



**Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN**



**ANÁLISIS SOBRE EL RAZONAMIENTO EN EL APRENDIZAJE
DE LOS CONCEPTOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: EL
CASO PARTICULAR DE LAS SECCIONES CÓNICAS
APLICANDO EL MODELO DE VAN HIELE**

**Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa**

Presenta:

Filiberto Mata Pérez

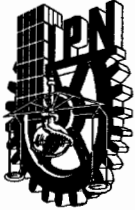
Director de Tesis:

Dr. Leopoldo Zúñiga Silva

Co-Director de Tesis:

Dr. Javier Lezama Andalón

México, D. F., Noviembre de 2006.



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 22 del mes de septiembre del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele.

Presentada por el alumno:

Mata

Apellido paterno

Pérez

materno

Filiberto

nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	3	0
---	---	---	---	---	---	---

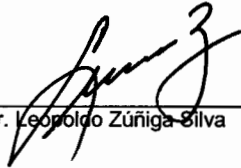
aspirante al grado de:

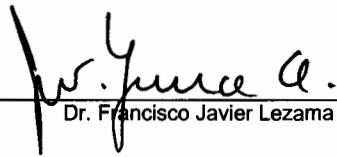
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis


Dr. Leopoldo Zúñiga-Silva


Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

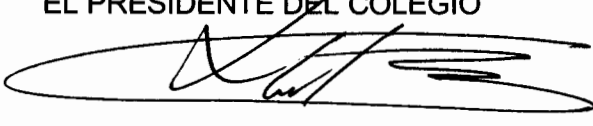

Dr. Apolo Castañeda Alonso


Dra. Gisela Montiel Espinosa


CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Nacional


Dra. Rocío Alejandra Muñoz Hernández

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO


Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 28 del mes septiembre del año 2006, el (la) que suscribe Filiberto Mata Pérez alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030230, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Leopoldo Zúñiga Silva y del codirector Dr. Francisco Javier Lezama Andalón y cede los derechos del trabajo intitulado *“Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele”*, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección fmperez@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Filiberto Mata Pérez

Í N D I C E

Página

Glosario.....	i
Relación de Cuadros, gráficas e Ilustraciones.....	ii
Resumen.....	iv
Abstract.....	vi

CAPÍTULO 1 Introducción

1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Planteamiento del problema.....	4
1.3 Justificación.....	6
1.4 Objetivo.....	13
1.5 Supuesto de investigación.....	15

CAPÍTULO 2 Marco teórico y método de investigación

2.1 Marco teórico contextual.....	16
2.2 Metodología de investigación.....	41

CAPÍTULO 3 Descripción de actividades y análisis de resultados

3.1 Descripción de las actividades realizadas.....	44
3.2 Análisis de las experiencias de aprendizaje.....	51

CAPÍTULO 4 Conclusiones, observaciones y sugerencias

4.1 Conclusiones y observaciones.....	74
4.2 Sugerencias.....	78

Bibliografía.....	81
Anexos.....	85

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Procesos cognitivos.- Procesos que ayudan a conocer o aprender.

Dicotomía.- División de un concepto en dos que agotan toda su extensión.

Axiomático.- Incontrovertible, evidente.

Epistemológico.- lo relacionado con el estudio de los fundamentos y del conocimiento científico.

Heurística.- Manera de buscar la solución de problemas mediante métodos no rigurosos.

Axioma.- Principio o enunciado no susceptible de demostración.

Teorema.- Proposición científica que puede ser demostrada.

Bisecar.- Dividir en dos partes iguales una figura geométrica.

Biunívoca.- la relación entre dos cantidades.

Cónica.- Curva geométrica que fue obtenida del seccionamiento de un cono.

Comprensión.- Facultad de comprender.

Discursivo.- Propio del discurso o del razonamiento

Índice de Graficas, Tablas, Imágenes

Nombre de la grafica, tabla, imagen	Pagina
Grafica de Población de 15 años y más en San Luís Potosí por sexo.	6
Graficas de distribución porcentual de la población de 15 años y más según los niveles de instrucción para San Luís Potosí.	7
Graficas de Barras de la población de 15 años y más según los niveles de instrucción para San Luís Potosí por sexo.	7
Grafica de Barras porcentual de eficiencia terminal para San Luís Potosí por sexo a Nivel Bachillerato año 2000.	8
Tabla de deserción según nivel educativo del estado de San Luís Potosí Ciclos escolares de 1990 al 2001.	9
Grafica de Barras porcentual de alumnos reprobados en bachillerato 1991-1997.	9
Diagrama Relación Maestro-Alumno equivalente Enseñanza-Aprendizaje	11
Diagrama de los niveles del modelo de Van Hiele, Dres. Jaime A. y Gutiérrez A. Propuesta de Fundamentación para la enseñanza de la Geometría: Modelo Van Hiele (1990).	32
Diagrama de fases por nivel, Modelo Van Hiele.	39
Diagrama del modelo de investigación no experimental Hernández R. y Fernández C., Baptista P. (pp. 289)	42
Imagen Correspondiente a la actividad A.3 Fase 3 Explicitación.	53

Imagen Geoplano con canónicas actividad A.2, fase 2	55
Imagen 1 y 2 Actividad A.6 (circunferencia) Fase 4.	59
Imagen 3 y 4 Actividad A.6 Fase 4(Parábola).	61
Imagen 5 y 6 Actividad A.6 Fase 4(Elipse)	62
Imagen 7 y 8 Actividad A.6 Fase 4.(Resumen)	63
Imagen 1 y 2 de la Actividad A.7 Fase 5	68
Imagen 3 y 4 de la Actividad A.8 Fase 5	68
Imagen 1 Actividad A.8 test modelo Van Hiele Fase 5	70
Imagen 2 y 3 Actividad A.8 test modelo Van Hiele Fase 5.	71
Imagen 4 Actividad A.8 test modelo Van Hiele Fase 5.	72
Imagen 5 Actividad A.8 test modelo Van Hiele Fase 5.	73

RESUMEN

Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele

Es bien conocido que una gran cantidad de los estudiantes de todos los niveles piensan y creen que las matemáticas no son para ellos, que no se les dan, como si se tratara de una característica nata o de herencia genética, y no de un aprendizaje.

Entre los factores más importantes en esta situación están, por una parte, las características de la enseñanza tradicional, como el exceso en la enseñanza del uso de métodos algorítmicos y la falta de búsqueda de estrategias alternativas de aprendizaje por parte de los profesores, y por otra, las limitantes de la estructura del modelo educativo en nuestro país, tales como la rigidez de los planes y programas de estudio, y el escaso tiempo que se asigna para el estudio de los contenidos en el aula.

De acuerdo con el INEGI, en el año de 1997 un total de 880 mil estudiantes del nivel medio superior tenían materias pendientes (reprobadas) en su plan de estudios, lo cual representa el 41.6% del total de los estudiantes del país. Dentro de las materias que más contribuyen a esta estadística están, por supuesto, las matemáticas (y en general las materias del área de las ciencias exactas).

La geometría analítica es una de las materias involucradas en esa situación y forma parte importante en la currícula del nivel medio superior. Es uno de los ejes principales de las matemáticas dentro del bachillerato en nuestro país, porque la requiere el estudiante para poder proseguir su instrucción en este nivel educativo y en el superior.

En este marco, se realizó esta investigación con la finalidad de contribuir, en la medida de nuestras posibilidades, en la aportación de elementos que posibiliten un mejor aprendizaje de la geometría analítica. El propósito principal fue el de analizar el razonamiento de estudiantes de bachillerato en el proceso de aprendizaje de las cónicas. Para este fin se empleó como referente teórico y metodológico, el modelo de Van Hiele, el cual está formado por dos partes: la primera de ellas es descriptiva, en la que se identifica una secuencia de tipos de razonamiento, llamados *niveles de razonamiento*, a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a un máximo grado de desarrollo intelectual en este campo. La otra parte del modelo proporciona a los profesores las directrices sobre cómo pueden ayudar a sus alumnos para que puedan alcanzar un nivel de razonamiento, estas directrices se conocen como *fases de aprendizaje*.

Uno de los hallazgos importantes de esta tesis es que al aplicar el modelo de Van Hiele el estudiante realmente efectúa un proceso de razonamiento por medio de experiencias de aprendizaje que resultan de las actividades específicas (en base al modelo) que el maestro diseña. Y es en base a ese proceso de razonamiento que el estudiante genera la comprensión sobre los objetos matemáticos en estudio.

Esta investigación deja entrever que es posible abordar materias como la geometría analítica en un ambiente didáctico basado en la idea de que el estudiante aprende haciendo. Es muy importante dejar que el estudiante explore, que él mismo descubra las características de las figuras que estudia y, en interacción con sus compañeros y el profesor, pueda construir su propio conocimiento.

ABSTRACT

Analysis on the reasoning in the learning of the concepts of analytical geometry: the particular case of the conical sections applying the model of Van Hiele

It's known that a great amount of the students of all the levels believe that the mathematics are not for them, or that they don't that talent, as if were more characteristic or genetic inheritance, and not a process of a learning.

Among the most important factors in this situation there are, on one hand, the characteristics of traditional education, as the excess in the education of the use of algorithmics methods and the lack of search of alternative strategies of learning by the professors, and, on the other hand, the limitations of the structure of the educational model in our country, such as the toughness of the plans and training programs, and the little time that is assigned for the study of the contents in the classroom.

In agreement with the INEGI, in the year of 1997 a total of 880 thousand students of High School level had pending matters (failed) in their curriculum, which represents the 41.6% of the total of the students of the country. Within the matters that contribute more to this statistic are, of course, the mathematics (and in general the matters of the of exact sciences area).

The analytical geometry is one of the matters involved in that situation and comprises important in currícula of the High School. He is one of the main axes of the mathematics within the High School in our country, because it requires the student to be able to continue his instruction in this educative level and the superior one.

In this frame, this investigation was made with the purpose of contributing, according to our possibilities, the contribution of elements that make possible a better learning of analytical geometry. The main intention was to analyze the reasoning of High School students in the process of learning of the conical ones. To achieve this model of Van Hiele used as methodical theoretician reference. This model has two parts: first of them is descriptive, in which a sequence of types of reasoning is identified, calls reasoning levels, through which the capacity of mathematical reasoning of the individuals progresses since they initiate his learning until they arrive at a maximum degree of intellectual development in this field. The other part of the model provides the professors the directives on how they can help their students so that they can reach a reasoning level, these directives are known as phases of learning.

One of the important findings of this thesis is that when applying the model of Van Hiele the student carries out a process of reasoning by means of learning experiences that are from the specific activities (on the basis of the model) that the teacher designs. And it is on the basis of that process of reasoning that the student generates the understanding on the mathematical objects in study.

This investigation lets glimpse that it is possible to approach matters like analytical geometry in a didactic atmosphere based on the idea that the student learns doing. Is very important to let the student explore and he discovers the characteristics of the figures that he studies by himself and, in interaction with his companions and the professor, he can construct his own knowledge.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes.

Las matemáticas se han difundido desde hace ya bastante tiempo a través de la instrucción académica, ya sea en forma personalizada o en grupos. A lo largo de esa historia se le ha formado a esta ciencia básica la idea de que las personas que la estudian, la desarrollan o la transmiten, son geniecillos incomprendidos, introvertidos, los cuales no comparten su mundo con el grueso de la población. Esto, aunado a la experiencia que tiene la gente con las matemáticas en la escuela, genera una concepción particular en la sociedad colocándolas como un tema difícil de abordar, aburrido, complicado, de círculos sociales pequeños, pero un mal necesario. Esta es una concepción a la cual contribuimos además, en buena parte, quienes nos dedicamos a impartir clases de ella.

Desafortunadamente, los profesores fomentamos la idea entre nuestros propios estudiantes de que el conocimiento matemático es complicado y difícil de comprender, que el hecho de instruirlos en esta ciencia no garantiza que el alumno la comprenda o aprenda. Todo esto, a pesar de nuestra propia experiencia como profesores. Fuimos instruidos en un esquema didáctico tradicional en el que predominaba la memorización de fórmulas y métodos y cometemos el error de repetir los patrones que tanto daño nos hicieron. Cabe señalar que consideramos al sistema didáctico tradicional de acuerdo al concepto descrito en (Zúñiga, L. 2004):

“Se entiende por sistema didáctico tradicional aquél en que el profesor tiene el rol principal en el proceso de enseñanza aprendizaje mientras que los estudiantes asumen una actitud pasiva. El aprendizaje sucede principalmente por repetición, no por descubrimiento, lo que conduce a un aprendizaje producto del énfasis en la mecanización del saber (esto no significa que el aprendizaje por repetición sea erróneo o inadecuado, sino que resulta insuficiente). Además, la didáctica empleada está determinada por el discurso de los libros de texto. Las sesiones de clase se diseñan en función del cumplimiento de los programas de estudio (que en muchos casos están elaborados en función de la estructura de contenidos de los libros de texto). En buena medida, estas situaciones se deben a que los profesores no tienen una capacitación profesional en docencia (y mucho menos en didáctica de las matemáticas), lo cual provoca que su trabajo como profesores de matemáticas se guíe casi exclusivamente por las experiencias vividas como estudiantes, su percepción de lo que significa ser un buen profesor, y lo que dictan los programas y libros de texto oficiales”.

Con esta situación nada alentadora y mucho menos deseable, se contribuye a que una gran cantidad de los estudiantes de todos los niveles piensen y creen que las matemáticas no son para ellos, e incluso se tiene la idea de que las matemáticas no se les dan, como si se tratara de una característica nata y no de un aprendizaje. Una buena parte de los casos es debido a que existe una desinformación por parte de los maestros de matemáticas sobre técnicas y/o estrategias didácticas de enseñanza-aprendizaje. Aclaramos que esta situación general no es un motivo de interés central en esta investigación, pero se comenta porque constituye un elemento de referencia para el trabajo.

En este marco, se realiza esta investigación con la finalidad de contribuir, en la medida de nuestras posibilidades, a allanar el camino de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica (GA). El propósito principal, es estudiar el problema del aprendizaje de las cónicas por los estudiantes de bachillerato. La GA forma parte importante en la currícula del nivel medio superior nacional, es uno de los ejes principales de las matemáticas dentro del bachillerato, y la requiere el estudiante para poder proseguir su instrucción en este nivel educativo.

La situación académica a nivel población estudiantil en el Estado de San Luis Potosí es de importancia relevante ya que de acuerdo con las estadísticas

proporcionadas por el INEGI (Instituto Nacional de Geografía y Estadística), los hombres y mujeres que estudian bachillerato representan el 13.5 %, de un total de 1, 462, 425 personas en edad adolescente, de los cuales solamente terminan su instrucción media superior 74, 756 hombres y 85, 894 mujeres, es decir, que un total de 36, 777 personas entre hombres y mujeres, desertan y no finalizan sus estudios de este nivel educativo.

Estos hechos y las experiencias de 15 años de vida en las aulas nos permitieron establecer como propósito central para este trabajo de investigación, el estudio del aprendizaje de las secciones cónicas, particularmente lo referente a lo que sucede en los procesos de razonamiento y comprensión. En la mayoría de los casos, el grueso del estudiantado, no logra entender los conceptos que involucran estas curvas, son muy pocos los estudiantes que logran desarrollar y aplicar el razonamiento geométrico que se requiere para lograr el trabajo analítico formal. La gran mayoría de los estudiantes se quedan en alguna de las etapas entre el aprender primero a nivel intuitivo, y el nivel más alto de la operatividad formal, la abstracción y el manejo simbólico analítico. El estudio de esta situación adquiere una importancia notable dado que la geometría analítica es una materia básica por estar presente a nivel nacional en todos los planes curriculares del nivel medio superior en nuestro país.

Como antecedente es necesario mencionar que, sobre esta problemática que ya mencionamos, los profesores del nivel medio superior somos bien conscientes de que no sólo se presenta en un centro educativo en particular, sino más bien es un problema general y que se manifiesta radicalmente en los semestre superiores, cuando el alumno inicia su precálculo y se agudiza aún más en el estudio del cálculo diferencial e integral, ya que la geometría analítica es un conocimiento en el que se apoyan muchos libros de texto de cálculo.

Esta situación es conocida por nosotros, en primer lugar por la oportunidad que se nos ha presentado de dar clases tanto en el nivel medio superior como en el superior y el observar las carencias de los alumnos de los diferentes centros

educativos de la localidad (San Luis Potosí), y se reafirmó cuando se investigó en el INEGI los datos estadísticos que ya manifestamos con anterioridad; siendo esta situación uno de los principales motivos que nos llevó a realizar la maestría en matemática educativa con la firme idea de buscar capacitación y alternativas didácticas que nos posibilitaran implementar nuevas estrategias en la enseñanza.

1.2 Planteamiento del Problema

Los problemas a los que nos enfrentamos tanto maestros como alumnos en la GA, han sido ya motivo de investigación en otras ocasiones, más sin embargo, las investigaciones sobre los aspectos cognitivos relacionados con su aprendizaje, a nivel maestría, son muy pocos.

El primer problema al que nos enfrentamos al tratar de realizar una investigación de esta materia es la dicotomía que se presenta tanto en el lenguaje que utiliza, como en su morfología matemática, ya que en ambos casos se abordan tanto aspectos geométricos como algebraicos, además de la comprensión matemática, que es otro hemisferio de la misma, incluyendo en ello tanto lo que es el saber en sí mismo, y el saber enseñar o el poseer los conocimientos pedagógicos y didácticos necesarios y adecuados. Es esta una añeja relación problemática que tiene como consecuencia el seguir teniendo improvisación en la enseñanza a nivel medio-superior, ya que en este nivel los nuevos docentes, en su gran mayoría, carecen de la preparación didáctica y pedagógica adecuada. En el bachillerato los maestros que imparten las clases de matemáticas son en su mayoría profesionistas de alguna carrera del área de las ciencias exactas y que en muchos de los casos no han tenido la preparación para desarrollarse como tales. Y esto es, en el mejor de los casos, en los bachilleratos de las ciudades, ya que en las comunidades rurales muchas veces son personas con carreras truncas de ciencias exactas o de otras profesiones en cuyas carreras estudiaron algo de matemáticas.

Para poder realizar una “buena clase” de GA no es suficiente dominar los conocimientos o tener un texto base que presente los contenidos “en forma adecuada” y de acuerdo a una programa analítico autorizado; para realizarla es necesario contar además con una pedagogía y didáctica adecuadas, así como con la experiencia, pero sobre todo tener la vocación, tener un interés verdadero por que los estudiantes aprendan de la mejor manera (la pasión y el amor, a lo que algunos autores le llaman “apostolado”).

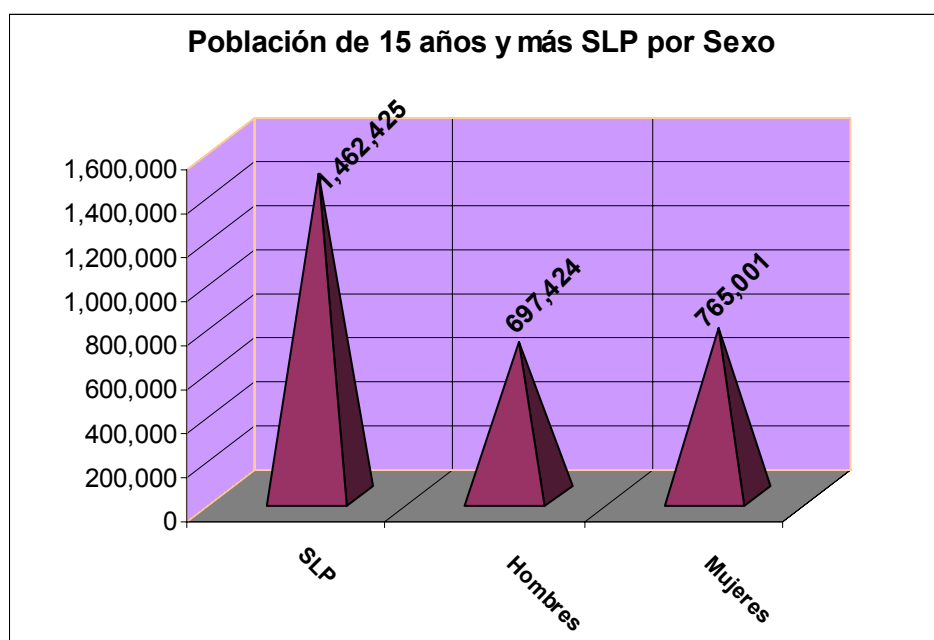
A pesar de que la geometría se incluye en la currícula desde la primaria, el alumno al llegar al nivel medio superior (bachillerato), reacciona como si fuera la primera vez que se le presentan las coordenadas en el plano cartesiano, o los triángulos u otras figuras geométricas con coordenadas, o bien en los semestres subsecuentes del mismo bachillerato, no recuerdan la ecuación de la circunferencia aún cuando se encuentren cursando el cálculo diferencial o integral, o no pueden retomar una función polinomial y analizarla. Esto significa que los niveles de razonamiento y comprensión de los temas que ya aprobaron, o que se están estudiando, no son precisamente los que observamos a través de nuestros exámenes regulares y que el aprendizaje memorístico al cual se les sometió en su momento, dio sus resultados, pero al pasar el tiempo no fue perdurable. Lo cual es coherente con lo que dice al respecto David Ausubel en su obra sobre psicología del aprendizaje (Ausubel, D., 1960). El conocimiento se desvaneció o se perdió en el estudiante, por lo que los procesos cognitivos del razonamiento no fueron los adecuados para que ese conocimiento quedara en la mente del estudiante como producto de elementos significativos para él.

Como podemos observar, la problemática es diversa y múltiple, nos tomaría bastante tiempo el poder estudiarla con amplitud, mucho más tiempo del que se puede emplear en el desarrollo de una tesis de maestría. Por lo tanto, en este trabajo no pretendemos en forma alguna abordar la problemática general, sino que de ella se ha elegido el siguiente problema de investigación:

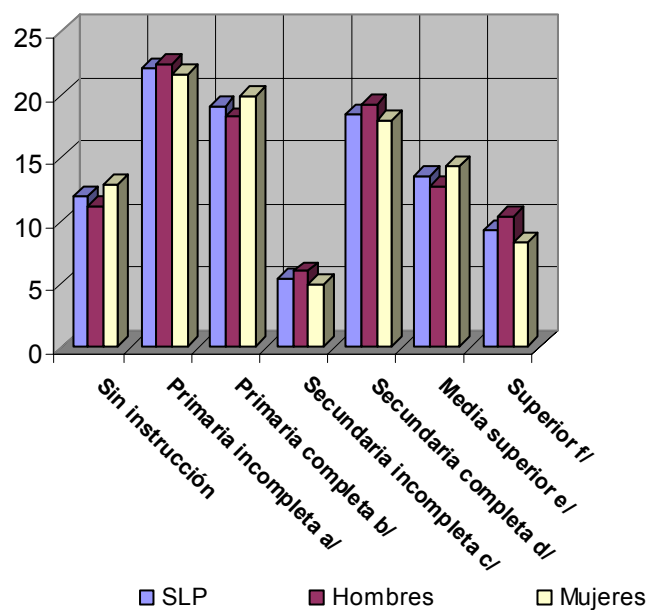
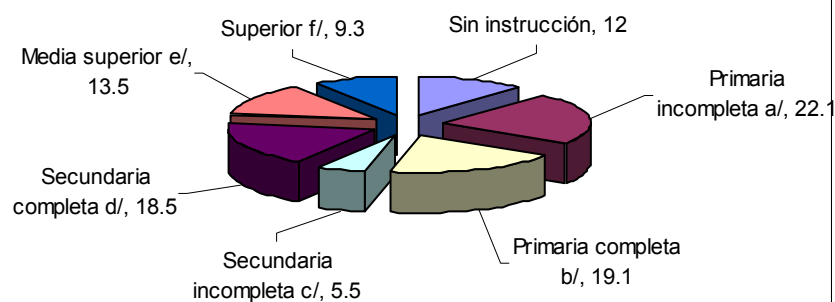
El estudio del proceso de aprendizaje de los conceptos y definiciones en la Geometría Analítica (en particular las secciones cónicas).

1.3 Justificación

La población en el Estado de San Luis Potosí de personas mayores de 15 años con posibilidades de acudir a un centro educativo del nivel medio superior, es de 1, 462, 425, entre hombres y mujeres (Instituto Nacional de Geografía y Estadística). De ellos, estudian bachillerato el 13.5 %, es decir 197, 427 personas. A continuación se muestran las graficas correspondientes a estos datos.



Distribución porcentual de la población de 15 años y más según nivel de instrucción para San Luis Potosí, 2000



NOTA: Excluye a la población que no especificó su nivel de instrucción.

a/ Incluye a la población con algún grado aprobado entre uno y cinco años de primaria.

b/ Incluye a la población con seis grados aprobados de primaria.

c/ Incluye a la población con uno y dos grados aprobados de secundaria o equivalente.

d/ Incluye a la población con tres grados aprobados de secundaria o equivalente.

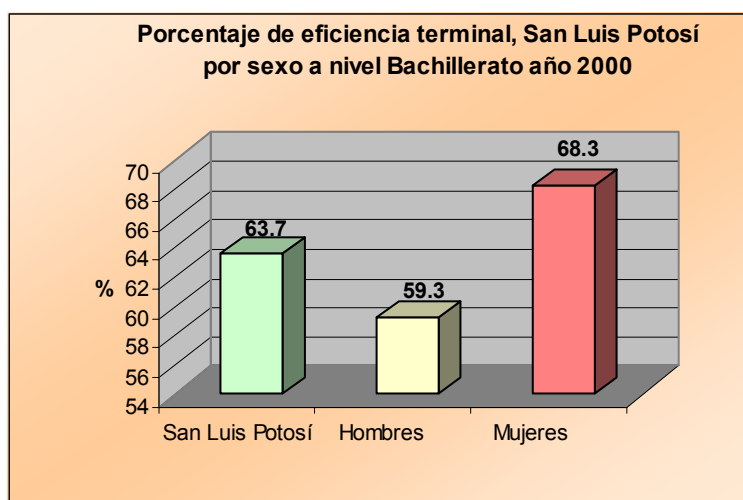
e/ Incluye a la población con al menos un grado aprobado de bachillerato o equivalente.

f/ Incluye a la población con al menos un grado aprobado de licenciatura o equivalente más los que tienen algún grado aprobado de postgrado.

FUENTE: INEGI. XII Censo General de Población y Vivienda, 2000. Tabulados Básicos. Aguascalientes, Ags., 2001.

Consideremos además de estas estadísticas que de las personas que estudian este nivel, no todas terminan. De acuerdo con el INEGI, sólo terminan 125, 761 entre hombres y mujeres, de los cuales 74, 756 son hombres que finalizan su instrucción media superior y 85, 894 son mujeres; esto significa que estamos en un Estado con fuertes problemas en este nivel educativo, dado que estas personas no son el futuro a largo plazo de nuestro país, como muchos afirman, sino más bien el futuro prácticamente inmediato del mismo.

Gráficamente, estas estadísticas de eficiencia terminal en el Estado, en el nivel medio superior, son las siguientes:

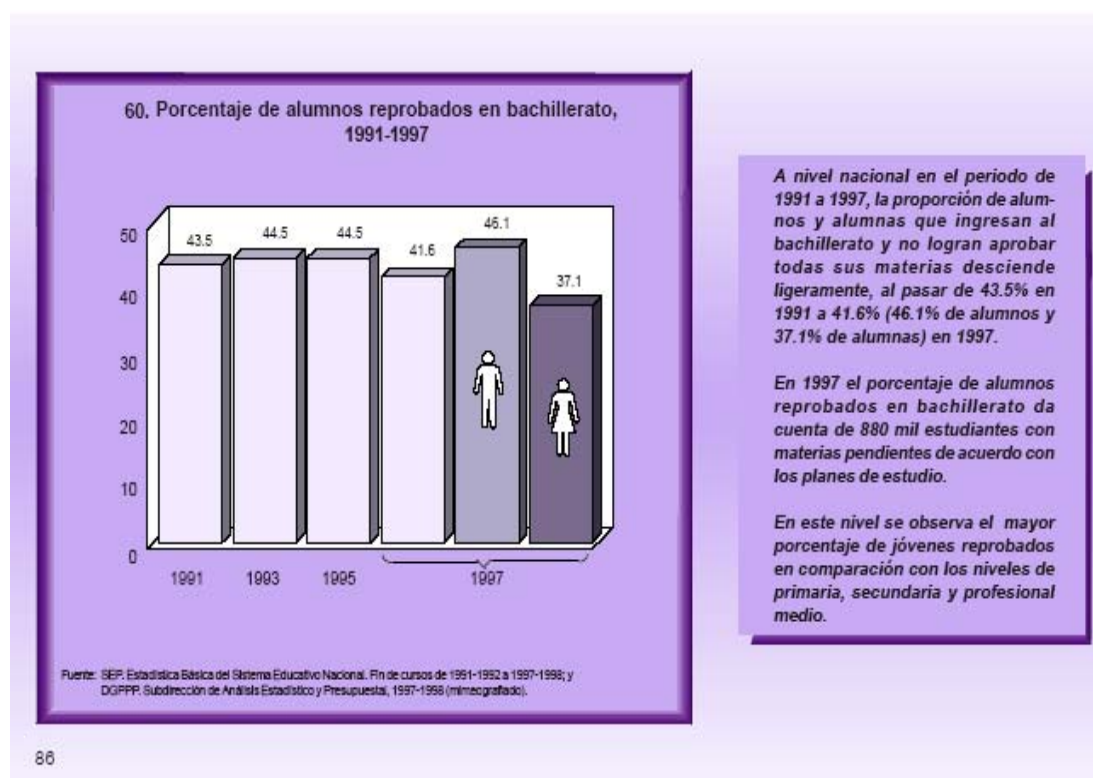


Continuando con esta información, una de las estadísticas que más nos impacto al iniciar este trabajo, fueron los índices de aprovechamiento general del nivel medio superior, ya que son preocupantes tanto a nivel nacional como estatal. Las estadísticas que presentamos a continuación son oficiales, proporcionadas también por el INEGI. En la tabla se presenta la tasa de deserción según el nivel educativo del año 1990 al año 2001, para del estado San Luis Potosí.

**TASA DE DESERCIÓN SEGUN NIVEL EDUCATIVO
DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ
CICLOS ESCOLARES 1990/1991 A 2000/2001**

CICLO ESCOLAR	PRIMARIA	SECUNDARIA	PROFESIONAL Y TECNICO	BACHILLERATO	NORMAL
1990/1991	13.4	20.7	27.4	51.0	8.8
1991/1992	12.9	19.5	48.9	54.3	6.5
1992/1993	8.5	21.4	34.6	54.7	6.6
1993/1994	9.3	19.4	31.7	53.0	9.3
1994/1995	9.7	19.2	35.1	48.8	7.5
1995/1996	9.2	18.9	30.1	48.4	12.1
1996/1997	9.4	17.9	24.6	42.2	8.9
1997/1998	8.7	18.5	25.7	45.8	8.9
1998/1999	7.3	16.2	30.0	44.3	9.3
1999/2000	7.1	14.4	19.2	39.1	10.4
2000/2001	6.4	13.9	18.7	45.2	5.6

Así mismo, a continuación se presentan las estadísticas de alumnos reprobados a nivel nacional del nivel medio superior, en la grafica se observan los porcentajes anuales del año 1991 al año 1997, y se observa cómo desciende su índice de reprobación ligeramente del 43.5% al 41.6%. Esto es para un total de 880 mil estudiantes durante el año de 1997.



Tomando en consideración la información que aportan las estadísticas, la situación problemática planteada, y en base a nuestra experiencia como docente, reconocemos que entre las materias que más contribuyen a esta deserción están las materias de ciencias duras, sobre todo las referentes a Matemáticas, Física o Química.

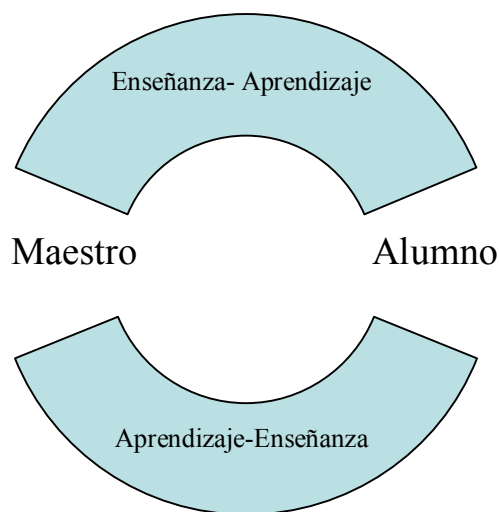
También consideramos que en muchos de los casos, dentro de las matemáticas, las materias que presentan una mayor dificultad para el estudiantado dentro de este nivel, son la GA y el cálculo diferencial e integral, y que la dificultad en ellas, en gran parte radica en el hecho de que son materias completamente nuevas para el estudiante.

Aunado a este panorama, debemos considerar que la gran mayoría de los profesores imparten la GA a través de métodos tradicionales, lo cual es debido principalmente al desconocimiento de herramientas o estrategias didácticas alternativas, no solo de la didáctica general, sino también de la didáctica específica de la matemática. Y es que los conocimientos y recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas (en lo cual existen importantes avances) no han llegado aún al grueso de los profesores que imparten la materia, o los propios profesores no se han interesado por buscar esos conocimientos o recursos. Si también adicionamos que en muchos casos no se cuenta con las herramientas tecnológicas actualizadas, ya sea en cuestión de software o hardware educativo adecuado, o incluso ni siquiera con el espacio adecuado para la secundaria o el bachillerato, el rezago educativo real que se observa, es crítico.

Particularmente, estas razones ya expuestas fueron las que nos motivaron a pensar en desarrollar una investigación que nos permitiera conocer herramientas didácticas alternativas que nos dieran la oportunidad de acercarnos al estudiante y poder enseñar la geometría analítica de una forma más amigable y sencilla en la que los alumnos intervengan como protagonistas y hacedores de su conocimiento, y que a su vez, el maestro participe no sólo con el papel protagónico que debe

tener, sino como guía y facilitador del proceso, de manera que le permita al alumno crecer y obtener sus propias conclusiones, que sean ellos, los alumnos, quienes con sus propias palabras establezcan los teoremas y axiomas, como resultado de sus procesos de razonamiento y comprensión.

Queda claro que en este proceso educativo el dúo maestro-alumno no puede ser disuelto o separado, como tampoco lo será el binomio enseñanza-aprendizaje (entendiendo que la *enseñanza* debe incluir las componentes, por parte del profesor, del *diseño* y la *guía* en el proceso). Esta relación la podemos representar a través de un esquema mediante una de las secciones cónicas que estudiamos en esta investigación y que es el de la circunferencia de calidad.



Relación Maestro-Alumno equivalente Enseñanza-Aprendizaje

En la cual presentamos a los alumnos y los maestro dentro de un ciclo de mejora continua utilizando pedagogía y didáctica de las matemáticas, que les permita en una espiral de conocimientos tener una educación de calidad con más avances que tropiezos y que los maestros les permitan a los alumnos realmente cumplir con el aprender a aprender pero de una forma práctica, efectiva y real.

Además de lo ya comentado para la enseñanza de la GA, se presentan otro tipo de dificultades de carácter cognitivo, como lo son el aprendizaje de la algoritmia o las fases aritméticas de los procesos analíticos en el estudio de las secciones cónicas. Ante esta dificultad y las consecuencias de las características de la enseñanza tradicional, es común que los estudiantes se pregunten constantemente ¿por qué tengo que aprender geometría nuevamente (en alusión a sus cursos previos de geometría elemental)?, o ¿dónde la voy aplicar? Sin encontrar una respuesta adecuada de sus maestros o de sus dirigentes escolares; y aún más, en la mayoría de los casos los temas son puramente abstractos, con contenidos exclusivamente matemáticos, sin aplicaciones cotidianas y prácticas de algún tipo. Para el estudiantado del nivel medio superior, la GA representa en la época de su vida (adolescencia), una carga no grata en sus estudios, presentándose como algo que está dirigido fuera de toda realidad e interés personal.

La enseñanza tradicional sólo les ofrece un aprendizaje por repetición y los hechos aprendidos de memoria generalmente contribuyen en muy poco al desarrollo de los alumnos. Una de las razones es que tienden a olvidarse con rapidez, otra es que muchas de los contenidos aprendidos de memoria en la escuela no son pertinentes para las necesidades futuras del pensamiento.

Como sabemos, en la geometría se pretende que el alumno adquiera un enfoque de formalización axiomático a través de la aplicación de los mismos, pero se ha visto que los estudiantes tiene gran dificultad al aprender por medio de este método de enseñanza y los objetivos de los cursos por lo general no son alcanzados.

En general, cada inicio de curso el lenguaje que maneja el maestro es diferente al que tienen los alumnos, pero además del lenguaje que se maneja, existe una diferencia entre el pensamiento o razonamiento del maestro con respecto al del estudiante.

De acuerdo con lo que hemos comentado cabe preguntar: ¿puede abordarse la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de manera que no sea rutinario y tradicional, utilizando procedimientos de enseñanza diferentes?

En general se sostiene que es posible enseñar matemáticas a través de otros procedimientos; no obstante, se necesita más estudio (y esa es la intención de esta investigación) sobre el cómo desarrollar esas estrategias nuevas que le proporcionen al alumno la comprensión necesaria para que su razonamiento se eleve de nivel, que retenga el conocimiento de forma tal que sea perdurable a través de experiencias y vivencias, y que sea él quien “descubra” por sus propios medios los nuevos conocimientos.

1.4 Objetivo

En trabajos de investigación desarrollados respecto al aprendizaje de conocimientos geométricos, se han detectado procesos cognitivos que cumplen con las funciones epistemológicas específicas atendiendo a la dicotomía mencionada líneas arriba. Por ejemplo, en (Duval, R., 1988) se indican los tres siguientes:

 Procesos de visualización con referencia a las representaciones espaciales para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación compleja, para echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva.

 Procesos de construcción mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan.



Procesos de razonamiento en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración, para la explicación.

“Estos procesos diferentes pueden ser realizados separadamente. Así, la visualización no depende de la construcción: hay acceso a las figuras, de cualquier manera que hayan sido construidas. Y aún si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas. En última instancia, si la visualización es un recurso intuitivo que algunas veces es necesario para encontrar una demostración, el razonamiento depende exclusivamente del corpus de proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas) de los que se dispone. Y, en algunos casos la visualización puede ser engañosa o imposible.

Sin embargo, estas tres clases de procesos cognitivos están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría.”

Como el objetivo de nuestra investigación es el estudiar los procesos del aprendizaje en el aula, enfatizando en el proceso del razonamiento, tomaremos como un punto de referencia lo expresado por Duval, R., particularmente respecto al tercero de los procesos. Por otra parte, aclaramos que no pretendemos en forma alguna el introducirnos en una discusión con respecto a la clasificación epistemológica en relación al pensamiento geométrico y/o matemático. En nuestro caso, más bien nos enfocaremos a los resultados tangibles que se han obtenido en esta experiencia sobre la forma en que aprende un alumno en base a sus capacidades cognitivas como los niveles de razonamiento y comprensión, y que son de aplicación en la práctica instruccional.

Así mismo, nosotros estamos plenamente convencidos de que el razonamiento en conjunto con las experiencias del alumno vienen a conformar un núcleo esencial del pensamiento matemático y que a su vez en él se encuentra el razonamiento geométrico, el cual se encuentra inmerso en el estudio de la geometría analítica. En este razonamiento están involucrados tanto la visualización como la construcción, elementos independientes pero íntimamente relacionados con el razonamiento y la comprensión.

De acuerdo con lo ya expuesto nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son los procesos de razonamiento-comprensión que se desarrollan en el acto de aprendizaje de las secciones cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) en la Geometría Analítica?

De la cual se derivó el siguiente objetivo de la investigación:

Analizar el proceso de razonamiento-comprensión de los estudiantes en el acto de aprendizaje de las secciones cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola).

1.5 Supuesto de investigación

En la hipótesis o supuesto indicamos lo que estamos buscando o tratando de probar y que se define como explicación tentativa del fenómeno investigado, formulada a manera de proposición. En lo que respecta a nuestra investigación se presenta el siguiente supuesto de investigación:

El estudiante conforma su aprendizaje de los contenidos en la Geometría Analítica al transitar por distintos niveles de razonamiento-comprensión, en base al desarrollo de actividades y experiencias didácticas que lo llevan desde el reconocimiento visual de las formas de los objetos geométricos, hasta el trabajo analítico correspondiente.

Bajo este supuesto de investigación se trató de dar solución a nuestro problema y cumplir con el objetivo planteado. De él se derivaron las siguientes variables: aprendizaje, niveles de razonamiento y actividades (o experiencias) de aprendizaje. Estas variables serán las descritas durante nuestro análisis de la experiencia y a tomar en cuenta en los resultados obtenidos en las fases de aprendizaje.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Se describe lo referente al marco teórico en que se enmarca la investigación así como la metodología que se empleó en el desarrollo de la misma.

2.1 Marco teórico contextual

Con el fin de presentar el marco teórico contextual adecuado al objetivo de esta investigación, iniciaremos este capítulo con una breve introducción a la historia de la GA. Inmediatamente después se realizará una descripción de su método analítico como parte del pensamiento geométrico-analítico, deductivo, y formal. Enseguida efectuaremos una breve descripción algebraica de las secciones cónicas y se establecerá la importancia de la comprensión y el razonamiento-comprensión. Finalizaremos este capítulo con la descripción del modelo teórico que usamos en la investigación y algunos comentarios sobre modelos similares.

Si bien es cierto que la geometría no se inicia con los griegos, el desarrollo de la misma para el mundo occidental del cual nuestra ciencia y conocimiento se han desarrollado, sí representa para nosotros como sociedad, la cuna del conocimiento científico, no sólo de esta rama de las matemáticas, sino también de otras áreas del conocimiento científico. Con respecto a las bases matemáticas con las que hemos dado clases en nuestras aulas, sin duda alguna, fueron los grandes iniciadores del conocimiento involucrado y sus aportaciones han sido de gran valor.

El tema que estamos tratando en este trabajo de investigación fue desarrollado en sus inicios por Euclides, Aristóteles, Apolonio y Pappo a quienes se les considera como los geómetras griegos que más desarrollaron esta ciencia; en lo que nos atañe podemos decir que después de los Elementos de Euclides, que es la primera axiomatización en la historia de las matemáticas, no se ha llegado a tener una obra de esa envergadura en el área. En la obra de Apolonio de Parga que está constituida de doce libros o capítulos denominados proposiciones, se dice con frecuencia que es él quien primero utiliza un sistema de coordenadas para sus demostraciones geométricas. En la séptima de ellas plantea la construcción de las secciones de la siguiente forma:

Si se corta un cono con un plano a través del eje, y si se corta también con otro plano que corte el plano en el cual está la base del cono según una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial o a la base formada, el plano que corta formará una sección en la superficie del cono, y las líneas rectas trazadas en él paralelas a la línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, encontrarán la sección común del plano que corta el triángulo axial, y prolongándolas hasta la otra parte de la sección serán bisecadas por éste, si el cono es recto, la línea recta en la base será perpendicular a la sección común del plano que corta el triángulo axial, pero si es escaleno, no será siempre perpendicular, sino sólo cuando el plano a través del eje sea perpendicular a la base del cono.

Con respecto a la Geometría Analítica, el primer salto espectacular que se dio después de los griegos fue con René Descartes en su obra *Discours de la Méthode pour bien conduire la raison et chercher la verité dans les sciences* (1637) quien será el actor principal de este proceso, precedido del no menos importante Fermat, quien desarrolló su obra un poco después. Entre ellos dos se marcó el comienzo de la edad moderna de las matemáticas, reformando la geometría del estudio de las curvas por el estudio de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes. Cincuenta años después de este suceso Newton publicó su obra *Principia* (1687); más tarde Leibniz efectuará sus aportaciones también a la GA, y a partir de ese momento gente de la talla de

Bernoulli, Euler, y Lagrange complementarían la reducción de la geometría al análisis.

Los cambios que a sufrido la GA se ponen de manifiesto en los siglos XVI y XVII que estos avances de gran magnitud no pararían en estos puntos y en

Hubo trabajos que se desarrollaron prácticamente de manera paralela al de Descartes, como el de Snellius, que publica en 1627 su tratado de trigonometría (ahí se ofrece la aplicación correcta de los triángulos suplementarios). Posteriormente, vinieron Desargues (1595-1662) y Pascal (1623-1662) quienes desarrollaron más ampliamente el estudio de las cónicas. Las líneas de pensamiento desarrolladas por ellos fueron seguidas por sus discípulos La Hire (1641-1671) y La Poivre.

Sin embargo, la consolidación de la GA como la conocemos ahora, se logra durante los siglos XVIII, XIX, e inicios del XX, con los desarrollos del álgebra y del cálculo. Se presentaron los trabajos de Poncelet en el siglo XVIII; Chasles y Euler en la última de las etapas de la algebrización, en la primera mitad del siglo XIX, y ya entrados el siglo XX, las ideas de estos matemáticos ejercieron su influencia y aparecieron personajes como Sophus Lie, y F. Klein, así como las ideas de Reimann. En 1870 Klein desarrolla su libro del Programa de Erlangen, que es la más clara y precisa reformulación de la geometría que se ha efectuado hasta la fecha.

Esta situación se dio así porque la GA es producto de la aplicación del álgebra a la geometría y su historia es inseparable del desarrollo del cálculo infinitesimal.

De acuerdo al orden que establecimos en el inicio de este capítulo, a continuación presentamos una descripción del método analítico de la GA.

La geometría analítica ha sido planteada como una solución a algunos problemas de la geometría pura, esto en base a la relación biunívoca establecida entre los

valores numéricos y su posición dentro de una recta en la que el origen coincide con el número cero (valor nulo del conjunto de números reales). Es a partir de esta relación que se establece un sistema de coordenadas unidimensional o coordenado lineal, en el cual un punto con su coordenada x puede ser ubicado como una representación geométrica o gráfica del número real x , y la coordenada es la representación analítica.

Esta primera idea evoluciona al incorporarse otro eje de referencia, conformándose así el plano bidimensional. Es a partir de este sistema coordenado rectangular que se establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par de números reales, o par ordenado. Este sistema coordenado, que fue utilizado por René Descartes en 1637, es lo que caracteriza a esta geometría analítica.

El método analítico de la GA se inicia con el dibujo bidimensional en el sistema cartesiano para después colocar la figura geométrica a estudiar en la posición más simple o sencilla, el siguiente paso es que a todos los puntos comprendidos en la curva en estudio se les asignen coordenadas apropiadas marcadas sobre la figura. El procedimiento a seguir posteriormente dependerá de las propiedades particulares que se vayan a demostrar en cada uno de los casos.

De acuerdo a lo planteado como método analítico de la GA, existen dos problemas que se pueden tipificar de la siguiente forma (Charles H. Lehmann, 1990):

1. Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir su gráfica correspondiente.
2. Dada la figura geométrica o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Como podemos observar, la relación entre estos dos es inversa entre sí. Sin embargo, ambos problemas están estrechamente ligados y relacionados de manera tal que juntos constituyen el problema fundamental de la GA, el cual plantemos de la siguiente forma:

Para la obtención de la ecuación de un lugar geométrico se procede así:

- I Se supone que el punto P, de Coordenadas (x, y) es un punto cualquiera que satisface la condición o condiciones dadas, y por tanto, un punto del lugar geométrico.
- II Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x e y.
- III Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso II de tal manera que tome la forma $f(x, y) = 0$, cuyas soluciones reales para los valores correspondientes de x e y, son todas las coordenadas de aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos que satisfacen las condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico.
- IV Se comprueba el recíproco: sean (x_1, y_1) las coordenadas de cualquier punto que satisface $f(x, y) = 0$ de tal manera que la ecuación $f(x_1, y_1) = 0$ es cierta.

Particularmente, la ecuación general cuadrática (la cual pasó por todo ese proceso ya comentado desde Apolonio de Parga hasta la intervención de matemáticos de los siglos XVII, XVIII, XIX, y los inicios del siglo pasado) que se expresa simbólicamente como

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

representa en general a todas las secciones cónicas.

Las cónicas como lugar geométrico se pueden establecer de la siguiente forma: si tenemos un punto **P** que se mueve en un plano, en su trayectoria describirá una circunferencia si su distancia al origen $|PC|$ es siempre constante $|PC| = r$, y una parábola si son iguales la distancia a un punto fijo y a una recta fija, donde el

punto fijo es el foco F y la recta D es la directriz, es decir si $|PC| = |PF|$; o bien, si la trayectoria del punto P es la suma de las distancias del punto P que se mueve en el plano a los dos puntos fijos que es siempre la misma, en donde los puntos fijos serán los focos F y F' y donde $|PC| + |PF| = Cte.$, se obtendrá la elipse. Finalmente, si la diferencia de la distancia a los dos puntos fijos es constante, es decir, $|PC| - |PF| = Cte.$, en la que los puntos fijos son los focos F y F', se tendrá una hipérbola. Estas descripciones verbales se pueden traducir a ecuaciones para cada uno de los casos.

Si P es un punto de coordenadas P(x, y) y se desplaza en el espacio bidimensional cartesiano teniendo como punto fijo inicial el origen de este espacio de coordenadas, se podrá obtener la distancia del origen al punto P(x, y) a partir de la relación $|PC| = r$, presentándose como:

$\sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} = r$ Es decir $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen. Si el centro se localiza fuera del origen de coordenadas, se tendría C(x₁, y₁) y el punto P de coordenadas (h, k) se tendrá: $\sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2} = r$ si elevamos ambas partes de la igualdad al cuadrado obtendremos $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, que nos representa la ecuación de una circunferencia con centro fuera del origen.

Con respecto a la parábola, si sabemos que la distancia del punto al foco es $|PF|$ y la distancia del punto a la directriz esta dada por $|PD|$, y establecemos que $|PD| = |PF|$, de acuerdo con las coordenadas del punto P(x, y) y las coordenadas del foco F que se localiza sobre el eje de las equis (p,0) y la ecuación de la directriz $x = -p$, la distancia $|PF| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ y tenemos que $|PD| = |x+p|$, por lo que $\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$; si elevamos ambas partes de la igualdad al cuadrado para eliminar el radical obtendremos $(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$ y desarrollando los binomios al cuadrado la igualdad es

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$, ahora, agrupando y despejando se obtendrá $y^2 = -x^2 + x^2 + 2px + 2px - p^2 + p^2$, finalmente el resultado es $y^2 = 4px$, que es la ecuación de la parábola con centro en el origen y foco en el eje de abscisas. La ecuación de la curva cuando el foco está localizado en el eje de ordenadas será $x^2 = 4py$, en donde las coordenadas del foco se localizan en $(0, p)$ y la directriz $y = -p$. La ecuación de la parábola con vértices en coordenadas (h, k) está representada por $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. Si desarrollamos se obtiene $y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$, de su homólogo se obtendrá $x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4k$. De aquí la ecuación cuadrática se obtiene por la suma de estas dos últimas ecuaciones, resultando $y^2 + x^2 - 2ky - 2hx + h^2 + k^2 - 4px - 4ph + 4py - 4pk$, de donde se obtiene que $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = k^2 + h^2 - 4px - 4ph + 4py + 4pk$. Finalmente la ecuación general de la parábola será $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Con respecto a la elipse sabemos que es una curva que esta compuesta o definida principalmente por la distancia entre foco y foco, del tal forma que $|PC| + |PF| = Cte$. Está definida en base a los siguientes elementos: la distancia entre el punto $P(x, y)$ a los focos y al eje mayor; a es la distancia del centro a los vértices; b es la longitud del semi-eje menor; $2b$ la distancia entre B y B' ; c la distancia al centro de uno de los focos; y $2c$ es la distancia entre los focos.

Si sabemos que $PF_1 + PF_2 = 2a$, se calculará la distancia entre los focos por $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, simplificamos y pasamos al segundo miembro $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})$, elevamos al cuadrado y simplificamos $x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$. Se entiende que $-4ax - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, de ella se obtiene factorizando $4(-xc - a^2) = \frac{-4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{4}$, elevamos al cuadrado y simplificamos ambos miembros $a^4 + c^2x^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$, agrupamos y simplificamos

$(c^2 - a^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$. Si sabemos que $a^2 = c^2 + b^2 \therefore b^2 = a^2 - c^2$,
 substituyendo el valor de b se obtendrá $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, si dividimos
 entre a^2b^2 $\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$ finalmente obtenemos la ecuación de la elipse en su
 forma canónica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Cuando la elipse tiene su centro en un punto P(h, k)
 será $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$. Una de las relaciones importantes en ella es la
 excentricidad, motivo de varios estudios, que es la relación entre la semi-distancia
 c y el semi-eje a siendo $e = \frac{c}{a}$, y su ecuación general se puede obtener a partir de
 esta última ecuación, siendo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

No se pretende en ningún momento presentar un compendio de deducciones de
 ecuaciones cuadráticas, simplemente se piensa que la mejor forma de ubicarnos
 dentro de la problemática que pudieran tener los alumnos es mostrando algunas
 de las deducciones que ellos enfrentan por ser parte de los contenidos analíticos y
 del discurso didáctico normal en el aula.

En ese discurso al que nos referimos están involucrados los diferentes problemas
 y libros de texto en los cuales o bien están poco ilustrados o son tan analítico-
 formales que se encuentran completamente dentro de lo abstracto, y en la realidad
 el alumno tiene pocas experiencias que le permitan visualizar en qué empleará
 semejantes conocimientos. Este aprendizaje es más memorístico que a nivel de
 comprensión o de razonamiento.

Como parte de este marco teórico-contextual, y con el fin de establecer las bases
 teóricas pedagógicas y didácticas con respecto a la comprensión-razonamiento, se
 recurrió a varios autores para poder establecer finalmente bajo qué definición o
 descripción de este concepto nos apoyaríamos en esta investigación.

Iniciamos esta descripción a partir de los conceptos de la didáctica general para poder establecer un contraste posteriormente con las definiciones que se tienen en la literatura propia de la matemática educativa, ya que sobre la comprensión y el razonamiento se ha realizado una gran cantidad de trabajos teóricos. Finalizamos esta descripción con la definición que adoptamos.

La importancia de este concepto es relevante ya que en el modelo teórico que se utilizó como parte fundamental de nuestra investigación, se aplica en todo su desarrollo, tomándolo como eje principal, de forma tal que el aprendizaje de los estudiantes se analiza en función de su nivel de razonamiento-comprensión sobre los objetos de estudio, presentando una clasificación acorde a su evolución a través de las diferentes fases del proceso de aprendizaje.

La comprensión es uno de los conceptos que los maestros y especialistas en didáctica y pedagogía más han utilizado ambiguamente, empleándolo desde diversas interpretaciones. Su relación con el razonamiento corre la misma suerte; existen autores que aseguran que no existe razonamiento sin comprensión y otros tantos que dicen lo contrario.

La palabra comprensión que proviene del latín *comprehendere*, que significa “captar”, en nuestro diccionario se establece como abarcar, ceñir, rodear por todas partes, entender, percibir. Una conceptualización más amplia proveniente de la psicología es aquella en que se considera que *una persona comprende un objeto, proceso, idea o hecho si ve cómo puede utilizarlo para satisfacer alguna meta*.

Otra definición de comprensión es: *“La comprensión se produce cuando se llega a advertir cómo utilizar algo productivamente, de modo que nos interese un patrón de ideas generales y los hechos que las respaldan”*. (Morris I. Bigge, 1976).

Estas definiciones son específicamente tomadas de la pedagogía general. Sin embargo las siguientes definiciones son propias de la matemática educativa ya que fueron publicadas en un artículo de la revista Relime, (David E. Meel, 2003,3)

en la cual se presentó un artículo sobre los modelos y las teorías de la comprensión matemática. Ahí se describe que en (Skem, 1976) se distingue la comprensión del conocimiento y que Skem enfatizó en las categorías de la comprensión dividiéndola, en comprensión relacional, es decir, como saber qué hacer y por qué se debe de hacer, y la comprensión instrumental, como tener reglas sin razón.

Otras visiones más generales proponen que la comprensión es el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos (Burton, 1984; Davis, 1984; Ginsburg 1992; Greeno 1977; Hierbert, 1986; Hiebert y Carpenter 1992; Janvier, 1987; McLellan 1995; Michener, 1978; Nickerson, 1985; Ohlsson, 1988). La formación de una red de estas conexiones proporciona una estructura para situar una nueva información mediante el conocimiento de similitudes, diferencias, relaciones inclusivas y relaciones de transferencia entre modelos. Por lo tanto el desarrollo de la comprensión resulta en un proceso de conectar las representaciones de una red estructurada y cohesiva. El proceso de conexión requiere de la relación entre los conocimientos y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo.

De acuerdo con esta publicación, de las teorías de la comprensión matemática antes de 1978, entre las más importantes se encuentran (Broewill, 1945; Browelly Sms; Ferh, 1955; Polya, 1945; Van Engen, 1949; Wertheimer, 1959); en estos trabajos la comprensión se describe como la capacidad de actuar sentir o pensar de manera inteligente respecto a una situación. La comprensión varía respecto al grado de exactitud e integridad.

Como podemos observar, existe un gran abanico de definiciones de este concepto tan importante. Pierre Van Hiele (1957), en su tesis de doctorado menciona lo siguiente:

“Puesto que me propongo estudiar la comprensión como tal y como existe en la enseñanza de las matemáticas en V. H. M. O., es evidente que intentaré en lo

posible ceñirme al contenido conceptual que se ha venido dando a la comprensión en ese contexto. Es por ello que debo de desistir de la metodología que resulta más eficaz en matemáticas: elaborar una definición de comprensión para obtener un contenido conceptual con el que trabajar cómodamente. Con ello se llegaría probablemente a un concepto nuevo que no nos serviría para el estudio del que ya tenemos. Si además pensamos que las publicaciones acerca del concepto de comprensión que nos ofrecen las psicologías del pensamiento y del aprendizaje no han llegado todavía al punto de crear un nuevo concepto que logre eclipsar al que ya se conoce a través de la práctica docente es mejor que empezamos a analizar el fenómeno de la comprensión tal y como se conoce en el V. H. M. O.”

“Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando a partir de los datos y relaciones geométricas que se suministran, es capaz de llegar a una conclusión de una situación con la que nunca se había enfrentado antes”.

Para esclarecer un poco más el concepto vertido por este científico holandés, con respecto a su tesis doctoral, citaremos dos párrafos más con el objeto de establecer claramente lo que desde la concepción de autor del modelo que utilice es la comprensión, con el cual comparto sus puntos de vista en este aspecto.

“La comprensión se materializa siempre a través de mecanismos lógicos. Hay que recordar sin embargo que nos estamos refiriendo a ejemplos de comprensión que se producen en un contexto de razonamientos matemáticos. Esta demarcación es la causa de que se enfatice el aspecto lógico.

En el caso de la secuencia lógica es posible que la comprensión vaya creando una serie de situaciones nuevas quedando demostrada la existencia de la comprensión cuando el alumno ofrece para cada paso una explicación que el mismo ha hallado.

Hay que observar además que la comprensión y situación de aprendizaje van muy unidas. La persona se encuentra en proceso de aprendizaje y después de cierto tiempo esta capacitada para actuar de manera adecuada ante situaciones que todavía no habían aparecido en su proceso de aprendizaje. Se dice entonces que ha actuado basándose en la comprensión en su proceso de aprendizaje”.

Estas ideas son las que sustentan el modelo teórico que empleamos en esta investigación. A continuación presentamos las bases teóricas del modelo de Van Hiele para el análisis del proceso de aprendizaje en función del razonamiento y la comprensión. Este modelo esta formado por dos partes: la primera de ellas es descriptiva, ya que identifica una secuencia de tipos de razonamiento, llamados *niveles de razonamiento*, a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a un máximo grado de desarrollo intelectual. La otra parte del modelo proporciona al instructor-investigador las directrices sobre cómo pueden ayudar a sus alumnos para que puedan alcanzar un nivel de razonamiento, estas directrices se conocen como *fases de aprendizaje*.

Las ideas principales descritas por Pierre van Hiele son las siguientes:

- 1) Se puede encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- 2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- 3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento para presentárselas.

- 4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

El modelo hasta la fecha ha sido probado en varios trabajos y se han obtenido resultados positivos. La mayoría de las investigaciones que se han realizado están dentro de la geometría elemental y aunque existen aplicaciones más recientes del modelo en otras áreas del conocimiento matemático, su diseño original es para su aplicación específicamente en conocimientos de la geometría; a continuación se realiza una descripción del modelo y de los niveles de razonamiento así como de las fases de aprendizaje, que nos permiten reconocer las características principales de los niveles a partir de las actividades de los estudiantes.

Niveles de razonamiento

Nivel #1: de reconocimiento.

-  Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, pudiendo incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.
-  Además perciben las figuras como objetos individuales, es decir que no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
-  Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras; los reconocimientos, diferenciaciones o clasificaciones de figuras que realizan se basan en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.

✎ En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen; suelen usar frases como “se parece a”... “tiene forma de”...

✎ Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

Si el profesor pregunta al alumno en qué se diferencian, por ejemplo, los rombos de los rectángulos, sus respuestas harán énfasis en las diferencias de formas, tamaño, tal vez color (“el rectángulo es más largo”, “el rombo es más picudo”); en este nivel no debemos esperar respuestas que hagan incidencia en el paralelismo.

El razonamiento de este nivel no es exclusivo de alumnos de corta edad sino más bien es aplicado a todos aquellos conceptos que son nuevos para un estudiante, si bien algunas veces será la estancia en este nivel muy rápida.

Nivel #2: de análisis.

✎ Los estudiantes se dan cuenta de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal.

✎ Además reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y los elementos, los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.

✎ Sin embargo, no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

La primera de las características de este nivel hace la diferencia respecto al nivel 1. Los estudiantes han cambiado su forma de mirar las figuras geométricas, ya son concientes de que pueden estar formadas por elementos, y de que son portadoras de ciertas propiedades. Además, el nivel 2 es el primero de los niveles que puede ofrecer un razonamiento matemático e integración de las figuras como un todo más generalizado.

Nivel #3: de clasificación.

✎ En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal (matemático) de los estudiantes: son capaces en este nivel de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones; en particular, puede clasificar lógicamente las diferentes familias de figuras a partir de sus propiedades o relaciones ya conocidas. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación.

✎ Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir puede dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.

✎ Si bien los estudiantes comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, los ven de forma aislada, ya que no comprenden la necesidad del encadenamiento de estos pasos ni entienden la estructura de una demostración; pueden entender una demostración explicada por el profesor o desarrollar alguna del libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos.

✎ Al no ser capaces de realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, los estudiantes no comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.

Al alcanzar el nivel 3 habrán adquirido esta habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras. Por ejemplo, en el caso del estudio de los cuadriláteros, el estudiante de este nivel ya podrá entender que la igualdad de los ángulos opuestos implica paralelismo de los lados, que la igualdad de los lados implica perpendicularidad de diagonales.

Aunque este avance de razonamiento es muy importante, no es más que un paso intermedio en el camino que lleva a la comprensión completa de los sistemas axiomáticos formales que sostienen las matemáticas, misma que se alcanzará en el nivel 4. En efecto, la capacidad del estudiante se limitará a realizar pequeñas deducciones, es decir, implicaciones simples, no pudiendo, por ejemplo, darse cuenta de la técnica seguida para hacer la demostración completa de un teorema.

Nivel #4: de deducción formal.

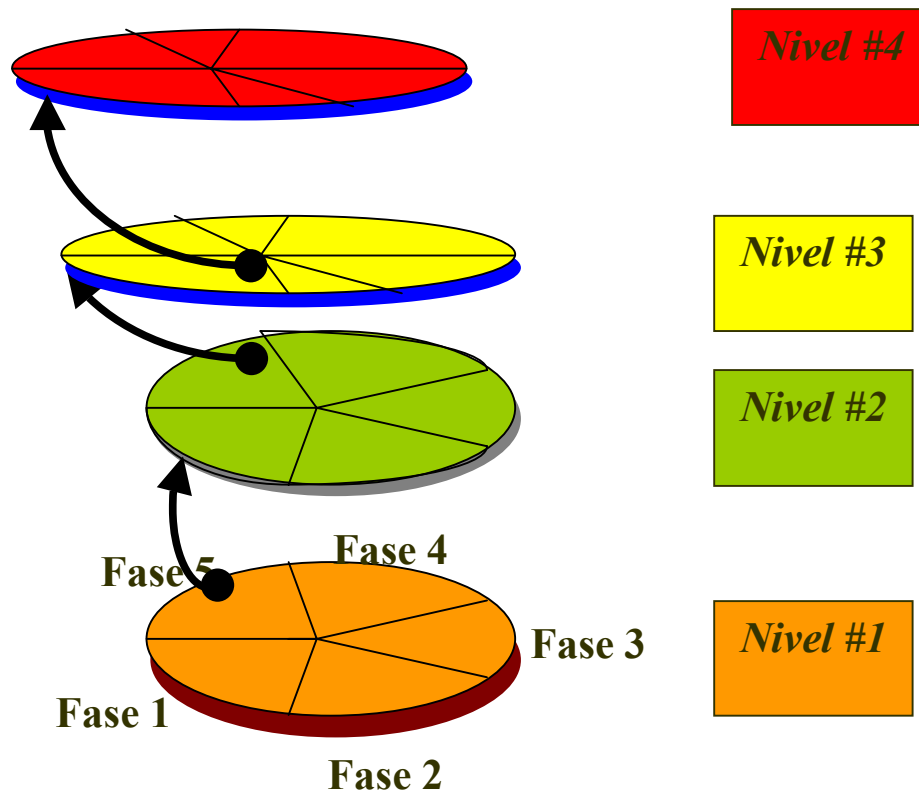
✎ Alcanzado este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones (varios pasos) ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.

✎ Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir, el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas y teoremas.

✎ Los estudiantes aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (es decir, la existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema) y la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto.

Los estudiantes del nivel 4 podrán hacer demostraciones formales de las propiedades que ya habían realizado informalmente con anterioridad, así como descubrir y demostrar nuevas propiedades más complejas.

Niveles de Razonamiento



Nivel #1 Reconocimiento

Nivel #2 De Análisis

Nivel #3 De Clasificación

Nivel #4 De deducción formal.

*Diagrama de los Niveles del Modelo de Van Hiele, Dr. Jaime A. Gutiérrez,
Propuesta de Fundamentación para la enseñanza de la Geometría:
Modelo Van Hiele (1990)*

Principales características de los niveles

- 1) Uno de los principios básicos del modelo, que se deriva de la estructura jerárquica y secuencial, es: no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior.
- 2) Existe una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles. Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los cuatro niveles de Van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Para un estudiante la palabra demostración consiste simplemente, en comprobar que la afirmación es cierta en unos pocos casos, incluso en uno solo, haciendo las mediciones oportunas con alguna herramienta. En el nivel 3 demostrar ya tiene significado próximo al que le damos los matemáticos, las demostraciones ya están formadas por razonamientos lógicos. En el nivel 4 la palabra demostración ya tiene el significado usual, entre los matemáticos. Por lo cual a cada nivel le corresponde un tipo de lenguaje específico.
- 3) El paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua.

Así, la idea central del modelo Van Hiele en lo que respecta a la relación entre la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de la capacidad de razonamiento es que *la adquisición, por una persona, de nuevas habilidades de razonamiento, es fruto de su propia experiencia*. Esta experiencia se adquiere algunas veces fuera de las aulas (todos los niños aprenden a partir de juegos, su relación con las personas adultas, de la televisión, etc.) y otras veces dentro de ella, por lo tanto la enseñanza adecuada es aquella que les proporciona esa experiencia. Desde esta perspectiva, hay diferentes métodos de enseñanza que son igualmente válidos, aunque desde el punto de vista pedagógico pueden ser opuestos; no obstante, resulta evidente que serán más válidos los métodos activos, es decir, aquellos en los que el estudiante es algo más que simple receptor pasivo de información,

frente a las clases magistrales, la lectura del libro, y los métodos de enseñanza típicamente deductivos en los que se presenta el producto final.

De acuerdo con lo que hemos descrito del modelo, se establece que el entorno, en sí la sociedad, influye en gran parte en la educación del individuo y que los métodos de enseñanza deberán ser acordes a la época del mismo, por lo tanto la enseñanza de la matemáticas debe cambiar también acorde a este momento que vivimos, ya que los individuos que conformamos esta sociedad así lo requerimos.

Van Hiele ha escrito en su tesis respecto a la instrucción del estudiante lo siguiente:

“La maduración que lleva al estudiante a un nivel superior tiene lugar de una forma especial. Se pueden revelar varias fases en ella (esta maduración debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico). Por tanto, es posible y deseable que el profesor ayude y acelere. El objetivo del arte de enseñar es precisamente enfrentarse a la cuestión de saber cómo se pasa a través de estas fases y cómo se puede ayudar al estudiante de forma eficaz”.

Este planteamiento marca una diferencia fundamental, por ejemplo, entre los modelos de aprendizaje basados en el trabajo de Piaget y el de Van Hiele, ya que para el primero el aprendizaje matemático y el desarrollo intelectual están íntimamente ligados al desarrollo biológico, mientras que Van Hiele tiene otra perspectiva, él lo manifiesta así: *“La imposibilidad de los niños para pensar lógicamente no procede de una falta de maduración, sino de una ignorancia de las reglas del juego de la lógica. El niño no tiene a su disposición las estructuras a partir de las cuales se originan las preguntas. No puede entender las cuestiones porque no ha determinado el proceso de aprendizaje que guía al nivel de pensamiento requerido. Es importante la edad del que aprende en cuanto a que debe haber tenido tiempo suficiente para llevar a cabo el necesario proceso de aprendizaje”* (Van Hiele, 1986).

A continuación se mencionan los pasos que deberá de seguir un instructor-investigador de acuerdo a este modelo para ayudar a sus estudiantes a transitar por los diferentes niveles de razonamiento; recordemos que el aprendizaje es una acumulación de experiencias adecuadas, y es responsabilidad del que enseña el proporcionar o desarrollar esas experiencias para que sean útiles.

Lo que se conoce como fases, son etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le llevan al nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases, el instructor debe procurar que sus alumnos construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento al que deben acceder, creando primero los vértices de la red y después las conexiones entre ellos. Dicho de otra forma, es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, vocabulario etc.), con los que tendrá que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos. Las fases de aprendizaje propuestas por Van hiele son cinco.

Fases de aprendizaje

1ª. Fase: de información.

Se trata de una fase de toma de contacto: el instructor debe informar al estudiante sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo propiamente dicho.

Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve par averiguar los conocimientos previos del estudiante sobre el tema que va a abordar. Es recomendable que las experiencias extra escolares no sean despreciables, sino que se aprovechen como fuente de motivación; además es conveniente hacer un

trabajo repetido o tratar de enseñar a los alumnos cosas que ya saben. Por otra parte, muchas veces tendremos que trabajar un tema que no es absolutamente nuevo para los estudiantes, que ya lo han estudiado en un curso anterior, por lo que, para una buena utilización del modelo, es necesario que el maestro sepa qué nivel de conocimientos tienen los alumnos del tema, y sobre todo qué nivel de razonamiento son capaces de mostrar.

2ª. Fase: orientación dirigida.

En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigación basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los alumnos descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc., principales en el área de la geometría que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele afirma, refiriéndose a esta fase, que “si las actividades son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior”.

Obviamente los estudiantes, por si solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos y propiedades que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

3ª. Fase: explicitación.

Una de las finalidades principales de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen como han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que

analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas con claridad. Este diálogo hace que sea en el transcurso de esta fase cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones.

Esta fase tiene también la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que está empezando a alcanzar.

Por lo tanto, la fase 3 no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas sino de revisión del trabajo hecho antes, de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

4ª. Fase: orientación libre.

En esta fase los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir, a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es conocido casi en su totalidad por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante planteamiento de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que pueden llevar a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán indicios que muestran el camino adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que han adquirido en las fases anteriores.

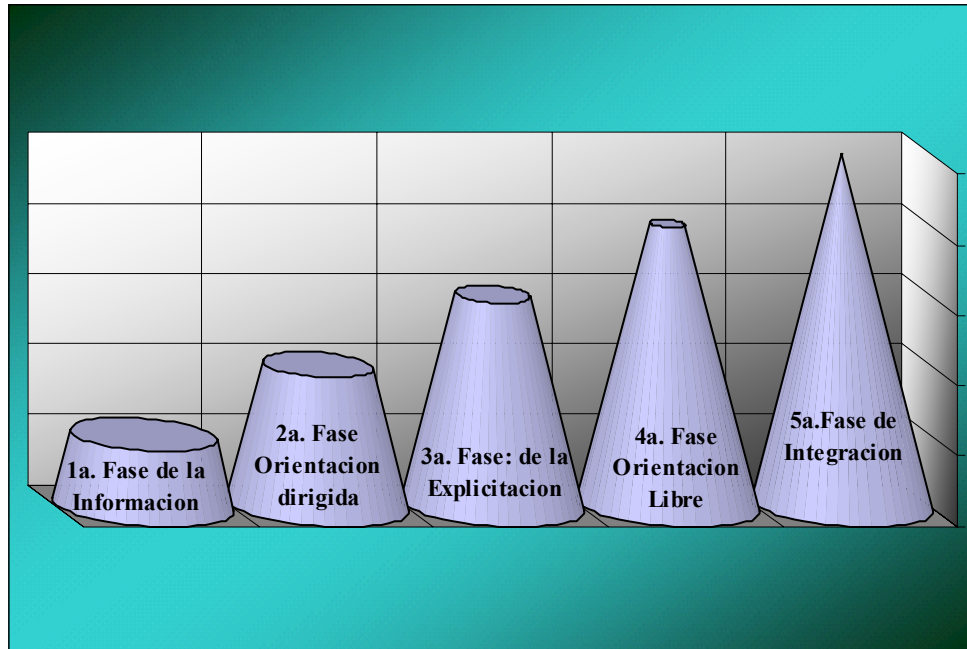
Es necesario hacer la aclaración de que los problemas que se plantearán no serán como los que se plantean en los libros de texto que acostumbramos utilizar, en los cuales es solo necesario recordar algún hecho en concreto para obtener la solución de los mismos. Por el contrario, algunos de los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varios caminos de resolución. Este tipo de actividades son las que permitirán completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

5ª. Fase: integración.

En las fases anteriores, los alumnos han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía tiene que adquirir un visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el instructor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto nuevo al estudiante. Solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya se conocen.

Completada esta fase, los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que las anteriores, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

Fases por Nivel de Aprendizaje



- 1ª. Fase: de la Información*
- 2ª. Fase: Orientación Dirigida*
- 3ª. Fase: Explicitación*
- 4ª. Fase: Orientación Libre*
- 5ª. Fase: de Integración:*

Diagrama de Fases por Nivel del Modelo Van Hiele

Hay algunas de las características de las fases de aprendizaje de Van Hiele que valen la pena que sean puestas en relieve, pues tiene importancia para la organización de la docencia basada en el modelo.

- A) En primer lugar es conveniente reflexionar un momento sobre las diferencias entre unas fases y otras. Un elemento diferenciador destacado son los tipos de problemas que se deben de plantear en cada fase.

- En la fase de información los problemas que se planteen tienen como finalidad revelar a los estudiantes cual será el área de la geometría que van a estudiar. Su misión principal no es la de ser resueltos, pues unas veces será simple y otras los estudiantes carecerán de los conocimientos necesarios para llegar a la solución.

- En la fase 2, de orientación dirigida, los problemas sirven para delimitar los elementos principales (conceptos, propiedades, definiciones, etc.) que los alumnos deben estudiar y sobre los que deben aprender a razonar. Por lo tanto, los problemas deben plantear la situación en cuya resolución deberán aparecer algunos de dichos elementos.

- En la fase 4, de orientación libre, los problemas no deben ser rutinarios, deben ser más complejos que en la fase anterior y deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y a aplicarlos en situaciones diferentes de las que sirvieron para el aprendizaje inicial. Aquí pueden volverse a plantear los problemas de la fase 1 que no se resolvieron.

- Por ultimo, los problemas que se plantean en la fase de integración (fase 5) tendrán como finalidad favorecer dicha integración o comprobar si los estudiantes ya la han conseguido. Para ello deben plantear situaciones amplias, en las que no haya un predominio de ninguna de las partes que acaban de integrar, sino que intervengan varias en ellas.

B) También se debe reflexionar sobre el proceso completo de desarrollo de la capacidad de razonamiento, ahora que conocemos sus dos componentes, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Ya se mencionó que las fases de aprendizaje representan unas directrices que el modelo de Van Hiele propone para ayudar a los alumnos a mejorar su capacidad de razonamiento. Una pregunta importante es la siguiente: ¿hasta dónde podrán progresar mis alumnos durante el tiempo de mi aplicación? Existen algunas consideraciones que responderán esta pregunta:

✎ En general el proceso de desarrollo del razonamiento no puede enmarcarse en los límites de un curso escolar. La adquisición de los niveles superiores, en particular los niveles 3 y 4, suele ser un proceso de mucho tiempo, meses e incluso años, por lo que no es de extrañar que al término del curso los estudiantes sigan estando en el mismo nivel que al principio, si bien estarán más cerca de poder lograr el nivel siguiente.

✎ También puede ocurrir que durante el transcurso de la experiencia, los estudiantes alcancen un nivel, por lo que el profesor deberá empezar el trabajo que conduce al nivel siguiente. En este sentido se tendrá en cuenta que los niveles no plantean rupturas en el proceso de aprendizaje, por lo que una vez completado el trabajo de la última fase de un nivel, se deberá de iniciar el trabajo de la primera fase del nuevo nivel.

C) Finalmente el último punto: la meticulosidad con que deberán aplicarse las directrices del modelo de Van Hiele.

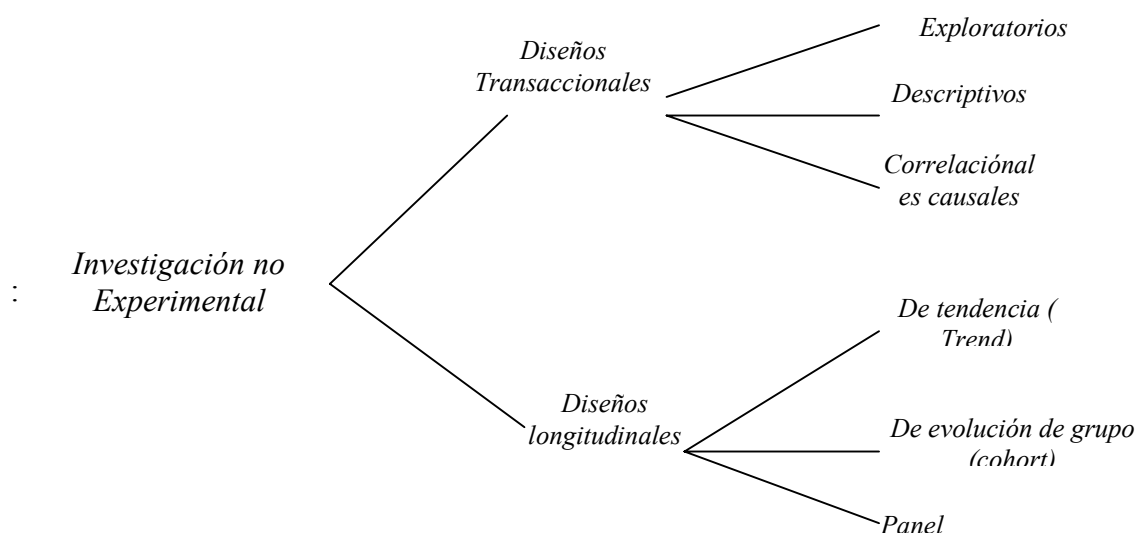
2.2 Método de investigación

Con el propósito de responder a las preguntas de investigación planteadas con anterioridad, ser coherentes con el objetivo y contar con elementos sobre nuestro supuesto de investigación, se decidió seleccionar un método no experimental. Este tipo de métodos están clasificados por su dimensión temporal, número de momentos o puntos de tiempo en los cuales se recolectan los datos.

Dentro de las preguntas de investigación que elaboramos en el apartado sobre el objetivo se puso de manifiesto que para esta investigación es de suma importancia

el poder caracterizar lo que sucede en una situación de aprendizaje de la GA en los alumnos de bachillerato, tanto en su proceso cognitivo del razonamiento, como el concerniente a la comprensión. La medición de estas variables ha sido objetivo principal: el implementar, observar y estar monitoreando el modelo para estudiar si el alumno observa mejora en cuanto a su comprensión de contenidos y cómo es que transita por los distintos niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. Consideramos por lo tanto que la metodología de investigación además de no experimental debe ser del tipo longitudinal ya que ésta se centrará en cómo evolucionan las variables de la investigación y su relación entre ellas (comprensión, aprendizaje, razonamiento etc.).

Este método de investigación ha sido diseñado principalmente para aquellos investigadores que desean analizar cambios a través del tiempo en determinadas categorías, conceptos, sucesos, eventos, variables, contextos o comunidades



Este tipo de investigaciones recolectan datos a través del tiempo en puntos o periodos, para hacer inferencias con respecto al cambio, sus determinantes y consecuencias. Tales puntos o periodos por lo común se especifican de antemano y se van determinando conforme avanza el estudio en el enfoque cualitativo. Los diseños de este tipo de investigación se dividen en tres tipos: diseños de tendencias, diseños de análisis evolutivo de grupos y diseños de panel.

Se decide que el método en la investigación será no experimental, longitudinal por su origen, y del tipo de tendencias, ya que en él se analizan cambios a través del tiempo de las variables y categorías. Su característica distintiva es que la atención se centra en la población en estudio y la experiencia no está necesariamente sujeta a un espacio restringido de trabajo ni a secuencias rígidas donde la experimentación de situaciones concretas es lo importante. Es por esta razón que se eligió este tipo de diseño de investigación.

Además, como parte de los elementos del método para la recolección de datos, emplearemos recursos como la grabación en video, los materiales empleados, los cuestionarios, y por supuesto, la observación directa del desarrollo de las actividades en las experiencias de aprendizaje.

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se describen las experiencias de aprendizaje realizadas así como el análisis de los resultados obtenidos.

3.1 Descripción de las actividades realizadas

En esta parte del capítulo se presenta la descripción de las actividades para el aprendizaje de las cónicas en base a las fases de aprendizaje y el diseño de cada nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele.

A continuación realizamos una descripción de las actividades programadas de acuerdo a las fases del proceso de aprendizaje, mismo que efectuamos con la finalidad de investigar los procesos cognitivos que los alumnos desarrollaron en su razonamiento-comprensión.

El modelo Van Hiele se divide en cinco *niveles de razonamiento-comprensión* en los cuales no es posible pasar de un nivel a otro sin superar o dominar antes el que está en turno, dichos niveles son:

Nivel 1: de Reconocimiento

Nivel 2: de Análisis

Nivel 3: de Clasificación

Nivel 4: de Deducción Formal

Cada nivel en su interior tiene a su vez cinco *fases de aprendizaje* que son:

- 1ª Fase de la Información
- 2ª Fase de la orientación dirigida
- 3ª Fase explicitación
- 4ª Fase orientación libre
- 5ª Fase de integración

Cada una de ellas es de gran relevancia dado que el instructor trata de diseñar sus actividades de acuerdo, en principio, al nivel de aprendizaje que tienen sus alumnos, y a partir de su clasificación se diseñan las actividades de aprendizaje que le permiten llevar a sus alumnos a un nivel superior que el que tiene actualmente.

En nuestra investigación las actividades que realizamos estuvieron distribuidas de la siguiente forma, en cada una de las diferentes fases.

1ª Fase: información

➤ **Actividades y descripción**

Se pretendió iniciar el trabajo con un grupo aproximado de 20 alumnos que cursaban su 3er. o 4º Semestre. La lista de estos alumnos se le proporcionó a la dirección del Bachillerato del Universidad del Valle de México (UVM) Campus San Luis Potosí, con la finalidad de evaluar con los alumnos si estaban de acuerdo en colaborar desinteresadamente en el desarrollo de esta actividad tomando en cuenta que su participación sería voluntaria y que el único interés de parte de ellos sería el aprender una nueva forma o técnica de trabajo para su materia de geometría analítica.

Sin embargo, la respuesta de los estudiantes no fue del todo como se esperaba al inicio ya que muchos de ellos tenían actividades ya programadas y no podían

asistir a las sesiones diseñadas. Los pocos que asistieron lo hicieron tan solo una o dos semanas por lo que nos vimos en la necesidad de invitar a alumnos del 2° semestre, que al inicio no presentaron mucho interés debido a que estos alumnos no tendrían contacto con la materia sino hasta el próximo semestre. Sin embargo, sí hubo una respuesta favorable y finalmente se inició con un grupo de diez entre 2°, 3° y 4° semestre. En el transcurso de la experiencia, por razones no controlables en la misma, se retiraron los de 3° y 4° y nos quedamos por un tiempo con 6 alumnos para finalizar con 4 de ellos (una mujer y tres hombres).

A.0 Actividad programada en el proyecto: El profesor realizará una plática informativa con los estudiantes a cerca de la historia de las cónicas y su desarrollo en la antigüedad así como sus aplicaciones actuales (Actividad no realizada tal como se planeó, debido a las dificultades para formar el grupo de alumnos inicialmente).

A.1 Actividad Programada en proyecto: El profesor mostrará un geoplano y explicará la relación con los ejes cartesianos así como cuál es su función. A cada alumno se le entregará material para que cada uno de ellos trabaje en su propio geoplano colocando en él los ejes y efectuando ejercicios de acuerdo a las instrucciones que se den.

A.2 Descripción de la actividad desarrollada en el aula: En esta primera aproximación se les proporcionó a los alumnos la historia de la cónicas y se les presentó el geoplano a través de una tabla con orificios, uno cada centímetro, con lo cual se conforma una cuadrícula y en ella se les indicó cómo se logra obtener figuras, así como lo relativo al origen de la cuadrícula y la forma en que cada eje numérico se representa en este espacio. También se les explicó que al eje horizontal se le conoce como eje de las abscisas y el eje vertical, como eje de las ordenadas, con lo cual tenemos para las curvas un plano bidimensional.

Se les solicitó que las figuras que se les habían presentado las representaran en un geoplano que ellos mismos construirían, para lo que se les dio una hoja cuadriculada. Esta actividad se realizó como estaba planeada y no representó gran dificultad, la mayoría de los estudiantes dibujó todas las curvas en una sola hoja del geoplano.

2ª Fase: orientación dirigida

A.2 Actividad programada en proyecto: Para efectuar el reconocimiento de las cónicas es necesario contar con masilla de colores con la que cada uno de los alumnos construirá un cono y a éste cono se le realizarán cortes con una navaja de forma horizontal, a 45° , y a 60° , y después se construirán dos conos para modelar en masilla la última de las cónicas que es la hipérbola.

A.3 Descripción de actividad aplicada en el aula: Esta fue una de las actividades que en su inicio más les tomo de sorpresa a los alumnos y una de las que más les agradó, tal como si les llevara a su educación preescolar, trabajaron con bastante ánimo. Se utilizó masilla de colores (azul, café, blanca, negra etc.), e iniciaron la construcción de su cono.

El objetivo principal de esta actividad fue que el alumno se familiarizara y adquiriera el conocimiento de forma completamente vivencial, tal como lo maneja el modelo teórico, mediante la experiencia para que logaran apreciar que con un corte a 45° sobre el cono de masilla se obtiene una parábola; una elipse a partir de uno de 60° y con uno de 0° u horizontal, un círculo; y que para la construcción de la hipérbola se requiere de dos conos con un corte vertical de 90° .

3ª Fase: explicitación

A.3 Actividad programada: Con el fin de reconocer las cónicas en el medio, se les presentarán a los alumnos fotografías de periódicos y recortes de los mismos y se les solicitará que localicen las figuras geométricas y que las clasifiquen de acuerdo a lo que se trabajó en la actividad anterior.

A.4 Descripción de la actividad aplicada en el aula: Esta actividad la alternamos con la construcción de los conos de masilla de colores. Un par de actividades divertidas, ya que el recortar figuras geométricas que ellos observaban, les permitió familiarizarse más con las cónicas y prepararlos para dar el siguiente paso, que sería el iniciar el conocimiento de las curvas y su construcción formal a través de diferentes métodos. La colección de recortes fue pegada en una libreta colocando los nombres de los estudiantes en cada una de las hojas con la correspondiente fecha.

A.4 Actividad programada: Con el fin de de realizar actividad algebraica-geométrica, se efectuarán demostraciones geométricas de los diferentes productos notables utilizando modelos de cartoncillo o cartulina que le permitan al instructor hacer partícipe a los alumnos de la actividad, primero él demostrará como se calcula el producto notable y después les solicitará a los alumnos que localicen las piezas que corresponden al modelo demostrado.

A.5 Descripción de la actividad aplicada en el aula: La actividad 5 y 6 fueron realizadas con apoyo en varios materiales, de forma continua, prácticamente en la misma semana, tratando de que el alumno fuera adentrándose entre la parte geométrica y la parte algebraica, lo cual que es uno de los obstáculos más fuertes a vencer. Se le demostró al alumno de forma geométrica cómo se relacionan los diferentes productos notables tal como el cuadrado de un binomio, binomios conjugados o el cubo de binomio, este tipo de juegos son muy factibles ya que se arman como un rompecabezas, cuya imagen le es más fácil de retener que la algoritmia y que además por los colores y material con la que se elaboran, le

atraen para trabajar con ellas; en esta ocasión incluso se les observó un tanto ansiosos por saber qué era lo que se iba a construir.

4ª Fase: orientación libre

A.5 Actividad programada: El instructor, por medio de material didáctico (dibujos en cartulinas, acetatos, etc.), mostrará los elementos de cada una de las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola).

A.6 Descripción de la actividad aplicada en el aula: Dentro de la actividad 6 se le mostró a los alumnos todos los elementos de cada una de las cónicas y se les proporcionó un modelo particular para que más adelante se le utilizara como patrón de aprendizaje y con él aprendieran la relación que tenía cada uno de los elementos de cada una de las cónicas, entre los que podemos citar están los focos, los ejes focales, vértices, la distancia entre los focos (lado recto), en fin, cada uno de sus elementos y la relación entre ellos.

5ª Fase: de integración

A.6 Actividad programada: Con la ayuda del juego de geometría y con otros materiales didácticos, el instructor le mostrará a sus alumnos cómo trazar con diferentes métodos en el papel las cónicas, para que cada uno de ellos efectúe la reproducción del trazado de acuerdo a los diferentes métodos empleados, ya sea a través del uso del cordel y la regla, o bien con diagonales, o con compás y regla, etc.

A.7 Descripción de la actividad aplicada en el aula: Una de las actividades con mayor aceptación fue esta en la que se les mostró como podían efectuar el trazo de las cónicas desde diferentes perspectivas, la presentación de los métodos de trazado fue iniciando con diagonales (ya que casi siempre para el alumno es más fácil el utilizar líneas rectas), y se les presentó cómo la parábola, la elipse, y la circunferencia, se podían trazar con éstas. El siguiente método fue con compás y

regla, posteriormente con el cordel y la regla; resultando este último de los tres el más aceptado y el cual hasta el final de la experiencia, ellos prefirieron utilizar. La razón de esto posiblemente sea por la facilidad, ya que para ello sólo ocupan un cordel que sujetan al foco o focos y su lápiz, que al moverlo con el cordel tensado les permite obtener prácticamente cualquier cónica, desde la circunferencia hasta la hipérbola. De cada método, se les solicitó a los alumnos lo realizaran cuando menos tres veces con cada curva. Es decir, de cada una de las cuatro cónicas deberían de realizar 3 por cada método, lo que resulta en 12, pero como son cinco métodos, se tienen 60 cónicas en total. Con esta cantidad de gráficos que realizaron se logró el reconocimiento de los elementos y las curvas en sí. Al final de esta actividad se aplicó un test (libre) y se les retiraron todos los apoyos didácticos para observar el grado de razonamiento al que habían llegado los alumnos. Satisfactoriamente pudimos observar que de los 4 alumnos, 3 de ellos estaban listos para el siguiente nivel, como lo demuestran las descripciones que realizaron en el test que se les aplicó y que se describe más adelante.

Es importante mencionar que los cuatro alumnos son del segundo semestre y que antes de esta experiencia no conocían nada sobre las cónicas y mucho menos de la Geometría Analítica.

Durante esta actividad se realizó también un video corto cuyo objetivo principal fue el presentar de manera gráfica la forma en que los jóvenes trabajaron y el grupo que se logró conjuntar, así como el medio donde se desarrolló el trabajo diario.

A.8 Actividad programada: La actividad programada como cierre de este estudio fue el test del modelo teórico de Van Hiele.

A.8 Descripción de la actividad aplicada en el aula: Esta actividad representa la finalización de este estudio. En él se han aplicado dos test diferentes, en dos tiempos distintos, tanto cronológicamente como en el avance del proyecto, y que

son: uno cuando los alumnos estaba en pleno trabajo (25 de mayo de 2005) y el segundo al final de la experiencia (17 de junio de 2005).

Es importante mencionar que el segundo test fue programado para realizarlo después de 15 días de haber terminado las actividades, ya que en estas fechas no se tenía contacto con los alumnos debido a actividades escolares (exámenes finales de cursos).

3.2 Análisis de las experiencias de aprendizaje

El objetivo de esta sección es efectuar un análisis de la información obtenida durante la aplicación del modelo de Van-Hiele y describir el desempeño de los alumnos a través de las diferentes fases de aprendizaje, y determinar los cambios o progresos en cuanto a su razonamiento-comprensión. El estudio se realiza tanto durante el desarrollo de las fases, como al final de ellas para contar con todos los elementos posibles (ya que si se presentan situaciones de progreso satisfactorias en el alumno, deberá de avanzar al siguiente nivel de razonamiento de acuerdo a lo expresado teóricamente en el modelo.

A continuación y con el fin de dar cumplimiento al objetivo de este trabajo de investigación, se presenta el análisis de dos de las actividades que se llevaron a efecto para contrastar el progreso que tuvieron estos estudiantes. El proceso que se realizó en este análisis es el siguiente: se llevó a cabo la descripción teórica de la fase a la que pertenece la actividad que se está analizando, para posteriormente describir la actividad programada y la realizada. Inmediatamente después se analiza la actividad en base a los elementos testigos, es decir, las interacciones personales instructor-alumno, vídeos, dibujos, trazos etc., que fueron realizados en cada una de las actividades. Este análisis se efectúa actividad por actividad.

Base teórica de la fase #3 de explicitación

Una de las finalidades principales de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es importante que surjan puntos de vista divergentes, ya que cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus propias ideas (o las de sus compañeros), que tenga que ordenarlas y que expresarlas con claridad. Este diálogo y negociación de ideas y significados hace que sea en el transcurso de esta fase cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones.

Esta fase tiene también la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar.

Por lo tanto, la fase 3 no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas sino de revisión del trabajo hecho antes de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

Descripción de la actividad programada y la actividad realizada

A.4 (Actividad Programada en proyecto)	A.4 (Descripción de actividad aplicada en el aula)
Con el fin de reconocer las cónicas y su relación con el medio ambiente se les presentarán a los alumnos fotografías de periódicos y revistas, para que sean ellos quienes las recorten y las clasifiquen,	Esta actividad la alternamos con la construcción de los conos de masilla de colores, un par de tardes divertidas, ya que el recortar figuras geométricas que ellos observaban les permitió familiarizarse más con las

posteriormente se les solicitará que las peguen en la libreta bitácora.

cónicas y prepararlos para dar el siguiente paso, que sería el iniciar el conocimiento de las curvas y su construcción formal a través de diferentes métodos. La colección de recortes fue pegada en una libreta colocando los nombres de los estudiantes en cada una de las hojas con la fecha.

Análisis de la actividad A.3: Fase de explicitación

En esta actividad como documento testigo se cuenta con un mosaico (ver Pág. 61) desarrollado por los alumnos en una libreta, que se trabajó como bitácora, la cual fue dividida posteriormente hoja por hoja y clasificadas de acuerdo a la actividad y fase a la que pertenecen. Todas estas carpetas de las fases, en conjunto, integraron una carpeta general de argollas.



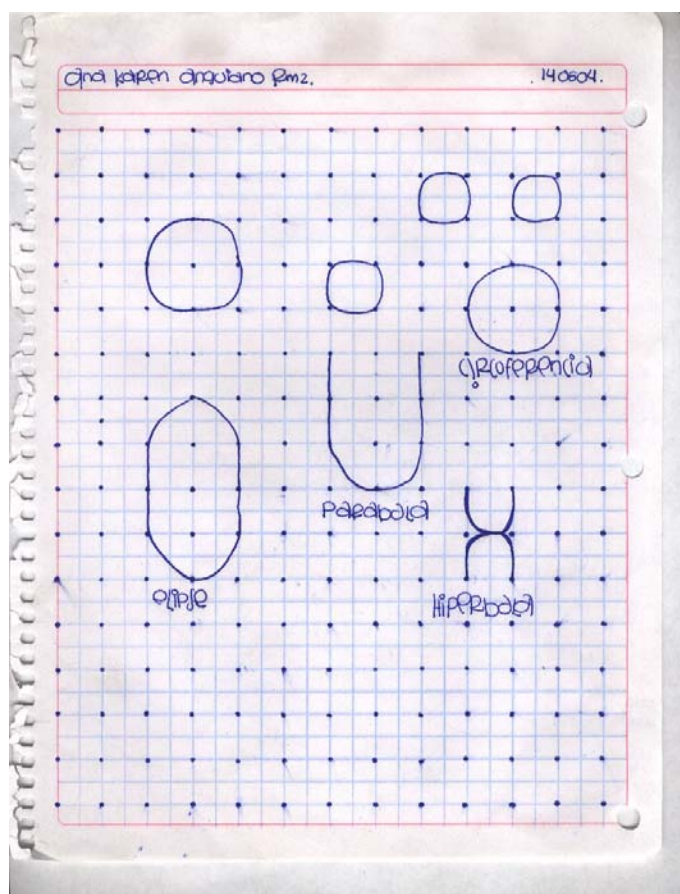


Mosaico de cónicas Actividad A.3 fase #3 de Explicitación

Como podemos observar, los alumnos clasificaron las figuras de acuerdo a su medio ambiente, y las relacionaron con las cónicas aplicando estas nuevas experiencias a su nuevo aprendizaje, intentando un continuo hacer para aprender las curvas que ellos habían identificado. Como se ha mencionado con anterioridad, estos alumnos desconocían las figuras hasta antes de esta experiencia. A partir del momento en que ellos identifican las figuras de las curvas a través de objetos cotidianos, se observan indicios de que han percibido las cónicas como objetos geométricos nuevos; además han comprendido el concepto propio de la curva, y que en este momento ya es diferente de cuando se empezó, y es que a través de la visualización el alumnos está identificando la curva, y no solo la identifica como una curva cualquiera sino que la ha clasificado con sus nombres, sin equivocarse. También presenta su razonamiento interactuando en conjunto con sus compañeros y aparece intercambio de conocimientos y

experiencias para discutir las y clasificarlas; así mismo, es evidente que se inició ya su capacidad de análisis geométrico.

En un inicio, en la actividad A. 2 se les mostró el uso del geoplano con la finalidad de familiarizarlos con el espacio coordenado bidimensional analítico y que reconocieran bien cualquier figura geométrica a representar en este espacio, además, como complemento a esta actividad se les solicitó que también dibujaran en su geoplano las curvas que ellos recordaban así como su nombre de acuerdo a lo que se les había ya mostrado en las actividades A.1 y A.2. A continuación se muestra la figura del geoplano de uno de los alumnos con las figuras correspondientes.



Geoplano con cónicas Actividad A.2 fase #2

Como se puede observar en casi todos los trazos que realizó el estudiante en su geoplano, las curvas están bien definidas y en este momento no conocen método para su trazo. Efectuaron éste a mano libre y siguiendo los puntos de la cuadrícula del geoplano que construyeron a solicitud del maestro, y de acuerdo a la actividad para que se fueran familiarizando con las coordenadas y con el mismo geoplano.

Con el fin de describir más de cerca este trabajo particularizaremos y observaremos los trabajos que realizaron los alumnos Arturo Martínez y Ana Karen Anguiano. Quisiéramos aclarar que estos dos alumnos no fueron elegidos con el fin de manipular en ningún momento los resultados de la investigación y que en los anexos de esta tesis se encuentran localizados todos los documentos testigo de este trabajo, grabados en un CD (Compac Disk) que se entregará con la tesis. En él se encuentran en conjunto con este material, los videos testimoniales y entrevistas que forman parte del material. La elección de estos alumnos fue debida a su contraste tanto de género como de sus resultados en la experiencia.

El mosaico con las diferentes figuras recortadas fue una actividad de la fase de explicitación, en la que les solicitamos que trabajaran en conjunto, ya que se realizó con la finalidad de que intervinieran todos y al trabajar en conjunto intercambiarán sus experiencias con respecto a las actividades anteriores que estaban realizando. Pero a partir de la actividad A.4 cada alumno tenía sus hojas con su nombre plenamente identificados y fecha en la que se efectuó el trabajo.

Base teórica de la fase 4 de orientación libre

En esta fase los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir, a otras actividades diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es conocido casi en su totalidad por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante planteamiento de problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que pueden llevar a diferentes soluciones. En estos problemas

se colocarán indicios que muestran el camino adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que han adquirido en las fases anteriores.

Es necesario hacer la aclaración de que los problemas que se plantearon no eran como los que se plantean en los libros de textos que acostumbramos utilizar, en los cuales es solo necesario recordar algún hecho en concreto para obtener la solución de los mismos. Por el contrario, algunos de los problemas de esta fase presentan situaciones nuevas, abiertos, con varios caminos de resolución. Este tipo de actividad es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

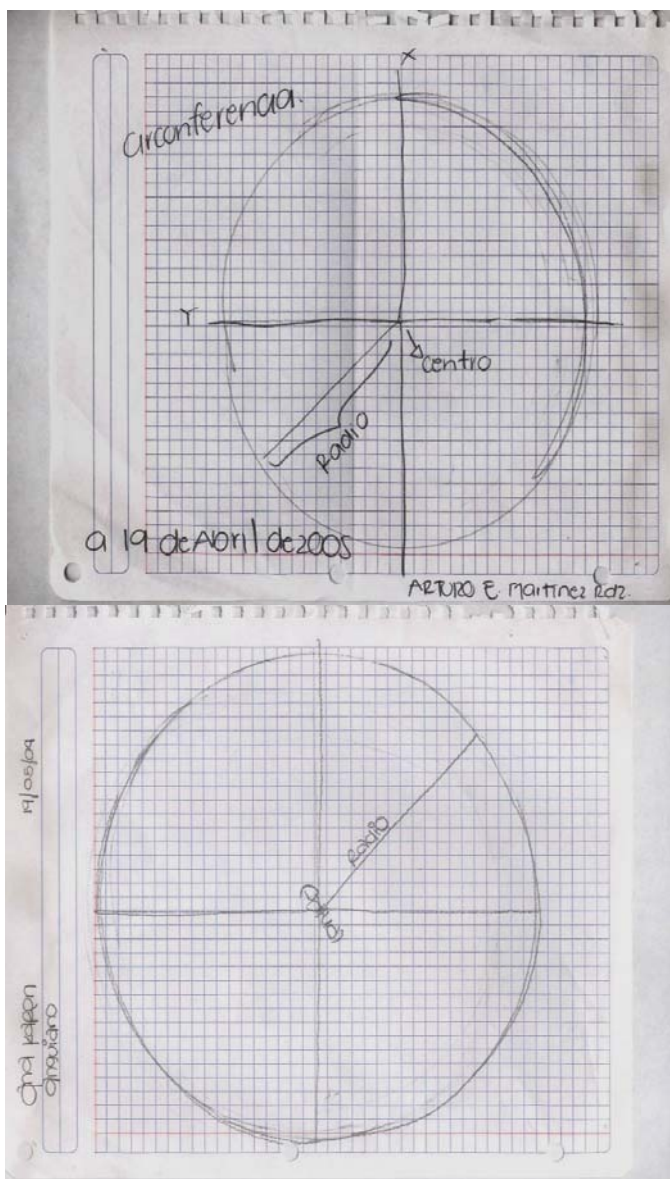
Descripción de la actividad programada y la actividad realizada

A.6 (Actividad Programada en proyecto)	A.6 (Descripción de actividad aplicada en el aula)
El profesor por medio de material didáctico (Dibujos en cartulinas, acetatos, etc.) mostrará los elementos de cada una de las cónicas (Circunferencia, parábola, elipse e hipérbola).	Dentro de la actividad A.6 se les mostraron todos los elementos de cada una de las cónicas y se les proporcionó un modelo el cual les fue proporcionado con el fin de que lo conocieran para que más adelante lo utilizaran como patrón de aprendizaje y con el aprendieran la relación que tiene cada uno de los elementos de cada una de las cónicas. Entre los que podemos citar están los focos, los ejes focales, vértices, la distancia entre los focos (lado recto), en fin cada una de sus partes y su relación.

Análisis de la actividad A.6 Fase de orientación libre

En esta actividad, además de los métodos se les dieron a conocer los diferentes componentes de cada una de las curvas iniciando con la circunferencia, para proseguir con la parábola, la elipse y finalizar con la hipérbola. Como la finalidad de este módulo fue que el alumno se relacionara con la curva y sus elementos analíticos, así como el conocimiento de su relación algebraica, para iniciar se les presentaron las diferentes formas como se pueden construir las curvas desde el trazo con un cordel, pasando por el de diagonales con las escuadras y regla, así como el trazo exclusivo con escuadra.

Además, en la actividad, con respecto al trazo con cordel y regla, se mostró a los alumnos cómo está construido el lado recto de la curva y que al situar un punto con este cordel y mantenerlo tirante o justo, se podrían dibujar las curvas ya mencionadas. Este tipo de ejercicios se efectuaron con cada uno de los alumnos. A continuación se presentan los documentos de cada uno de los trazos realizados por los alumnos, para su análisis.



Estas dos gráficas están dibujadas por el método del cordel, los ejes fueron dibujados a mano alzada y el radio también. A ambos estudiantes se le informó cómo se construye la presente curva y la relación que existe entre un punto que equidista de otro fijo, uno se convierte en el centro mientras que el otro describe una circunferencia al efectuar un movimiento alrededor de su centro.

Como podemos observar en la grafica, Arturo identificó plenamente la figura y no dudó al final de su instrucción el colocar el nombre de cada uno de los elementos de la curva. Con respecto a Ana Karen, ella

presenta algunas dudas como se observa en su hoja de trabajo, más precisamente, en los elementos de la circunferencia, además de que no le coloca el nombre a la curva.

Este tipo de manifestaciones que se han presentado en los estudiantes a través de la ausencia o presencia de características propias de los elementos de la cónica en cuestión, nos sugiere que posiblemente en este caso en particular Karen presenta un avance diferente en cuanto a su razonamiento-comprensión al de Arturo. Este tipo de comportamientos ya se habían presentado y descrito con

anterioridad en base a nuestro marco teórico, del cual citamos el siguiente párrafo:

Las ideas principales iniciales descritas por Pierre Van Hiele son las siguientes:

- 1) Se puede encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.*
- 2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.*
- 3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento para presentárselas.*
- 4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.*

Como podemos observar, se pueden presentar diferentes niveles entre los alumnos de un mismo curso, lo cual no significa que no exista un avance en el alumno; sin embargo, no debemos perder de vista que no todos los alumnos avanzarán al mismo ritmo.

La parábola fue la curva que se les proporcionó enseguida y resultó un poco diferente respecto al desempeño de los alumnos.

Se les mostró que en el caso de la parábola la distancia entre el lado recto y la

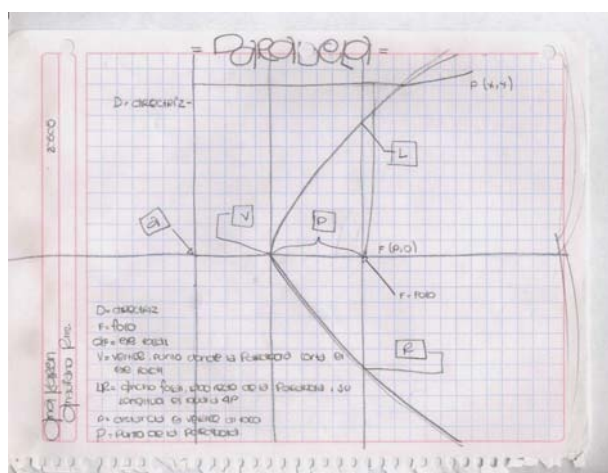
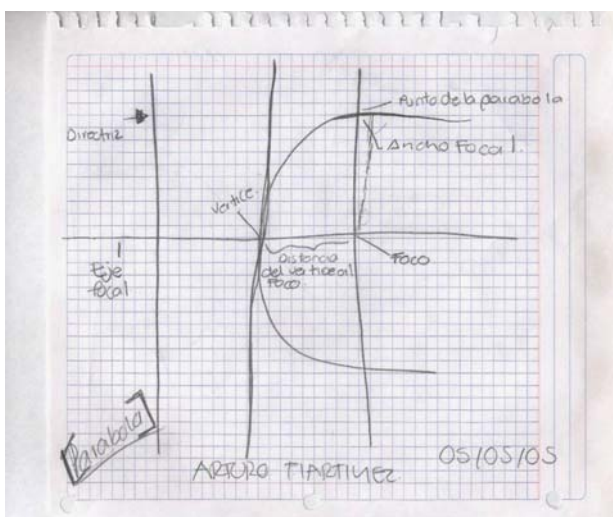
bisectriz es dos veces P y que el vértice de la curva equidista P . Se les mostró más de un método para dibujarlas (mínimo tres métodos), más sin embargo se le permite al alumno que sea él quien seleccione la forma en que ha de realizar los trazos de las curvas, ya que lo importante es que al final de las diferentes fases, el alumno presente su avance en cuanto a la comprensión y razonamiento. Es

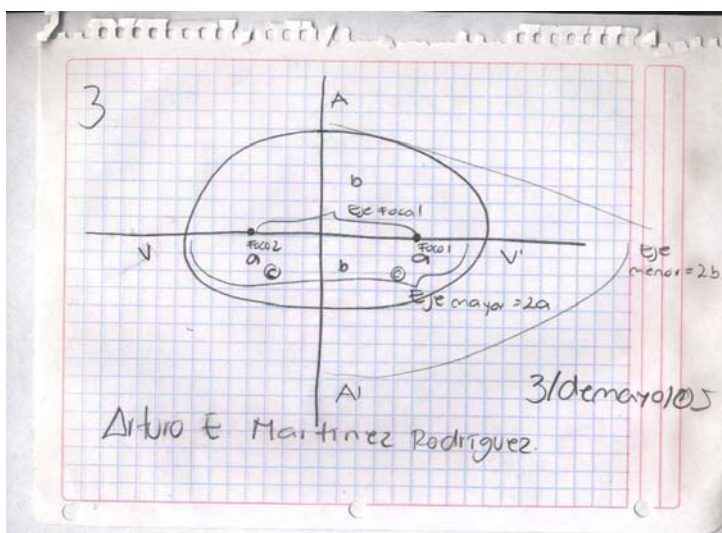
importante recordar que en esta fase los alumnos adquieren los nuevos conocimientos (además de que es la fase de orientación libre).

En estas dos graficas que presentamos, Ana Karen ha realizado el dibujo más detallado de cada uno de los elementos de la curva, además de que el trazo de la

misma es muy diferente, ella lo realiza con bastante interés en la posición de tiene cada una de las literales que se utilizaron para su nomenclatura, y las líneas rectas que la conforman. En contraparte, Arturo no utilizo la nomenclatura que se les proporcionó sino más bien él propiamente realizó la propia, con la que se encuentra

más relacionado. Afortunadamente esta es la fase de orientación libre y es de hacer notar que esta actitud presentada por ambos alumnos, fue la que les caracterizó durante todo el desarrollo de esta investigación.

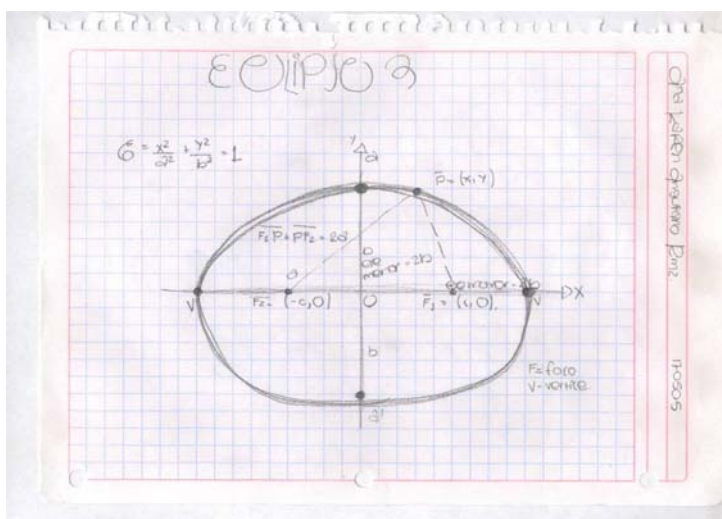




as graficas, podemos decir que a desarrollado con respecto a la es la observación detallada. Ella sigue una nomenclatura que se les proporcionó a los dos a través de un mismo modelo, y él no.

A continuación anexamos los trazos que efectuaron estos alumnos con la siguiente curva en turno que fue la elipse. Otra de las cónicas que se les enseñó a estos

alumnos durante la experiencia. El trazo de esta curva al igual que las anteriores fue realizado con cordel y a mano alzada.

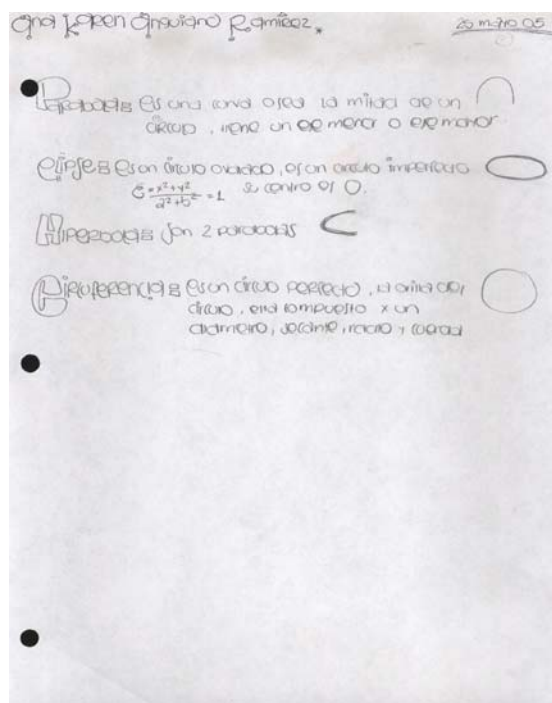
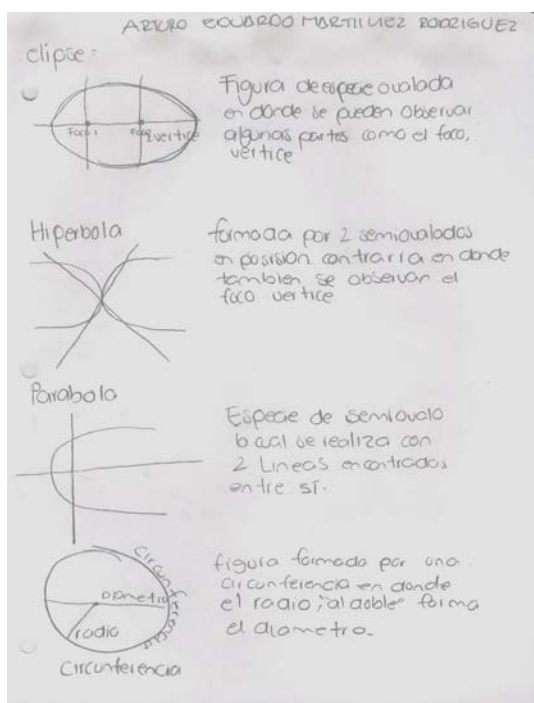


, Ana Karen mostró de nueva cuenta su habilidad para el detalle mientras que Arturo realiza trazos menos detallados. Además se debe comentar que después de que el instructor les comentaba de cada una de las curvas y elementos, se le solicitaba a cada alumno trazar y analizar cada una de las curvas.

Con la finalidad de poder medir la comprensión y el razonamiento de cada uno de ellos se les programó una actividad en la que los alumnos realizaron las figuras libremente, todas y cada una de ellas, sin que llegara a ser un examen pero sí un

test con formato libre en el cual se les solicitó que transcribieran las figuras que durante esos días se le habían presentado, sin que revisaran nada del material didáctico que se le había prestado con anterioridad, es decir, sólo con lo que habían comprendido y lo que su razonamiento lógico deductivo les dictaba.

En las siguientes gráficas podemos apreciar muy bien los avances de cada uno de ellos. Como ya comentamos, a manera de test de la fase se les retiraron todos los apoyos de los modelos y se les solicitó a todos los alumnos que nos realizaran una descripción de las curvas que habían estado dibujando con sus elementos. Con los resultados que a continuación presentamos en este contraste podremos saber cuánto avanzaron respecto al tránsito entre la actividad # 3 y la #6, además de saber cómo fue el avance que dejan ver a través de este test de libre expresión.



En realidad, a pesar de que las dos figuras no representan un gran dibujo, sí se puede apreciar que al menos Arturo logra mayor comprensión, ya que sus descripciones de la figura son más apegadas a las relaciones que se trabajaron en las actividades. Más sin embargo, Ana Karen intentó escribir la ecuación

algebraica de la elipse. Esta curva, al parecer, es una de las más sencillas o familiares para ellos ya que ambos la han escogido, pero mientras que Arturo realiza una descripción detallada de ésta, Ana Karen trata de formular la ecuación de la misma (cabe advertir que en ningún momento de esta fase se les solicitó que desarrollaran la relación algebraica, ya que su deducción sería para la siguiente etapa). Podemos decir que Arturo tiene un concepto más generalizado y su comprensión en lo general es mejor que la de Ana Karen, pero ella en lo particular es muy detallista y además percibe los lados finos y tal vez maduró su razonamiento más rápido que él, ya que efectuó una deducción que no estaba programada sin que se le solicitara, solamente porque de acuerdo a su pensamiento y raciocinio creyó que era lo correcto.

A continuación se efectúa el análisis de la 5ª fase de aprendizaje que es la última que analizaremos. En ella se concluye observando si los alumnos están listos para pasar al próximo nivel de razonamiento. Sin esta fase los alumnos no llegarían al nivel siguiente de su preparación y ésta estaría trunca, lo cual significaría que ellos no podrían acceder al siguiente nivel.

Con la finalidad de cumplir con este objetivo proseguimos de la siguiente forma: se presenta la descripción teórica de la 5ª fase y a continuación se presentan las actividades realizadas y los documentos que las respaldan. Se efectuó un análisis de dichos documentos para constatar los avances de los estudiantes en su razonamiento y a continuación se efectuó un contraste entre la teoría y el resultado del análisis de las actividades para observar y establecer la presentación de esta última fase del modelo.

Base teórica de la 5ª fase de integración

En las fases anteriores, los alumnos han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía tiene que adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un

todo el dominio que han explorado en su pensamiento. En esta fase el instructor puede fomentar el trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto nuevo al estudiante. Solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya se conocen.

Completada esta fase, los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que las anteriores, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

Los problemas que se plantean en la fase de integración (fase 5) tendrán como finalidad favorecer dicha integración o comprobar si los estudiantes ya la han conseguido. Para ello se deben plantear situaciones amplias, en las que no haya un predominio de ninguna de las partes que acaban de integrar, sino que intervengan varias en ellas.

Descripción de la actividad programada y la actividad realizada

A.7 (Actividad Programada en proyecto) Con la ayuda del juego de geometría y con otros materiales didácticos el profesor le mostrará a sus alumnos cómo trazar con diferentes métodos en el papel, las cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola), para que cada uno de ellos efectúe la reproducción del trazado de acuerdo a los diferentes métodos que existen, ya sea a través del uso del cordel y la regla, o bien con diagonales, o también con compás	(Actividad Realizada en trabajo de campo) Una de las actividades con mayor aceptación fue esta en la que se les mostró como podían efectuar el trazo de las cónicas desde diferentes, perspectivas, la presentación de los métodos de trazado fue iniciando con diagonales (ya que casi siempre para el alumno es más fácil el utilizar líneas rectas), y se les presentó cómo la parábola, la elipse, y la circunferencia, se podían trazar con éstas. El
---	--

y regla, etc.	siguiente método fue con compás y regla, posteriormente con el cordel y la regla; resultando este último de los tres el más aceptado y el cual hasta el final de la experiencia, ellos prefirieron utilizar. La razón de esto posiblemente sea por la facilidad, ya que para ello sólo ocupan un cordel que sujetan al foco o focos y su lápiz, que al moverlo con el cordel tensado les permite obtener prácticamente cualquier cónica, desde la circunferencia hasta la hipérbola. De cada método, se les solicitó a los alumnos lo realizaran cuando menos tres veces con cada curva. Es decir, de cada una de las cuatro cónicas deberían de realizar 3 por cada método, lo que resulta en 12, pero como son cinco métodos, se tienen 60 cónicas en total. Con esta cantidad de gráficos que realizaron se logró el reconocimiento de los elementos y las curvas en sí. Al final de esta actividad se aplicó un test (libre) y se les retiraron todos los apoyos didácticos para observar el grado de razonamiento al que habían llegado los alumnos. Satisfactoriamente pudimos
---------------	---

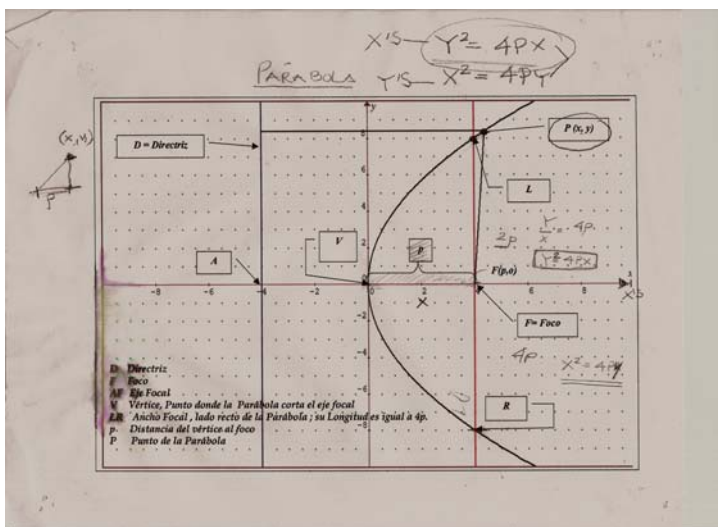
	observar que de los 4 alumnos, 3 de ellos estaban listos para el siguiente nivel, como lo demuestran las descripciones que realizaron en el test que se les aplicó y que se describe más adelante. Es importante mencionar que los cuatro alumnos son del segundo semestre y que antes de esta experiencia no conocían nada sobre las cónicas y mucho menos de la Geometría Analítica.
--	--

Análisis de la actividad A.7 5ª. Fase de Integración

Para la elaboración de los gráficos que se han efectuado en esta fase, como se puede observar a continuación, se han utilizado métodos desde los tradicionales con cordel y regla, hasta el método de diagonales o compás y escuadras, etc. También es meritorio mencionar que esta fase es de integración y que en ella se aplicó finalmente un test como colofón a esta fase y del nivel mismo, y que como fase integradora, se pretendió que el alumno manifestara las diferentes habilidades que había desarrollado durante esta aplicación del modelo para observar a su vez sus nuevos conocimientos así como su visión general de los contenidos que manejó.

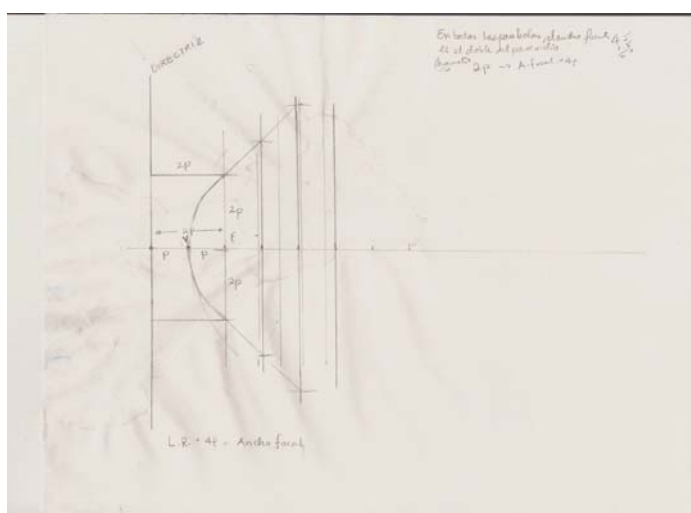
Es por ello que mostramos como primera parte de este análisis los trazos que realizó el instructor dentro de las actividades, y que se les proporcionaron

posteriormente a los alumnos para que ellos a su vez, al reproducirlos, adquirieran por experiencia propia su conocimiento con la guía del maestro.



En la presente imagen se encuentra el patrón que se les proporciono de la parábola. Como podemos observar, en él se presentan exclusivamente los elementos que la conforman, detallados, realizando muy especialmente la relación que se presenta entre el punto P de

coordenadas (x, y), el foco y el vértice, que es el punto en el cual la curva corta el eje focal. La relación que existe entre la directriz y el vértice así como con su foco es de fundamental importancia el explicar claramente y con calma cómo al viajar el punto P a través del espacio bidimensional y cortar el eje focal, le permite relacionarse con el espacio cartesiano en toda la curva, para finalmente establecer una relación algebraica por medio de la parametrización de estas distancias.



En cada una de las curvas procuramos realizar un mínimo de tres formas diferentes de presentación del trazo de las mismas, para que el alumno eligiera el que él, que desde su punto de vista, le parecía más sencillo.

Los alumnos realizaron sus trazos también por los diferentes

métodos como se ilustra a continuación.

La gráfica siguiente fue realizada por el método del compás y escuadras, y la

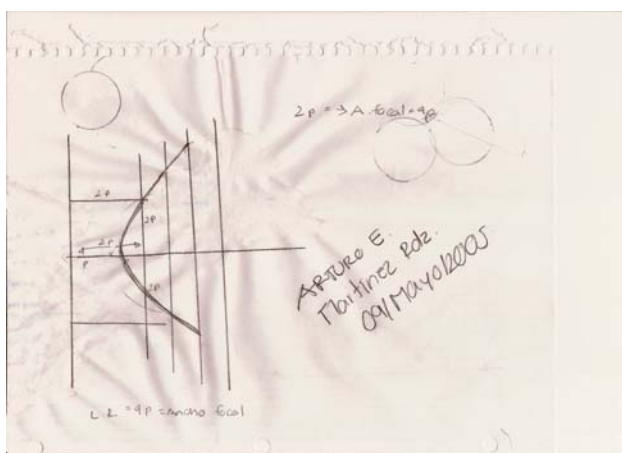
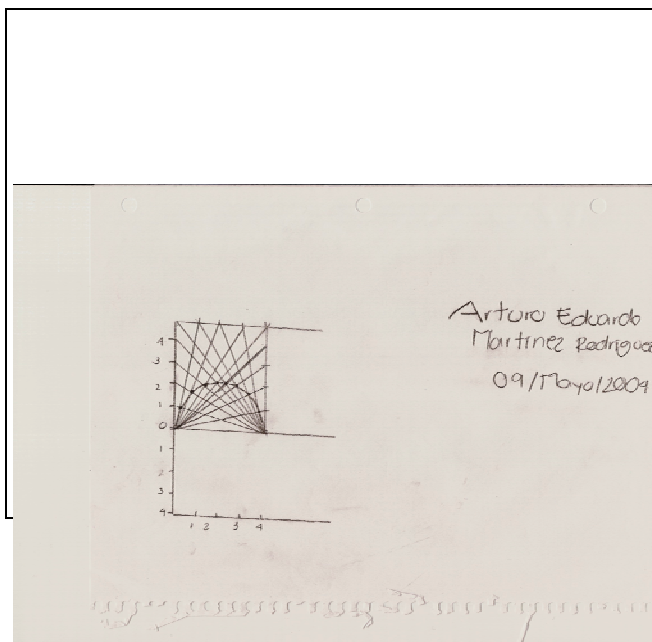


figura posterior fue realizada con diagonales. La utilización de estas herramientas le permite al alumno el poder conocer todas las variantes existentes con respecto al trazado y además, de acuerdo a nuestro objetivo en este análisis, el estudiante refleja cómo fue su tránsito por este nivel de razonamiento y también manifiesta

las habilidades que adquirió tanto de aprendizaje como de manejo de los contenidos, ya que él las pone de manifiesto al dibujar las diferentes curvas, como observaremos, desde la parábola y la elipse hasta la hipérbola.



Análisis de la actividad A.6.5. Fase de Integración

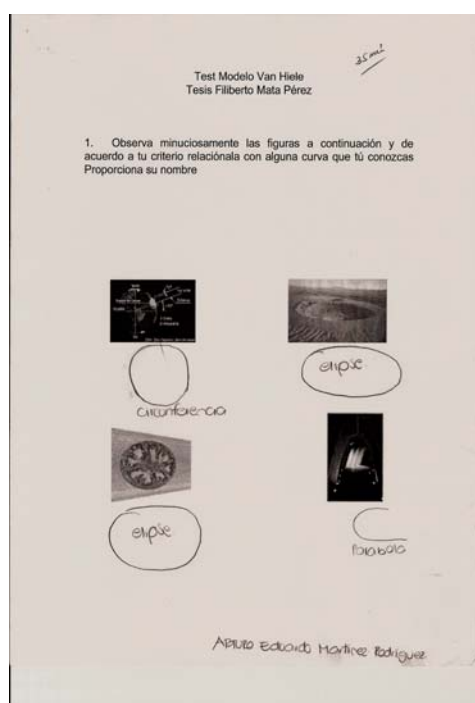
Esta actividad, como ya se comentó, consistió en la realización de un test que fue aplicado 15 días después de finalizadas las actividades dado que los alumnos se encontraban presentando su evaluación semestral, y con el fin de no entorpecerlos en su preparación para sus exámenes, se decidió aplicar al final de

este periodo, en particular pensamos que sería mejor así de acuerdo a los fines que se perseguían con este estudio del modelo Van Hiele.

Podemos decir que este test corrobora lo que hemos estado manifestando a través de esta tesis, pero sobre todo verificamos la parte que en forma de supuesto de investigación establecimos.

Con el fin de tener presente esta sección de la tesis, la transcribimos a continuación:

“ Supuesto de investigación: el estudiante conforma su aprendizaje de los contenidos en la geometría analítica al transitar por distintos niveles de razonamiento-comprensión, en base al desarrollo de actividades y experiencias didácticas que lo lleven desde el reconocimiento visual de las formas de los objetos geométricos, hasta el trabajo analítico correspondiente.

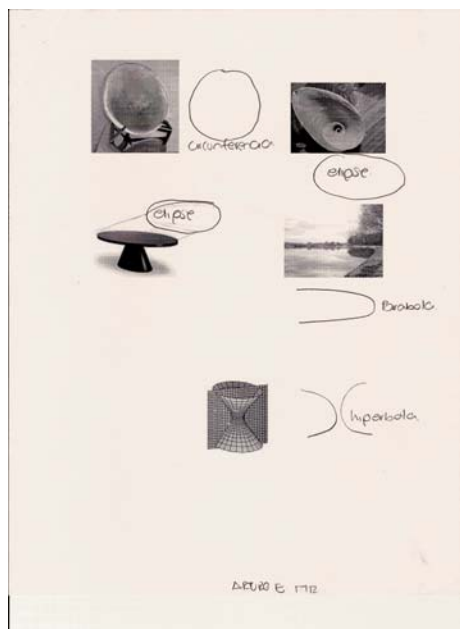


A continuación presentamos el test que se le aplicó a los alumnos y que fue diseñado de acuerdo al nivel y la fase correspondiente dentro del modelo (*Nivel #1, fase 5ª*). Por medio de éste podremos observar finalmente los avances que presentaron los alumnos dentro del mismo y si realmente pueden pasar al siguiente nivel de acuerdo con lo estipulado en el modelo.

De acuerdo con lo establecido en el modelo teórico, el primer nivel es un nivel de reconocimiento en el cual se transita muy rápidamente y además el estudiante en él aprende a reconocer las partes fundamentales de las figuras geométricas y a

relacionarlas con objetos propios de su medio. Con respecto al segundo nivel podemos decir que las diferencias características entre el nivel uno y dos, es que los estudiantes del nivel dos han cambiado su forma de mirar a las figuras geométricas, ya son concientes de que pueden estar formadas por elementos, y de que son portadores de ciertas propiedades. Además el nivel 2 es el primero de

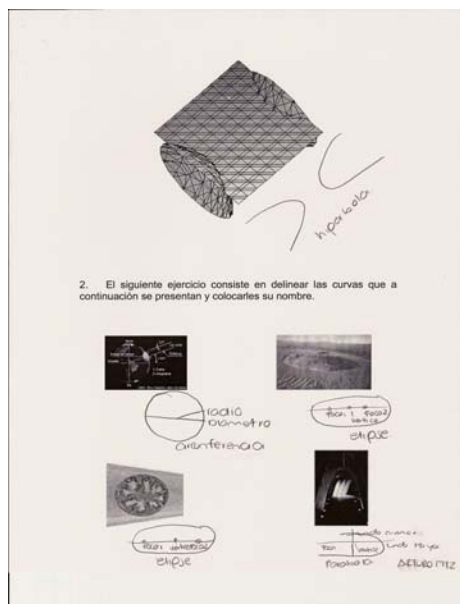
los niveles que puede ofrecer un razonamiento matemático e integración de las figuras como un todo más generalizado.



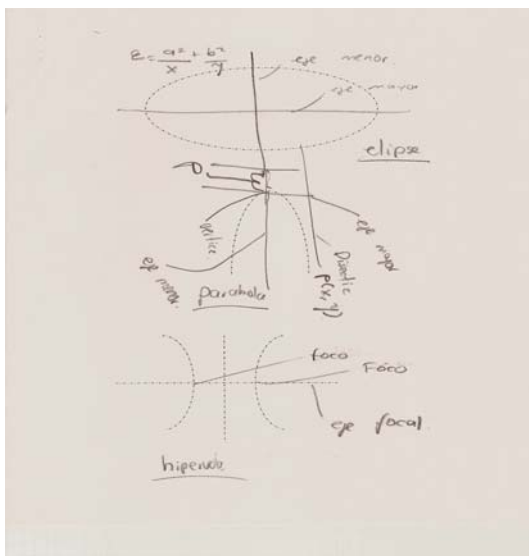
De acuerdo con lo anterior, nuestros estudiantes pasaron rápidamente del nivel uno al nivel dos. Esto lo observamos desde el momento en que en la primera fase de este test se les solicita a los estudiantes que observen minuciosamente las figuras que se les presentan y que de acuerdo a su criterio las relacionen con alguna curva que ellos conozcan, proporcionando el nombre de dicha

curva. En todos los casos no se presentó un solo error de parte de los estudiantes,

logrando relacionar perfectamente las curvas y colocando los nombres adecuados de las mismas. Así mismo se les solicitó que las dibujaran y pudimos constatar que no sólo las delineaban, como se les había solicitado, sino que además adicionaban los elementos de las diferentes curvas que aún no se les solicitaban, demostrando los nuevos conocimientos que habían adquirido.



En este test también se le presentó al alumno la oportunidad de manifestar en una sección los conocimientos adquiridos con figuras de las curvas que estaban punteadas. A continuación presentamos esta sección en la que algunos de ellos mostraron buen avance y es aquí en donde podemos constatar que su



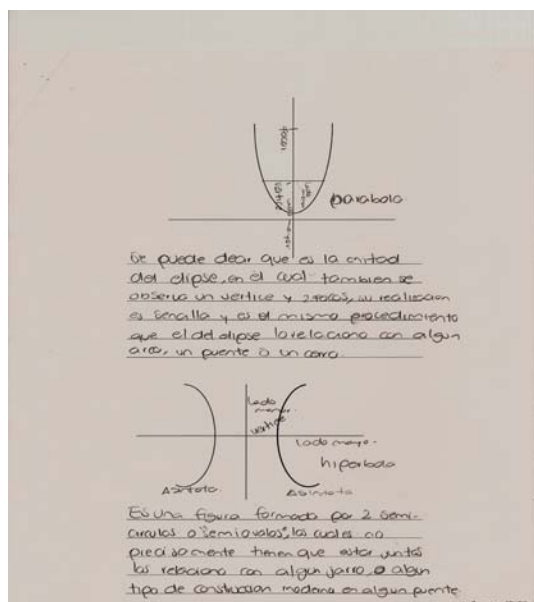
comprensión ya paso a otro nivel y por lo tanto su razonamiento no es solo del nivel uno sino que en el grupo se presentan alumnos que trascienden este nivel y están ya iniciando en el nivel dos de razonamiento. Esto es así porque se observa que ya establecen relaciones algebraicas entre los elementos de cada cónica y su comprensión esta ya también en este nivel dadas las respuestas que algunos de ellos nos proporcionaron, manifestando

relaciones algebraicas que usaron, precisamente, de los modelos que se le proporcionaron para su trabajo y desarrollo personal, y que después de un periodo de 15 días de evaluación, manifiestan con solvencia.

Dentro de las gratas experiencias en esta investigación podemos contar la oportunidad de observar manifestaciones en la que uno puede verificar avances significativos en el aprendizaje de los alumnos a través del desarrollo de sus niveles de razonamiento y comprensión en el aprendizaje de los temas.

En la parte final de este test se les solicitó a los estudiantes que en cada una de las cónicas realizaran una descripción lo más extensa posible, denotando los

elementos de las mismas, con sus propias palabras, y que de ser posible las relacionaran con objetos que ellos conocieran.



Pudimos observar que sus descripciones fueron extensas y muy completas, adicionando elementos simbólicos en cada una de esas descripciones correspondientes a cada curva.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES, OBSERVACIONES Y SUGERENCIAS

Se describen las conclusiones del trabajo de investigación así como algunas observaciones y sugerencias sobre posibles investigaciones futuras en base a los resultados obtenidos en ésta.

4.1 Conclusiones y observaciones

Con el fin de iniciar la presentación de las conclusiones y resultados citamos a continuación nuestro problema de estudio y enseguida nuestro objetivo para mostrar cómo es que se dio cumplimiento a ambos sin olvidar la parte que corresponde a nuestro supuesto de investigación.

El problema:

El proceso de aprendizaje de los conceptos y definiciones en la Geometría Analítica (en particular las secciones cónicas).

El objetivo:

“Analizar el proceso de razonamiento-comprensión de los estudiantes en el acto de aprendizaje de las secciones cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola)”

- A manera de primer conclusión establecemos que a través de la aplicación de las actividades dentro de los niveles de comprensión-razonamiento diseñadas en base a las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele, los estudiantes del nivel medio superior pueden llegar a reconocer las cónicas en

los términos en que se establece en la teoría, como se ha mostrado en el análisis de las experiencias.

- Con respecto a razonamiento-comprensión, los resultados obtenidos nos permiten concluir que:

- ♦ Los alumnos que se iniciaron en la actividad A.1 sin conocimiento alguno de la materia, presentaban avances en cuanto a su razonamiento-comprensión reconociendo desde el inicio las curvas que se les presentaron y logrando ya relacionarlas con objetos de su medio ambiente, como se constata en la actividad A.3, localizada en la fase de explicitación y de la cual se presentaron los documentos correspondientes.

- ♦ Con base a los resultados presentados en la actividad A.3 (fase de explicitación) y los resultados evidentes encontrados al contrastarla con la actividad A.6, localizada en la fase 4 de orientación libre, podemos constatar perfectamente que los alumnos lograron un cambio en su comprensión y en su razonamiento tal y como ellos lo manifiestan a través de las diferentes gráficas que hemos presentado como testigo de los resultados. Se observó que son capaces de pasar de un reconocimiento simple y de asociación a elementos del medio, a un reconocimiento geométrico detallado de los diferentes elementos geométricos que presentan en sus graficas. Estos avances se lograron principalmente por medio del diseño e implementación de las actividades que les permitieron a los estudiantes transitar con éxito por las distintas fases de aprendizaje en el nivel de razonamiento objeto de estudio.

- ♦ Con base a esta experiencia también pudimos observar que para realizar un aprendizaje con enfoque intuitivo (al inicio del proceso de aprendizaje) no se requiere que los trazos sean tan exactos y formales, ya que los alumnos que laboraron dentro de este proyecto en su mayoría

prefirieron al igual que los antiguos griegos el cordel y la regla para realizar sus dibujos, actuando dentro de un espíritu de libertad y espontaneidad, logrando un confort que les permitió desenvolverse con soltura.

No estamos diciendo que no se les den los métodos en base al equipo de geometría (en nuestro caso se les mostró los trazos con los diferentes métodos de construcción), simplemente estamos seguros de que cuando al estudiante se le permite libremente presentar el trabajo como el lo desea hacer, con el formato que él quiera, está en condiciones de aportar más y con naturalidad, sin necesidad de presiones, y además hace suyas las gráficas y en general cualquier trabajo que se le pida que realice sin imposición.

- Como una de las conclusiones más importantes de esta tesis podemos decir que al aplicar este modelo de Van Hiele el estudiante realmente efectúa un aprendizaje por medio de experiencias que el maestro programa como actividades significativas. De aquí que consideramos que las materias de geometría analítica y geometría plana deberían de impartirse en forma de taller, rompiendo los antiguos paradigmas, cambiando incluso el mobiliario propio del aula donde se imparte la materia, ya sea por mesas amplias o bien restiradores y no en mesa-bancos como actualmente se realiza porque de esta forma se le permite al alumno realizar sus actividades con mayor libertad de acción y los maestros pueden auxiliar con facilidad a los alumnos en un espacio de estas características. Y no presentar la materia como una asignatura completamente rígida que al alumno en lugar de favorecer su razonamiento, no le permite realizar una actitud en un marco de confianza y libertad. Si deseamos que nuestros alumnos aprendan satisfactoriamente la parte axiomática, es necesario que sean ellos quienes lo expresen con sus palabras y que tomen como suyos los descubrimientos que hacen al trabajar con materiales elementales como el cordel y el lápiz, y que no desatendamos o marginemos a aquellos alumnos que tienen un desempeño diferente en su tránsito por los

distintos niveles de razonamiento (ya sea porque se resagan o porque logran un desarrollo más rápido de lo común), sino por el contrario, que los estimulemos para que desarrollen sus habilidades de acuerdo a su capacidad, porque en realidad, como instructores, debemos ayudar a colocar un ladrillo más en la pared de la vida de los alumnos.

- Por otra parte, se observó que en las actividades que el maestro diseñe dentro de este modelo, se deberá tomar en cuenta en forma importante el medio ambiente en el cual los estudiantes se desarrollan, así como su disponibilidad. Es importante también mencionar que el ambiente de trabajo en el aula debe de ser de amplia cordialidad (sin que el instructor termine perdiendo su autoridad en el desarrollo de las actividades); el modelo ofrece un justo medio en el cual el maestro sigue siendo el líder del grupo pero asume principalmente el papel de guía en el proceso.
- El empleo de este modelo implica que las actividades se deben programar con suficiente tiempo de anticipación para que en el momento del arranque de la experiencia, el maestro pueda tener el espacio y la capacidad tanto de corregir, en caso necesario, sobre la marcha, las actividades que esta realizando, como el programar los test o análisis necesarios que le permitan saber si está logrando su objetivo. Esto le permitiría también contar con el espacio para darse cuenta si existen alumnos cuyo avance es diferente. Puede ocurrir que se presenten alumnos cuyo nivel de comprensión es más activo que el de los demás, y el instructor debe tener el tiempo para diseñar actividades que les permitan estar acordes a su avance. Se pueden crear subgrupos con diferentes niveles de comprensión-razonamiento y con ello poder efectuar un aprendizaje diferenciado y más personalizado, adecuado a las características de cada uno de los alumnos.
- De acuerdo con lo observado en este estudio constatamos que los alumnos han presentado preferencias con respecto al razonamiento y comprensión de ciertas curvas. Actualmente la gran mayoría de los libros y programas de

educación media tiene contemplada primero la circunferencia y posteriormente la parábola. En este estudio en particular observamos que existe una mayor facilidad (por cercanía con la intuición de los estudiantes) si se estudia la circunferencia e inmediatamente después la elipse, colocando la parábola después, y al final la hipérbola. Esto porque su morfología es completamente diferente y visualmente su asociación es difícil, confundiendo al alumno y presentándole dificultades para su aprendizaje. Por lo tanto pensamos que un cambio en la currícula de esta materia sería conveniente para que los estudiantes de este nivel realicen sus estudios desde esta perspectiva, que de acuerdo a lo experimentado y observado en este estudio es una opción más adecuada.

4.2 Sugerencias

De acuerdo con la experiencia que hemos tenido a través de este trabajo, anexamos las siguientes sugerencias con el propósito de manifestar nuestras inquietudes que por razones de tiempo, espacio o medios, no pudimos implementar en este estudio pero que sabemos se pueden realizar y llevar a efecto bajo otras condiciones.

- 👁 El cambio de paradigma que se efectuó durante la realización de esta tesis tanto para el alumno como para el maestro, ha tenido consecuencias en su comportamiento dentro del aula; al primero le permitió actuar con más naturalidad y realizar sus labores escolares con agrado y sin presiones; en el segundo, este cambio de ambiente se manifiesta en el sentido de que es él quien realmente está dirigiendo el aprendizaje de sus alumnos, pero desde otro ángulo, desde otra perspectiva distinta a la tradicional.
- 👁 Por lo tanto, se sugiere realizar una investigación que permita realizar un estudio en el cual se pueda observar cómo el alumno puede, de acuerdo a la evolución que presente en sus conocimientos, avanzar a los niveles superiores.

Esta investigación sería de una duración mayor a un semestre, posiblemente de un año o un tiempo mayor

👁 No podemos dejar de lado el mencionar que la relación entre alumno y profesor es mucho más cálida y sin el acartonamiento formal y rígido del contrato didáctico, permitiendo sobre todo estar más cerca el uno al otro.

👁 Como se mencionó desde el principio, existen en otros países experiencias en tesis doctorales sobre la aplicación de este modelo, que son parecidas al estudio que efectuamos, pero con la diferencia de haber sido realizadas en geometría elemental. Sin embargo, no se han realizado estudios de este tipo en la educación superior, como el cálculo o el álgebra lineal. Creemos que podría ser una buena oportunidad el efectuar un estudio de este tipo en estas áreas de interés, en las cuales se investiguen los procesos cognitivos del razonamiento-comprensión en el aprendizaje.

👁 Podría ser también de interés estudiar si la utilización de software especializado en matemáticas y con actividades programadas en esta metodología de trabajo, se presentan cambios o avances en la comprensión y razonamiento, ya que las imágenes para el alumno son tan importantes y sobre todo no es lo mismo el efectuar los trazos necesarios manualmente que el realizarlo con un programa que te permite visualizar una curva determinada. Juzgamos que estas investigaciones se deben efectuar en un futuro inmediato, ya sea por nosotros mismos u otras personas.

👁 Consideramos importante dejar expuesta nuestra inquietud de efectuar estudios de género a través de este método u de otros, ya que en este trabajo se pudieron observar diferencias en el razonamiento de los alumnos y de las alumnas. Es importante el poder saber y establecer si existen diferenciaciones en cuanto al aprendizaje en este tipo de temas en cada uno de los géneros a determinadas edades.

Bibliografía

Ausubel, D. y Heneisian, N. (1978). *Psicología Educativa*. Editorial Trillas. México, D. F.

Anderson, D. (2003) *Estadística para Administración*. Séptima Edición. (pp. 330-347). Editorial Thomson. México, D. F.

Barwise J. Visual (1990). Visual Information and Valid Reasoning: Visualization in teaching and learning mathematics. Committee on Computers in Mathematics Education. En Cunningham S. and Zimmermann W. (Eds.). *The mathematical association of America* (notes number 19, pp. 9-25), Washington DC, EE-UU

Braga, M. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría, El modelo de enseñanza-aprendizaje de Van Hiele. *Signos Teoría y Practicas de la Educación* 4, (pp. 52-57) Oviedo, España.

Banquero, R. (1975). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires, Argentina. Aique Grupo Editor S.A.

Bigge, M. (1976). *Teorías de Aprendizaje para Maestros*. D.F. México. Editorial Trillas.

Burger, W. M. and Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 17, 1, pp. 31-48). Reston, VA, EE-UU.

Cantoral, R. (2002). Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior *Sinética* (vol.19, pp. 3-27).

Cantoral R.(2001) *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. D. F. México. Grupo Iberoamérica Editores.

Cantoral R. y Castañeda P. (2001) Estudio didáctico del punto de Inflexión: Una aproximación Socioepistemológica. En G. Beitía (Ed.), *Publicación de la Decimocuarta Acta latinoamericana de Matemática Educativa* (vol.14, pp. 371-377). D. F. México. Grupo Iberoamérica Editores.

Cabañas G. y Cárdenas M. (2001). Metodología para la solución de problemas en el contexto de la geometría. En R. Cantoral (Ed.) *Publicación de la Antología del Quinta Escuela de Invierno en Didáctica de las Matemáticas y Seminario Nacional de Investigación de Matemática Educativa*.(Num. 1, pp. 319-326). D. F. México.

Casanova, M. (1998). La Evaluación Educativa, Escuela Básica. En *Un Modelo Educativo y su Metodología*. Biblioteca del Normalista Editorial. México, D. F.

Coberan, R. (1996). *Análisis del concepto de áreas de superficies planas. Estudio de su comprensión de los estudiantes desde la primaria hasta la universidad*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

Chevallard Y., Bosch M. y Gascón J. (1998). Estudiar Matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. En R. Álvarez (ed.), *Biblioteca para la actualización del Maestro SEP/ICE*. Barcelona, España. Universidad de Barcelona-Instituto de Ciencias de la Educación. Horsori Editores.

Dienes, Z. P. (1970). *La construcción de las matemáticas, Guías para el educador*, Barcelona, España. Vicens-vives Editorial.

Escobar, C. (2000). *Enseñanza efectiva de las matemáticas, Sugerencias Didácticas*, Grupo Editorial Iberoamérica. México, D. F.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischer, R. (1988). The Van Hiele Models of Thinking in geometry among adolescents. *Monograph No.3 of the journal for research in mathematics education, National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, VA, USA.

Flores C. Desarrollo de ideas variacionales y la derivada en situación escolar. En R. Farfán (Ed.), *Publicación de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 6-10). D. F. México. Grupo Iberoamérica Editores.

Grenier, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'une processus d'enseignement symétrie orthogonal en sixième*. Tesis doctoral. Universidad J. Fourier I. Grenoble, Francia.

Gómez P. *Profesor no entiendo, Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas*. D. F. México. Grupo Iberoamérica Editorial.

Guillen G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de los procesos de aprendizajes*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

Gutiérrez A. y Jaime A. (1998). *On the assessment of the Van Hiele Levels of the reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics*. Spring & Summer edition. (Vol. 20, Numbers 2 & 3). Center for Teaching and Learning of Mathematics. Framingham, MA. EE-UU.

Howard, F. y Camp, J. (1971). *La revolución de las matemáticas fase II*. Columbia University, EE.UU. Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de la OEA Editorial.

Hernández, S., Carlos, C. y Pilar, B. (1991). *Metodología de la Investigación*. Mc Graw-Hill. México, D. F.

Humprey, G. (1973) *Psicología del Pensamiento Teorías e Investigación*. D. F., México, Editorial Trillas.

Jaime A. Gutiérrez A. (1990) Una Propuesta de Fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. *Teoría y Práctica en La educación Matemática* (pp.295-384). S. Linares Editorial.

Jaime A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel del razonamiento*. Tesis de doctorado, Universidad de Valencia, España.

Jaime A. Gutiérrez A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele en S. Linares, M.V. Sánchez (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática*, (pp. 295-384). Alfar, Sevilla, España.

Lehmann C. (1990). *Geometría Analítica*. D. F. México. Limusa Editores.

Labastida, L. (1991). *Estadística*. Instituto Politécnico Nacional. Claves Latinoamericanas (Editorial). México, D. F.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (vol.6, Núm. 3, pp.163-199). D. F. México. Thomson Editores..

Mason, M. (1997) The Van Hiele levels of geometric understating. *Geometry Exploration and Application*, University of Virginia, Charlottesville, Virginia.

Muss, R. (2003). *Teorías de la Adolescencia*. D. F., México. Paidos Estudio Editorial, 1ª. Reimpresión.

Neisser, U. (1976) *Psicología Cognoscitiva*. D. F., México, Trillas Editorial.

Parra, C., Saiz, Irma. (2001). *Didáctica de las Matemáticas, Aportes y Reflexiones*, Buenos Aires, Argentina: Paidos Educado Editorial, 8ª. Reimpresión 2001

Porquet, M. (1989). *El razonamiento Lógico y Matemático en la Escuela Maternal*. Barcelona, España. Laila Editorial, Primera Edición.

Peaget, J. (1981). *Psicología y Pedagogía*. Barcelona, España. Ariel Editorial, Octava Edición.

Peaget J. (1975) *La composición de las fuerzas y los problemas de los vectores*. Madrid, España. Morata Editores.

René D. (1973). *El discurso del Método*. Barcelona, España Bruñera Editores.

Rosamon, F. (1994). The role of Emotion: Expert and novice mathematical problem-solving. En Kaput J. and E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary Analyses and Results*. The mathematical association of America (notes number 33, pp. 81-94), Washington, DC, EE-UU.

Rosales, C. (1990). *Evaluar es Reflexionar Sobre la Enseñanza*. Nircea Editorial. Madrid, España.

Ruiz J. (1996). Las Esferas de Dandelin. En *Matemática Educativa*. Editorial Grupo Iberoamérica Editores. (vol. 8. pp. 116-125). D. F. México.

Rusell B. (1967) *Autoridad e Individuo*. Fondo de Cultura Económica. D.F. México.

Samper C. (1996). Geometría como Instrumento del Álgebra. En *Matemática Educativa*. Editorial Grupo Iberoamérica Editores. (vol. 8. pp. 85-95). D. F. México.

Sutherland, R. (1996). El caso de las matemáticas y la ciencia. Cultura y Cognición. *XX aniversario, Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN, Investigaciones en matemática educativa*. D. F. México. Iberoamérica Grupo editorial.

Shagoury R. (2000). *El arte de la indagación en el aula, manual para docentes-Investigadores*. Barcelona, España. Gedisa Editorial.

Trigo, S. (2003). Hacia una instrucción que promueva los procesos de pensamiento matemático. En Filloy E. (Coord.) *Matemática Educativa Aspectos de la Investigación actual* (pp. 314-331). Centro de Investigación y Estudios Avanzados y Fondo cultural Económica de México.

Wasón P.C. & P.N. Jonson-Laird P.N. (1980). *Psicología del Razonamiento, Estructura y Contenido*. Madrid, España. Colección Universitaria. Debate Editorial

Zúñiga, L. (2004). *Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería*. Tesis de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa. CICATA-IPN, México.

ANEXOS

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.1 El profesor realizará una plática informativa con los estudiantes a cerca de la historia de las cónicas y su desarrollo en la antigüedad así como sus aplicaciones actuales.	Se inició el trabajo con un grupo aproximado de 20 alumnos convocados entre 3er. Semestre y 4° Semestre la lista de estos alumnos se le proporciono a la dirección de este Bachillerato del UVM Campus San Luis Potosí. Con la finalidad de preguntarles a los alumnos si estaban de acuerdo en colaborar desinteresadamente en el desarrollo de esta actividad tomando en cuenta que la participación de los alumnos del programa sería voluntario y que el único interés de parte de ellos sería el aprender una nueva forma o técnica de trabajo para su materia de geometría analítica. La respuesta de los estudiantes no fue del todo como se esperaba al inicio ya que muchos de ellos tenían actividades ya programadas por la tarde y no podían asistir y los poco que asistieron lo hicieron tan solo una o dos semanas por lo que nos vimos en la necesidad de invitar a alumnos del 2° semestre. Que tal vez no presentaran mucho interés.	En esta experiencia didáctica uno de los alumnos que trabajo en el proyecto, en uno de los días que me encontraba un poco deprimido al inicio el me dijo: Profe: “Para aprender se requiere actitud”. Lo cual tenía razón el único requisito que se necesita es actitud, si se cuenta con ello el alumno avanzará y adquirirá nuevas habilidades así como nuevos conocimientos. La puesta en acción de este modelo ha sido una experiencia de gran importancia para mi ya que en el pude ver que existe una gran afinidad tanto entre las didácticas que se podrían llamar teorías generalizadas y las propias que han desarrollado los especialistas de las matemáticas de orden constructivista.	La Actitud es según Eaglyy Chaiken una tendencia Psicológica que se expresa mediante la evolución de una entidad (u objeto) concreta con cierto grado de favorabilidad o desfavorabilidad. Al definir la actitud como una tendencia, se da a entender que se trata de un estado interno de la persona. Por lo tanto, no es algo que resida en el ambiente externo a ella, pero tampoco es una respuesta manifiesta y observable. Precisamente la actitud se concibe como algo que media e interviene entre los aspectos del ambiente externo, que son los estímulos y las reacciones de las personas, es decir sus respuestas evaluativas manifiestas. La tendencia es evaluar aspectos positivos o negativos a un objeto. Las respuestas observables de la actitud están agrupadas en tres categorías: cognitivas, efectivas, conductuales

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
	Esto debido a que los alumnos del 2° semestre no tendrían contacto con la materia sino hasta el próximo semestre posiblemente, esto fue lo mejor que nos pudo haber pasado en el proyecto ya que sus conocimientos sobre la geometría analítica eran nulos. Así que se inició finalmente con un grupo de diez entre 2°, 3er y 4° semestre finalmente se retiraron los de 3° y 4° y nos quedamos tan solo con 6 alumnos de los finalizamos solo con 4 de los cuales una es mujer.	Que han servido como punto de partida o referencia para muchos de nuestras didácticas como las situaciones didácticas o la ingeniería didáctica. En este modelo a pesar de que su autor no se declara dentro de ninguna de las teorías ya mencionadas si existe gran afinidad tanto con los teóricos francesa que han desarrollado la teoría de las situaciones didácticas ya que si revisamos bien cada una de las actividades son claramente situación didáctica que esta programadas y estudiadas para que el alumno aprenda , aprendiendo en el cual el maestro no abandona su papel tanto como facilitador y guía así como en algunas ocasiones tendrá que ser protagonista o conductista por que la realidad es que en el discurso áulico no existe un rol absoluto ya que desde el momento que existe el binomio maestro-alumno se presentará una interdependencia en la que el maestro recibe lecciones de vida a cambio de conocimientos más lecciones de vida.	Las respuestas cognitivas se producen a través de las creencias o ideas. En sentido estricto, las creencias o ideas incluyen tanto los pensamientos y las ideas propiamente dichos como su expresión o manifestación externa. La evaluación por medio de las respuestas cognitivas ocurre en una doble secuencia. Las respuestas efectivas son los sentimientos, los estados de ánimo y las emociones asociadas con la actitud. Las respuestas conductuales son susceptibles de ubicación sobre el continuo actitudinal, ya que algunas son muy negativas. La didáctica como disciplina en el campo de la educación corresponde a la tradición europea, básicamente de Europa central y mediterránea, y se extiende al contexto latinoamericano. En los países anglosajones no se aprecia esta incorporación-dado que

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.2 El profesor mostrara un Geoplan y explicará la relación con los ejes cartesianos así como cual es su función, a cada alumno se le entregará material para que cada uno de ellos realice su propio Geoplan colocando en el los ejes y efectuando ejercicios de acuerdo a las instrucciones del maestro.	En esta primera aproximación se les proporciono a los alumnos la historia de la cónicas, y se les presento el Geoplan a través de una tabla con orificios cada 1 cm con lo cual conforma una cuadrícula en ella se les indico como se logra obtener figuras así como lo relativo a el origen de la cuadrícula y la forma en que cada eje numérico se representa en este espacio también se les dio a conocer que el eje de las X's se le conoce como eje de las ordenadas y el eje de las Y's como abscisas con lo cual tenemos un eje bidimensional. Se les solicito que con las cónicas que se les habían presentado las representaran en un Geoplan que ellos construirían, para lo que se les dio una hoja cuadriculada, esta actividad no represento gran dificultad en su gran mayoría dibujo las curvas todas las curvas en una sola hoja del Geoplan.	La descripción de las actividades numéricas, algebraicas o e cualquier tipo en las matemáticas son por lo general no muy abundantes y en la mayoría de los caso también tienen por lo general un cierto grado de complejidad digámoslo así; un tanto cuanto rebuscadas con su propia trama y rima, que en ocasiones no es literatura para todo tipo de gente muy a pesar de que inclusive grandes matemáticos como Isaac Newton escribieron álgebra recreativa y en toda la historia de las mismas existen infinidad de obras que tratan de colocarse, al alcance del grueso de la población con obras dentro de este tenor. En nuestro caso la teoría que manejamos fue en realidad poca y tratamos de contarla bajo la mecánica que se utiliza para un grupo de pre-primaria donde el maestro se sienta con sus alumnos en un tapete y le cuenta un historia de interés general tratando de despertar con la afiliada que le da al expositor el planear esta actividad	En gran medida la consideran una aplicación de la Psicología de la Ecuación- y es innegable la influencia académico-política que estos países ejercen respecto de la producción en la materia. Pero en los últimos años, la definición de la didáctica y sus especializaciones ha planteado nuevos problemas. Por un lado, los especialistas en distintas disciplinas se han preocupado por conceptuar la(s) didáctica(s) alrededor de los contenidos de enseñanza. Se definen las didácticas especiales como campos específicos de las respectivas respectivas ciencias, sin relación con un marco de didáctica general cuya propia existencia se cuestiona, desde la óptica de que la enseñanza siempre opera sobre contenidos de instrucción especializados. La didáctica por lo tanto es disciplina que se constituye en el ámbito organizador de las reglas del método

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.3 Para efectuar el reconocimiento de las cónicas es necesario contar con masilla de colores con la que cada uno de los alumnos construirá un cono y a este cono se le realizarán cortes con una navaja de forma horizontal, a 45°, a 60°, y después se construirán dos conos para modelar en masilla la última de las cónicas que es la Hipérbola.	Esta fue una de las actividades que en su inicio más les tomó de sorpresa a los alumnos y que más les agradó, tal como si les llevara a su educación preescolar, con bastante agrado trabajaron, con masilla de colores azul, café, blanca, negra etc.. Iniciaron la construcción de su cono. El objetivo principal de esta actividad fue que el alumno se adquiriera el conocimiento de forma completamente vivencial y que aprecie que el nombre de cónicas no es en balde que con un corte a 45° a partir de la horizontal obtiene una Parábola, una Elipse a partir de uno de 60° y con uno 0° u horizontal la circunferencia y que para la construcción de la Hipérbola se requiere de dos conos con un corte vertical de 90°	Es en esta actividad donde podemos iniciar en realidad el aprender a aprender, o diríamos mejor el aprender-a-hacer y al hacer-aprender que en realidad es nuestro primer contacto con la masilla, y la demostración de cómo al partir el cono en diferentes direcciones aparecen diferentes curvas en el cual a partir de una actividad de imitación inicial se convierte en un razonamiento y en una comprensión del objetivo que se persigue y el poder relacionar la historia que se contó en la sección anterior con la actividad y como los resultados que se obtienen son los mismos desde que su creador Apolonio de Parga las concibió y las expuso a sus compañeros y alumnos.	Para hacer que la enseñanza sea eficaz, enfatizando en proceso de instrucción como transmisión del saber. Con respecto a la didáctica de las matemáticas Chvillard 1995 en conjunto con el grupo del IREM mantiene que las matemáticas tienen una lógica inmanente propia, y que es una rama de las matemáticas no de la didáctica y de las ciencias de la educación. El trabajo central de esta didáctica de las matemáticas consistirá en vigilar la denominada “Transposición didáctica” entendida como el proceso de modificaciones del contenido matemático para transformar el conocimiento científico en conocimiento escolar. El proceso requiere vigilancia epistemológica que permita el mayor grado de conservación de pureza conceptual y metodológica, evitando la canalización que se produce cuando se estudia un determinado objeto

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.4 Con el fin de reconocer las cónicas en el medio se les presentarán a los alumnos fotografías de periódicos y recortes de los mismos con el fin de encontrar la relación con el medio posteriormente se les solicitará que ellos las localicen y que las clasifiquen de acuerdo a las figuras que se les han presentado.	Esta actividad la alternamos con la construcción de los conos de masilla de colores, un par de tardes divertidas ya que el recortar figuras geométricas que ellos observaban les permitió familiarizarse más con las cónicas y prepararlos para dar el siguiente paso, que sería el iniciar el conocimiento de las curvas y su construcción formal a través de diferentes métodos. La colección de recortes fue pegada en una libreta colocando los nombres de los estudiantes en cada una de las hojas con la fecha.	Una de las cualidades iniciales que más me llamo la atención del Modelo de Van Hiele es en primer lugar que casi todo el material que se maneja en el es gráfico y que se busca que el alumno aprenda como ya dijimos de sus propias experiencias que son programadas a través de actividades previamente dirigidas por su profesor. En el caso particular de las cónicas con el fin de que el alumno exteriorice los diferentes avances que tiene en su razonamiento y comprensión del tema, se programó esta actividad donde el a través del reconocimiento visual relacione las curvas con las formas que reconoce tanto en periódicos como revistas que son a su parecer similares o iguales a las curvas en estudio, como es de esperar los resultados fueron de buena calidad y muy alentadores, ya que no solo este modelo toma en cuenta este tipo de relaciones sino también se presenta en el Lenguaje variación del que el Dr. Crisologo realizó en su tesis.	Al margen de los expertos o especialistas que efectivamente saben sobre este tema (Chevelar, 1985). (Camilloni, Alicia W. 1997). Conflictos en la evolución de la didáctica, en Corrientes didácticas contemporáneas. Argentina. Paidós pp. 41-73). Modelo Van Hiele (Ricardo Cantoral, Rosa María Farfán. Desarrollo del Pensamiento matemático, México. Trillas. p.p 144-169). A diferencia del acercamiento de Piaget, la teoría de los Van Hiele combina geometría como ciencia del espacio y geometría como herramienta con la cual demostrar la estructura matemática. En términos concisos ellos proponen una serie de niveles que en un principio fueron cinco y luego se redujeron a tres. Una cuestión importante ligada a la percepción espacial que no solo se reduce a la geometría, trata la visualización en matemáticas.

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.5 Con el fin de de realizar actividad algebraica-geométrica se efectuarán demostraciones geométricas de los diferentes productos notables utilizando modelos de cartoncillo o cartulina que le permitan al educador hacer participe a su educando de la actividad, primero él demostrará como se calcula el producto notable y después les solicitará a los alumnos que localicen las piezas que corresponden al modelo demostrado. A.6 El profesor por medio de material didáctico (Dibujos en Cartulinas, Acetatos, etc.) mostrará los elementos de cada una de las cónicas (Circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola),	La actividad 5 y la 6 fueron realizadas de forma continua prácticamente en la misma semana tratando de que el alumno fuera compaginándose entre la parte geométrica y la parte algebraica que es uno de los obstáculos más a vencer, con la ayuda de diferentes materiales. Se le demostró al alumno de forma geométrica como se relacionaban los diferentes productos notables tal como el cuadrado de un binomio, binomios conjugados o el cubo de binomio, este tipo de juegos son muy factibles ya que se arman como un rompecabezas cuya imagen le es más fácil de retener que la algoritmia y que además por los colores y material con la que se elaboran le atraen para trabajar con ellas, en esta ocasión esta inclusive estaban un poco ansiosos por saber que es lo que se va a fabricar. Dentro de la actividad 6 se le mostraron todos los elementos de cada una de las cónicas y se les proporciono un modelo el cual les fue proporcionado con el fin de que lo conocieran.	Como es sabido el álgebra siempre a representado para los estudiantes de educación media superior, una de las partes mas álgidas de las matemáticas dado que la algoritmia que se desarrolla en ella es muy abstracta, por lo que se desarrollaron algunos productos y factorizaciones de forma gráfica y geométrica; para que los alumnos observaran la relación que existe entre estas ramas de las matemáticas. Esta actividad nos permitió desarrollar en el alumno relación que existe entre el razonamiento visual que actualmente con más frecuencia nuestros alumnos, utilizan como herramienta de aprendizaje y el razonamiento lógico-deductivo. Para ello se desarrollo una dinámica en la cual se les mostraba como primera fase los productos notables en diagramas gráficos en el pizarrón presentando las relaciones entre los cálculos algebraicos	Generalmente se entiende por Visualización la habilidad para poder representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico. Van hiele Hace énfasis en el papel que desempeña la instrucción para ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro. Lo ideal es que el maestro diseñe su instrucción tomando en cuenta el proceso de maduración del alumno que conduce a un nivel más alto y así ayude y acelere el proceso.

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.6 (Continuación) Esta actividad se realizará curva por curva de forma tal que se alterne con las actividades anteriores con el fin de integrar poco a poco los elementos geométricos con sus relaciones algebraicas.	Para que más adelante se le utilizará como patrón de aprendizaje y con el mecanizarán la relación que tenía cada uno de los elementos de cada una de las cónicas, entre los que podemos citar están los focos, los ejes focales, vértices, la distancia entre los focos (lado recto), en fin cada una de sus parte y su relación.	Y después se les solcito que con hojas de colores realizaran una representación de los diferentes productos representados, los alumnos trabajaron con hojas de colores de papel iris, utilizando los diferentes colores para las diferentes parte del cálculo algebraico y a su vez tener la parte geométrica que representaba este calculo. En esta actividad las alumnas son un más creativas que los alumnos y más rápidas, sobre todo son más intuitivas se dejan llevar más por su razonamiento intuitivo. Esta actividad se realizo con el fin de concatenar la parte algebraica y la geométrica ya que en las siguientes actividades este tipo de relación las desarrollaron los alumnos a partir de los diferentes croquis y dibujos que se les presentaron de las diferentes cónicas	

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.7 Con la ayuda del juego de geometría y con otros materiales didácticos el profesor le mostrará a sus alumnos, como trazar con diferentes métodos en el papel las cónicas (Circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola), para que cada una de las de ellos efectúe la reproducción del trazado de acuerdo a los diferentes métodos que existen ya sea a través del uso del cordel y la regla o bien con diagonales, o también con compás y regla. Etc.	Una de las actividades con mayor aceptación fue esta en la que se les mostró como podían efectuar el trazo de las cónicas desde diferentes, perspectivas, la presentación de los métodos de trazado fue iniciando con diagonales ya que casi siempre para el alumno es más fácil el utilizar líneas rectas por lo que le presentamos como la parábola, la elipse, la circunferencia se podían trazar con diagonales, el siguiente método fue con compás y regla, posteriormente con el cordel y la regla resultando este último de los tres el más aceptado y el cual hasta el final ellos prefieren utilizar, la razón de esto posiblemente por ser muy fácil ya que para ello solo ocupan un cordel que sujeten al foco o focos y su lápiz que al moverlo con el cordel tensado nos permite obtener prácticamente cualquier cónica desde la circunferencia hasta la hipérbola. De cada método que se realizó en el taller de geometría analítica, se le solicitó a los alumnos lo realizaran cuando menos tres veces cada curva	Las actividades 5, 6 y 7 están prácticamente concatenadas ya que se inició la parte más importante del estudio en la cual el estudiante rompería precisamente con el paradigma de la ausencia de comprensión entre la parte algebraica y la geométrica que casi siempre es la que más trabajo les cuesta en los cursos normales bajo metodología conductistas. Las diferentes partes de las cónicas o elementos se les ofrecieron a los alumnos cada una con unas gráficas construidas en papel y montadas en cartoncillo cascarón y fueron colocadas en el con chinchetas las cuales las perforaron de atrás hacia delante esto con el fin de poderlas utilizar en la actividad #7 que continuaría con este material. Para que se familiaricen con cada una de las cónicas se les proporcionó una curva cada tres días y después de realizar la descripción de los elementos los alumnos las transcribían tres veces por separado realizando tres trazos de las mismas.	

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.7 Con la ayuda del juego de geometría y con otros materiales didácticos el profesor le mostrará a sus alumnos, como trazar con diferentes métodos en el papel las cónicas (Circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola), para que cada una de las de ellos efectué la reproducción del trazado de acuerdo a los diferentes métodos que existen ya sea a través del uso del cordel y la regla o bien con diagonales, o también con compás y regla. Etc.	Es decir de cada una de las cuatro cónicas deberían de realizar 3 por cada método que son 12 en total, pero como son cinco métodos son 60 cónicas en total con esta cantidad de gráficos que realizaron se logró la mecanización de los elementos y las curvas en sí, al final de esta actividad se aplicó un test (libre) y se les retiraron todos los apoyos didácticos para observar el grado de razonamiento al que habían llegado los alumnos satisfactoriamente podríamos decir que de los 4 alumnos 3 de ellos están listos para el siguiente nivel como lo demuestran sus descripciones realizadas en el test que se les aplicó. Es importante mencionar que los cuatro alumnos son del segundo semestre y que antes de este entrenamiento no conocían nada sobre las cónicas y mucho menos de la Geometría Analítica.	La curva que les costo mas trabajo de aprender es la hipérbola y sus elementos De los alumnos que terminaron 3 uno solo la pudo aprender y solamente en un 70% más sin embargo cuando se dieron los trazos que fue la actividad # 7 se les dieron un total de 4 métodos para trazarlas, con cordel y lápiz, con compás y regla, por diagonales, croquis a mano alzada. El método que más le agrado a los alumnos fue el de lápiz y cordel, a partir de que lo conocieron lo utilizaron siempre y el croquis a mano alzada, pero es de llamar la atención que a pesar de que el método es uno de los mas antiguos por no decir que el mas antiguo fue el más aceptado y cada joven eligió un cordel que de acuerdo a sus habilidades para manipularlo le convino, algunos corto otros largo en fin cada cual con su cada quien los trazos fueron realizados también en triadas es decir en dibujos de tres en tres	

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
	Es decir de cada una de las cuatro cónicas deberían de realizar 3 por cada método que son 12 en total, pero como son cinco métodos son 60 cónicas en total con esta cantidad de gráficos que realizaron se logró la mecanización de los elementos y las curvas en sí, al final de esta actividad se aplico un test (libre) y se les retiraron todos los apoyos didácticos para observar el grado de razonamiento al que habían llegado los alumnos satisfactoriamente podríamos decir que de los 4 alumnos 3 de ellos están listos para el siguiente nivel como lo demuestran sus descripciones realizadas en el test que se les aplico. Es importante mencionar que los cuatro alumnos son del segundo semestre y que antes de este entrenamiento no conocían nada sobre las cónicas y mucho menos de la Geometría Analítica.	En cada uno de los croquis o dibujos que realizaban al alumno se le solicitaba que le colocará su nombre la fecha y la curva que se estaba realizando durante este periodo se realizaron entrevistas y dos test uno antes de iniciar la actividad #7 y el final el cual arrojaron los indicios necesarios para poder observar los avances que presentaron los alumnos con este método de trabajo En los trazos que realizaron se puede observar como fueron avanzando de trazos simples a más elaborados, con mas sentido de sus elementos geométricos y su relación algebraica. Con respecto a los trazos propiamente con regla y compás o bien con otros métodos de los que se les enseñó en la ultima parte de esta investigación se les permito que ellos decidirán como realizar sus dibujos.	

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.7 Con la ayuda del juego de geometría y con otros materiales didácticos el profesor le mostrará a sus alumnos, como trazar con diferentes métodos en el papel las cónicas (Circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola), para que cada una de las de ellos efectúe la reproducción del trazado de acuerdo a los diferentes métodos que existen ya sea a través del uso del cordel y la regla o bien con diagonales, o también con compás y regla. Etc.	Durante esta actividad se realizó también un video corto cuyo objetivo principal fue el presentar de manera gráfica, la forma en que los jóvenes trabajaron y el grupo que se logró conjuntar, así como el medio donde se desarrolló el trabajo diario y continuo. En este taller se logra colocar en práctica realmente el aprender a aprender ya que cada uno de los alumnos desarrolla sus habilidades a partir de las instrucciones que el facilitador, conductor o maestro les proporcionan.	Por lo general todos incluyendo a la joven utilizaron más el croquis al final ya que desde mi punto de vista le da oportunidad tanto de dibujar más rápido como de romper con las estructuras establecidas que es muy propio de los adolescentes en esto creo que el taller le beneficia en mucho a las conductas de ellos dado que la estructura en la que trabajan es muy libre y la actitud del maestro también les beneficia en de gran manera ya que no se tiene una persona que los este siempre ordenando como hacerlo y de que forma. que lo importante de en este caso no fue el observar su razonamiento-compresión y también que tipo de habilidades geométricas-matemáticas	

Actividad Programada	Actividad desarrollada (Comentarios)	Comentarios + Observaciones y apreciaciones técnicas personales	Teorías de apoyo acordes a los comentarios
A.8 La actividad programada como cierre de este estudio fue el Test del modelo Van Hiele	Desafortunadamente el semestre se termino y su periodo escolar finalizo con el semestre y no se pudieron aplicar mas niveles del proyecto como se deseaba en el inicio de este proyecto se han aplicada dos test uno cuando los alumnos estaba en pleno trabajo el 25 de mayo y el segundo al final de semestre el 17 de junio. Es importante mencionar que cuando se realizo el segundo test fue programado para realizarlo después de 15 días de haber parado actividades ya que en estas fechas se estaban efectuando los exámenes del tercer periodo y durante estos días no se tenia contacto con los alumnos por acuerdo con la dirección para que los involucrados se ocuparan exclusivamente de sus materias. Los Resultados de este Test y del primero se podrán observar tanto cualitativamente como cuantitativamente.		