la ecuación va a tomar +4, yo lo hice así porque queda más corto.
P: ¿Y podrías dar solución a este problema trabajando con una sola incógnita?
B: Sí, si tuviera dos x, una acá y otra ah...
P: A ver, ¿cómo podrías formar una ecuación que tuviera raíces 4 y 3 pero que tuviera una sola incógnita?
B: Ah, ahí no, ojo que puede tener dos soluciones.
P: A ver.
B: $(x-4)(x-3)=0$
Hay dos soluciones.

$(4-4)(4-3)=0$
$0 . 1 = 0$

Sustituís x *por el 4, cuatro menos cuatro da cero y acá ponés el 4, cuatro menos*

$(x-4)(x-3)=0$
$(3-4)(3-3)=0$
$-1 . 0 = 0$

Y acá , tres menos cuatro da menos uno, tres menos tres da cero.

[54] Se refiere a la ecuación $x^2=6x$.
[55] Se agrega la palabra *diferentes* ya que el alumno manifestó al principio de la entrevista que en ecuaciones como $(x-4)(x-3)=0$, está trabajando con dos incógnitas.

P: ¿O sea que formulaste una ecuación que tiene qué raíces?
B: 3 y 4.
P: ¿Y cuántas incógnitas tiene esa ecuación?
B: Una.
P: Vamos a la pregunta 13. *Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos?. Explica tu razonamiento*. Tú dijiste aquí que hay tres diferentes resoluciones y las indicaste. ¿Te parece que hay más soluciones que éstas?
B: Sí, podés poner con potencia.
P: ¿Qué quiere decir con potencia?
B: No, ahí no, ah claro... no está mal.
P: O sea que tu pusiste 6 y 6 en los dos, 6 y 19, y 19 y 19, y ahí están para ti...
B: No, evidentemente si vos agarrás el 19 y le hacés la raíz cuadrada vas a encontrar un número que multiplicado por sí mismo me va a dar 19.
P: Ajá.
B: O sea que también podría ser una opción porque cuando lo ponés ahí te va a dar, lo tenés que poner elevado.
P: Pero ahí no dice elevado al cuadrado.
B: Claro sí.
P: O sea que para ti cubriste todas las soluciones...

ENTREVISTA A CAROLINA MARRERO.
3º AÑO DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA. INSTITUTO DE PROFESORES ARTIGAS.

Profesor: Te dicen: *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f por g es la función nula. ¿Qué puedes deducir a partir de esta información?* Tú contestaste que *f* o *g* o las dos son la función nula. Quiero saber en qué pensabas para hacer esa deducción.
Carolina: En la propiedad Hankeliana.
P: O sea que estabas pensando en la Hankeliana...
C: De Reales, que uno de los dos términos tiene que ser cero.
P: Bien, Acá te acordás que se pedía: *h* y *p* son dos funciones de dominio *R*. Indica en cada caso qué reales tienen imagen cero en la función producto *h.p*.
C: La celeste era una y la roja era otra.
P: Así es. Se te preguntaba qué reales tienen imagen cero en la función producto.
C: ¿Esto es lo que yo contesté?
P: Está bien, pero ¿es el único real que tiene imagen cero en la función producto?
C: No, todos estos.
P: O sea ¿qué contestarías?
C: El intervalo de 1 a más infinito.
P: Te quería preguntar... *Resuelve en R esta ecuación. Verifica la o las soluciones que obtengas*. Mencionaste que aplicabas la propiedad Hankeliana y hallaste las raíces 3 y –2. ¿Cómo hacés la verificación?
C: No, no lo hago así. Hallé las raíces y no sé por qué (risas) puse en cada uno de donde salió cada una de las raíces, sustituí el valor, pero no verifico así[56]. Verifico una toda con el valor 3 y toda la otra con el valor –2. Yo llegué porque me daba cero por cero igual a cero.
P: Pero aquí cuando lo hiciste en qué pensaste.
C: No sé en qué pensé pero nunca hago eso. No sé si capaz que lo hacia cuando iba al liceo pero hace años... Además cuando yo hago problemas, así de cuentas, lo hago muy prolijo, paso por paso y después verifico y nunca me mando eso.
P: ¿Y cómo hacés la verificación?
C: Pruebo con un valor y después pruebo con el otro, independientemente uno del otro.
P: ¿Y por qué me decís que probarías primero con uno y después con el otro?
C: Y porque es como se hace. Porque aquí yo estoy llegando a que cero por cero es igual a cero que es cierto pero no me aporta ninguna información. Yo tengo que al sustituir por uno de los valores, un término, un factor, sa va a hacer cero y el otro no tiene por qué, pero ahí la igualdad va a ser igual a cero. Y lo mismo cuando verifique por el segundo valor. Por qué hice eso no sé, no sé.
P: Si te pregunto: ¿2 es raíz de $(x-2)(x^2-4)=0$? ¿Cómo harías para ver si 2 es raíz de la ecuación?
C: Acá lo pondría en cada uno.
$(2-2)(2^2-4)=0$

[56] Entre la realización de la secuencia y la entrevista, esta estudiante le contó a su profesora de Didáctica de Matemática el trabajo que había realizado en la secuencia y su profesora le advirtió que había cometido un error al verificar la ecuación. Esto hace que la alumna niegue lo que hizo, explicitando que ella *no lo hace así.*

$0 . 0 = 0$
Llego a la misma igualdad. Sigo usando lo mismo...
P: ¿Está bien?
C: Sí está bien porque si me diera por hacer las cuentas, hacer la distributiva y llegar a una función polinómica, toda completa, para saber si es raíz, verificaría el 2 en cada una de las x y haría todas las cuentas que es lo que estoy haciendo acá en definitiva.
P: Ajá.
C: Tenés razón es lo mismo del primer ejercicio.
P: Y si te preguntan: ¿4 y 7 son raíces de la ecuación $(2x-8)(x+7)=0$?
C: Lo haríamos por separado.
$(2.4-8)(4+7)=0$
$0 . 11 = 0$
Te diría que 4 sí es raíz y después haría lo mismo con el 7.
$(2.7-8)(7+7)=0$
$+5 . 14 \neq 0$
Te diría que 7 no es raíz.
P: ¿Y qué pasaría si tu sustituyeras aquí 4 y aquí 7?
C: Al sustituir aquí por 4, este factor ya es 0, entonces aquí x valga lo que valga, el producto ya va a ser cero y se va a verificar la ecuación.
P: ¿Y qué quiere decir eso?
C: No, pero aquí puede ser 7 o puede ser cualquier otro número, porque este factor no me está, o sea, el que está dando importancia es éste, no sé cómo decirlo, el que está determinando que la igualdad sea cero, porque éste se está haciendo cero cuando x vale 4, éste no importa la x que sea.
P: ¿Entonces eso qué quiere decir? ¿Qué aquí podés poner cualquier valor para que sea raíz de la ecuación?
C: Si este es 4 sí.
P: ¿Y entonces qué raíces tendría esta ecuación?
C: ¿Cómo qué raíces?
P: Si yo te dijera, ¿cuáles son las raíces de la ecuación?
C: Yo te diría 4 y –7.
P: ¿Que las hallás cómo?
C: Igualando este término, este factor a cero y este factor a cero.
P: *Tenemos la ecuación (2x-4)(.....)=0. ¿Es 2 raíz de la ecuación? ¿Por qué? ¿Es 3 raíz de la ecuación? ¿Por qué?*
C: 2 va a ser raíz del primer factor, entonces sí va a ser raíz de la ecuación, sea lo que sea acá, el 2 va a anular toda la ecuación y el 3 ... ehh... el 3 no es raíz del primer factor pero depende de lo que yo ponga acá puede ser o no.
P: *Resuelve la ecuación x(x-8)=0. Explica cómo lo haces. ¿Cuántas soluciones obtuviste? ¿Cuáles son? Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas?*
C: Como es un producto haría $x=0$, siempre aplicando Hankeliana. $x=0$ va a verificar la igualdad y $x=8$ también va a verificar la igualdad.
P: O sea que...
C: Las raíces son $x=0$ y $x=8$. Obtuve dos soluciones. Para verificar haría primero para $x=0$.
i) $x=0 \quad 0(-8)=0 \quad s/c$ Se cumple y después para $x=8$.
ii) $x=+8 \quad +8(8-8)=0 \quad s/c$
P: Lo que no me queda claro es por qué hay que hacer dos verificaciones.

C: O sea porque si yo pongo donde obtuve el valor 0, esa x la igualo por 0 y el factor que me dio de raíz $x=8$ lo sustituyo por 8, siempre va a ser, va a ser cero por cero o sea también se verifica. Pero si yo me estuviera equivocando en uno de los valores, no encontraría el error. Por ejemplo, si yo dijera aquí es 0 y aquí –8, estaría llegando a una igualdad 0 por –8 que es igual a 0 pero –8 no sería raíz.
P: Bien. *Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento.*

$$(\square - 6)\times(\square - 19)=0$$

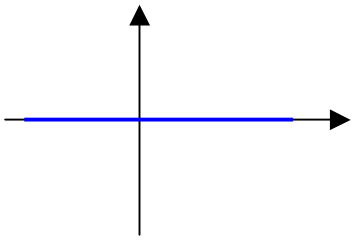
C: ¿Y son valores únicos éstos?
P: No sé.
C: Siempre pensando en la Hankeliana, uno de los dos factores tiene que ser cero. Entonces para que el primer factor fuera cero pondría 6 menos 6 por, y acá no importa cualquier valor –19, va a ser cero porque este primer factor es cero. Y lo mismo para este lado, pondría cualquier cosa por 19 menos19 igual 0.

$$\underbrace{(6-6)}_{=0}\times(\square - 19)=0$$

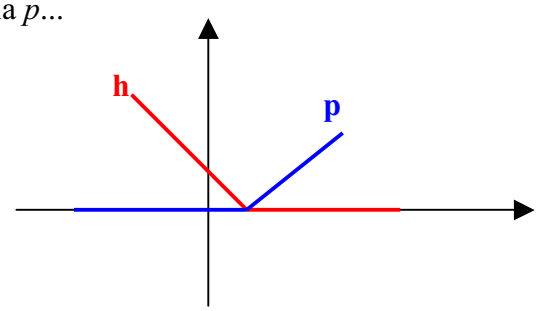
$$(\square - 6)\times(19-19)=0$$

P: *D y B son dos matrices. Se sabe que D.B=O, es decir que el producto de ambas matrices es la matriz nula. ¿Qué puedes deducir sobre las matrices D yB a partir de esta información?*
C: Que una de las dos es nula? A ver...Sí que una de las dos matrices es la matriz nula.
P: *p y q son dos polinomios. Se sabe que p.q=o, es decir que el producto de los dos polinomios es el polinomio nulo. ¿Qué puedes deducir sobre p y q a partir de esta información?*
C: También, que uno de los dos polinomios es el polinomio nulo.
P: *Se sabe que b.c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información*?
C: Yo diría que uno de los dos es cero pero no sé quienes son b y c.
P: Por eso te pregunta en (ii) qué representan para ti b y c.
C: Si b y c son números reales, tengo que decir que b o c, alguno de los dos es cero. Si fueran funciones también, si fueran matrices también diría que una de las dos es nula. O sea, b y c sería alguna expresión algebraica? No sé.
P: ¿Qué pueden representar para ti b y c?
C: Primero para mí son números.
P: Y pensando un poco más...
C: Podrían ser dos funciones, dos polinomios...cualquier cosa.
P: Y si el producto de dos funciones es la función nula, ¿también deducimos que f es nula o g es nula?
C: No, por las láminas que yo había contestado no.
C: Acá qué me preguntabas?
P: Cuáles reales tenían imagen cero en la función producto $h.p$.
C: Ta, acá ninguna de las dos es la función nula y acá valían cero.
P: ¿Pero $h.p$ es la función nula?
C: No.

P: Por ejemplo, ¿-1 tiene imagen cero en *h.p*?
C: No.
P: ¿Qué imagen tiene –1 en la azul?
C: Negativo, no, positivo.
P: ¿Y en *h*?
C: También.
P: El producto, ¿cómo va a ser?
C: Positivo.
P: O sea que la función producto *h.p* no es la función nula. Entonces la pregunta es si para que el producto de *h* por *p* sea la función nula, *h* o *p* tienen que ser la función nula.
C: Entonces aquí ninguna de las dos es nula pero acá tienen...
P: Hay reales que en la función producto va a tener imagen cero, pero para que h.p sea la función nula, ¿qué tiene que pasar? Todos los reales, ¿qué imagen tienen que tener?
C: El cero.
P: Y allí, ¿todos los reales tienen imagen cero?
C: No algunos, de 1 a más infinito no.
P: Ahí está.
C: Entonces para que el producto de dos funciones sea nulo, una de las dos funciones tiene que ser condicionalmente la nula.
P: ¿Te acordás como es la gráfica de la función nula?
C:



P: No habrá otra forma de que sin ser una de las dos la función nula, el producto de ambas funciones dé nulo?
C: No me acuerdo.
P: con lo que vos me dijiste acá, acá hay algunos reales que tienen imagen cero. Pero ni *h* ni *p* son la función nula. ¿Tú no podrías representar dos funciones de manera que ninguna de las dos fuera nula y el producto fuera la función nula?
C: Ah, por ejemplo, la *h* la dejaría así.
P: Hacé un dibujito.
C: La *h* como está arriba y la *p*...



P: ¿Y qué pasa? ¿La *h.p* que te da?

C: La función nula.
P: ¿Y *h* o *p* son la función nula?
C: No, ninguna de las dos.
P: ¿Sí? Ok.

ENTREVISTA A CECILIA PETICH
6º AÑO, OPCIÓN MEDICINA. LICEO Nº4.

P: Aquí se te pedía: *Resolver la ecuación (2x-6)(18-2x)=0. Explica cómo lo haces*. Tú dices que igualando las ecuaciones a cero. La pregunta es por qué igualas como tú dices ambas ecuaciones a cero.
C: Como que son ecuaciones de primer grado.
P: Ajá... y entonces?
C: Te van a servir independientemente una de la otra, yo lo que no sé es si cambia cuando ambas se multiplican o cuando hay un signo entre medio de ellas positivo o negativo.
P: O sea que si en lugar de estar el paréntesis hubiera otro signo?
C: Claro.
P Ahí que harías?
C: O sea si no estuvieran los paréntesis?
P: Sí.
C: Tomaría por un lado las *x* y de todas maneras me va a quedar una ecuación de primer grado también. Claro.
P: Y en este caso la ecuación que está planteada, toda la ecuación ...
C: Podría hacer también la distributiva.
P: La ecuación que está planteada, ¿de qué grado dirías que es?
C: ¿Toda la ecuación?
P: O sea la ecuación esta, de qué grado dirías que es?
C: De primer grado.
P: ¿Y estos paréntesis que te indican?
C: Una multiplicación...
P: A ver, esto que está escrito, ¿cómo lo leerías?
C: Y... *2x* por *18*, *2x* por *–2x*...
P: Pero eso sería si estuvieras haciendo distributiva.
C: Distributiva
P: Pero si yo solo te pregunto, ¿cómo leerías la ecuación que está escrita?
C: *2x-6* por *18-2x* igual a cero.
P: Bien, entonces yo quiero saber por qué igualás cada uno de estos paréntesis a cero o sea, matemáticamente ¿qué es lo que estás aplicando?
C: Una de ellas va a valer cero para que al multiplicarlas valga cero la expresión.
P: O sea que una de las dos va a valer cero para que al multiplicarlas dé cero.
P: ¿Y cómo hacés la verificación? Para ti, ¿qué es la verificación?
C: Es sustituir el valor que obtuve *x* y...
P: ¿Y dónde los sustituyes?
C: En las *x* y el resultado que me dé va a ser cero, te tiene que dar.
P: ¿Y te tiene que dar cero en ambos factores?
C: En uno de ellos sí, en cualquiera de los dos.
P: Aquí te preguntaban: *¿Son 3 y 4 raíces de la ecuación* x^2*-7x+12=0? Explica tu respuesta y realiza los planteos que sean necesarios*. ¿Qué hiciste tú?
C: La fórmula de segundo grado *–b*...
P: ¿Y hallaste?

C: Las raíces.
P: ¿Y hay otra forma de averiguar si 3 y 4 son raíces de la ecuación sin resolverla?
C: Yo no me daría cuenta, no sé... o sea sin resolverla no.
P: A ver, si yo te pregunto, ¿por qué 4 es raíz?
C: Porque al sustituir x por el valor 4, toma valor cero la ecuación.
P: ¿Y por qué 3 es raíz?
C: Igual, lo mismo.
P: ¿Y eso te puede servir para saber si 3 y 4 son raíces sin tener que resolver la ecuación?
C: Claro, sustituyo el valor de x por 3.
P: A ver cómo lo haces.
C: $(3)^2-7(3)+12=0$
$9-21+12=0$
$21-21=0$
P: ¿Qué contestás?
C: Qué sí.
P: ¿Y con 4 cómo lo harías?
C: $(4)^2-4(3)+12=0$
$16-12+12=0$
$16-0=0$
No es raíz.
P: ¿Y aquí qué pasó?
C: Sí, en este caso sí.
P: ¿Y en este caso qué habías contestado?
C: Qué 3 y 4 eran raíces.
P: Ajá.
C: Pero en el caso de 4 no.
P: ¿Cómo hiciste esta verificación?
C: ¿Esta verificación?
P: Sí, ¿cómo la hiciste?
C: Me parece que planteé mal. Claro así.
$(4)^2-7(4)+12=0$
$16-28+12=0$
$16-16=0$
P: ¿Y ahora?
C: Ahora sí, estaba mal planteado.
P: Entonces resumiendo, ¿cuáles serían para ti los procedimientos para saber si 3 y 4 son raíces de la ecuación? Qué podés hacer, cuáles son los caminos.
C: Una forma sería sustituir x por esos valores y otra forma sería lo que hice acá.
P: Vamos a la pregunta 13. *Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos?. Explica tu razonamiento*. Tu pusiste que cada término da como resultado cero y pusiste que debajo de los papelitos están los números 6 y 19. ¿Por qué se te ocurrieron esos números?
C: Por que cualquiera de los tres términos puede tomar valor cero.
P: ¿Y cuáles son los tres términos?
C: $x-6$, x, ...
P: Esta × indica una multiplicación.
C: Este sería un término y este otro.
P: O sea que tendríamos...

C: Dos términos. Cualquiera de los dos va a valer cero.
P: Ajá.
C: Éste para que valga cero es 6 y en este caso 19, 19-19. O sea multiplicando esta *x* por cualquiera de los dos términos que sea cero, va a dar cero.
P: ¿Y tu pensás que podría haber otras soluciones para este ejercicio?
C: Capaz que no tenían que ser 6 o 19 necesariamente. Conque uno de ellos sea cero, un término, sea cero...
P: ¿Podrías dar un ejemplo?
C: Vamos a poner 9, que este término me diera 3... este es 19... va a valer... *x* por 0, va a dar 0...por 3...
P: O sea que aquí estuviera el 9 y aquí el 19.
C: Claro, que uno de los dos valga cero, o sea que le tenga que restar el mismo número.
P: Entonces para ti hay más de una posibilidad para dar la solución?
C: Sí, uno cero y el otro cualquier valor.
P: Ajá. Vamos a la pregunta 9. Dice: *Resuelve la ecuación 5x=0. Explica cómo lo haces. ¿Cuántas soluciones obtuviste? ¿Cuáles son? Realiza la verificación para la o las soluciones obtenidas.* ¿Cómo resolviste esta ecuación?
C: Igualé a cero.
P: Pero ya estaba igualada a cero.
C: Sí o sea el 5 lo pasé con signo negativo.
P: ¿Y cómo verificarías si este resultado es correcto?
C: En realidad no verifica
P: ¿Por qué?
C: El 5 está multiplicando a la *x*. Al estar multiplicando el 5 pasaría dividiendo y quedaría 1/5.
P: A ver hacelo.
C: $5x=0$

$$x=\frac{1}{5}$$

P: ¿Y cómo verificarías si este valor que hallaste 1/5 es correcto?
C: Multiplicaría por 5.
P: A ver
C: $5(\frac{1}{5}) = ...$ No me da
P: ¿Cómo se hace $5 \text{ por } \frac{1}{5}$?
C: Da 5, no, no me acuerdo cómo se multiplican las fracciones....1.
P: ¿Y cuánto te tenía que dar?
C: Cero
P: ¿Entonces?
C: Este no es el resultado
P: ¿Podés resolver la ecuación?
C: O sea no llego a verificarla.
P: ¿Qué quiere decir eso?
C: Que no existe.
P: ¿Que no existe qué cosa?

C: No existe la verificación, la igualación o sea $5x=0$ no es posible.

P: ¿No es posible lograrlo para ningún valor de x o es que la raíz es $\frac{1}{5}$ pero lo que no se puede hacer es la verificación?

C: ...

P: O sea para ti la raíz es –5 o $\frac{1}{5}$?

C: La raíz es $\frac{1}{5}$

P: La raíz es $\frac{1}{5}$... pero cuál es el problema... que cuando te enfrentás a la verificación...

C: No logro el resultado cero.

P: ¿Y entonces?

C: Que no es raíz.

P: No es raíz y entonces, ¿se podrá hallar la raíz de esa ecuación?

C: No...

P: ¿Tu puedes leer lo que aquí está escrito? ¿Cómo leerías esta ecuación?

C: $5x=0$

P: Y entre 5 y x, ¿qué operación está indicada?

C: Una multiplicación.

P: Ajá.

C: x tendría que ser cero.

P: ¿Por qué?

C: Porque al multiplicarlo por 5 es la única forma que dé cero la multiplicación.

P: Entonces, ¿cuál te parece que es la raíz de la ecuación?

C: Cero

P: ¿Podrías verificarlo?

C: Sí, claro.

P: Entonces la raíz es...

C: Cero.

P: ¿Y $\frac{1}{5}$ y –5?

C: No son raíces.

P: O sea que te quedás con la raíz... ¿Con cuál te quedás?

C: Cero.

P: Cero...Y esa verifica?

C: Sí

P: Hacelo.

C: $5(0)=0$.

P: Aquí en la pregunta 1 tú me dijiste que resolvías las dos ecuaciones, hallabas las dos raíces y para verificar... ¿cómo es que hacías?

C: Sustituía x por los valores que había obtenido.

P: ¿Y dónde los sustituías concretamente?

C: ¿En dónde sustituyo?

P: Ajá.

C: En una de ellas, donde está *x* sustituyo el valor de *x*...
P: Y luego que hiciste acá? En una de ellas me dijiste que sustituiste 3 y luego...
C: Los resto y da cero y en el otro, o sea es lo mismo sustituyo el valor de *x* y resto los dos.
P: Ajá. Vamos a la pregunta 6. *Resuelve la ecuación x(2x-10)=0. Explica cómo lo haces*. Tu pusiste igualando ambos términos a cero. ¿Cuántas soluciones obtuviste? Dos, 0 y 5. A ver si repetimos por qué es que tú igualas cada uno de los términos, como tu dices[57], a cero. ¿Cuál es el razonamiento que aplicas cuando dices que *x=0* o *2x-10=0*?
C: Primero porque hay una multiplicación y el resultado es cero entonces, ta...cualquiera de ellos tiene que tomar valor cero para que al multiplicarlo por el otro dé cero. Entonces en este igualo *x* igual a cero y en el otro *2x-10* igual cero y después para la verificación como x me dio 5, sustituyo en *2x-10* y me va a dar cero.
P: ¿Y acá cómo hiciste la verificación? ¿La hiciste así como me estás diciendo?
C: Sustituyo *x* lo multiplico por 2...
P: Sí, pero aquí, a ver, sustituiste *x* por...?
C: 5
P: ¿Y aquí qué pasó?
C: y en este caso también sustituí a *x* por cero.
P: ¿Y entonces?
C: Este término *2x-10* da cero y al multiplicarlo por el otro, cero, verifica.
P: Supón que te pido: Verifica si 3 es raíz de *(2x-6)(18-2x)=0*.
C: $(2(3)-6)(18-2(3))=0$
$(6-6)(18-6)=0$
$0.12=0$
P: ¿Da?
C: Sí.
P: ¿Por qué?
C: En el primer término al sustituirlo por tres da valor cero. O sea que de esta forma podría decir que es raíz.
P: Sí.
C: Y en el segundo da un resultado doce.
P: Sí, entonces?
C: Que multiplicado por cero da cero.
P: ¿Entonces qué concluyes? ¿ Qué contestas?
C: Que es raíz.
P: ¿Estás segura? ¿O tenés dudas?
C: mmm... en el primer término diría que sí, o sea si fuese solo así 2x-6=0.
P: Ajá, pero te quedan dudas de que sea raíz, digamos, de toda la ecuación.
C: Claro, porque al multiplicarlo por el segundo término, si lo tengo que sustituir en 18-2x me da valor 12 y no, cero... y en ese caso no es raíz... pero después al hacer la multiplicación del 0 por 12 es cero.
P: ¿Y finalmente por qué optas?
C: Es raíz.

[57] El uso que hace la entrevistada de la palabra término es incorrecto ya que se trata de factores, sin embargo se respeta el uso que ella hace de dicha expresión. No se creyó conveniente en ese momento corregir el vocabulario matemático pues podía provocarse un problema de comunicación en el caso de que la estudiante no entendiera a qué aludíamos con la palabra factor.

P: Es raíz, OK, bien. Y si a ti te piden ahora: Verifica si 9 es raíz de la ecuación. La misma pregunta pero en lugar de 3 con 9.
C: O sea va a pasar lo mismo, este va a dar un valor y el otro va a dar cero, entonces...
P: Entonces?
C: También va a ser raíz.
P: Entonces, tu qué dirías, ¿esta ecuación qué raíces tiene?
C: 3 y 9.
P: ¿Cómo verificarías que 3 y 9 son raíces de la ecuación?
C: sustituyo *x* ...
P: Hacelo por favor.
C: O sea lo hago en las dos, en la misma, en los dos pasos, lo hago con 3 ...
P: Dijimos que para 3 tú hiciste este planteo, para 9 dijiste que sería lo mismo... a ver, podrías plantearlo rápidamente?
C: Sí. $(2(9)-6)(18-2(9))=0$
$(18-6)(18-18)=0$
$(12)(0)=0$
P: Entonces, ¿qué contestas de aquí?
C: Que es raíz.
P: Te pregunté entonces qué raíces tenía esta ecuación.
C: 3 y 9.
P: Te pedí que verificaras que 3 y 9 son raíces de la ecuación.
C: $(2(3)-6)(18-2(9))=0$
$(6-6)(18-18)=0$
$0.0=0$
P: Tú al realizar esta verificación, ¿qué valor le asignaste a *x*?
C: El de las raíces: 3 y 9.
P: ¿Y qué diferencia hay entre estos dos planteos que hiciste acá y este que hiciste aquí?
C: Que en estos de acá, uno de los términos tiene un valor que no es cero y en el otro los dos valores son cero.
P: Bien, ahora tú... de estas dos igualdades, ¿qué deduces sobre las raíces de la ecuación?
C: En el primer término la raíz 3 da cero o sea que al cambiar el lugar donde está *x* uno va a dar cero y en el otro va a ser inverso.
P: Pero tú con esta operación que planteaste aquí que te dio 0.12=0, tú dijiste que deducías que 3 era raíz de la ecuación y con este otro planteo deducías que...?
C: 9 era raíz.
P: 9 era raíz de la ecuación por tanto la ecuación qué raíces tenía?
C: 3 y 9.
P: Después te pedí que verificaras que 3 y 9 eran raíces de la ecuación y tu hiciste este planteo, verdad? ¿Y qué diferencias encuentras entre este planteo y este?
C: Que alguno de los términos tiene distinto valor que cero y en este término cuando sustituí por las dos raíces, los dos términos valen cero y el otro toma otro valor.
P: ¿Cuál de las dos verificaciones a ti te permite verificar que efectivamente 3 y 9 son raíces?
C: Cuál... o sea?
P: ¿Este planteo o éste? ¿Cualquiera de los dos permite afirmar que 3 y 9 son raíces?
C: Me basaría más en éste capaz, en éste porque sé que en los dos casos me da cero al sustituirlo por la raíz.

P: Entonces para ti los dos factores tienen que valer cero para que tú puedas afirmar que las dos son raíces?
C: No, porque en este caso toman otros valores que al multiplicarlos por cero va a dar cero. Entonces no es necesario que los dos valgan cero. Uno sí para que al multiplicarlo dé valor cero que es la raíz.
P: ¿Qué planteo preferís, éste o éste, para verificar que 3 y 9 son raíces de la ecuación? ¿Cuál te da a ti mayor seguridad para afirmar que 3 y 9 son raíces de la ecuación?
C: Este.
P: ¿Por qué?
C: Porque en los dos me dio cero.
P: ¿Y eso qué significa?
C: ¿Qué ambas son raíces de la ecuación?
P: En cambio cuando tú mirás esto, ¿qué sensación te da?
C: En este caso que 3 no es raíz porque me da valor 12 en el resultado.
P: En el segundo factor, ¿verdad?
C: Claro.
P: ¿Y en este?
C: Y en el otro... o sea que el factor primero, el primer factor, no me da tanta seguridad porque no tiene valor cero.
P: Ahora, sin embargo, tú observaste o dijiste que aunque este factor 12 no te hubiera dado cero, tu decidiste decir que 3 era raíz.
C: Sí porque claro, lo multipliqué por cero y me dio valor cero toda la ecuación. Pero tal vez si fuese raíz, como te decía hoy, de solo esta ecuación, no sería raíz.
P: Entonces, para ti la forma de comprobar que 3 y 9 son raíces de la ecuación, sería realizar ¿cuál de los dos procedimientos?
C: La forma que más me da seguridad es esta.
P: Ok. Verifica que 0 es raíz de $x(x-8)=0$.
C: Sustituyo x por 0... en este caso x es igual a cero.
$x=0 \quad 0-8=-8$
P: Pero allí, Mª Cecilia, qué estás haciendo? Estás...
C: Sustituyendo x en ambos términos.
P: A ver? ¿Y aquí sustituiste x por 0? O sea...
C: $0(0-8)=0$
$0(-8)=0$
P: ¿Qué contestás entonces? ¿Es raíz o no?
C: 0 es raíz de la ecuación.
P: Ahora verifica si 8 es raíz de la ecuación. Lo mismo pero con 8.
C: $8(8-8)=0$
$8(0)=0$
$0=0$
Sí.
P: Entonces, ¿cuáles son las raíces de la ecuación $x(x-8)=0$?
C: 0 y 8. O sea es el mismo caso, no sabría por qué aquí me da valor –8, acá ya me da cero... O sea las raíces son 0 y 8.
P: O sea que para ti las raíces son 0 y 8. ¿Y este planteo que tú hiciste te alcanza para decir que 0 y 8 son las raíces? ¿Te conforma?
C: Me baso en que el resultado es cero, uno de los términos es cero... y ambos verifican.

P: Ambos verifican, o sea que 0 y 8 son las raíces. Bien. Si ahora te digo: Verifica que 0 y 8 son raíces de la ecuación. ¿Cómo lo harías?
C: Sustituyo.
P: A ver cómo?
C: $0(8-8)=0$
$0(0)=0$
P: Ese planteo qué te dice?
C: Que son raíces.
P: Ajá.
C: Porque ambos términos tienen valor cero.
P: ¿Y acá? Los dos términos, como tu dices, no valían cero, pero igualmente eran raíces...
C: Es el mismo problema que los anteriores.
P: en esta expresión que tu escribiste 0(8-8) ¿qué valores está tomando x?
C: En un término 0 y en el otro 8.
P: O sea que tú estás asignando diferentes valores a x, ¿verdad?
C: Ajá...sí.
P: ¿Sí?
C: Sí o sea, las raíces 0... sustituyo x por 0 y en el otro término por 8. Podría primero hacerlo con uno y después con otro. O sea podría primero sustituir por cero y después por ocho.
P: ¿Los dos procedimientos te parecen correctos? Es decir, ¿te parece que primero hay que sustituir por 0 y después por 8 o te parece que podés sustituir por 0 y 8 a la vez?
C: Darle a x un valor por vez.
P: Si bien tú dices que consideras más adecuado darle a x un valor por vez, ¿cuál de los dos planteos te da a ti mayor seguridad para afirmar que 0 y 8 son raíces de la ecuación?
C: El primero me daría más seguridad porque...
P: ¿Este planteo? ¿Por qué?
C: Más o menos como que es lo mismo porque en los dos me va a dar cero, porque un término me dio cero. En el primer planteo lo hice independientemente uno de otro y me di cuenta que 0 era raíz y 8 también, porque en los dos tomaba valor cero la ecuación, primero por 0 y después por 8.
P: ¿Y por qué aquí tú me decías, en la actividad que hicimos anteriormente, que a ti te daba mayor seguridad para afirmar que 3 y 9 eran raíces, que los dos factores se anularan en simultáneo?
C: ...Sí...O sea... me da seguridad pero también al ver que los dos términos toman valor cero, en este caso, me da más seguridad que éste porque acá hay un término que no es cero.
P: Y acá pasa lo mismo, no? ¿Cuál sería la diferencia Cecilia?
C: Acá no me da valor cero, o sea tengo un término que no es cero y el otro sí y en este caso los dos términos dan cero, lo mismo que en el otro.
P: Lo mismo que en el otro. Pero tu dijiste finalmente que te parecía más adecuado que la x tomara un valor por vez y que te quedarías con este planteo, entonces yo te vuelvo a preguntar en este caso que tu también habías hecho los planteos por separado y en un caso tenías factor 12 y el otro 0, y acá 12×0 y tú hoy habías decidido que entre los dos planteos, te daba más seguridad éste. ¿Y ahora qué pensás?
C: No sé porque también eran distintos casos. Sí o sea, básicamente es lo mismo porque haciéndolo por uno o por otro en los dos me va a dar cero el mismo término.
P: Sí...

C: Y después al multiplicarlo por ambos ... sí es lo mismo.
P: ¿Qué es lo mismo Ceci? ¿Hacer esto o esto?
C: Claro, o sea, es lo mismo por más que lo vea de una forma u otra... la seguridad que tenga va a ser...me va a dar más seguridad éste[58].
P: Este como que te gusta más digamos, pero tu razonando ves que cualquiera de los caminos es válido...?
C: Claro.
P: Y en cuanto a los valores que toma *x* que tu mencionaste aquí, porque tu aquí dijiste que finalmente este planteo te parecía más adecuado porque aquí *x* primero tomaba valor cero y en el otro planteo *x* tomaba valor 8.
C: Sí o sea, plantearlo independientemente uno de otro para verificarlo.
P: Eso cómo te parece que es?
C: Me parece que es más adecuado que darle los dos valores de las raíces en la misma ecuación a *x*. O sea sustituyo primero el valor 0 siempre por *x* y después paso al segundo valor.
P: ¿Y acá en este? ¿Qué sería más adecuado?
C: Tal vez lo mismo, sustituir primero por 3 en ambos casos y después por 9 o sea como está planteado acá[59]. Tal vez este que está acá y este no son los que hay que hacer o sea hacerlos juntos.
P: ¿Por qué al final decidiste que no es correcto hacerlos los dos juntos? ¿Qué es lo que te parece que está mal en este planteo que hacés con los dos juntos?
C: La verificación sustituyéndola a la vez por las dos raíces. O sea primero asignar un valor de la raíz y después el otro.
P: Y entonces, finalmente, para que un producto te dé cero, ¿qué tiene que pasar?
C: Que uno de ellos, un término te dé valor cero.
P: ¿Es necesario que los dos valgan cero?
C: No, uno de ellos.
P: Te acordás de esta otra actividad que hiciste con una tabla.
C: Sí.
P: Te decían que: *a y b son elementos del conjunto A. Se sabe que a.b=0, ¿qué puedes deducir sobre a y b a partir de esta información?* Y tu deduces ...
C: Que *a* o *b* tienen que tomar el valor cero.
P: ¿Podrías explicar un poco más por qué hiciste esa deducción?
C: Sí. *a.b* es una multiplicación que toma valor cero entonces para que tome realmente ese valor, uno de los dos va a tener que tomar ese valor porque al multiplicarlo por...o sea, un ejemplo. Si fuesen números, *a* por ejemplo tuviese que tomar un valor distinto de cero y a *b* asignarle valor cero.
P: Aquí te dice que *a* y *b* son elementos de qué conjunto?
C: Del conjunto A. O sea que *a* o *b* pueden tomar, uno de ellos puede tomar cualquiera de estos valores, cualquiera de ellos, y *b* el valor 0. O si no al revés que *a* tome valor 0 y *b* cualquiera de ellos.
P: Tú para sacar esta deducción que estás aplicando? O sea, por qué si el producto de dos factores es cero, uno u otro tienen que valer cero?

---

[58] Se refiere a la sustitución simultánea por distintos valores de *x* en la expresión.
[59] Señala los dos planteos.

C: O sea, al multiplicar por 0 un valor cualquiera que tome, me va a dar cero por lógica vamos a decir.
P: Mirando la tabla, Cecilia, escribe tres parejas de números que multiplicados den cero. Buscá en la tabla.
C: $2\times0=0$
$2\times3=0$
$3\times4=0$
$3\times2=0$
P: Bueno, esos son unos cuantos ejemplos que tú sacaste de la tabla. Tú hoy me dijiste que si un producto era cero, uno u otro de los factores tenía que ser cero, tú observas que eso se cumple en las igualdades que escribiste?
C: No.
P: ¿Por qué?
C: En este caso sí $2\times0=0$ pero en los otros no.
P: Te vuelvo a repetir la pregunta: *a y b son elementos de A. Se sabe que a.b=0, ¿qué puedes deducir sobre a o b a partir de esta información?*
C: Qué no tienen por qué tomar valor cero.
P: Vayamos a la última pregunta. Te dicen que: c.d=0, *¿qué puedes deducir sobre c y d a partir de esta información? ¿Qué representan para ti c y d?*
C: *c.d=0* es lo mismo que decir *a.b=0*.
P: Ajá.
C: Pueden ser factores, números, elementos.
P: ¿Estas preguntas son idénticas?
C: Lo único que cambia es *a.b* por *c* y *d*.
P: ¿Es lo único que cambia?
C: Que *c* y *d* no son elementos del conjunto.
P: ¿Entonces?
C: No son iguales, son distintas. ¿Qué me preguntaste?
P: Si había diferencias entre esta pregunta y esta[60]. Tú me dijiste que aquí no se aclara que *c* y *d* son elementos del conjunto A. ¿Entonces cuál sería tu respuesta?
C: ¿Esto es aparte de este cuadrito?
P: Puede ser.
C: O sea, tal vez no tenga que fijarme en la tablita.
P: ¿Entonces?
C: Entonces me seguiría basando en que uno de ellos va a ser cero.
P: Ajá.
C: Pero en este caso no, porque el primero es imposible.

[60] Se refiere a las preguntas (Ic) y (II) de la secuencia.

ENTREVISTA A CLARA GARCÍA
3º AÑO CICLO BÁSICO. LICEO JEAN PIAGET.

Profesor: Tú contestaste en la pregunta 18... vamos a leerla así te acordás lo que decía. *Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir a partir de esta información?* Tú contestaste que "*b* o *d* es 0" y escribiste que para ti *b* y *d* representan números. O sea que si un producto te da cero, ¿de eso qué podés deducir?
Clara: Que uno de los dos números que multiplicaste es cero.
P: Esa idea, ¿tú no la podés aplicar para resolver esta ecuación que está acá? ¿Cómo lo harías Clara?
C: Buscar que uno de los cómo se llama?
P: ¿Cómo lo harías a ver? ¿Cómo aplicarías esa idea para resolver la ecuación?
C: Buscar que uno de los...
P: Factores.
C: Que uno de los factores dé cero y después el otro te daría cualquier cosa.
P: ¿Te animás a hacerlo?
C: Sí. ¿Qué escribo? ¿Cuánto vale *x*?
P: Sí.
C: $x=3$
P: ¿Y por qué decís que *x* vale 3?
C: Porque se está multiplicando por 2 y 3.2 es 6 y tenés –6 que da 0.
P: O sea que para ti...
C: Igual lo otro no importa.
P: Igual lo otro decís que no...?
C: Que no importa porque igual como el primer factor es cero, sea lo que sea igual va a dar cero.
P: Bien, y esta solución es la única Clarita?
C: No.
P: ¿Podés encontrar otra?
C: Sí.
P: A ver, dale.
C: $x=9$, ¿nueve?
P: Sí, ¿cómo te das cuenta que es solución?
C: Lo mismo pero con el otro factor o sea porque 9 por 2, 9 por –2 da –18 y tenés 18 y restando...
P: ¿Y el otro factor qué pasa?
C: El otro factor te da... 9 por 2, 18, te da 6.
P: 9 por 2 es 18...
C: Menos 6 me da 6.
P: 18 menos 6...
C: Me da como 12. Igual, ta.
P: Tú hallaste acá las dos soluciones 3 y 9, ¿podrías verificar que efectivamente son las raíces? ¿Cómo escribirías la verificación?
C: Pondría...
P: ¿Te animás a plantearlo?
C: $x=3 \rightarrow (2.3-6)(18-2.3)=0$
$0 \ . \ 12 = 0$

P: ¿Y la otra verificación cómo la harías?
C: $x=9$ $(2.9-6)(18-2.9)=0$
$12 . 0 = 0$
P: ¿Qué es lo que has comprobado con ese planteo?
C: ¿Qué comprobé?
P: Ajá.
C: Que si la x fuera 3 sí se comprueba que el resultado es cero y lo mismo con 9.
P: Entonces tú de acuerdo a lo que me contestaste en la pregunta 18 sabías que si el producto de dos factores te da cero, uno u otro tienen que ser cero.
C: Sí.
P: Sin embargo tú no lo aplicaste para resolver la ecuación. ¿Por qué no lo aplicaste Clara?
C: Porque después me puse a pensar, ¿no? O sea, era una cosa que yo deduciendo, tipo, sin ningún tipo de operación, digamos yo lo podía sacar, lo que yo no pude sacar es si viendo, o sea despejando la x.
P: O sea que tú esta idea que tú me explicaste que la x tenía que valer 3 o 9 tú la tenías clara?
C: Claro, lo que no supe hacer es cómo llegar a partir de una fórmula o sea ya, como te puedo decir, ya, dicha, no pude seguir la operación, no pude hallar según todos los procedimientos que x era igual a 3 o x era igual a 9.
P: Y entonces, ¿qué fue lo que optaste por hacer aquí?
C: No entiendo.
P: ¿Qué planteo hiciste acá Clara? ¿Qué hiciste para obtener $36x$, $-4x^2$, -108, ¿qué operación hiciste?
C: Una multiplicación.
P: ¿Y después te encontraste con qué cosa?
C: Con que la x era a la dos.
P: ¿Y entonces?
C: Y entonces no supe qué hacer.
P: Entonces aplicando la idea de que uno u otro factor debe ser cero, ¿tú no podrías plantear ecuaciones de las cuales pudieras despejar la x? Con esa misma idea.
C: ¿Cómo?
P: Con la idea que tú me dices, que uno u otro de los factores debe ser cero, ¿no podés con eso plantear ecuaciones?
C: No sé.
P: Porque este $x=3$ surge ¿de qué ecuación?
C: De esta que es igual a cero.
P: ¿De cuál? Señalala aquí en la ecuación.
C: De esa.
P: Entonces ¿qué tendrías que escribir para que la x te diera 3?
C: Ah, x es igual a 6 dividido 2.
P: Y antes de eso ¿qué pasó en el medio?
C: No sé.
P: x es igual a dijiste...
C: $2x-6=0$
$2x=6$

$x=\frac{2}{6}=3$

P: Ahí te dio. ¿Lo mismo podrías hacer con el otro factor?
C: Claro, el tema fue que al combinar las dos...
P: ¿Qué quiere decir al combinar las dos?
C: Claro, no buscar solucionar cada uno por separado, cada uno de los factores, sino los dos juntos, porque ahí yo multipliqué *2x* por 18.
P: ¿Y por qué pensás que no se te ocurrió hacer esto?
C: Porque no, no sé, porque capaz que fue porque siempre que me daban una operación yo tenía una fórmula para hacerla y tipo la compliqué más o sea al estar acostumbrada a que me dieran..., mismo, mismo no me acuerdo pero creo que yo un año hice eso, entonces fue tipo tener la operación y yo creo que sabía, por lo menos creía que había una fórmula que lo solucionara que debe haber, no?
P: Sí.
C: Y entonces no sé, busqué esa y no la más simple, era la más obvia, era la más lógica de pensar, porque aparte, mismo yo sabía que era eso, no se me ocurrió, o sea, hacerlo por ese camino y no por el otro, no sé por qué.

ENTREVISTA A DIEGO OLIVERA
3º AÑO DE CICLO BÁSICO. LICEO JEAN PIAGET.

Profesor: ¿Te acordás la primera pregunta donde tenías que resolver una ecuación y se te pedía que explicaras cómo lo hacías? Vos dijiste *"Voy averiguando en cada ecuación el valor"*. ¿Qué quiere decir eso?
Diego: Fui averiguando en cada término el valor de la x y ese x va a ser la raíz.
P: La ecuación que tú tenés aquí planteada en este ejercicio, ¿es una ecuación o son dos ecuaciones?
D: Son dos ecuaciones, la separé por términos y las fui averiguando cada valor de x y cada resultado que me daba es la raíz.
P: Y esto que está planteado aquí son...
D: Dos ecuaciones.
P: Cuando tú realizás la verificación, contame cómo lo hacés.
D: Los resultados que me dio de la x en una ecuación la cambio, por ejemplo, en la primera ecuación me dio el valor de x, 3, entonces hice 2.3 que cambié x por 3 y me dio 6 y el otro era –6 y achicaba y me daba cero.
P: ¿Y por qué no usás toda la expresión para hacer la verificación?
D: Me parece que también se podría hacer porque realizadas en el primer término te daba cero y lo podés sumar con $18-2x$, que el valor de esa x en ese término era 9 y 9 por 2 da más 18.
P: ¿A ver cómo lo harías si tuvieras que usar toda la expresión?
D: $(2x-6)(18-2x)=0$
$(2.3-6)(18-2.9)=0$
$0 + 0 = 0$
P: ¿Y por qué tú aquí dijiste que uno u otro, como tú dijiste de los términos, tienen que ser cero?
D: ¿Dónde?
P: Acá, ¿por qué se te ocurre que uno u otro de los términos[61] tiene que ser cero?
D: Porque el resultado de la suma de los dos términos va a ser cero.
P: O sea que para ti lo que aquí está planteado es una suma.
D: Sí.
P: Y para que la suma sea cero, los dos términos decís tú, tienen que ser ...
D: Tienen que dar cero.
P: Tienen que dar cero... ¿Me podrías decir cómo te das cuenta que es una suma?
D: Al tener los paréntesis me señala que es una suma y los separa en un término y averiguo esa ecuación y con la siguiente hago lo mismo.
P: Vamos a la pregunta 6. Contame cómo resolviste esta ecuación[62].
D: Acá hice la ecuación $2x-10$ y para mí la x que está fuera del término era el valor que me iba a dar la x de $2x$, entonces hice la ecuación $2x-10$ que es igual a cero, lo pasa al otro lado y eso lo dividí entre 2 y el valor de la x da 5 entonces hice 2.5-10 y eso da cero.
P: ¿Y para vos qué función cumple esta x que está afuera?
D: Para mí es el resultado de esa ecuación.

---

[61] Se reconoce el uso incorrecto de la palabra término, pero se respeta la terminología usada por el alumno para no agregar un conflicto a la situación que se discute.
[62] $x(2x-10)=0$.

P: ¿Nada más que para indicarte, digamos, cuál va a ser el resultado de la ecuación?
D: Sí[63].
P: Vamos a la pregunta 8. A ver si me explicás cómo resolviste la pregunta 8[64].
D: Yo acá no sé si está bien pero averigüé el valor de la x en 6, hice $6x^2$ que es 6.6 que me dio 36 y para mí ese es el valor de la x y el otro sería 6.
P: ¿Y tendrías alguna forma de averiguar si estos valores de x que encontraste son correctos?
D: Sí. Suplanto la x por el 36 y hago la raíz cuadrada de 36.
P: ¿A ver cómo lo harías?
D: Hago esta ecuación y pongo x acá y la raíz cuadrada de 36 que va a dar 6 y ese es el valor.

$x^2=6x \rightarrow 36$

$\sqrt{36}=x$

$6=x$

P: ¿Y qué raíces tiene la ecuación?
D: La ecuación tiene dos raíces 36 y 6.
P: O sea que la forma, para ti, de darte cuenta si son las soluciones...no entendí cómo fue...
D: Primero hice $6x$ por x^2 que va a dar 36 y después para verificar si 36 está bien hago la raíz cuadrada de 36 que da 6.
P: Vamos a la pregunta 9. Tú resolviste la ecuación $5x=0$. ¿Cómo lo hiciste?
D: Busqué un valor de x que multiplicado por 5 me dé cero.
P: ¿Qué número encontraste?
D: el cero.
P: ¿Y es la única solución que encontraste?
D: No, encontré otra que, no, después verifiqué si estaba bien y me daba cero.
P: ¿Y por qué aquí pusiste que había dos soluciones 0 y 5?
D: Creo que 5 y el valor de x tenían que ser las raíces.
P: ¿Por qué lo crees?
D: Porque si verificó 5 por el valor de la x me va a dar cero. El valor de la x con el 5...
P: Y cuando tú decís el valor de la x, ¿qué valor le estás dando?
D: Le estoy dando el valor cero.
P: ¿Cero? Entonces te queda 5 por 0.
D: Que es igual a cero.
D: Y cuando vos decís que 5 también es solución, ¿cómo estás haciendo la operación?
D: Creo que paso la ecuación hacia el otro término y el 0 pasa adonde está el 5 y el resultado, el valor de la x va a ser 5.
P: A ver escribilo.
D: $x=0+5$

$x=5$

P: Vamos a la pregunta 12. Aquí te decían que tenemos la ecuación (2x-4)(.....)=0 en la que no conocías el segundo factor. ¿Es 2 raíz de la ecuación? ¿Por qué?
Entonces tú dices que por un lado "sí, porque realizando la ecuación me da 2". ¿Dónde hallaste que daba 2 la solución?

---

[63] El alumno reconoce una sola solución para la ecuación que es x=5.
[64] $x^2=6x$.

D: Primero realicé la ecuación $2x-4$ y el valor de la x me dio 2. Entonces la raíz es igual a 2 y después para averiguar el otro término busqué dos números que el resultado de la x me den 2 que era $4x-8=0$, el resultado final, concluí que la raíz era 2.
P: Decime y para que tú contestes afirmativamente que 2 es raíz, ¿qué es lo que tiene que pasar en esta ecuación?
D: Que las dos ecuaciones el resultado me den 2.
P: ¿Las dos?
D: Las dos me tienen que dar 2.
P: ¿Y por qué las dos te tienen que dar 2?
D: Para saber si la raíz es 2.
P: Sí, pero no entiendo por qué las dos tienen que ser 2.
D: Porque si te dicen que las dos raíces de esta ecuación dan 2, entonces la segunda ecuación, haciendo la ecuación, el resultado tiene que dar también 2, si no hay otra raíz, si el resultado es otro, el valor de la x, hay dos raíces.
P: O sea que si aquí la raíz no fuera 2, supónte que la raíz fuera 3, ¿tú qué contestabas a esta pregunta?
D: Que no, porque en la primera hay una raíz que es 2 y en la otra, otra raíz sería 3, no sería 2.
P: Ahora, cuando aquí te preguntan: *¿2 es raíz de la ecuación?*, ¿te están diciendo que 2 es la única raíz?
D: Sí, me parece que sí.
P: Te da esa impresión, que te dicen que es la única raíz. ¿Y 3 es raíz de esta ecuación?
D: No porque si no el valor de la x en lugar de 2 tendría que ser 3.
P: ¿En los dos casos?
D: En los dos casos.
P: A ver la pregunta 13 cómo la hiciste.
D: Acá se podía hacer de dos formas. Una multiplicando x por el término 19-6 y por el otro que sería x por 6 y por –19.
P: ¿Y dónde ves la x?
D: (Señala el ×)
P: En el símbolo...
D: Entonces al sumar $19x$ y $-19x$, son opuestos y se tachan y al igual que $-6x$ y $6x$ como son opuestos el resultado te va a dar cero y la suma de ellos va a ser cero.
P: ¿Y si yo te dijera que esa cruz representa una multiplicación, ¿cambiaría la respuesta que tú le diste al ejercicio?
D: No porque va a ser igual. Tendría 19 que lo multiplicaría por +6 y por –19 y van a surgir los opuestos y así sucesivamente, -6 por 6 va a dar el opuesto y –6 por 19 también.
P: O sea que para ti debajo de los papelitos ¿qué números irían concretamente?
D: 19 y el opuesto del otro término.
P: Escribilo por favor.
D: $(19 -6)(6 -19)=0$
P: O sea que debajo de un papelito estaría el 19 y abajo del otro papelito estaría el 6 y la operación que está vinculando estos dos paréntesis ¿cuál sería?
D: ¿La operación? Una multiplicación.
P: Acá te preguntan en el ejercicio 17, si 3 y 4 son raíces de la ecuación $x^2-7x+12=0$, ¿podrías explicar un poquito tú respuesta? Porque tú no contestaste si eran raíces.
D: No estaba seguro, estuve planteando, dejé el x^2 por un lado y averigüé la ecuación

$-7x+12=0$.
P: ¿Y por qué dejaste la x^2 por un lado?
D: Para después el resultado que me da esta ecuación, multiplicarlo por x^2 y el resultado de la ecuación me dio 1,7 multiplicado por x^2 es 1,7 por 1,7 que es igual a 3.[65]
P: ¿Y qué contestás?
D: Y el resultado de esa ecuación s la raíz.
P: ¿Y para saber si 4 es la raíz?
D: Tendría que el resultado de la ecuación, tendría que multiplicarlo por x^2 y si da 4 sería la raíz.
P: ¿Cómo sería?
D: Me dio 1,7, en base a ese resultado 1,7 por 1,7 ese resultado tendría que dar 4.
P: Lo hiciste acá, 1,7 por 1,7 daba 3.
D: Y si no la otra, no estoy seguro, suplantar en la ecuación x por 4.
P: Sí.
D: Y el valor de la x multiplicarlo por 2 y así tengo si es la raíz 4.

$-7.4+12=0$

$-28=-12$

Creo que no, quedaría –12/28
P: Te doy calculadora.
D: Da 0,4 el resultado y esto multiplicado por x^2 es 0,4 por 0,4... 1,17 no me daría...
P: ¿Entonces qué contestás?
D: Que 4 no es raíz, 3 sí.
P: Vamos a la pregunta 18. *Se sabe que b.d=0, ¿qué puedes deducir sobre b y d a partir de esta información? ¿Qué representan para ti b y d?*
D: Para mi representan números que al realizar la ecuación uno de ellos va a tener que ser cero porque la ecuación esa te da como resultado es igual a cero, b por d es igual a cero.
P: ¿Y por qué si el resultado es cero uno de los dos tiene que ser cero?
D: Porque al multiplicar, o sea b puede ser 5 y d es igual a cero, la multiplicación de esos dos números te tiene que dar como resultado cero.
P: O sea que para que el producto te dé cero, ¿qué tiene que pasar con los números?
D: Que uno de los números, que un número multiplicado por cero me dé cero.

[65] Cuando el alumno dice multiplico por x^2 se refiere a que eleva al cuadrado.

ENTREVISTA A IGNACIO FARÍAS
6º AÑO, OPCIÓN MEDICINA. LICEO Nº 4.

Profesora: En la pregunta 3: *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que el producto de f por g es la función nula, ¿qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*, vos contestaste que una de las dos funciones es la función nula. La pregunta es por qué esa fue tu respuesta.
Ignacio: Porque hasta acá no había visto la otra parte del ejercicio.
P: Quiero saber en qué pensaste.
I: Por propiedad de absorción. Un número por cero es cero.
P: Y hubo algo en particular, de lo que acá está escrito, que te hiciese pensar en eso?
I: sí, "$f.g=O$"[66].

[66] Específicamente señala lo que está escrito con notación simbólica.

ENTREVISTA A JUAN MORELLI
3º AÑO DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA. INSTITUTO DE PROFESORES ARTIGAS.

Profesor: Juan, en la pregunta 1 que te pedían que resolvieras esta ecuación, tú decís que aplicaste propiedad Hankeliana. La pregunta es por qué no desarrollaste y aplicaste la fórmula cuadrática.
Juan: Porque yo sé que (R, +, ×, ≤) es un cuerpo totalmente ordenado y completo y cumple la propiedad Hankeliana. No necesita ser un cuerpo bla, bla, bla, pero es un dominio de integridad entonces se cumple la propiedad Hankeliana.
P: Pero de todas formas es una opción aplicar la Hankeliana, ¿por qué no desarrollaste y aplicaste la fórmula cuadrática?
J: Porque sé que a la solución que llego es la misma.
P: ¿Y por qué no optar por el otro camino?
J: Porque me resulta más sencillo.
P: Ok. Aquí dijiste que alguno de los factores tenía que ser cero y reconociste a *b* y *c* como números reales. ¿Por qué diste esa respuesta?
J: En realidad yo había pensado que podía, viste que acá dice puede ser, pero lo iba a empezar, pero ta, dije no voy a desarrollar esto porque no creo que venga por este lado y como la primera parte era sobre trabajo en R, lo trabajé como si fuera R.
P: ¿Pero qué querés decir con eso?
J: ¿Que *b* y *c* son dos números, son, representan dos números reales?
P: ¿Y por qué contestaste que *b* o *c* son cero?
J: Porque no necesariamente ambos deben ser cero para que se cumpla que el producto es cero.
P: Entonces cuando vos das esa respuesta estás reconociendo a *b* y *c* como números reales, ¿verdad?
J: Sí, o sea, sí, de hecho lo que escribí es eso.
P: ¿Por qué reconociste en *b* y *c* números reales? O sea, ¿de lo que está escrito que fue lo que a vos te inspiró que *b* y *c* fueran números reales?
J: La notación habitual que se utiliza para números reales como b y c minúsculas, porque cuando yo estaba ahciendo esto pensé en amtrices pero las matrices como que siempre son mayúsculas, entonces bueno, dije son reales y ta. Básicamente la notación.
P: En la pregunta 1 vos recién me terminás de decir que sabés que en (R, +, ×, ≤) se cumple la propiedad Hankeliana. Acá no había una mención explícita de que esa propiedad era válida. ¿Por qué vos acá contestaste que *b* es igual a cero o *c* es igual a cero?
J: Por eso, había pensado que podría no serlo, pero si estuviera trabajando en R seguro que eso se tiene que cumplir.
P: ¿Hay alguna parte del enunciado de la pregunta que a ti te haya llevado a contestar que *b* es igual cero o *c* es igual a cero?
J: No, o sea digamos, no de hecho nada. O sea nada induce a pensarlo, solo que ta, eso.
P: Acá vos hiciste una aclaración donde dice que *f* por *g* es la función nula: "Habría que ver qué tipo de funciones son. Si la operación en el conjunto de las funciones de dominio R genera un dominio de integridad o no, se puede decir que $\begin{cases} f=\vartheta \\ \vee \\ g=\vartheta \end{cases}$ o no".

¿Por qué diste esa respuesta? Porque en definitiva vos no contestaste, vos no tenías la certeza de si esa propiedad era válida, pero de alguna forma como que te atajaste digamos.
J: Porque cuando llegué a esta hija me di cuenta o creí, o sea como que no te ibas a quedar en R, entonces digo, ta, me acordé de los espacios vectoriales por ejemplo y bueno, de otros anillos que no cumplen, que no son cuerpos, que no cumplen esas porpiedades, entonces habría que analizar muchas más cosas, como por ejemplo qué operación es ese puntito, qué está representando, o sea...
P: pero acá te decís que era un producto, ¿no?
J: Decía que era un producto, claro, ta, pero, sí, sí, en realidad como yo estaba con la idea de lo que quería poner en la hoja anterior que no lo había puesto, dije lo pongo ahora.
P: Decime y en el conjunto de las funciones con la operación multiplicación definida, ¿se cumple la propiedad Hankeliana?
J: No.
P: ¿Cuáles son los conocimientos que vos tenés que te permiten dar este tipo de respuesta y no emitir simplemente una respuesta del tipo *f* es la función nula o *g* es la función nula?
J: Lo que estudié en Matemática Básica[67] aquí en el IPA, lo que aprendí en Básica.
P: Qué cosas son explícitamente.
J: Estructuras algebraicas. Después además yo leí una monografía de la OEA sobre estructuras algebraicas que me gustó pila el tema y además yo en 5º tuve una profesora que también trabajó estructuras algebraicas, entonces como que las tengo bastante vistas. Pero más que nada lo de Matemática Básica acá en el IPA.
P: Ya cuando pasamos, entonces, al campo de las matrices, tú contestás "Nada". ¿Por qué contestás que no podés inferir nada?
J: Porque sé que hay matrices no nulas que multiplicadas dan nula, o la nula y alguna otra no nula, entonces no.
P: Y en el conjunto de los polinomios...
J: Porque los polinomios sí son, claro no, porque no había pensado, o sea en el conjunto de los polinomios sí, no de las funciones, de las funciones polinómicas, me parece que es un dominio de integridad. No las funciones en general.
P: Y aquí cuando se te vuelve a reiterar la misma pregunta en el caso de la pregunta 6. Allí, ¿por qué diste esa respuesta?
J: Porque ta, puse lo que estaba pensando al principio cuando no lo puse y dije bueno, ta, esto es lo que estaba pensando, lo voy a poner ahora. Esto sí fue más revancha que lo otro.

[67] Asignatura que figura en el curriculum de primer año de la carrera de Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores Artigas.

ENTREVISTA A Mª EUGENIA COSTA
6º AÑO, OPCIÓN MEDICINA. LICEO Nº 4

Profesora: ¿Te acordás que el primer ejercicio que habías resuelto se refería a resolver una ecuación? Tú aplicaste la fórmula y luego verificaste y ¿qué encontraste?
Mª Eugenia: Que sustituyendo la *x* por esas raíces daba cero.
P: O sea...
M: O sea que eran las raíces.
P: Quería saber por qué en *2x-6* sustituiste la *x* por 3 y en *18-2x* sustituiste *x* por 9[68]. ¿Por qué hacés así la verificación?
M: Porque si una raíz era 3 y la otra 9, una tenía que encajar en el primero y otra en el segundo y como me daba bien sustituyendo acá el 3 y sustituyendo en la otra el 9, lo hice así.
P: ¿Y cómo sabés en cual de los dos lo sustituís?
M: Ah, por tanteo.
P: Por tanteo, tú elegís, te fijás...
M: Claro, me fijo. Pruebo con las dos, una de las dos y sustituyendo esa si me da cero es esa.
P: ¿Y si no te da cero? ¿Qué hacés?
M: Puede ser la otra.
P: Y ahí cambiás de lugar?
M: Ajá.
P: En el problema 11 se te pidió escribir una ecuación que tuviera raíces 4 y 3 y tú escribiste *(2x-8)(x-3)=0*. ¿Cómo lo pensaste?
M: Este... y más o menos como pensé la verificación del otro.
P: A ver contame.
M: Si por ejemplo inventaba uno, por ejemplo ponía *2x* y a ese *x* le ponía un valor, le ponía 4, dos por cuatro ocho y después le restaba ese ocho y me daba cero y en el otro término hice lo mismo.
P: ¿Y por qué te tenía que dar cero?
M: Para que fueran raíces de la ecuación.
P: ¿Por qué?
M: Porque si no daba cero no eran raíces.
P: Si yo te pregunto, ¿5 y 4 son raíces de la ecuación *(x-4)(2x-10)(3x-8)=0*?
M: 4 es raíz del primer término, 5 también es raíz, pero es raíz del segundo término. Ta, acá no, ninguna de las raíces. Entonces 5 y 4 sí son raíces porque...
P: Porque...
M: Porque 4 es raíz de una y 5 es raíz de otra.
P: ¿Y con el tercer factor qué pasa?
M: Se verá, se simplifica, sacás la *x* y ves que raíz tiene.
P: ¿Para hallar?
M: La raíz de ese término.
P: Pero contestás que 5 y 4, ¿qué pasa?
M: Sí, son raíces, pero del primer y segundo término.
P: ¿Y son raíces de la ecuación? ¿De toda la ecuación?

[68] Se refiere a la ecuación (2x-6)(18-2x)=0.

M: Sí, pero falta una.
P: Te voy a pedir que escribas una ecuación de segundo grado que tenga raíz 5.
M: ¿De segundo grado?
P: Ajá.
M: No sé cómo escribirla.
P: A ver, si yo te pregunto, ¿es 4 raíz de $(2x-8)(x-3)=0$? ¿Cómo hacés?
M: Sustituyo la x porque en el primer término me da cero, o sea que es raíz de este término, del otro no.
P: Entonces, ¿qué contestás?
M: Que sí, que es raíz de la ecuación pero que falta otra.
P: ¿Y qué condición se debe cumplir para que un número sea raíz de la ecuación? ¿Qué debe pasar?
M: Que sustituyendo ese número por la x me dé cero.
P: ¿A ver cómo lo hacés?
M: Pero solo en este primer término (escribe) $2(4)-8=0$.
P: ¿Esa es tu verificación?
M: Claro.
P: ¿Y qué pasa con el otro término[69]?
M: Y el otro término la raíz es 3.
P: ¿Y no lo usás para la verificación para nada?
M: No.
P: ¿Y por qué no necesitás usarlo?
M: Porque ya sé que en ese término, ya sé que la raíz es 4 y ya sé que es raíz de la ecuación.
P: ¿Por qué?
M: Porque es raíz de uno de los términos.
P: Entonces ¿qué es lo que estás usando? Para que un número sea raíz de la ecuación, ¿qué tiene que pasar?
M: Que sustituyendo ese número por la x me dé cero.
P: ¿En toda la ecuación?
M: Y si está así dividida en términos no, no tiene porque ser en toda la ecuación, puede ser en un término o más de uno.
P: Entonces, si a ti te preguntan por ejemplo, ¿son 3 y 4 raíces de $x^2-7x+12=0$? ¿Cómo harías allí para saber si son raíces?
M: Ahí no. Ahí resuelvo la ecuación a ver si me da las raíces.
P: ¿Y sin resolverlo cómo podrías hacerlo?

(Se termina la cinta y se retrocede un poco en la conversación por si se perdió algo).

P: Yo te pregunté si 4 era raíz de $(2x-8)(x-3)=0$, entonces me dijiste que para darte cuenta si era raíz o no, ¿qué es lo que hacías?
M: Sustituía la x por ese 4 para ver si me daba cero.
P: ¿Y dónde los sustituías?
M: En el primer término que es donde me da cero. Probaba y ta, y veía cual de los dos era.

[69] Se reconoce el mal uso de la palabra término, pero se prefirió respetar la terminología que usa la alumna para no agregar conflictos a la discusión.

P: ¿Y por qué acá te alcanza con hacerlo solo en uno, por qué no necesitás sustituir la *x* en los dos?
M: Porque ya conque en uno sea cero, ya se sabe que 4 es raíz de esa ecuación.
P: Después yo te pregunté si 3 y 4 eran raíces de $x^2-7x+12=0$ y me dijiste que...
M: Que podía resolver la ecuación y capaz que también sin resolver, factorizando.
P: A ver, ¿cómo lo harías?
M: (Risas, no sabe cómo hacerlo)
P: Y sin factorizar, ¿no podrías hacerlo? Usando el método de verificación.
M: ¿Así sustituyendo 3 y 4?
P: A ver, ¿cómo lo harías?
M:...
P: ¿Lo hiciste?
M: No.
P: ¿Cómo se te ocurre que podrías hacerlo?
M:...
P: A ver, tú hoy me dijiste que para que un número fuera raíz de la ecuación, ¿qué tenía que pasar?
M: Que sustituyendo la *x* por esas raíces me dé cero.
P: ¿Entonces?
M: Capaz que sustituyendo por *x* me da cero.
P: Plantealo.
M: $3^2-7(4)+12=9-28+12=$
P: ¿No te da?
M: No.
P: ¿Entonces qué contestarías?
M: Que no son raíces.
P: ¿Qué pasó Mª Eugenia?
M: Que no son raíces. Ah... capaz que...
P: A ver?
M: $4^2-7(3)+12=16-21+12=$
P: ¿Qué pasó?
M: No me dio cero, no son raíces.
P: ¿Te animás a resolver la ecuación como ibas a hacer hoy?
M: Sí.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2}\begin{cases}4\\3\end{cases}$$

P: ¿Qué te dio? ¿Qué pasó?
M: Que 4 y 3 son raíces de la ecuación. Entonces estaba mal lo que hice acá.

P: ¿Qué te parece que podría estar mal?
M: La forma de verificar.
P:¿Y cuál te parece que podría ser la forma de verificar?
M: Así, lo que hice ahora.
P: Lo que tú hiciste acá fue resolver la ecuación y hallaste las raíces 4 y 3, ¿verdad? Pero supónte que tú en este procedimiento te hubieras equivocado en alguna operación y hubieras llegado, por ejemplo, en lugar de 4 y 3 a 5 y 3, ¿Cómo podrías hacer para saber si esas raíces eran correctas? ¿Cuál es el procedimiento que a ti te permite saber si son correctas las raíces que obtuviste aplicando la fórmula cuadrática?
M: Ehhh...
P: ¿No te das cuenta?
M: No.
P: A ver, y acá, ¿por qué sustituiste en la x^2 la x por 3 y en $-7x$ sustituiste la x por 4? ¿Por qué lo hiciste así?
M: No sé, pensé en sustituir las dos por la misma...
P: Ajá, pero ¿qué pasó?
M: Capaz que fuese mejor sustituir primero por una, por ejemplo por el 3 y después hacer otra ecuación y sustituir por el 4.
P: A ver...
M: $3^2-7(3)+12$
$9-21+12$
No, tampoco.
P: ¿Tampoco da? ¿Qué pasó? A ver, ¿qué operación hiciste? Contame.
M: Sustituí el 3 por la x.
P: ¿Y después cómo operaste?
M: Tres al cuadrado es nueve, siete por tres, veintiuno...
P: ¿Y ahora que operación tenés que hacer?
M: Nueve menos veintiuno más doce.
P: A ver, hacela.
M: Estaba bien.
P: ¿Qué pasó? ¿Da?
M: Sí.
P: Entonces, ¿qué verificaste ahí?
M: Que 3 es raíz de la ecuación.
P: ¿Y si quisieras verificar que 4 es raíz de la ecuación?
M: Lo mismo pero sustituyendo por 4.
$4^2-7(4)+12$
$16-28+12$
P: ¿Qué pasó?
M: 4 es raíz de la ecuación.
P: ¿Qué te parece este procedimiento que tú realizaste aquí?
M: Estaba mal.
P: ¿Cuál sería el error para ti?
M: Éste. Sustituir, claro porque la x es la misma. Entonces tendría que haber sustituido la x por el mismo número.
P: Ok. A ver Mª Eugenia, aquí teníamos una ecuación: $(2x-4)(.....)=0$ en la que no conocemos el segundo factor. Te preguntan: *¿Es 2 raíz de la ecuación? ¿Por qué?* Tú

contestaste que *"Si en el segundo término sustituyendo la x por 2 nos da cero, sí es raíz de la ecuación"*. Y si 3 era raíz de la ecuación, contestaste *que "No, porque 2(3)-4 no es igual a 0 entonces ya no importa cuál es el otro término"*.
M: Está mal.
P: ¿Por qué?
M: Por que podía ser que en el segundo término... ajá...éste está bien...es raíz, porque sustituyendo la *x* por 2 me da cero no importa el otro término.
P: ¿Por qué no importa?
M: Porque ya se sabe que 2 es raíz de la ecuación, ya con que sea...
P: No entiendo bien por qué alcanza con que sea raíz en uno de los factores.
M: Porque sí, porque..., porque puede tener más de una raíz.
P: Contame qué pasa, cuando tú aquí a la *x* le das valor 2, ¿qué pasa?
M: Ehhh, me da cero.
P: Ese te da cero y los demás?
M: No sé porque no los conozco.
P: ¿Entonces cómo sabés que alcanza con que éste sea cero para que ese número sea raíz de la ecuación?
M: Porque ta, la otra capaz que también puede ser 2 la raíz, pero ya conque en ese término dé cero sustituyendo por 2, ya se sabe que es la raíz 2.
P: O sea, cuál sería la condición para que un número sea raíz de esa ecuación?
M: Que se pueda sustituir y que dé cero en cualquiera de los términos.
P: Ajá. A ver la pregunta 13: *Los papelitos tapan números, ¿puedes averiguarlos? Explica tu razonamiento*. Tú pusiste en un papelito 6 y en el otro papelito 19 y dice *"para que la ecuación sea 0, los dos términos deben ser =0"*. ¿Se te ocurre otra posibilidad para los números que tapan los papelitos?
M: Sí.
P: ¿Cuáles podrían ser?
M: Por ejemplo que éste sea 6 y este sea uno cualquiera. Porque si este me da cero, cero multiplicado por cualquier número da cero. No, no tienen por qué ser.
P: Entonces cómo podría ser, a ver. Éste podría ser...
M: Podría quedar así y el otro cualquiera, no importa.
P: ¿Y hay otra posibilidad?
M: No.
P: Ta, listo.
M: Ajá.
P: Si yo te pregunto: ¿cómo resolvés la ecuación $(6x-12)(x+5)=0$?
M: Ehhh, por dos formas o despejando la *x* en cada término.
P: ¿Y ahí qué estarías aplicando?
M: Hankeliana.
P: ¿Y te acordás lo que dice la Hankeliana?
M: No.
P: Más o menos en tus palabras.
M: Que en cada término si despejás la *x* te da la raíz y me da las raíces de la ecuación.
P: ¿Te animás a hacerlo?
M: $(6x-12)(x+5)=0$
$6x-12=0 \qquad x+5=0$
$6x=12 \qquad x=-5$

$x=\frac{12}{6}=2$
P: ¿Qué raíces encontraste?
M: 2 y –5.
P: ¿Cómo podrías verificarlo? Porque podrías haberte equivocado al resolver la ecuación, al hacer alguna operación, al despejar. ¿Cómo podrías verificar que 2 y –5 son las raíces?
M: Sustituyendo el 2 acá.
P: A ver.
M: 6(2)-12=0, me da cero, está bien. Y acá sustituyo el –5, -5+5=0.
P: ¿Y por qué hacés así la verificación? A ver contame...
M: Y porque sí, porque si me da otro número, si sustituyo por esa raíz que justamente me dio y me da otro número es porque no es la raíz. Si no me da cero es porque está mal la raíz.
P: Ahora...cuando la *x* vale aquí 2, *6x-12* te da cero, y si acá la *x* vale 2, 2+5 daría 7, ¿eso importa?
M: No.
P: ¿Por qué?
M: Porque 2 es raíz de este término.
P: Yo te pregunto: ¿es 7 raíz de $(3x-9)(x+8)=0$?
M: Y si sustituyo en uno de los términos y me da cero sí.
P: A ver qué pasa.
M: 3(7)-9=12
7+8=15
No da y el otro tampoco.
P: ¿Qué contestás?
M: Que 7 no es raíz de la ecuación.
P: ¿Por qué?
M: Porque sustituyendo el 7 por las *x* en cualquiera de los dos términos el número no da cero.
P: Suponete que tú tenés una función $f(x)=(3x-9)(x+8)$, ¿cómo hallarías en *f* la imagen de 7?
M: ¿Lo hago? Sustituyo la *x* por 7.
P: A ver cómo lo hacés.
M: (3(7)-9)(7+8)=12-15=-3
P: ¿Cómo lo hiciste? Siete por tres, veintiuno, menos nueve...
M: Doce
P: Y siete más ocho..
M: Quince.
P: ¿Y luego qué hiciste?
M: Ah, no, me equivoqué. (Corrige (3(7)-9)(7+8)=12×15=180)
P: Si yo te digo, en esta función $f(x)=(3x+9)(x+8)$, hallar en *f* la imagen de 2 y 6, ¿cómo lo harías?
M: Sustituyo, lo hago?
P: Sí.
M: (3(2)+9)(2+8)=15×10=150
P: ¿Cómo lo estás haciendo?

M: Primero sustituyo todo por 2 y después todo por 6 porque son imágenes diferentes.
(3(6)+9)(6+8)=27×14=378
P: Porque esos números van a tener imágenes...
M: Diferentes.
P: En esta función: $g(x)= (x+5)(x-6)$. ¿Cómo hallarías la imagen de –5?
M: (-5+5)(-5-6)=0, ya sé que me da cero.
P: Y si te pido hallar la imagen de 6?
M: Te da cero
(6+5)(6-6)=0
P: ¿Y si te pido hallar las raíces de *g* cómo lo harías?
M: Despejo la *x* de cada término.
$x+5=0 \qquad x-6=0$
$x=-5 \qquad x=6$
P: ¿Qué hallaste Mª Eugenia?
M: Hallé, despejé la *x* para hallar las raíces.
P: Y te dio... que las raíces son?
M: -5 y 6. Las dos anteriores que me habían dado cero.
P: ¿Cómo verificás que –5 y 6 son las raíces Mª Eugenia?
M: Sustituyo por la *x*.
P: A ver cómo hacés la verificación?
M: (-5+5)(6-6)
0 0

Esto me da cero.
P: O sea que daría cuánto?
M: Cero.
P: Yo quiero saber Mª Eugenia por qué tú acá para hallar la imagen de –5, a la *x* le diste valor –5 en ambos factores, para hallar la imagen de 6 le diste a *x* valor 6 en ambos factores. En cambio aquí, tú a *x* le diste valor –5 en el primer factor y a *x* le diste valor 6 en el segundo factor. Quiero saber por qué acá lo hiciste de una forma y acá lo hiciste de otra.
M: Porque si me pedía hallar la imagen de –5, es solo la imagen de –5 y entonces tenés que sustituir por –5 para resolverlo, en cambio las raíces, ta, es por cada término.
P: ¿Se hacen por cada término?
M: Sí, sí, si están entre paréntesis o podés resolverlo pero...
P: ¿Qué te parece que quiere decir ese paréntesis que tú recién me nombraste?
M: Multiplicación.
P: Pero te da alguna otra sensación o te da alguna otra información ese paréntesis?
M: Como que son términos diferentes o sea...
P: Mm?
M: Que están separados.
P: De lo que ahí está escrito, ¿qué es lo que te da esa sensación de que están separados?
M: Los paréntesis.
P: Ajá, porque acá yo también te pedía hallar la imagen, en el ejercicio anterior, de 2 y de 6, de los dos, te lo pedí que hallarás, y tú lo hiciste por separado. En uno lo hiciste con 2 y en el otro con 6. En cambio acá cuando tú fuiste a verificar hiciste al mismo tiempo por dos valores distintos de *x*.

M: Claro.
P: ¿Y qué diferencia hay?
M: Porque es diferente hallar la raíz que hallar la imagen.
P: A ver explicá qué diferencias habría para ti.
M: Claro. Que una ecuación tiene una sola imagen. O sea, no, claro, si vos me pedís la imagen de 2, va a tener una sola.
P: Una imagen...
M: Una imagen sola, y es la imagen de 2 sola. Por eso sustituyo en toda la ecuación por 2 y ..., ta, por eso lo hice por separado, primero por 2 y después por 6.
P: ¿Y qué diferencia hay con la ecuación?
M: ¿Con las raíces?
P: Ajá, cuando tú verificás, verdad, que –5 y 6 son las raíces, qué diferencia hay con hallar una imagen?
M: Como que son términos independientes, cada término tiene su raíz. Porque si después, por ejemplo, yo multiplico, antes de hallar las raíces, multiplico un término por el otro me va a dar un término de segundo grado que me van a dar dos raíces.
P: Y estas raíces –5 y 6, aunque tú me dices que son raíces de cada término, ¿son raíces de toda la ecuación Mª Eugenia?
M: Sí.
P: Ajá, y acá –5, cuando tú hallaste la imagen de –5 en la función *g*, ¿qué te dio la imagen?
M: Me dio que era cero.
P: Y acá ¿qué te dio la imagen de 6?
M: También cero.
P: Entonces la imagen de –5 y de 6, ¿cuál es?
M: Cero.
P: Tienen las dos...
M: La raíz...
P: ¿Y tienen distinta imagen –5 y 6?
M: No, es la misma.
P: ¿Y dos números pueden tener la misma imagen?
M: Sí, por qué no? Si los dos son raíces de la función...
P: Pueden tener la misma imagen...
M: Ajá.
P: Entonces, esto que tú me habías dicho acá, que para hallar la imagen de 2 y de 6 lo hacías por separado porque 2 y 6 iban a tener distinta imagen...
M: Ta, podían tener distinta imagen, pero no iban a tener seguro, pero podían tenerla.
P: Así que cómo sería, si la expresión está factorizada o sea con factores entre paréntesis, para hallar la imagen de un número...?
M: Se sustituye, no importa, se sustituye, la *x* por el mismo número en los dos términos.
P: Ajá, pero, si esos números, que tú tenés, resulta que son las raíces de la función, allí como hacés la verificación?
M: Eh, sustituyo en un término por uno y en el otro por otro.
P: Y qué pasaría Mª Eugenia si en la verificación en lugar de sustituir una *x* por –5 y la otra por 6, sustituyeras en las dos –5?
M: Uno de los dos números no me va a dar cero.
P: Entonces, ¿pasa algo?

M: No, en realidad igual iba a seguir siendo raíz de la función porque ya en un término me va a dar cero, pero no iba a ser raíz del otro término.
P: ¿Y tú crees que es necesario que los dos sean cero para que esos números sean raíces de la ecuación?
M: No, puede ser que sea uno solo que me dé cero y tenga solo esa raíz pero a lo que me refiero es que no va a ser raíz del otro término.
P: Sí y entonces, ¿qué pasa?
M: Igual sigue siendo raíz de la ecuación.
P: Y al no ser raíz del otro término, como tú dices, ¿qué va a pasar?
M: No me va a dar cero, entonces voy a tener que buscar otro valor que sustituyéndolo me dé cero para encontrar la otra raíz.
P: Pero tú sabés que el otro es 6.
M: Bueno, entonces sería 6. Entonces sería la imagen...
P: La pregunta es qué pasa si tú sabés que –5 y 6 son las raíces y al momento de verificar, tú a una x le das valor –5 y a la otra x también le das valor –5, en la verificación.
M: Me va a dar una sola de las raíces.
P: Ahí está, y ¿qué pasa?
M: Y, que me va a faltar una raíz.
P: Pero tú ya estás sabiendo que las raíces son –5 y 6, ta?
M: Sí.
P: Entonces al momento de verificar supongamos que a ti se te ocurre sustituir en ambos factores la x por –5, ¿qué está pasando allí?
M: Uno me va a dar cero y el otro, otro valor distinto de cero.
P: Entonces, ¿qué deduces de ello?
M: Que no es raíz de los dos términos.
P: ¿Y entonces?
M: El otro término tiene otra raíz.
P: Sí, ¿y?... pero en cuanto a lo que tú estás tratando de constatar si es raíz de la ecuación o no...
M: Va a ser raíz de la ecuación pero ta, porque sustituyendo en uno de los términos me da cero pero en el otro no, pero igual es raíz de la ecuación.
P: Y tú sentís la necesidad de que los dos tienen que dar cero para que los números sean raíces de la ecuación?
M: Y, si quiero encontrar las raíces, sí.
P: Si lo que estás buscando son las raíces ...
M: Si me pide un ejercicio y me dice encuentre las raíces, yo voy a tener que sí o sí, voy a tratar de despejar la x para encontrar la raíz.
P: Y en cuanto a la sustitución en los dos factores, qué tiene que pasar?
M: Me tiene que dar cero.
P: Los dos cero?
M: Claro.
P: Y puede ser que uno dé cero y el otro no?
M: Y, ahí no encontré la raíz de uno.
P: Y si tú tuvieras la raíz de ese, podrías verificar de otra forma que es raíz? Supónte que tú sustituiste acá las dos x por –5 y uno te dio cero y el otro no. Tú me dices que con eso alcanza para que –5 sea raíz de la ecuación y ¿habría otra forma de verificar que la otra raíz 6 que tenés, es también raíz de la ecuación?

M: Y, sí...Por la otra forma de resolverla, haciendo distributiva y aplicando la fórmula.
P: ¿Y haciendo la verificación? ¿Qué pasa si a las dos *x* les das valor 6?
M: Una me va a dar cero y la otra no.
P: Entonces ¿qué deduces?
M: Que 6 también es raíz de la ecuación. No importa que en el otro no me dé cero, ya sabés que 6 es raíz.
P: Pero digamos que a ti, en cuanto a lo que vos sentís. ¿Qué procedimiento te da más seguridad de que –5 y 6 son las raíces, cuando tú ves que los dos se hacen cero o cuando tu ves que un factor se hace cero y el otro no?
M: Cuando sustituyo en uno –5 y me da cero y cuando sustituyo 6 en el otro y me da cero.
P: Pero lo hacés separadamente o lo hacés en toda la ecuación?
M: Si están así separados por paréntesis los hago por separado.
P: Y la ecuación, ¿cómo la usás para la verificación?
M: Sustituyo acá, sustituyo el –5 acá y me da cero y sustituyo el 6 acá y me da cero.
P: ¿Cómo lo hiciste acá?
M: Sí.
M: Yo quiero saber si para ti esto, tú me dijiste así y así (-5+5)(6-6)=0, pero hoy lo planteaste de otra forma, hoy lo hiciste así, por separado, hiciste –5+5=0 y 6-6=0. Para ti este procedimiento y éste, son lo mismo?
M: Bueno, ta, éste porque ya lo puse directo porque ya sabía que era cero. No precisaba hacer otro tipo de cuenta.
P: O sea, estos dos planteos ¿qué te parecen?
M: Que son parte de la misma forma de resolverlo.
P: O sea, da lo mismo verificar así o verificar así?
M: Sí porque acá ya lo hacés directo, lo que pasa que es una ecuación fácil, lo podés hacer mental, por eso lo hice así nomás..
P. Cuando me decís lo hice mental, ¿qué quiere decir? ¿Qué cuenta hiciste?
M: Hice –5+5 sabía que me va a dar cero y 6-6 me da cero.
P: Ok.

ENTREVISTA A MARIELA SANTÍAS.
3º AÑO DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA. INSTITUTO DE PROFESORES ARTIGAS.

Profesora: Quería que me aclararas un poco la pregunta 3. Dice: *f y g son dos funciones de dominio R. Se sabe que f.g=O, es decir que el producto de f por g es la función nula. ¿qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?* Quería que me aclararas un poco lo que habías contestado.
Mariela: Lo que contesté fue un poco aplicando la Hankeliana.
P: ¿Y qué es lo que contestaste? ¿Podrías traducirlo en palabras?
M: Sí, la función *f* es nula o la función *g* es nula. Después me di cuenta que eso no estaba correcto.
P: Bien. ¿Por qué fue que tu diste esa respuesta? ¿Basada en qué?
M: O sea sin analizarlo mucho, aplicando la propiedad Hankeliana.
P: ¿Qué fue en el enunciado de la pregunta, lo que te hizo pensar en la propiedad Hankeliana?
M: Que el producto de las dos es la función nula.
P: Ajá. ¿La parte que está escrita en lenguaje simbólico o la parte que está escrita en lenguaje verbal?
M: La parte simbólica.
P: Bien, ¿podrías decirme cuál es la función nula?
M: Es aquella que tiene todas sus imágenes cero, les corresponde el cero.
P: ¿Y ahora estarías de acuerdo con esta respuesta que diste?
M: No.
P: ¿Por qué no?
M: Porque después siguiendo lo que seguía más adelante me di cuenta de que depende de la estructura algebraica de la que estemos hablando, si se cumple la propiedad Hankeliana o no. Si la estructura algebraica que tenemos cumple la propiedad Hankeliana entonces se puede utilizar, si no, no, y la estructura de las funciones no la cumple.
P: Ok, bien. Luego tenías la pregunta 4 haciendo la misma pregunta pero en relación al producto de matrices y dice que el producto de dos matrices es la matriz nula. ¿Y tú que respondiste?
M: Igual que la anterior, o sea si el producto de las dos matrices es la matriz nula, bueno, una de ellas dos tiene que serlo, o sea aplicando la propiedad Hankeliana.
P: ¿Qué fue lo que te hizo aplicar la propiedad Hankeliana? Nuevamente en el enunciado, la parte simbólica, la parte verbal...
M: La parte simbólica.
P: ¿Te acordás lo que es la matriz nula?
M: Sí, la que tiene todos los componentes cero.
P: Ok. ¿Y te acordás si la propiedad Hankeliana se cumple en el producto de matrices?
M: No, tampoco. Es una estructura que no la cumple la propiedad Hankeliana.
P: ¿No la cumple?
M: O sea el conjunto de todas, todas las matrices no, hay un subgrupo, una subestructura de matrices que sí. O sea, las que tienen la posibilidad de que sea invertible la matriz y bueno ahí puede ser.
P: ¿Y por qué nombrás a la matriz inversa?
M: Y porque para que se cumpla la propiedad Hankeliana tiene que existir el inverso.

P: Ajá, ¿el inverso en la multiplicación decís tú?
M: Ajá.
P: Vamos ahora a la pregunta 6. *Se sabe que b.c=0. ¿Qué puedes deducir sobre b y c a partir de esta información?* ¿Y tú que contestaste?
M: Que *b* es igual a cero o *c* es igual a cero.
P: ¿Qué representan para ti *b* y *c*?
M: Son elementos de un conjunto, de una estructura que cumple la propiedad Hankeliana.
P: ¿Y podrías haber dado otra respuesta para la parte (i)?
M: Y, podría quizás haber puesto que *b* es igual a cero o *c* es igual a cero si y solo si se cumple la propiedad Hankeliana. Porque claro, ahí no me aclaran nada qué son los elementos.
P: Pero a ti de alguna forma la pregunta te invitó a contestar que *b* era cero o *c* era cero, ¿Por qué ese aliento a contestar que *b* era cero o *c* era cero?
M: Y, por lo mismo. Viéndolo así como que me volcaba a aplicar la propiedad Hankeliana sin tener en cuenta los elementos. Cuando me preguntaba, bueno, qué representan *b* y *c*, ahí me di cuenta que estaba faltando algo en los elementos que me estaban dando continuamente. Como que no tuve reparo desde el comienzo quiénes eran los elementos que se estaban multiplicando. Y después cuando me dijeron funciones o lo que fuera tampoco me puse a pensar si se cumplía la propiedad Hankeliana.
P: ¿Qué es lo que a vos te parece que te lleva a contestar que *b* es cero o *c* es cero, sin digamos, sin mediar demasiada reflexión? Como que uno tiende, no sé si por reflejo a contestar eso. ¿Qué es lo que te parece que incide en la respuesta que vos das?
M: Es una propiedad que aplicamos muchísimo en la resolución de ecuaciones. Como que automáticamente la queremos trasladar a otras estructuras sin pensar bien qué propiedades cumplen esas estructuras o sea en primera instancia. Quizás si fuera otra pregunta la reflexionamos, pero es una propiedad que la tenés incorporada, que la aplicamos continuamente en la resolución, tratamos siempre de factorizar para hallar las raíces más pronto o cosas de ese tipo.
P: ¿Y tú conocés alguna estructura donde no se cumpla la propiedad Hankeliana?
M: La estructura de las funciones, la estructura de las matrices. Pienso que también en la composición de movimientos. Me imagino que no se debe cumplir la propiedad Hankeliana.
P: Ya estaríamos hablando de composición de funciones y aquí estamos hablando de una cierta función producto, no sé, habría que pensarlo. Quería que me explicaras un poquito la pregunta 5, no entendí bien la respuesta.
M: Lo que quise decir fue como que en la intersección de los dos dominios que una de las funciones tenga ciertas imágenes cero que la otra no tenía. O sea, de lo que quise hablar fue de la intersección de los dominios.
P: Pero viste que los dos dominios son R.
M: Lo que pasa que yo ahí me metí a generalizar. Si las dos tuvieran dominio R, más allá de que coincidieran o no, como que si en una de ellas las imágenes no son nulas, en la otra tienen que serlo necesariamente.
P: Y tú aquí, ¿qué quisiste poner exactamente cuando escribiste *g=0 o f=0*, no sé si es cero o ϑ.
M: Ahí lo que quise poner es que la función en determinados valores de la variable tomara el valor cero y que la otra función no tomara y que en la unión de todo R, uno u otro tomaran valor cero.

P: ¿Es lo mismo que *f* sea la función nula a que *f* tome a veces valor cero?
M: No, no. Lo que pasa que no supe ponerlo. O sea, en el momento lo que quise escribir y no supe explicarlo... Lo que quise poner fue que tomara en determinados intervalos, esto así no está bien escrito.
P: Me quedó claro lo que quisiste decir. Quería en esta última pregunta que me explicaras también lo que quisiste decir.
M: O sea que esto se iba a cumplir, osea, la propiedad Hankeliana, siempre y cuando tengamos en cuenta que los elementos son de una estructura que cumple la propiedad Hankeliana y en el caso de que fueran funciones como venía tratándose antes, que en el dominio de las funciones se cumpla justamente que una u otra tomen valores cero de forma que en toda su unión, en todo R, tenga como imagen en el producto cero.
P: ¿Y *b* y *j* para ti qué representan?
M: Y ahí sería lo mismo que había contestado antes. *b* y *j* no sé si hace referencia a lo anterior.
P: Es una pregunta final.
M: *b* y *j* van a ser elementos de un conjunto que no sabemos quienes son.
P: ¿Y qué podrían representar para ti?
M: Números, si son reales se cumpliría la propiedad Hankeliana y no hay ningún problema. Si fueran funciones, la propiedad Hankeliana no la cumple, la función *b* en determinados intervalos podría ser cero, que podrían coincidir con *j* o no para que dé la función nula en la unión de los intervalos que tiene que dar cero. No se me ocurren muchos más.
P: No se te ocurren más...
M: Matrices también.
P: O sea que podrían representar números, funciones, matrices...
M: No sé otros elementos, ahora...
P: No se te ocurre.
M: Y no sé. Dentro de las funciones si son isometrías, pero estaríamos trabajando en otro campo. No sé. Otro tipo de estructuras algebraicas vectoriales.

ENTREVISTA A MARTÍN ALVARENGA
6º AÑO, OPCIÓN MEDICINA. LICEO Nº 4

Profesora: Te acordás que el primer ejercicio era resolver la ecuación $(2x-6)(18-2x)=0$.
Martín: Sí.
P: Tú la resolviste. Explicaste: *"igualo cada término a cero"*. ¿Me podés explicar por qué igualás cada término a cero para resolver la ecuación?
M: Para no multiplicar término a término, o sea es más rápido igualar cada paréntesis a cero.
P: ¿Y qué es lo que estás aplicando cuando decís igualo cada paréntesis a cero?
M: No, no sé el nombre de la ley.
P: Pero, decímelo con tus palabras, no importa que no sepas el nombre.
M: Estoy igualando a cero y despejo el término con x.
P: Pero por qué justo igualás a cero y no a otro número?
M: Ah!, porque es el neutro, porque cuando pase el otro número no voy a tener que sumar nada. O sea, es como me lo enseñaron.
P: ¿Lo hacés porque es como te enseñaron, Martín?
M: Sí, tiene su explicación pero no.
P: ¿Y si vos tuvieras $(2x-6)(18-2x)=2$ en lugar de igual a 0, ¿cómo lo resolverías?
M: Capaz que haría lo mismo, pasándolo, pero cuando paso el término igualando cada término a 2...
P: A ver cómo lo harías, Martín?
M: $2x-6=2$
$2x=8$
$x=4$

$18-2x=2$
$-2x=16$
$x=-8$
P: ¿Y las raíces de la ecuación cuáles serían?
M: Estas dos, 4 y –8.
P: ¿Y podrías verificar si 4 es raíz Martín?
M: En el término que me dio sustituir por 4 la x. En $2x-6$ sustituiría la x por 4, 2.4 pasaría así ... y tendría que restarle este 2 y me tendría que dar...
P: No te entendí Martín, ¿qué es lo que te tendría que dar?
M: No me daría, o sea, haciéndolo así igual a 2, haciendo ese método, igualando cada término, no me daría raíz, o sea, no sería la raíz.
P: No entendí. Cuando vos sustituís la x por 4, ¿qué pasa?
M: Sería 2 por 4... 8 menos 6... 2 no me daría. Me daría igual a...
P: ¿Y qué es lo que te tendría que dar?
M: Me tendría que dar 2 por 3, sería para que me dé 0 el término.
P: Pero acá...
M: El tema es que yo acá sustituyo, igualo a 0 porque cada término tiene que ser cero para que yo lo iguale a cero, o no sé, capaz que en este caso uno de los dos, para que al multiplicarlos... me tendría que dar cero.
P: Vamos a la pregunta 17: Verifica si 4 y 3 son raíces de $x^2-7x+12=0$. Tú resolviste la ecuación. ¿Podrías hacerlo sin resolver?

M: Sí, sustituyendo.
P: ¿A ver cómo lo hacés?
M: $4^2-7.3+12=0$
$16-21+12=0$
$28-21=0$ ✕ *(El alumno hace una cruz al lado de lo que escribió)*
No me da.
P: A ver, verificá solamente si 3 es raíz.
M: $3^2-7.3+12=0$
$9-21+12=0$
$21-21=0$
P: ¿Por qué no habrá dado hoy?
M: Quizás porque sustituí en x^2 la x por 4 y en $-7x$ la x por 3.
P: ¿Y por qué te pareció que podías hacerlo así?
M: Porque al ser las dos raíces, yo tenía la misma incógnita pero dos veces en la x, dos veces, como 4 y 3 son las raíces, sustituyendo una por 4 y otra por 3, pensé que me podría llegar a dar cero.
P: Ajá, ahora terminá la verificación con 4 ¿y? ¿da?
M: $4^2-7.4+12=0$
$16-28+12=0$
$28-28=0$
P: ¿Y? ¿Da?
M: Sí, da.
P: Estas dos verificaciones, ¿te permiten afirmar que 4 y 3 son raíces de la ecuación?
M: Sí, me lo permiten porque en la ecuación al sustituir la x por ese número, por 4 o por 3 separadamente, me da cero.
P: Bien. Vamos ahora a verificar si 3 es raíz de $(2x-6)(18-2x)=0$, ¿cómo lo harías?
M: $\underbrace{(2.3-6)}\underbrace{(18-2.3)}=0$

$0 \times 12=0$
Este término da cero y el otro doce. Cero por doce da cero entonces 3 es raíz de la ecuación.
P: Verifica si 9 es raíz de la ecuación.
M: $\underbrace{(2.9-6)}\underbrace{(18-2.9)}=0$

$12 \times 0=0$
Daría doce y este cero entonces 9 también es raíz.
P: ¿Cuáles son las raíces de la ecuación?
M: Serían 3 y 9.
P: ¿Cómo verificás que 3 y 9 son las raíces? (Se escribe en la hoja: *Verifica que 3 y 9 son raíces de* $(2x-6)(18-2x)=0$)
M: Haciéndolo por separado de nuevo o sustituyendo en este término el 3 y en este término el 9.
P: A ver hacelo.
M: $\underbrace{(2.3-6)}\underbrace{(18-2.9)}=0$

$1 \quad 0$

Me dan los dos términos cero.
P:Y para que el producto te dé cero, ¿los dos términos, como tú dices, tienen que ser cero?
M: No, como me dio acá arriba, conque uno me dé cero, el producto en total me va a dar cero.
P: Bien, entonces tú dices que para verificar si 3 y 9 son raíces, lo podés hacer por este procedimiento o por este otro, las dos son para ti válidas...
M: Por dos formas, las dos son válidas.
P: Y confrontando esto con lo que hiciste hoy, tu sustituiste una *x* por 4 y otra *x* por 3 y finalmente no verificaba y acá sustituiste por separado y verificó[70].
M: En ecuaciones de este tipo no me sirve sustituir una *x* por un número y la otra por la otra raíz, tengo que hacerlo por separado.
P: Pero tu dices que en este otro tipo de ecuaciones que están factorizadas puedes hacerlo...
M: Por los dos tipos.
P: Por los dos tipos. Aquí, tú Martín, en esta expresión, cuántas ecuaciones ves[71]?
M: Depende. Una ecuación con dos términos.
P: Es una ecuación con dos términos...Cuando decís la palabra término a qué te referís concretamente, a ver si me lo podés explicar allí con lo que está escrito.
M: Que los paréntesis separan en dos términos la ecuación: $2x-6$ y $18-2x$.
P: ¿Y de qué grado sería la ecuación que está planteada?
M: Esta en realidad sería de segundo grado. O sea, si hago el producto de la ecuación, me quedaría que es una ecuación de segundo grado. Si la tomo como dos ecuaciones diferentes, como yo lo hago, para igualar a cero, serían dos ecuaciones de primer grado.
P: Lo que no entiendo bien es lo siguiente: o sea, esta ecuación tú la podés ver como una ecuación de segundo grado o también la podés ver como...
M: Para hallar las raíces yo la separo en dos ecuaciones y esas ecuaciones son dos ecuaciones de primer grado.
P: Claro, pero la ecuación, esta, ¿es una ecuación de segundo grado o son dos ecuaciones de primer grado?
M: No, yo acá te diría que es una ecuación de segundo grado.
P: Y para resolverla?
M: Y para resolverla yo la tomo como dos ecuaciones de primer grado.
P: A ver Martín, qué pasa si aquí aplicás distributiva, tenés $(2x-6)(18-2x)=0$.
M: Aplico.
$36x-4x^2-108+12x$
$-4x^2+48x-108=0$
Queda una ecuación de segundo grado.
P: Y esta ecuación, ¿qué raíces va a tener Martín?
M: Supuestamente las mismas que hallé.
P: O sea?
M: 3 y 9.
P: ¿Cómo harías para verificar que 3 y 9 son las raíces?
M: Sustituyo...puedo utilizar la fórmula, hallar las dos raíces.
P: Y sin necesidad de aplicar la fórmula? ¿Cómo podrías hacerlo?
M: Sustituyo en la ecuación a una de las raíces o sea por separado.

---

[70] Se refiere al trabajo que realizó el alumno en $x^2-7x+12=0$
[71] Se refiere a la ecuación $(2x-6)(18-2x)=0$.

P: A ver, ¿por qué por separado?
M: Porque hoy había probado y no me había dado.
P: Ajá.
M: $-4.3^2+48.3-108=0$
P: Verificó?
M: Da cero. Lo hago con 9?
P: No, no es necesario. Vamos a usar un modelo. No sé si viste en las calles, que a veces se coloca un cable para contar la cantidad de autos que pasan. Lo viste alguna vez?
M: No.
P: Se coloca un cable grueso sobre la calle y a medida que van pasando los autos, ese cable va contando los autos que pasan por allí. Se usa para evaluar la necesidad de semáforos en una esquina.
Vamos a suponer que a vos te dicen que para evaluar la necesidad de semáforos en una esquina, a vos te dicen que la cantidad de autos que pasan está dada por esta expresión:

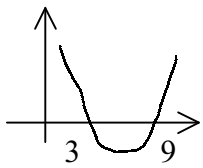
$$A=(2x-6)(18-2x)$$

donde x es la hora del día. x es la hora del día y el resultado de sustituir x por una determinada hora del día, te da la cantidad de autos que pasaron a esa hora.
M: Sí.
P: Si querés averiguar cuántos autos pasaron a la hora *2*.
M: A la hora 2...sería....
$A=(4-6)(18-4)$
$A=(-2)(+14)$

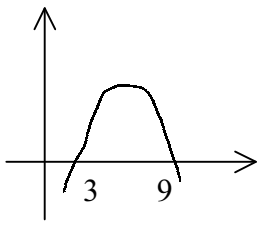
A= -28

P: ¿Qué daría?
M: Daría que *A* es *–28*.
P: ¿Puede ser que a las *2* de la mañana pasen *–28* autos?
M: No, no está bien.
P: No está bien, quiere decir que esa fórmula, por lo menos para evaluar la cantidad de autos a las 2 de la mañana no sirve.
M: Está mal.
P: Quizás sirva en otras horas. Por ejemplo a las 17 horas...
M: $A=(2.17-6)(18-2.17)$
$A=28(-16)$
Daría negativo también. Osea que a las 17 tampoco sirve.
P: ¿Tenés idea de cómo poder evaluar en qué período de tiempo sirve esa fórmula?
M: ¿En qué período de tiempo?
P: Es válida esa fórmula. Porque a las 2 de la mañana dio negativo y a las 17 horas también dio negativo.
M: Y...
P: ¿Cómo necesitás que te dé el número A?
M: Necesito que me dé positivo pero...Necesito que al sustituir... No me va a dar nunca positivo.
P: Nunca va a dar positivo? ¿A qué hora no pasó ningún auto Martín?
M: A la 0 hora.
P: A la 0 hora te va a dar que no pasó ningún auto?
M: O sea la ecuación me va a dar cero.
P: A ver cómo lo plantearías?

M: Ah, no. No me va a dar cero. Ponele a las 3 horas y a las 9 horas.
P: O sea que a las 3 y a las 9 no pasó ningún auto, daría...
M: Cero.
P: ¿Cómo lo hiciste Martín?
M: Es la misma ecuación que tenía cuando hallé las raíces.
P: Bien, y tú sabés cuál es la gráfica asociada a esa fórmula?
M: A esta?
P: Sí.
P: Tenés las raíces, no? Y esta expresión qué grado tiene?
M: Grado 2.
P: ¿Y qué gráfico tiene asociado?
M: Una curva que va a cortar en las dos raíces.
P: ¿Y cómo se llama esa curva? ¿Te acordás?
M: Una parábola.
P: Una parábola que va a cortar al eje de las *x* en...
M: En 3 y 9.
P: En 3 y 9. ¿Y te acordás de la concavidad de esa parábola cómo va a ser?
M: No sé si es positiva o negativa, no me acuerdo bien.
P: Acá tenés la expresión desarrollada, que capaz te ayuda.
M: Negativa va a ser.
P: Te animás acá a hacer un esbozo?
M:



P: ¿Y cómo dijimos que era la concavidad?
M: Ah! Negativa, es al revés.



P: Entonces, ¿en qué horario tiene sentido esa fórmula? ¿Cuándo el número de autos da positivo? ¿En qué horario?
M: Entre 3 y 9.
P: Entre 3 de la mañana y 9 de la mañana. Bien. Entonces, tú me dijiste que si querés calcular el número de autos a las 3 de la mañana, ¿qué cuenta hacés Martín?
M: Sustituyo la *x* por 3.
A=(2.3-6)(18-2.3)
A=0 . 12
A=0
P: ¿Cuánto te da?
M: Me da cero.

P: Y si te pido que calcules el número de autos a las 5 de la mañana y a las 6 de la mañana, ¿cómo lo calcularías?
M: De la misma forma.
P: ¿Cómo es de la misma forma?
M: A=(2.5-6)(18-2.5)
A= 4 . 8
A=32
32 autos a las 5 de la mañana.
A= (2.6-6)(18-2.6)
A=6 . 6
A=36
36 autos.
P: Y si interpretamos lo que tú hiciste aquí en este otro planteo donde yo te pedí que verificaras que 3 y 9 son raíces. Tenemos la misma expresión que nos da el número de autos y tu aquí a *x* le diste el valor 3 y aquí a *x* le diste el valor 9.
M: Sí.
P: Esto que tú estarías evaluando aquí, ¿lo podríamos interpretar como la cantidad de autos a las 3 de la mañana o a las 9 de la mañana? ¿A qué hora sería este cálculo del número de autos que tu hiciste aquí?
M: Sería a las 3 de la mañana. Ah!... Sería en el período... yo utilicé, sustituí, en cada término por una raíz diferente.
P: Ajá, pero te acordás que la *x* dijimos que designa la hora del día.
M: Claro, digo, si es una ecuación sola no te puedo decir si me dice que hay 0 autos a las 3 de la mañana o a las 9. Sé que en cada término, a las 3 de la mañana me da cero en uno y a las 9 de la mañana me da cero en otro.
P: Y a ver, en este caso la variable *x* te está indicando la hora del día, estaría valiendo las 3 de la mañana y las 9 de la mañana. ¿Puede ser que al mismo tiempo sean las 3 de la mañana y las 9 de la mañana?
M: No, por eso te digo que no, o sea, en la ecuación no te puedo decir que a las 3 de la mañana o a las 9 pasan 0 autos.
P: Y para que tú me pudieras decir cuántos autos pasan a las 3 de la mañana y a las 9 de la mañana, ¿qué planteo habría que hacer Martín?
M: Sustituir las dos *x* por el mismo número o sea, por la misma raíz, las dos por 3 o las dos por 9.
P: Bien. Entonces, entre este planteo que hiciste aquí y el que hiciste aquí, ¿cuál te parece adecuado para contestar al problema de los autos y los semáforos?
M: (Señala el correcto)
P: Y si nosotros ahora salimos del contexto del problema y nos olvidamos de que estamos hablando de autos y semáforos y solamente queremos evaluar si 3 y 9 son raíces de la ecuación?
M: Sí.
P: Allí, puedes hacer...
M: Puedo hacer cualquiera de los dos.
P: Y en el contexto del problema por qué te parece que la *x* no podía valer a la vez 3 de la mañana y 9 de la mañana?
M: En el contexto de autos?
P: Ajá.

M: Porque estamos hablando de horas. No puede ser, no sería una situación posible.

ENTREVISTA A SEBASTIÁN PEREIRA
6º AÑO, OPCIÓN MEDICINA. LICEO Nº 4

Profesora: Te acordás acá cuando contestaste: *Se sabe que f y g son dos funciones de dominio R, se sabe que f por g es la función nula, ¿qué puedes deducir sobre f y g a partir de esta información?*, y vos contestaste que *f* o *g* eran la función nula. ¿Quiero saber por qué contestaste eso?
Sebastián: Si una de las dos funciones era la función nula, al multiplicar, el producto iba a serlo.
P: El producto es la función nula y vos contestaste que una u otra tienen que ser la función nula. A ver decímelo de vuelta.
S: Si una es la función nula, o sea que daba cero, al multiplicar por otra ya está, te daba cero, por eso.
P: ¿Y hubo algo en particular de lo que acá está escrito que te hiciera pensar en eso?
S: Esta parte "*f.g=O*"[72] entonces tipo agarré y dije *f* es cero o *g* es cero, si no, no hay forma.

[72] Específicamente señala lo que está escrito con notación simbólica.

ENTREVISTA A VIRGINIA BRUNETT.
6º AÑO, OPCIÓN MEDICINA. LICEO Nº 4.

Profesor: Vamos a mirar la pregunta 7 que decía: *Resuelve la ecuación $x(x-8)=0$. Explica cómo lo haces. ¿Cuántas soluciones obtuviste? ¿Cuáles son?*
¿Te acordás? Contame cómo lo hiciste.
Virginia: En realidad apliqué la distributiva por costumbre de las otras pero...
P: O sea en las anteriores que habías resuelto, habías aplicado propiedad distributiva.
V: Ta, pero podría hacerlo así, directamente. Si lo tengo así ya sé que $x=0$ o $x-8=0$.
P: Y cuando tú me decís $x=0$ o $x-8=0$, ¿qué es lo que estás aplicando?
V: El nombre no lo sé.
P: Aunque no sepas el nombre, ¿cuál es la idea de lo que estás aplicando?
V: ¿Cómo? Buscando las raíces.
P: Sí, pero, ¿por qué si $x(x-8)=0$ a ti te parece que $x=0$ o $x-8=0$?
V: Porque uno de los dos tiene que dar cero para que el resultado sea cero.
P: Entonces tú resolviste...
V: Sí, pero son dos las soluciones.
P: ¿Qué raíces encontraste?
V: 0 y 8.
P: Y tú aquí habías contestado que tenías una raíz que era 8.
V: Pero son 0 y 8.
P: ¿Y por qué aquí te pareció que había solo una raíz, 8?
V: No reaccioné, no me acordé.
P: ¿Y aquí qué hiciste?
V: Pasé la x al otro lado e hice lo mismo que el otro, factorizar y después igual que el otro. También son dos raíces.
P: ¿Cuáles son?
V: 0 y 6.
P: ¿Por qué aquí no lo habías considerado?
V: No me di cuenta de ponerlas.
P: ¿Y verificará la raíz cero?
V: ...
P: ¿Cómo harías la verificación para $x=0$?
V: $x=0 \qquad 0^2 = 6.0$
$0 = 0$
Ta.
P: Decime, ¿puede tener una ecuación raíz cero?
V: ...puede ser.
P: ¿Te animás a escribir una ecuación que tenga raíz cero?
V: No hay.
P: ¿No hay ninguna? ¿No es posible escribir una ecuación que tenga raíz cero?
Bueno, a ver, escribí x paréntesis $2x-6$ igual 0, ¿cómo la resolvés?
V: Ah, pero esta sí tiene raíz cero. La resuelvo y da cero me parece.
O: A ver...
V: $x(2x-6)=0$
$x=0 \quad o \quad 2x-6=0$
$2x-6=0$

$2x=6$
$x=6/2$
$x=3$
$x=0$ $\quad 0(2(0)-6)=0$
P: Entonces...
V: Da cero.
P: ¿Por qué?
V: Porque cero multiplicado por cualquier cosa da cero.
P: Bien, entonces qué raíces tiene la ecuación?
V: 0 y 3.
P: 0 y 3, ok. Entonces, ¿podés plantear una ecuación que tenga raíz cero?
V: ¿Cualquiera?
P: Cualquiera que tenga la *x* multiplicando cualquier cosa: $x(x+1)=0$.
P: ¿Y de qué grado es la ecuación que escribiste?
V: De primer grado, no, de segundo grado. Si hacemos todo es de segundo.
P: O sea que la ecuación planteada... de qué grado es?
V: Así como está planteada? De primer grado. Si la desarrollás, si sacás los paréntesis es de segundo grado.
P: ¿Y esta que tenías acá[73] de qué grado es?
V: Lo mismo.
P: De?
V: De primer grado y si la planteás es de segundo. Creo...
P: Ok. ¿Y esta ecuación[74] que raíces tiene?
V: 0 y –1.
P: O sea que para ti el grado de la ecuación de qué depende Virginia?
V: De la *x*.
P: Pero depende de cómo está expresada... porque tú me dices que si está escrita de esta forma es de primer grado, en cambio si desarrollás tiene grado dos. ¿Entonces de qué depende para ti el grado de la ecuación?
V: No... en realidad sería de grado dos, siempre, como es una multiplicación... va, en este caso.
P: O sea que para ti sería de...
V: Según como esté planteada... la desarrollás y ves el grado.
P: ¿Y si no la desarrollo y está así[75]?
V: También.
P: ¿De qué grado es?
V: De segundo.
P: De segundo, sí? Bien Virginia, te acordás de esta actividad? Te daban un conjunto y definían una multiplicación a través de esta tabla. Luego te decían que *a* y *b* pertenecían al conjunto A, se sabe que $a.b=0$, ¿qué puedes deducir sobre *a* y *b* a partir de esta información? Dijiste que $a=0$ y *b* es cualquiera o que *a* es cualquiera y $b=0$. O sea que a ti te parece que en esta operación multiplicación que se ha definido se sigue cumpliendo lo que hoy me contabas...

---

[73] Se refiere a $x(2x-6)=0$.
[74] Se refiere a $x(x+1)=0$.
[75] Se refiere a la expresión factorizada.

V: No, no porque en este caso no se cumple, según que números multiplique, si multiplicás 4 por 1 no da cero. Si multiplicás cualquiera por cero da cero.
P: Y qué otra cosa pasa en referencia a lo que estamos hablando...
V: Sí pero también puede ser 2 por 3 que da cero o 4 por 3 que da cero.
P: Entonces, ¿se cumple esta propiedad, la que tu dices que...
V: No porque en este caso no puede ser cualquiera.
P: Y aquí cuando te reiteran la pregunta: *Se sabe que c.d=0, ¿qué puedes deducir sobre c y d a partir de esa información? ¿Qué representan para ti c y d?*
V: Todos los números de este cuadrado.
P: Te parecen las dos preguntas iguales o hay alguna diferencia[76]?
V: Mirando el número de ejercicio, es otro ejercicio que no tiene nada que ver con éste.
P: Entonces ¿qué contestás?
V: Que *c=0* o *d=0*, uno de los dos tiene que ser cero para que dé cero.
P: Entonces, cuando tú me dices que uno de los dos tiene que ser cero, ¿en qué estás pensando?
V: En números.
P: Qué tipo de números.
V: 0, 1, -1, cualquiera, decimales, fracciones, pero uno tiene que ser cero.
P: Y esta respuesta, ¿cambiaría si te dijeran que *c* y *d* pertenecen al conjunto A?
V: Sí, porque me fijo en la tabla y según lo que me dé la tabla, lo que me dé cero, esos números van a ser los que sirven.
P: Entonces, ¿podrías dar una respuesta que incluyera tanto lo nuevo que descubriste en este ejercicio como lo que conocías de antes, la propiedad con los números de que si dos números multiplicados dan cero, uno de los dos debe ser cero? ¿Podrías dar una respuesta que englobara las dos situaciones, la anterior y la nueva?
V: Si algún número de los que están acá da cero? ¿Es eso?
P: Si yo sé que *c.d=0*, ¿qué puedo deducir sobre *c* y *d*? Si *c* y *d* fueran de A, ¿qué puedo deducir?
V: Puedo encontrar números que multiplicados entre sí den cero.
P: Sí, ¿y esos números son necesariamente cero?
V: No.
P: En cambio si *c* y *d* son números... de cuáles...
V: Cualquiera que conocemos.
P: ¿Qué es lo que pasa si multiplicados nos dan cero? ¿Qué podemos deducir?
V: Que uno es cero y el otro no o que los dos son cero.

[76] Se refiere a las preguntas I(c) y II

ENTREVISTA AL PROFESOR GUSTAVO FERNÁNDEZ
EGRESADO DEL INSTITUTO DE PROFESORES ARTIGAS
3 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE

Profesor: Te propuse resolver en R una ecuación y verificar[77].
Gustavo: ¿Resuelvo?
$2x-6=0 \rightarrow x=3$
$18-2x=0 \rightarrow x=9$

Ver.:

$$x=3 \quad \rightarrow \quad (\underbrace{2.3-6}_{=0})(\underbrace{18-2.3}_{12})=0$$

$$x=9 \quad \rightarrow \quad (\underbrace{2.9-6}_{12})(\underbrace{18-2.9}_{=0})=0$$

P: ¿Cómo realizaste la verificación?
G: Sustituí el valor de *x* encontrado en cada uno de los factores, vi que uno de ellos se hacía cero y por tanto ese producto debía ser cero.
P: Ajá. ¿Y no podrías hacer la verificación, digamos, en un solo renglón, sustituyendo en el primer factor la *x* por 3 y en el segundo factor la *x* por 9?
G: De hecho lo hice en un solo renglón.
P: No, usaste dos renglones, uno para *x* igual 3 y otro para *x* igual 9.
G: Ah! sí.
P: Yo lo que te pregunto es si no se puede hacer la verificación sustituyendo en el primer factor la *x* por 3 y en el segundo factor la *x* por 9.
G: No, no se puede.
P: ¿Por qué no se puede?
G: El valor de *x* tiene que ser uno solo.
P: ¿Por qué?
G: No se sabe...eh....(suspiro) En el trabajo con funciones por lo menos, uno le da valores a *x* de a uno.
P: ¿Y tú allí dónde estarías viendo una función?
G: No, no, no es que la haya acá, acá es una ecuación ya sé. Pero podría trasladar ese trabajo que hago con funciones, quizás, acá, al trabajo con ecuaciones.
P: ¿Cómo lo trasladarías?
G: Lo traslado en ese sentido, en el sentido de que cuando trabajás con funciones, el valor que le das a *x*, es uno solo.
P: ¿Y tú me sabrías decir, dentro, digamos, ya que estás mencionando funciones, dentro de la teoría de funciones, en qué parte dice que la *x* toma un valor a la vez o como quieras decirlo?
G: En realidad lo que se me ocurre es que se quiere encontrar el correspondiente de un determinado valor de *x*, entonces como que carece de sentido darle dos valores a *x*.

[77] Resolver en R *(2x-6)(18-2x)=0* y verificar.

P: ¿Y en el caso en que dos reales tuvieran la misma imagen?
G: ¿Qué pasa? No hay problema, dos reales distintos podrían tener la misma imagen.
P: Podrían tener la misma imagen y si la expresión analítica de la función está factorizada yo podría hallar la imagen de 3 y de 9 dándole a una x valor 3 y a la otra x valor 9 y tendría la imagen cero.
G: Pero allí no estoy hallando el correspondiente de un determinado valor de x.
P: ¿Qué estoy hallando? ¿La imagen de los dos al mismo tiempo?
G: No, claro que no. Aparte no tiene sentido pensar que estoy hallando la imagen de los dos al mismo tiempo, pensar que son dos números reales, en el caso en que el dominio sea R, estaría pensando que tienen la misma imagen, de hecho no tiene por qué ser así.
P: Resumiendo. ¿En qué parte de la teoría a mí me dicen que la x toma un valor a la vez? ¿En qué parte de la teoría está explicitado? Si yo la matemática la estudio de una obra matemática....
G: Quizás en la misma definición de algún modo está dicho eso.
P: ¿En qué definición?
G: En la definición de función, no sé se me ocurre a ver...cuando uno parte de que todo elemento del dominio tenga correspondiente y sea único, ahí de algún modo, está pensando en cada uno de los elementos en forma individualizada.
P: Claro, pero en la definición de función, no necesariamente la función está dada por una expresión analítica que es lo que en este momento estamos trabajando. Ahora nos interesa una función dada por su expresión analítica. El concepto de función es independiente de la función definida a través de una expresión analítica.
G: ¿Cómo?
P: Yo puedo definir una función abstracta de un conjunto $\{a, b, c\}$ en un conjunto
{*, □, ▲, ☆}.
G: Sí, ¿y?
P: Y allí no hay una sustitución, no hay... un asignarle un valor a x.
G: Bien, ¿y?
P: Porque tú me decías que de la definición de función posiblemente surgiera eso de asignarle un valor a la x.
G: No, no, de asignarle un valor no. La cuestión está en que cuando trabajo con funciones a través de su expresión analítica, uno va a recurrir a la definición de función que es mucho más amplia y engloba este tipo de funciones que están dadas por expresiones analíticas.
P: No entiendo bien en qué parte de la definición de función vos establecés el vínculo con...
G: Es que quizás sea un vínculo implícito que hay ahí... No sé, cambiando de tema porque en realidad no lo sé resolver, por otro lado cuando aparece la x, en principio pretendo quizás por una cuestión de identidad, que cuando en esa expresión está la x, la x sea sustituida las veces que aparece por un mismo número. No, no pienso en que la x vaya a valer 2 y 3 al mismo tiempo, si está representada por una letra x.
P: ¿Me estás hablando de una función o de una ecuación?
G: No importa, lo que sea.
P: ¿Eso que vos me estás diciendo es algo que está explícito en la obra matemática o es algo que se asume tácitamente?
G: Eh..... quizás sea como un acuerdo tácito, no, no sé si se explicita, creo que no, creo que se entiende o se sobreentiende, quizás, que cuando en un momento determinado se está trabajando puntualmente con una expresión, el valor que se le asigna a esa letra en ese momento puntual es el mismo.

P: ¿Cómo catalogarías eso? ¿Una convención entre profesor y alumno? ¿O tiene un respaldo teórico?
G: Quizás tenga una raíz en los propios principios de la lógica Aristotélica, en el Principio de Identidad.
P: ¿Y cuál es el principio de Identidad?
G: Cada cosa es igual a sí misma, no sé si cosa o ... Entonces $x=x$ y si x vale 3, en ese momento puntual en que la estoy utilizando, cuando sustituya la x, si bien aparece más de una vez, siempre la voy a sustituir por el mismo valor, no se me ocurre que x pueda admitir, ya digo, en un momento puntual, más de un valor.
P: ¿Y si a un alumno se le ocurriese sustituir por dos valores diferentes a la x en los dos factores?
G: Y quizás vaya contra el principio y yo diría que está mal, y me parece...
P: ¿Y cómo le justificarías que eso está mal?
G: Y depende en el nivel que lo esté enseñando.
P: Si estás en 3º año de liceo.
G: Puedo simplemente decir, si yo quisiera que de algún modo, si las letras, si la x aparece dos veces en una expresión, si esas letras estuvieran representando a números distintos necesariamente deberían estar, deberían aparecer letras distintas.
P: ¿Y por qué razón?
G: Por el principio, quizás, de Identidad. No sé.
P: ¿O sea que eso cómo se negociaría con el alumno?
G: Es más porque, en una demostración si yo llego a ...de algún modo a demostrar un teorema, llegando a través de una sucesión de si y solo si a que $a=a$, admito que el teorema está demostrado.
P: Claro, pero yo también podría demostrar el algún teorema que $x=y$.
G: Sí podría ser. Pero es distinto a lo que estamos tratando. O sea, el convenio es que si las letras son iguales representan en un momento determinado el mismo número.
P: Es un convenio entonces.
G: Si las letras son distintas, podrán estar representando números distintos o eventualmente en una situación determinada podrán estar representando el mismo.
P: Es un convenio entonces.
G: Es que los principios de la lógica, son de algunas forma un convenio. ¿De dónde salen? Y, ¿saldrán quizás de un análisis de cómo funciona el pensamiento? Al menos el pensamiento occidental, porque el pensamiento oriental admite principios que no admiten las leyes Aristotélicas.
P: ¿Vos crees que esos convenios habitualmente, o en lo que es tu experiencia docente, esos convenios son explicitados por el docente al alumno o se dejan, digamos, como algo encubierto que no amerita ser conversado o que el docente teme que no es lo suficientemente matemático como para ser explicitado a los alumnos?
G: Me parece que no es un tema de que amerite ser o no explicitado. Me parece que pasa por una cuestión de sobreentender y quizás de no tener la capacidad de percibir que eso necesita ser explicitado. Me parece que no es una cuestión de subestimar determinadas ideas sino que me parece que pasa, quizás, por una incapacidad de darnos cuenta cuándo determinados conceptos o determinadas ideas que resultan obvias o más bien son incuestionadas porque las manejamos con tanta frecuencia y con tanta soltura que no nos hemos puesto a pensar que quizás sea necesario especificar su uso.
P: ¿Y vos crees que para el alumno son obvias esas reglas de juego?

G: No pero ese es el desafío o quizás uno de los desafíos de la didáctica de la matemática. Claro porque de algún modo, que se vuelvan consciente determinados usos.....me parece entonces, decía, de la importancia de volver consciente determinadas prácticas que en ellas deliberadamente se establecen supuestos y que quizás para quienes están aprendiendo no sean obvios, eso me parece que es uno de los problemas a los que se tienen que enfrentar los docentes.
P: Vos me dijiste que de acuerdo al nivel de los alumnos sería el tipo de explicación que podrías dar a los alumnos para negociar, de alguna manera, que una misma letra representa un mismo número. Hablamos del caso de 3º año de liceo, pasamos ahora al caso de 6º año de liceo. ¿Qué tipo de explicación podrías dar a un alumno para explicarle que en una ecuación una misma letra representa un mismo número?
G: Pensando un poco en la práctica, quizás, la justificación no sea muy distinta, porque lo más seguro es que llegada esa instancia me esté interesando que aprendan alguna otra de quizás más peso que el hecho que en una expresión donde aparecen más de una x no le pueda dar más de un valor al mismo tiempo, entonces tal vez la respuesta o la justificación no varíe demasiado.
P: Tú me dijiste que preferirías hacer incapié en conocimientos más importantes. ¿No te parece que un alumno de nivel preuniversitario necesita como requisito indispensable saber que una x en una misma expresión representa un mismo número?
G: Claro que sí.
P: ¿Te parece que puede abordar conocimientos más cmplejos sin haber conceptualizado eso?
G: No, está claro que no. El problema está en como, vos decís, que el alumno debe haber conceptualizado, pero no sé si es una cuestión que haya que conceptualizar.
P: Me refiero a incorporar o a entender, si queremos le cambiamos la palabra, ¿no?
G: Sí, claro, está bien. Pero es lo que te planteaba recién, la cuestión está en hacer consciente ese tipo de cuestiones. El problema en general, no es que sepamos que existe ese tipo de problemática y por una cuestión de trivialidad nos neguemos a dar ese tipo de explicaciones. El problema creo que es, en esa cuestión puntual y en decenas que conocemos y en otras que ignoramos, es que son cosas que no nos son conscientes, cosas que no manejamos, cosas que ignoramos. Creo que de saber que pueda de algún modo existir alguna duda al respecto, me parece que por lo menos al pasar mencionaríamos ese hecho concreto.
P: El error en la doble sustitución en la verificación de una ecuación de este tipo fue cometido por una alumna de 3º año de profesorado. ¿Qué tipo de explicación le darías a esa alumna para que ella comprendiera su error?
G: Dado que es el tipo de cosas que uno trae incorporadas de mucho tiempo atrás sin tener una justificación de ello, no tengo una explicación profunda ni una justificación profunda. Lo que se me ocurre, que es lo que mencioné antes es con respecto al Principio de Identidad y que fue algo que se me ocurrió en el momento y quizás habrías que detenerse un poco más sobre eso y ver si uno puede argumentar a partir de esa cuestión el problema.
P: Como egresado del Instituto de Profesores, ¿qué explicación te hubiera gustado recibir al respecto?
G: Quizás la explicación que hubiese querido no es la que yo puedo dar.
P: ¿De qué índole sería la explicación que hubieras esperado?
G: Depende del nivel.

P: El nivel de un estudiante de profesorado. Vos sos egresado, ¿qué hubieras esperado de un profesor del Instituto de Profesores?
G: ...Lo que pasa es que decir de algún modo la justificación que hubiera esperado es avalar un tipo de justificación que no poseo.
P: Me refiero a una explicación del tipo matemático, basada en la teoría matemática, a una explicación del tipo filosófica, al enunciado de una simple convención...
G: No sé si haya una explicación del tipo matemático en cuanto no haya o no se me ocurre en principio una contradicción, no se me ocurre que haya una contradicción o que se contradiga algo en la teoría. Quizás exista alguna explicación si se quiere del tipo filosófico que bueno, de alguna forma está relacionada con una cierta explicación matemática. Claro, siempre o al menos según lo que me estás planteando vos de un nivel terciario, me interesa una explicación lo más profunda posible.
P: ¿Qué quiere decir profunda? ¿Se refiere a las raíces de esa explicación? Encontrás que hay explicaciones matemáticas o filosóficas, ¿una es más profunda que la otra? ¿Las dos son igualmente válidas?
G: Profunda en el sentido de que no sea una explicación a través de la imposición: esto se hace así. Que haya una justificación, una justificación de otro tipo, no una justificación de imposición, en ese sentido.
P: ¿Imposición en el sentido de una convención por ejemplo? Convenimos que...
G: Sí..... es que si de hecho se hiciera explícito el convenimos que, no me preocuparía demasiado.
P: ¿Sería una explicación para vos?
G: Si históricamente se ha establecido como convención sí. De hecho son convenciones determinados axiomas de una cierta teoría. Son convenciones porque podés construir esa teoría tomándote otros axiomas, podés variar la axiomática para construir una teoría, entonces de algún modo son convenciones. El problema quizás es en el hecho de si para salir del paso,algo que nunca te habías cuestionado lo establecés como una convención en ese momento.
P: ¿Pensás que existe una explicación?
G: Yo sin haberme puesto a pensar en eso, a mí lo que más me convence en este momento es la justificación del tipo filosófico que te planteé acerca del Principio de Identidad Aristotélico. No sé si es una gran justificación pero en principio es lo que más me convence.