Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Matemática Educativa

presenta:

María del Consuelo Macias González

Director de la tesis:

Avenilde Romo Vázquez

México, D.F., noviembre de 2012

[redacted]

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F siendo las 11:00 horas del día 26 del mes de Septiembre del 2012 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-Legaria para examinar la tesis titulada:

Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros.

Presentada por el alumno:

Macias	González
Apellido paterno	Apellido materno

Nombre(s) María del Consuelo

Con registro:

B	1	0	2	4	4	0

aspirante de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dra. Avenilde Romo Vázquez

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dra. Gabriela Buendía Ábalos

Dr. Daniel Sánchez Guzmán

Dra. Rebeca del Carmen Romo Vázquez

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Calderón Arenas

CICATA - I.P.N. U. LEGARIA
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 20 del mes de Noviembre del año 2012, el que suscribe María del Consuelo Macias González alumna del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, con número de registro B102440, adscrita al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de la Dra. Avenilde Romo Vázquez y cede los derechos del trabajo titulado "Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones ingconsuelomacias10@hotmail.com, avenilderv@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Consuelo Macias

María del Consuelo Macias González

Nombre y firma del alumno

Tabla de contenido

Índice de tablas y figuras

Glosario

Contexto: es un entorno físico o de situación a partir del cual se considera un hecho. Es el conjunto de circunstancias en el que se produce el mensaje. Está constituido por un conjunto de circunstancias (como el lugar y el tiempo) que ayudan a la comprensión de un mensaje.

Geogebra: es un software matemático interactivo libre para la educación desarrollado por Markus Hohenwarter que engloba geometría, álgebra y cálculo.

Ingeniería Biomédica: es una especialidad profesional que integra herramientas técnicas y administrativas para facilitar y mejorar la atención de la salud; es la ciencia que aplica los principios y métodos de la ingeniería con el objetivo de atender importantes retos en el sector salud, en el cual aún subsisten grandes necesidades e insuficiencias tecnológicas que se deben resolver.

Ingeniero: Su función principal es la de realizar diseños o desarrollar soluciones tecnológicas a necesidades sociales, industriales o económicas.

Modelización Matemática: es el recorrido para poder realizar el proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real.

Plan por competencias: modelo educativo que se basa en querer lograr que el alumno adquiera habilidades, que aprenda a conocer, a hacer, a ser y a saber convivir. Estos son los cuatro pilares de la educación actual cuyo objetivo es formar alumnos que sean competentes, y para eso es necesario que no solo memorice conceptos y teorías, sino que domine las habilidades de la asignatura y que además aprenda los valores y actitudes que le van a permitir desarrollarse como ser social.

Praxeología: es una noción que permite estudiar la actividad humana a partir de cuatro componentes: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Teoría Antropológica de lo Didáctico: Teoría que describe la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas. Una organización matemática es una entidad compuesta por: tipos de problemas o tareas; tipos de técnicas que permiten resolver los tipos de problemas; tecnologías que describen y explican las técnicas; una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos.

.

Resumen

En esta tesis uno de los objetivos fue el de analizar el rol de los modelos matemáticos usados en ingeniería. Para desarrollar este análisis se realizó un trabajo colaborativo con ingenieros profesionales, en particular con investigadores biomédicos. Este trabajo nos permitió conocer el uso que se hace de ciertos elementos del álgebra lineal para mejorar el diagnóstico de la epilepsia.

La tesis está desarrollada en cinco capítulos, siendo el capítulo I el que aborda la problemática que le da origen a este trabajo. Se analizan algunas investigaciones que abordan la formación matemática de ingenieros desde diferentes ópticas, para enfocarlas en un contexto particular se analizan documentos del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli.

En el capítulo II se presenta el marco teórico que sustenta la tesis, extrayendo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico una noción central de dicho modelo, que es el de praxeología. Dicha noción permite analizar una actividad en los siguientes componentes: tipos de tareas T, técnicas τ, tecnologías θ y teorías Θ. La componente tecnológica es considerada a partir del modelo praxeológico extendido que reconoce más ampliamente este componente.

Dentro del capítulo III, se aborda la metodología para el diseño de actividades basadas en modelización matemática. Se abordará la elección del contexto de la actividad, la elección y descripción del modelo matemático en uso, la descripción de los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad a desarrollar. Es en este capítulo donde se desarrolla la descripción del contexto de uso, es decir el contexto donde se trabajará.
Se hace uso de la transposición del método elegido en el contexto y es presentado junto con una herramienta metodológica para el diseño de la actividad didáctica.

El capítulo IV se mostrará la secuencia de actividades de modelización "Buscando trayectorias" que involucra los conceptos de funciones vectoriales y vectores. Antecede la presentación de la secuencia, el análisis realizado sobre la pre-propuesta elaborada por un profesor de matemáticas en el marco de un curso de maestría y sobre la cual se basa el diseño de "Buscando trayectorias". Finalmente, se muestra el análisis de las tareas que componen dicha secuencia.

En el capítulo V se realiza el análisis de la aplicación de la secuencia didáctica a profesores de matemáticas que estudian la Maestría en Matemática Educativa, siendo una actividad de un curso de dicho programa de posgrado. Esto con el objetivo de obtener una experimentación y una evaluación del diseño de la secuencia.

Esta tesis sienta la base para desarrollar investigaciones posteriores donde se podrá realizar un análisis más fino de la secuencia y sobre todo precisar la metodología de diseño propuesta en este trabajo.

Abstract

In this thesis, one of the objectives was to analyze the role of mathematical models used in engineering. To develop this analysis was a collaborative work with professional engineers, particularly biomedical researchers. This work allowed us to know the use of certain elements of linear algebra to improve the diagnosis of epilepsy.

The thesis is developed in five chapters, Chapter I deals with the problem which gives rise to this effort. It discusses some research that address the mathematical training of engineers from different perspectives, to focus them in a particular context documents of Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli are analyzed.

Chapter II presents the theoretical framework underlying the thesis, drawing from the Anthropological Theory of Didactics a central notion of this model, which is to praxeology. This concept allows analyzing an activity in the following components: types of tasks T, techniques τ, technologies θ and theories Θ. The technological component is considered from praxeological model that recognizes more widely spread this component.

In Chapter III discusses the methodology for the design of activities based on mathematical modeling. Pointing the choice of the context of the activity, the choice and description of the mathematical model used the description of the knowledge and skills necessary to solve math activity to develop. It is in this chapter that develops the description of the context of use, it means the context in which they will work.

It makes use of the transposition of the method chosen in the context and is presented along with a methodological tool for the design of educational activity.

Chapter IV will show the sequence of modeling activities "Looking paths" involving the concepts of vectors and vector functions. Preceding the presentation of the sequence, the analysis performed on the pre-proposal developed by a professor of mathematics in the context of a master's course and which is based on the design of "Finding trajectories". Finally, simple analysis tasks comprising this sequence.

Chapter V is the analysis of the implementation of the teaching sequence for mathematics teachers studying Masters in Mathematics Education, being an activity of a course of this graduate program. This aims to obtain an experimental design and evaluation sequence.

This thesis provides the basis for developing further research where you can make a more detailed analysis of the sequence and especially precise design methodology proposed in this work.

Introducción

La investigación de esta tesis de maestría se motiva en el interés por conocer el uso que pueden tener las nuevas tecnologías en una formación de ingenieros. Analizamos diferentes trabajos en Matemática Educativa sobre las matemáticas en la práctica de ingenieros (Pollak 1988; Bissell y Dillon 2000; Bissell 2002 y 2004; Kent y Noss 2002; Romo-Vázquez 2009 y 2010) y un curso de álgebra lineal del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli. Dichos análisis se presentan en el capítulo y nos permiten decidir que el uso de las tecnologías va a ser considerado en el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática para una formación de ingenieros.

La modelización matemática la consideramos en términos praxeológicos, por lo que inscribimos esta investigación en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Más precisamente, consideramos la noción clásica de praxeología y el modelo praxeológico extendido, los cuales se detallan en el capítulo 2.

Los elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico considerados son la base de la metodología que proponemos para el diseño de actividades didácticas de modelización matemática. Esta metodología costa de 4 fases que se detallan en el capítulo 3. En este mismo capítulo se detallan dos etapas que son consideradas para probar la factibilidad de la metodología. La primera etapa consiste del análisis de un contexto de ingeniería biomédica que permite identificar modelos matemáticos en uso, matrices y vectores, así como operaciones como es encontrar la inversa de matriz. La segunda etapa de proponer en un curso de maestría del Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN (CICATA, unidad Legaria en adelante) la metodología y una descripción del contexto de ingeniería biomédica analizado.

A partir de esta segunda etapa de prueba de la metodología se obtienen actividades didácticas propuestas por profesores de matemáticas, alumnos del curso de maestría. Una de estas actividades es elegida para desarrollar una secuencia didáctica, "Buscando trayectorias", la cual es presentada en el capítulo 4 de esta tesis. Asimismo se presenta un análisis de las tareas que la componen, de las técnicas y tecnologías que consideramos entrarán en juego al momento de enfrentarlas.

En el capítulo 5 se presenta el análisis de la aplicación de la secuencia, "Buscando trayectorias" la cual fue enfrentada por otro grupo de profesores de matemáticas que cursan la maestría en Matemática Educativa del CICATA, unidad Legaria. El objetivo de esta aplicación fue probar el diseño de la secuencia para reconocer sus potencialidades y límites.

Finalmente, se presentan en esta tesis las conclusiones de la investigación.

Capítulo I

Problemática

1 Problemática de la tesis

1.1 Introducción

Una de las razones que motiva esta investigación es conocer ¿cómo la modelización matemática puede tener lugar en una formación de futuros ingenieros? Esta pregunta tan general puede verse sustentada a partir del análisis de diferentes investigaciones realizadas en la formación de futuros ingenieros. Particularmente, podemos considerar los trabajos de Pollak (1988), Bissell y Dillon (2000), Bissell (2002, 2004), Kent y Noss (2002) así como los realizados por Romo-Vázquez (2009 y 2010). Estos trabajos son considerados para analizar el rol que se le ha dado a la modelización matemática en la formación y/o en la práctica de ingenieros. Con el objetivo de situar la problemática para una formación específica de ingenieros se consideró el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli (TESCI) y más en particular se analizó el curso de álgebra lineal del plan de competencias. Tanto los análisis de las investigaciones mencionadas anteriormente como el del curso de álgebra lineal nos permitieron centrar nuestra investigación hacia el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática. Presentamos en este capítulo los análisis y la problemática de nuestra investigación.

1.2 El rol de la modelización matemática en la práctica de ingenieros

El estudio ICMI[1] 3 (realizado por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas) se dedicó al tema de las matemáticas como disciplina de servicio, reconociendo primeramente la necesidad de reflexionar sobre el rol de la formación matemática de futuros profesionistas no matemáticos. Es decir, se consideró necesario debatir sobre las necesidades matemáticas en las profesiones y sobre cómo las instituciones formadoras podían reconocerlas y adaptar sus programas para satisfacerlas. En este estudio aparecieron distintas contribuciones, en particular consideramos la de Pollak, matemático que trabajó por más de 30 años en los Laboratorios Bell en Estados Unidos. Pollak describe en su contribución algunas reflexiones sobre la formación matemática de ingenieros de terreno (para la empresa en cuestión) del cual fue responsable. Pollak manifiesta que en la práctica los ingenieros más que conocimientos matemáticos requieren diferentes tipos de pensamiento matemático, lo cual se ilustra en la siguiente cita:

> Antes que todo, necesitamos tener conocimiento del hecho que el pensamiento matemático, el pensamiento analítico, estructural, cuantitativo, sistemático, puede ser aplicado al mundo real y generar observaciones de gran valor; en otros términos que la modelización matemática es posible y puede ser eficaz (Pollak, 1988).

Podemos además ver como estos tipos de pensamiento tienen su razón de ser en la modelización matemática. Es decir, Pollak propone a la modelización matemática como un elemento que requiere todos estos tipos de pensamiento y que puede ser eficaz en la práctica de los ingenieros.

[1] ICMI: International Commission on Mathematical Instruction

En Romo-Vázquez (2009) se presenta un análisis de la investigación desarrollada por Kent y Noss (2001), la cual se realizó en una empresa de ingenieros civiles en Inglaterra. Una de las hipótesis que guiaron dicha investigación era que las matemáticas aparecerían de manera explícita, lo cual permitiría analizar el rol que les era dado en dicha profesión. Sin embargo, en una de las entrevistas uno de los ingenieros afirmó:

> Después de haber dejado la universidad no utilizamos las matemáticas que aprendimos, calcular un cuadrado o un cubo es lo más complejo que uno hace. Para la mayor parte de los ingenieros en esta empresa, una gran cantidad de matemáticas que nos enseñaron y no diré que aprendimos, no han aparecido todavía (Kent y Noss, 2002, p.1).

En esta investigación se mostraron dos elementos que permitían explicar esta invisibilidad de las matemáticas en la práctica de la ingeniería civil.

- División de trabajo matemático: análisis y concepción

Dos tipos de ingenieros podían ser reconocidos, de análisis y de concepción. Los ingenieros de concepción solicitaban el trabajo matemático a los ingenieros de concepción. Estos últimos eran los encargados de modelar y de dar soluciones a los problemas planteados. Los ingenieros de concepción eran capaces de poner en funcionamiento las soluciones propuestas por los de análisis. Las matemáticas fungían como herramienta de comunicación en esta economía de trabajo matemático que tenía lugar en esta empresa. Esta economía de trabajo matemático puede equiparse con lo que (Kent, 2007) llama modificación del trabajo matemático provocada por el uso de programas computacionales.

- Guías prácticas

En esta investigación aparecen documentos conocidos como “guías prácticas” cuyo objetivo es difundir el conocimiento práctico. Es decir, todo aquello que se considera que los ingenieros deben saber acerca de esa práctica. Documentos de esta naturaleza también aparecieron en el trabajo de (Vergnaud, 1996) dedicado al estudio de ingenieros aeronáuticos. Los autores explican que en estos documentos las matemáticas no son las matemáticas universitarias, lo que puede explicar que los ingenieros no reconozcan que lo que usan son matemáticas.

Los trabajos de Bissell y Dillon (2000), Bissell (2002, 2004) estudian los modelos matemáticos usados por ingenieros, señalando que más que una construcción de modelos, en la práctica (y mismo en las Ciencias del ingeniero o disciplinas intermediarias) lo que se hace es una adaptación y refinamiento de modelos tipos. Y para lograr tanto la adaptación como el refinamiento de modelos se reconoce el uso de matemáticas complejas que permiten comprender los modelos y de matemáticas básicas para hacerlos funcionar. Asimismo se señala que “una historia” está asociada a cada uso del modelo tipo, lo que en términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico podría llamarse tecnología asociada al uso.

Según se muestra en la investigación de Romo-Vázquez (2009) las matemáticas en las prácticas profesionales pueden reconocerse como:

- matemáticas que se construyen en una relación estrecha con la práctica, **una comprensión a través del uso**;

- sus dimensiones las más avanzadas tienden, cada vez más, a estar a cargo de **especialistas** o de **programas computacionales**;
- las necesidades de los no especialistas parecen desplazarse hacia la capacidad de manipular estas matemáticas como una herramienta de comunicación a través de los **lenguajes específicos**, esto contribuye a explicar por qué su rol es tan **poco reconocido**.

Todo lo anterior nos muestra elementos tanto de la naturaleza de las matemáticas en las prácticas profesionales incluidos los modelos matemáticos. Se constata como los programas computacionales han modificado las necesidades matemáticas y las maneras de enfrentarlas. La pregunta que emerge es, ¿cómo en la formación matemática pueden considerarse estas nuevas necesidades? Para abordarla, de manera muy local, se analiza en la siguiente sección el programa de álgebra lineal del plan por competencias del TESCI.

1.3 Análisis del programa de Álgebra Lineal. Plan por competencias

En esta sección analizamos el programa de la asignatura de Álgebra Lineal de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli (TESCI). Este curso es parte de la formación básica de las siete ingenierías en: sistemas, industrial, informática, electrónica, administración, logística y gestión empresarial que se imparten en esta institución. Por lo cual, hemos consideramos analizar el programa de este curso que es ofertado a futuros profesionales de diferentes áreas en ingeniería. Es decir, analizáremos las razones que se explicitan para justificar su necesidad como antecedente de las materias de especialidad y elemento básico en la formación de futuros ingenieros de diferentes áreas.

Esta asignatura se imparte durante el segundo semestre de un total de 9. El programa está organizado en 12 rubros, que presentamos a continuación:

1) Datos de la asignatura
2) Presentación
    a. Caracterización de la asignatura
    b. Intención didáctica
3) Competencias a desarrollar
4) Historia del programa
5) Objetivos generales del curso.
6) Competencias previas
7) Temario
8) Sugerencias didácticas
9) Sugerencias de evaluación
10) Unidades de aprendizaje
11) Fuentes de información
12) Prácticas propuestas

En este análisis sólo se consideran algunos de los rubros, destacando elementos que nos puedan dar cuenta de las características de este programa y su pertinencia en la formación de básica de esta institución.

1) *Datos de la asignatura*. En este rubro se presentan los datos técnicos del programa, nombre, materia básica –todos los estudiantes deben cursarla- y la clave de la misma. Es en este rubro en el que se confirma que este curso es parte de la formación básica de las siete especialidades en ingeniería de esta institución.

2) *Presentación*. Este rubro tiene dos incisos: caracterización de la asignatura e intención didáctica. En el primero se señala que este curso aporta al futuro ingeniero, "la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas". Es interesante notar cómo se da la misma importancia al pensamiento lógico, que al heurístico y al algorítmico, además se señalan que estos tres tipos de pensamiento permitirán modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas. Se señala que este curso dota de herramientas para caracterizar fenómenos a través de un modelo lineal permitiendo un tratamiento más "sencillo":

> Muchos fenómenos de la naturaleza que se presentan en la ingeniería, se pueden aproximar a través de un modelo lineal. Esta materia nos sirve para caracterizar estos fenómenos y convertirlos en un modelo lineal ya que es más sencillo de manejar y graficar y resolver que uno no lineal.

Lo anterior nos hace cuestionarnos acerca de qué tipo de situaciones de enseñanza permiten cumplir con este objetivo. Es decir, ¿qué tipo de situaciones el estudiante aprende a generar los diferentes tipos de pensamiento antes mencionados?, ¿cómo se le enseña al estudiante a describir fenómenos a través de modelos lineales?

En el segundo inciso, intención didáctica, se señala que uno de los objetivos es el de proporcionar al alumno los conceptos esenciales del álgebra lineal de las 5 unidades para resolver problemas de aplicación e interpretar las soluciones utilizando matrices y sistemas de ecuaciones lineales para las diferentes áreas de la ingeniería. Asimismo, se pretende que los estudiantes logren identificar las propiedades de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales para describirlos, resolver problemas y vincularlos con otras ramas de las matemáticas. Notamos que la interpretación de soluciones es considerada explícitamente como parte de los objetivos, desde nuestro punto de vista, ésta es un elemento teórico de la actividad. Es decir, un elemento tecnológico en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que permite justificar, explicar y validar las técnicas matemáticas utilizadas.

Nos cuestionamos si basta conocer los conceptos para aplicarlos. ¿Una vez que se conozcan los conceptos pueden ser aplicados a cualquier situación o en cualquier contexto? Aunque es difícil tener elementos para responder esta pregunta, sí consideramos que un conocimiento del contexto es necesario así como un conocimiento de la relación entre lo matemático (modelos) y el contexto donde se usan.

En la sección 3 aparecen las competencias previas, las cuales presento a continuación:

- Manejar el concepto de números reales y su representación gráfica.
- Usar las operaciones con vectores en el plano y el espacio.
- Resolver ecuaciones cuadráticas.
- Emplear las funciones trigonométricas.
- Graficar rectas y planos.
- Obtener un modelo matemático de un enunciado.
- Utilizar software matemático.

Nos llama la atención la penúltima competencia, no nos queda claro qué es lo que se entiende por obtener un modelo matemático de un enunciado. Podemos suponer que se refieren a una situación problemática y siendo así, nos preguntamos ¿cómo se genera dicha competencia?
Algunas de las sugerencias didácticas son las que se presentan a continuación:

- Utilizar software de matemáticas (Mathcad, Mathematica, Maple, Matlab) y calculadoras, graficadoras para facilitar la comprensión de conceptos, la resolución de problemas, la construcción de graficas y la interpretación de resultados.

Es interesante notar cómo se considera que el uso de programas computacionales como Matlab favorece la comprensión de conceptos, aunque no se señala cómo ni las características de las actividades que pueden favorecer dicha comprensión. Una pregunta que emerge es si el mismo uso de programa favorece la comprensión de un concepto que la resolución de un problema. Dicho de otro modo, qué tipo de tareas pueden motivar usos del programa computacional, que puedan a su vez favorecer la comprensión de un concepto y qué tipos de tareas la resolución de un problema. Asimismo, uno puede cuestionarse, ¿si la interpretación de resultados puede ser vista como consecuencia automática de la comprensión conceptual y del uso de programas computacionales para resolver un problema dado? O bien, si la interpretación de resultados requiere una atención particular.
Lo anterior provoca una reflexión sobre el tipo de conocimientos implicados en la resolución de un problema, tales como conceptuales, relativos al programa computacional y éstos asociados a la situación del problema. Todo esto lleva a una nueva cuestión, ¿qué características debe tener una actividad didáctica para hacer emerger estos tipos de conocimientos y sus posibles relaciones?

Aunque también se menciona que se proponen problemas que:

a) Permitan al estudiante la integración de los contenidos, para su análisis y solución.

b) Refuercen la comprensión de conceptos que serán utilizados en materias posteriores.
c) Modelen y resuelvan situaciones reales de ingeniería mediante conceptos propios del álgebra lineal.

Nuevamente se destaca la importancia de proponer problemas que vienen de situaciones reales y que requieran la integración de diferentes tipos de "contenidos" (o conocimientos). Pareciera que la relación teoría (vista como contenidos y conceptos) y práctica (vista como resolución de problemas "reales") puede tener lugar en la resolución de estas situaciones.
Por último se menciona, dentro de las sugerencias didácticas el discutir en grupos para intercambiar ideas argumentadas así como analizar conceptos y definiciones. Es interesante como nuevamente se relaciona a las matemáticas y más específicamente a los conceptos propios del álgebra lineal con situaciones reales de ingeniería

En el punto 9 nos sugiere la forma en la cual se pueden obtener evidencias de evaluación y la forma de considerar el desempeño en cada una de las actividades de aprendizaje considerando:

- Reportes escritos.
- Solución de ejercicios.
- Actividades de investigación.
- Elaboración de modelos o prototipos.
- Análisis y discusión grupal.
- Resolución de problemas con apoyo de software.
- Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y declarativos.

Asimismo se hace referencia a realizar prácticas y se propone:

- Utilizar software matemático para comprobar operaciones de suma, multiplicación, división, exponenciación y radicación con números complejos.
- Utilizar software matemático para realizar operaciones con matrices, calcular de la inversa de una matriz y obtener el determinante.
- Mediante el uso de un software matemático resolver problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones lineales y, a través de la graficación, comprobar la solución del sistema o mostrar que el sistema no tiene solución.
- Utilizar software matemático para encontrar la matriz de transformación y representar un vector de una base a otra y realizar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.
- Utilizar software matemático para resolver problemas de aplicaciones de las transformaciones lineales.
- Aplicar modelos lineales en la solución de problemas de ingeniería

En este punto hacemos la observación de cómo el uso de la tecnología nos puede permitir realizar diversas tareas que la simplifica. Sin embargo, nos hacemos el cuestionamiento si en realidad se pudiera considerar que al realizar el gráfico se obtiene la información necesaria para determinar si el sistema tiene solución o no, o si al encontrar la matriz de transformación por medio del software puede realizarse la representación del vector. Nuevamente nos hacemos el cuestionamiento sobre si la compresión de la información conceptual va a permitir dar herramientas para poder dar solución a problemas de ingeniería.

Es interesante ver cómo en el programa se considera que el uso del software debe ocupar un lugar importante en la clase de Álgebra Lineal. Podemos ver los diferentes tipos de usos asociados a diferentes tipos de tareas, por ejemplo, aparecen tareas matemáticas, encontrar la matriz de transformación, representar un vector de una base a otra y realizar el proceso de ortonormalización. Estas tres tareas son matemáticas; según el programa es importante que aprendan a realizarlas utilizando un programa computacional, las preguntas serían ¿Por qué? Y ¿Para qué?

1.4 Conclusión

La mayoría de las formaciones de futuros ingenieros siguen un modelo de formación que se divide en dos grandes tipos: formación básica y formación de especialidad. Los cursos de matemáticas ocupan un lugar importante en número de horas dentro de la formación básica. Esta formación matemática se señala como generadora de herramientas útiles para la formación de especialidad, por lo cual la antecede, y para la práctica profesional. Diferentes investigaciones han mostrado que las necesidades matemáticas del ingeniero se han modificado con la omnipresencia de programas computacionales que permiten realizar el trabajo matemático que antes se hacía a lápiz y papel (Kent y Noss 2002; Kent, 2007; Albertí et. al. 2010; y Romo-Vázquez 2009 y 2010). Estas y otras investigaciones (Pollak 1988 y Bissell 2002) reconocen que en la práctica existen dos tipos de necesidades matemáticas: avanzadas (requieren nociones matemáticas avanzadas) para comprender los modelos matemáticos y básicas (técnicas y procedimientos matemáticos básicos) para operacionalizar los modelos matemáticos. Bissell (2000 y 2002) reconoce que el uso de modelos matemáticos en la práctica no atiende a una construcción del modelo matemático sino a diferentes refinamientos y adaptaciones para situaciones específicas.

El análisis del programa de Álgebra Lineal del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli nos permite ver que en sus objetivos se reconoce a la modelización matemática (asociada al uso de modelos lineales) como la que permite caracterizar muchos de los fenómenos de la ingeniería. El interés de enseñar esta materia es que los estudiantes puedan modelar dichos fenómenos, resolver problemas de aplicación e interpretar soluciones. Aunque no se precisan los dispositivos didácticos que lo permitirían, consideramos que estos elementos son de suma importancia en la formación de especialidad y en la práctica de los ingenieros.

Los resultados de las investigaciones analizadas en este capítulo y el análisis del programa de Álgebra Lineal de este Tecnológico nos permiten identificar dos tipos de contextos o instituciones, la práctica profesional de los ingenieros y la institución formadora de futuros ingenieros. En estas dos instituciones la modelización matemática está presente, pero parece ser que no de la misma forma, lo cual sería lógico si consideramos que estas instituciones son muy diferentes. Sin embargo, no son completamente ajenas sino que existen relaciones entre ellas, como las que Bissell y Pollak evidencian en sus contribuciones. En este trabajo nos proponemos contribuir a esa relación entre formación y práctica diseñando actividades didácticas basadas en modelización matemática. Es decir, consideramos necesario analizar modelos matemáticos en uso en contextos de ingeniería, ya sea en la formación de especialidad o en la práctica de ingenieros. Dicho análisis va a ser realizado con el objetivo de reconocer los modelos matemáticos en uso y cómo éstos pueden ser considerados mediante un dispositivo didáctico para la formación matemática de futuros ingenieros.

Por supuesto, reconocemos la complejidad de esta vía para desarrollar la investigación, pues no sabemos si los modelos matemáticos en uso podrán corresponderse con los programas de la formación. Sin embargo, esperamos encontrar un contexto adecuado que nos permita cumplir con dicho objetivo.

Para analizar los modelos matemáticos en uso en contexto de ingeniería hemos considerado enmarcar nuestra investigación en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Consideramos que la noción de praxeología puede primeramente permitirnos analizar la actividad de modelización matemática (donde habrá modelos matemáticos involucrados) en algún contexto de la ingeniería y posteriormente considerar dicho uso en una actividad didáctica. Los elementos de esta Teoría que hemos considerado se presentan en el capítulo siguiente.

Capítulo II

Marco teórico

2 Introducción

En este capítulo se presenta los elementos teóricos que consideramos nos permitirán cumplir con el objetivo de este trabajo, que como se señaló en el capítulo anterior, es el de diseñar actividades didácticas basadas en modelización matemática. La Teoría Antropológica de lo Didáctico es un modelo epistemológico que permite el análisis de la actividad humana y por tanto de la actividad de modelización matemática, particularmente a través de la noción de praxeología. Al utilizar esta última se pretende realizar la descomposición de la actividad en cuatro componentes: tipos de tareas T, técnicas τ, tecnologías θ y teorías Θ. Consideramos el modelo praxeológico extendido para analizar conocimientos y modelos matemáticos en uso lo cual puede ser tanto en contextos matemáticos como en no matemáticos, como son los de ingeniería. Comparando dicho modelo con el clásico, mencionado en el párrafo anterior, el modelo praxeológico extendido amplía la tecnología considerando que ésta tiene dos componentes: teórica $\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{th}}$ y práctica $\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{p}}$.

Estas nociones nos permiten explicar la modelización matemática en términos de praxeologías, tanto en el análisis de modelos matemáticos en uso como en el diseño de actividades didácticas de modelización.

2.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) es un modelo epistemológico que permite el estudio de la actividad humana, incluida la actividad matemática. Una noción central en esta teoría es la de praxeología, la cual permite descomponer la actividad en cuatro componentes: tipos de tareas T, técnicas τ, technologías θ y teorías Θ. El tipo de tareas T describe lo que se hace, las técnicas τ son las maneras de realizar las tareas, es decir, cómo se hacen; las tecnologías son discursos que explican, producen y justifican las técnicas, es decir, describen el por qué se hace así; las teorías corresponden a organizaciones estables que explican, producen y justifican las tecnologías. Estos cuatro componentes se aglutinan en dos bloques, el técnico-práctico [*T*/τ/] o llamado saber hacer y el segundo es el tecnológico – teórico o lo que se conoce como "saber". Una Praxeología [*T*/τ/θ/Θ] está compuesta por dos bloques como se muestra en el siguiente esquema:

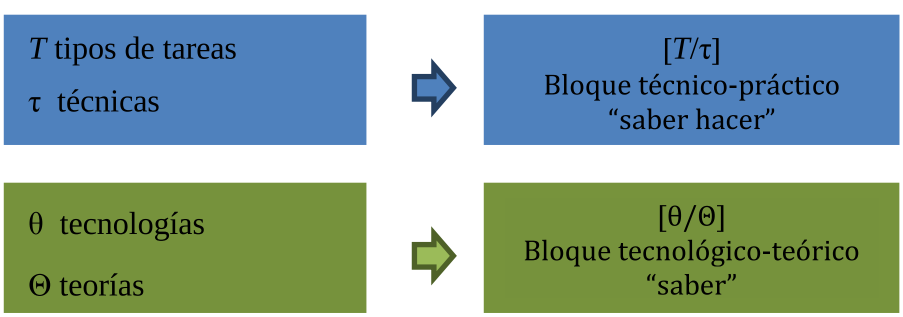


Figura 1. Bloques de la praxeología.

La praxeología es entonces una unidad de análisis con la cual puede estudiarse la actividad humana en su dimensión institucional. Una institución es entendida como:

> Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de los procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, se trata de resolverlas con regularidad y eficacia. (Castela y Romo, 2011, p.85)

Consideramos que las actividades de modelización pueden ser caracterizadas, dependiendo la institución, a través de praxeologías matemáticas y/o praxeologías mixtas. Una praxeología matemática está compuesta por una tarea matemática (consigna), que se resuelve a través de una técnica matemática (manera de hacer/procedimiento), justificada por una tecnología matemática (lo que valida la manera de hacer) y ésta a su vez por una teoría matemática (que valida de manera más general la técnica). Mientras que una praxeología mixta los componentes pueden provenir de al menos dos instituciones, las matemáticas y la ingeniería por ejemplo. Así en la actividad de modelización desarrollada por los ingenieros podrían encontrarse tareas ingenieriles (no matemáticas) resueltas a través de técnicas matemáticas sustentadas por modelos y teorías matemáticas. O bien por teorías no matemáticas sino de ingeniería como la teoría de control o la resistencia de materiales entre otras. Con el objetivo de tener herramientas más aptas para el análisis de la actividad de modelización en contextos de ingeniería, presentamos a continuación el modelo praxeológico extendido.

2.2 El modelo praxeológico extendido: herramienta para analizar conocimientos y modelos matemáticos en uso

El modelo praxeológico extendido (Romo y Castela, 2011) se desarrolló en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En el modelo praxeológico clásico propuesto por Chevallard (1999) se reconoce a la praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$, como una unidad mínima de análisis de la actividad humana, sus cuatro componentes son: tipo de tarea T, técnica τ, tecnología θ y teoría Θ. La tarea es lo que se hace, la técnica es la manera en que se hace, la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica, la teoría a su vez produce, justifica y explica la tecnología. El modelo praxeológico extendido considera, a diferencia del clásico, dos componentes tecnológicas: teórica $\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{th}}$ y práctica $\boldsymbol{\theta}^{\mathbf{p}}$. Particularmente, la componente práctica es un discurso que tiene seis funciones que permiten, describir, validar, explicar, facilitar, motivar y evaluar el uso de técnicas matemáticas en referencia a instituciones usuarias, no necesariamente matemáticas. El modelo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left[T, \tau, \begin{matrix} \theta^{th}, \Theta \\ \theta^{p} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow P(S) \\ \leftarrow Iu \end{matrix}$$

Donde P(S) designa la institución productora de saberes e I_u la institución usuaria de dichos saberes. Asumimos que para resolver tareas en contextos extra-matemáticos el uso de saberes y más precisamente de modelos matemáticos, se hace mediante técnicas matemáticas validadas por saberes matemáticos θ^{th}. El uso de la técnica (reconocimiento de la naturaleza de la tarea, elección de la técnica más óptima, reconocimiento del contexto en el que se usa, adaptaciones de la técnica al contexto, etc.) es validado por saberes prácticos θ^{p}, legitimados por I_u.

Con el objetivo de reconocer cómo los saberes prácticos validan la adaptación y uso de los modelos matemáticos, para lo cual consideramos las funciones de la componente práctica θ^{p} (Castela y Romo, 2011):

1.- Describir el tipo de tareas y la técnica. La producción de un discurso que caracteriza el tipo de tarea y los pasos que componen una técnica es considerada como una pieza de saber que no es identificable por sí misma. Las acciones y el contexto social donde se sitúa la noción praxeológica en un sistema compartido se pueden identificar en la elaboración de un sistema de representaciones verbales y simbólicas. La producción de estos lenguajes y la descripción que ellos permiten hacer constituye una componente esencial del proceso de transmisión de una invención técnica.

2.- Validar la técnica. Corresponde a lo que generalmente se entiende como justificar. Los saberes considerados establecen que la técnica produce bien lo que ella dice que produce, que los pasos que la componen permiten alcanzar los objetivos que le son asignados. En el caso de las matemáticas, esta función es generalmente asegurada por los saberes, justificados por las teorías matemáticas. Sin embargo en otros contextos, los saberes validados experimentalmente en laboratorio o empíricamente en el uso pueden validar una técnica.

3.- Explicar la técnica.- Se trata de saberes que permiten analizar cómo la técnica y sus diferentes pasos permiten conseguir los objetivos pretendidos. Contribuyen a la comprensión de las causas de los sujetos y están relacionadas a su cultura compartida.

4.- Facilitar la aplicación de la técnica. Los saberes considerados en esta función permiten a los usuarios utilizar con eficacia pero también con un cierto confort la técnica. Éstos son portadores de mejoras pero también de advertencias que permiten evitar errores y torpezas conocidas como frecuentes. Este dominio de saberes es el terreno privilegiado de las elaboraciones tecnológicas de los usuarios. Dicho dominio produce efectos retomados de descripciones que lo especifican al adaptarlo a las condiciones particulares del contexto institucional de utilización y el enriquecimiento de la memoria de las experiencias acumuladas.

5.- Motivar la técnica y los pasos que la componen. Estos saberes están orientados hacia la práctica. Ellos participan de una inteligencia de los fines: son los objetivos esperados que justifican racionalmente los pasos mostrando su razón de ser. Se trata de escribir una historia de la técnica que sitúe sus componentes, unas en relación con las otras: por qué (¿para hacer qué?) ¿se realiza tal paso en tal momento? Los saberes de motivación están seguidos por saberes sobre el tipo de tareas puesto que ellos analizan los objetivos. Permiten anticipar las etapas esperadas y entonces juegan un rol heurístico importante luego que la aplicación de la técnica necesita adaptaciones.

6.- Evaluar la técnica.- Los saberes considerados en este rubro tienen que ver con el dominio, las condiciones y los límites de una técnica relativamente a las tareas del tipo T. Ellos pueden igualmente considerarse con el funcionamiento de la técnica desde el punto de vista de sus usuarios. La funciones evaluar, facilitar y motivar pueden estar bastante relacionadas: la puesta en evidencia de ciertas dificultades (evaluar) puede provocar al cabo de cierto tiempo la producción de mejoramientos (facilitar), la motivación es dada por la evaluación. (Castela y Romo-Vázquez, pp. 88-89)

Asumimos que el uso de saberes y modelos matemáticos se hace mediante técnicas matemáticas que provienen del modelo mismo y/o de otros saberes matemáticos. La adaptación de modelos matemáticos para resolver tareas no matemáticas exige además de tecnologías teóricas, tecnologías prácticas producidas por I_u. Estas tecnologías prácticas permitirán validar la elección del modelo matemático para resolver tareas no matemáticas, asegurar su eficacia en contextos extra-matemáticos, determinar los elementos contextuales/prácticos necesarios para poder adaptar/trasponer/usar dicho modelo. Asimismo, estas tecnologías permiten interpretar los resultados obtenidos a través del modelo en relación al contexto en el que se está utilizando.

Dentro del modelo praxeológico extendido las validaciones teóricas (matemáticas) están intrínsecamente relacionadas con las validaciones prácticas, separarlas corresponde sólo a un objetivo metodológico que permita describir su naturaleza. Tanto la noción de praxeología como el modelo praxeológico extendido nos permitirán analizar la actividad de modelización como se explicita en la siguiente sección.

2.3 Modelización matemática en términos praxeológicos

Para hablar de modelización en términos praxeológico hemos considerado el ciclo de modelización propuesto por Bissell (2002) esquematizado de la siguiente manera:

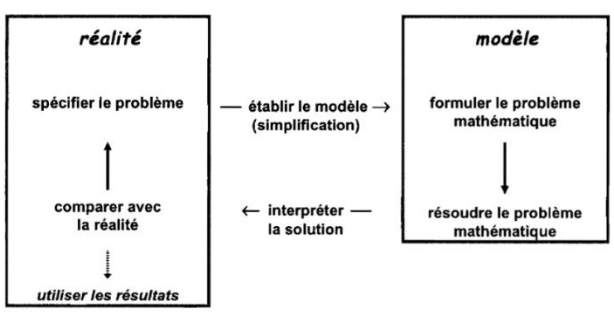


Figura 2. Esquema de modelización matemática propuesto por Bissell.

Según este modelo existe una realidad que va a ser modelada, para lo cual es necesario especificar el problema en la realidad, luego establecer el modelo (simplificación) lo que permite llegar a una formulación del problema matemáticamente. Una vez que se hace la formulación se resuelve el problema, se interpreta la solución y se compara con la realidad. Todo esto es visto como un ciclo que también admite un paso, el de utilizar los resultados.

Ciclo de modelización en términos praxeológicos

En este trabajo consideramos este ciclo de modelización y lo definimos en términos praxeológicos de la manera siguiente: la realidad va corresponderse con un contexto no matemático en el que se va a hacer uso de la modelización matemática, especificar el problema consistirá en identificar una situación problemática en el contexto, la cual será desglosada en tareas matemáticas y no matemáticas; establecer el modelo va a corresponderse con la tarea de identificar/construir un modelo matemático. Esta fase consideramos es central en este proceso y solicita conocer tanto el contexto, la situación problemática que será primero separada en tareas, para las cuales deberán reconocerse las técnicas que permiten realizarlas, finalmente se identificarán las tecnologías que permiten sustentar dichas técnicas así como la teoría. Dentro de las tecnologías se encuentran las funciones de la componente práctica que incluyen la fase de interpretación y uso de resultados, pero de manera más amplia reconociendo por ejemplo los elementos que permiten interpretar, la institución(es) que los producen, los motivan y los explican.

Consideramos que estas funciones de la tecnología práctica pueden aparecer en distintas fases de la modelización (reconocidas en el ciclo propuesto por Bissell) por lo que la identificación de praxeologías mixtas nos parece ser la pauta metodológica para reconocer estos elementos de la actividad de modelar matemáticamente.

Todos los elementos presentados en este capítulo nos parecen necesarios para conformar la metodología propuesta en esta investigación y que se detalla en el capítulo siguiente.

Capítulo III

Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática

3 Introducción

Los análisis y reflexiones presentados en el primer capítulo nos permitieron concebir como objetivo principal de esta investigación el diseño de actividades didácticas que involucran la modelización matemática. Para lograr este objetivo hemos propuesto una metodología para el diseño de este tipo de actividades, específicamente para una formación de ingenieros. Consideramos necesario señalar que más que buscar hacer propicias estas actividades a un plan por competencias, buscamos diseñar actividades de modelización matemática lo más cercanas a las utilizadas en la ingeniería y que puedan ser parte de una formación básica. Considerando lo anterior, en la metodología propuesta es necesario elegir y analizar un contexto de ingeniería para identificar modelos matemáticos en uso que puedan posteriormente ser parte de una actividad didáctica para el aula.

Con el objetivo de probar la factibilidad de dicha metodología se consideraron dos fases:

1) Analizar modelos matemáticos en un contexto de ingeniería biomédica;
2) Proporcionar la metodología y el análisis del contexto de la ingeniería biomédica a un grupo de profesores de matemáticas y solicitarles el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática.

La primera fase de prueba de la metodología tiene que ver con asegurar que es posible analizar modelos matemáticos en uso en un contexto ingenieril y reconocer cuál es la complejidad de realizar dicho análisis: tiempo de elección del contexto, posibilidad de colaboración con los expertos, la manera de analizar los modelos matemático en uso, los recursos utilizados en el contexto y su viabilidad para contar con ellos en el aula, entre otros.

En esta fase realizamos un trabajo colaborativo con ingenieros biomédicos de la Universidad de Guadalajara, que nos permitió identificar un método de Separación Ciega de Fuentes (Blind Separation Sources –BSS) en el cual se utilizan vectores y matrices.

Una vez analizado y descrito el método de la BSS procedimos a la segunda fase de prueba de la metodología, en la cual se buscaba comprobar si a partir de un contexto de uso analizado (disponible) era posible diseñar las actividades didácticas basadas en modelización matemática. Para llevar a cabo esta segunda fase se consideró a un grupo de profesores de matemáticas alumnos de la maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA, unidad Legaria). En uno de los cursos de la maestría, se les proporcionó a los profesores una descripción del método de la BSS y la metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática.

En la primera parte de este capítulo se presenta la metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática, en una segunda parte la descripción del método de la BSS y en una tercera el análisis de las actividades diseñadas por los profesores.

3.1 Metodología para el diseño de actividades basadas en modelización matemática

Para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática proponemos considerar cuatro fases:

1. Elección del contexto extra-matemático (aunque podría considerarse un contexto matemático) de la actividad
2. Naturaleza de la actividad, problema, ejercicio, praxeología mixta
3. Elegir y describir el modelo matemático en uso
4. Describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad

Elección del contexto de la actividad

Las actividades didácticas basadas en modelización matemática pueden ser propuestas en contextos no matemáticos, la elección del contexto podría hacerse buscando que éste sea cercano al estudiante, de manera que le permita asociar un significado contextual al modelo matemático en uso. Es decir, se asume que los conocimientos sobre el contexto podrían favorecer la generación/construcción de conocimientos/significados sobre el modelo matemático en uso. Aunque lo anterior parece tener sentido y puede ser apoyado en diferentes teorías didácticas, puede resultar muy complejo en los niveles básico y medio superior, pues no es fácil encontrar un contexto que sea cercano a cada estudiante del grupo. En el nivel universitario podría decirse que las matemáticas se enseñan por considerarlas una disciplina útil tanto para la formación básica como para la de especialidad, a menos que sea una formación de futuros matemáticos. Por lo que una alternativa sería investigar sobre el uso de modelos matemáticos en las disciplinas de especialidad y/o en la práctica. Una complejidad que tendría que enfrentarse es que tanto las disciplinas como la práctica obedecen a sus propias lógicas y por tanto es necesario comprenderlas, al menos en cierta medida, para poder elegir el contexto de uso de dichos modelos.

Naturaleza de la actividad, problema, ejercicio, praxeología mixta

Las actividades de modelización pueden contener praxeologías matemáticas y/o praxeologías mixtas. Una **praxeología matemática** está compuesta por una tarea matemática (consigna), que se resuelve a través de una técnica matemática (manera de hacer/procedimiento), justificada, validada, explicada por una tecnología matemática (lo que valida la manera de hacer) y ésta a su vez por una teoría matemática (que valida de manera más general la tecnología y por tanto la técnica).

Una **praxeología mixta** puede contener elementos matemáticos y no matemáticos. Por ejemplo, una tarea no matemática resuelta a través de una técnica matemática, solicita por tanto una validación matemática pero también validaciones no matemáticas relativas a la naturaleza de la tarea. Sin embargo, este tipo de praxeologías va a solicitar a su vez validaciones no matemáticas, de tipo experimental por ejemplo o validaciones relacionadas al contexto en el que se inscribe la tarea. La componente tecnológica (justificación/explicación/validación) en este caso puede ser matemática es decir teórica θ^{th} y/o práctica θ^{p}.

Dependiendo del tipo de praxeologías podrá explicitarse la componente teoría Θ relacionada a la tecnología teórica, la cual sería una teoría de la disciplina matemática o bien de la matemática escolar. Asimismo, dependiendo del tipo de tarea y del contexto que la produce habrá una instancia, no exactamente teórica, pero que valide de manera más general la tecnología práctica.

CARACTERIZACIÓN DE TIPO DE TAREAS

- **Tareas matemáticas**

Las tareas matemáticas son consignas que solicitan una técnica (resolución) y una solución matemática.

Por ejemplo:

Encontrar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^{2/3}$

Esta tarea requiere que se encuentren máximos y mínimos, para realizarla es necesario movilizar los conceptos de máximos y mínimos así como las técnicas matemáticas asociadas a éstos.

Otro ejemplo es:

Determina las ecuaciones de la tangente y normal en su punto de inflexión a la curva:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$$

Para realizar esta tarea, al igual que la anterior, es necesario movilizar tanto conceptos como técnicas matemáticas. En este ejemplo en particular, se requieren los conceptos de ecuaciones de la tangente y normal, punto de inflexión a una curva.

- **Tareas no matemáticas**

En este tipo de tareas la consigna no es matemática, puede requerir o no del uso de una técnica matemática para realizarla.

Algunos ejemplos de tareas no matemáticas:

- *Cruzar la calle*
- *Comprar un helado*
- *Elegir un programa de televisión*
- *Dormir la siesta*

- **Tareas matemáticas en contextos no matemáticos**

En este tipo de tareas aparecen en un contexto no matemático, para la tarea en la que se requiera una técnica matemática para su resolución no necesariamente parece de manera

explícita. Por tanto, requieren un entendimiento del contexto para reconocer la necesidad de utilizar una técnica matemática para resolver la tarea en cuestión. Su resolución requerirá por tanto un conocimiento de la técnica matemática pero también del contexto, dicho de otra manera requerirá una adaptación de la técnica para realizar este tipo de tarea.
Algunos ejemplos de este tipo de tareas se presentan a continuación.

- *Estudiar la actividad eléctrica del cerebro*
- *Modelar un motor a corriente continua*

Este tipo de tareas puede asociarse a las tareas escolares que aparecen en los libros de matemáticas reconocidas como "aplicaciones de matemáticas".

Elegir y describir el modelo matemático en uso

Describir el modelo en uso permitirá evidenciar las razones relativas al contexto extra-matemático por las cuales dicho modelo se ha elegido para resolver tareas del contexto extra-matemático. Interrogarse sobre los elementos que *validan* el uso del modelo y en qué condiciones, permitirá comprender qué elementos contextuales deben considerarse en el diseño de las actividades didácticas. Por ejemplo, muchos de los modelos matemáticos se usan en condiciones "ideales", lo que permite resolver ciertas tareas con mayor facilidad matemática, requiriendo luego la adaptación de las soluciones obtenidas al contexto de aplicación. Dicha adaptación es hecha en base a ciertos elementos que la *validan* y nos parece muy importante reconocer esos elementos para el diseño de la actividad didáctica, particularmente para analizarlos y ver en qué medida podrían ser considerados para un contexto de aula. Reconocer las *explicaciones* del uso, permite saber qué representa cada elemento del modelo, en qué medida el modelo utilizado permite modelar el contexto (o parte de éste). Analizar los elementos que *favorecen* el uso del modelo nos parece evidenciará elementos del proceso de modelización matemática, en el cual no sólo importa que el modelo matemático permita resolver un problema del contexto extra-matemático sino que esa resolución sea la menos compleja y la más cómoda para el usuario. Por tanto, es importante reconocer los elementos que favorecen el uso y analizar la manera en que podrían ser considerados en el diseño de la actividad didáctica. De la misma manera, es necesario analizar los elementos *motivadores* del uso del modelo, esta fase nos parece que medular para el diseño de las actividades didácticas para la formación de futuros ingenieros.

Describir los conocimientos y técnicas matemáticas necesarias para resolver la actividad

Por último consideramos necesarios describir las tareas que conforman la actividad de modelización matemática, las técnicas disponibles o que se deben generar para poder realizar estas tareas. De la misma manera, es necesario describir las tecnologías que sustentan dichas técnicas. Esta descripción debe hacerse desde un punto de vista didáctico por lo que es necesario explicitar el objetivo de cada tarea que conforma la actividad, la técnica que permite resolverla y sobre todo que elementos permiten validarla, explicarla y justificarla. Es importante considerar la naturaleza de las validaciones, pues éstas serán matemáticas (teóricas) para sustentar la técnica matemática, pero seguramente surgirán otro tipo de validaciones relativas a la adaptación de la técnica al contexto de la tarea y sobre todo a la actividad de modelar. Este análisis de las actividades permitirá anticipar lo que los estudiantes harán al resolver la actividad y de manera más general el lugar que puede ocupar en su implementación escolar.

Con el objetivo de probar esta metodología y particularmente su primera fase, elección del contexto extra-matemático (descrita en el punto 3.1.1 de este capítulo), se eligió un contexto de ingeniería biomédica. El análisis de dicho contexto y más precisamente del método de la BSS se presenta a continuación.

3.2 Contexto de la ingeniería biomédica: método de separación ciega de fuentes

La descripción del contexto de la ingeniería biomédica y más específicamente la aplicación del método de separación ciega de fuentes, fue realizada en colaboración con ingenieros biomédicos de la Universidad de Guadalajara. A los ingenieros se les solicitó que nos describieran el método de la BSS utilizado en sus investigaciones para mejorar el diagnóstico de la epilepsia. La primera descripción que los ingenieros biomédicos realizaron fue bastante técnica, las explicaciones estaban dadas en un lenguaje propio de la biomédica y difícilmente se explicitaban cómo se usaban los modelos matemáticos y sus razones de uso. Esa primera descripción fue modificada varias veces a partir de las preguntas que nosotros les realizamos. Por lo que la descripción que presentamos a continuación es una transposición del método de la BSS utilizado por estos ingenieros, nos permitimos señalar que ésta fue realizada y consensada en colaboración con los ingenieros.

Descripción del método de la BSS y su contexto de uso

En el área biomédica, ingeniería al servicio de la salud, se estudia la actividad eléctrica del organismo a través del registro de señales electrofisiológicas. Las señales registradas permiten, en un trabajo de clínica, determinar el estado de salud de las personas. Por lo que es muy importante que este registro sea lo más fiel posible a la actividad eléctrica de los órganos. Es decir, durante el registro existen diferentes interferencias y/o perturbaciones que alteran la señal registrada y por consecuencia su interpretación. Algunos ejemplos de señales electrofisiológicas son: el electrocardiograma (ECG), el electroencefalograma (EEG), el electromiograma (EMG), etc.

Por ejemplo, el electroencefalograma (EEG) es el método más usado para registrar la actividad eléctrica del cerebro, mediante electrodos que se colocan sobre el cuero cabelludo.

Estos electrodos se colocan siguiendo estándares internacionales (ver figura 3). Si bien, estos electrodos registran la actividad cerebral, también registran otro tipo de actividad, como puede ser actividad electrofisiológica que no sea de origen cerebral (i.e. actividad ocular, actividad muscular, actividad cardiaca), así como ruido. Tanto al ruido como a la actividad no cerebral que se registra se les conoce como perturbaciones.

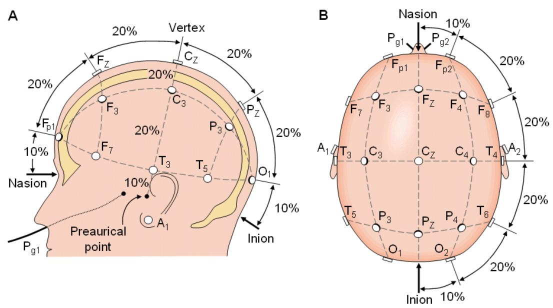


Figura 3. Estándar internacional para la colocación de electrodos

Podemos apreciar un elemento importante del contexto, el registro de la actividad cerebral no es puro, sino que se comporta de una mezcla.

Con la finalidad de tener registros exceptos de perturbaciones se han creado métodos de tratamiento de señal como la separación ciega de fuentes (BSS), el cual consiste en separar a partir de los registros de EEG las componentes de las fuentes (señales) que tienen un origen cerebral de las fuentes que no tienen un origen cerebral. Una vez que la separación de ambos tipos de fuentes es hecha, se procede a eliminar las señales de origen no cerebral y sólo se conservan las de la actividad cerebral. La *motivación* general de uso del método podemos encontrarla aquí, se quiere separar las fuentes señales de origen cerebral de aquellas que no lo tienen.

La BSS consiste en tener una mezcla de señales que son el resultado de la combinación de diversas fuentes de origen a través de una matriz de mezcla desconocida. Teniendo únicamente como conocimiento el resultado de la mezcla (observaciones). La idea es encontrar la matriz inversa (a la matriz de mezcla) que nos pueda regresar las fuentes de origen, esto sin tener ningún conocimiento previo, ni de las fuentes ni del sistema de mezcla.

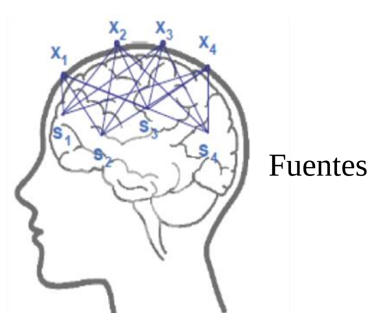


Figura 4. Combinación entre electrodos y fuentes

Primera fase de modelización

En el caso de un registro de EEG, consideramos el EEG como el resultado de una mezcla de fuentes de origen cerebral y de fuentes de origen no cerebral. Los registros de EEG resultan como la combinación de diversas fuentes **s** (cerebrales y extra cerebrales), esta combinación es registrada por los electrodos colocados sobre el cuero cabelludo **x** (Figura, 4).
El principio de la solución de la BSS está basado en el álgebra lineal, como la multiplicación de matrices que nos permite resolver el problema inverso presentado. Es decir a partir de una matriz de señales desconocidas **x** debemos resolver el problema inverso y encontrar las matrices que multiplicadas (**s** y **A**) dieron como resultado la mezcla **x**.
Desde el punto de vista formal, la separación ciega de fuentes consiste en estimar P señales desconocidas **s** (las fuentes) a partir del conocimiento únicamente de Q mezclas de las señales **x** (las observaciones). El término ciego significa que las fuentes no son observadas y que el modelo de mezcla **A** también es desconocido.

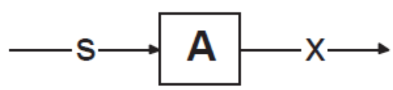


Figura 5. Esquema que representa el modelo de la BSS

Notemos que en esta primera fase de modelización el problema de la captación de señales fuentes no puede hacerse de manera pura. Es decir, las captaciones hechas por los electrodos constituyen una mezcla de señales. Los ingenieros describen este fenómeno en términos de una representación matricial y que en el esquema anterior es visto es de la siguiente manera, se producen fuentes cerebrales (**s**), que se mezclaran (matriz de mezcla **A**) y se obtienen observaciones (**x**).

Modelo de la BSS

El modelo espacial de la mezcla al instante k está definido por: $x(k) = As(k)$
Donde:
$x(k) = \left[x_1(k), \dots, x_Q(k)\right]^T$ es el vector de señales observadas (electrodos)
$s(k) = \left[s_1(k), \dots, s_p(k)\right]^T$ es el vector de las fuentes de origen (desconocido)
$A(QxP)$ matriz de mezcla (desconocida)

El objetivo de la BSS es la estimación de una matriz de separación **B**, que permita la estimación de las fuentes de origen **s** a partir de las señales medidas **x** (ver figura 6):

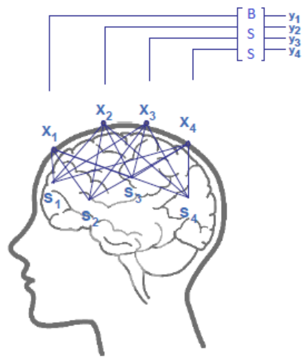


Figura 6. Principio del método de la BSS

Para fines clínicos el interés está en conocer las fuentes de origen cerebral, sin embargo el registro sólo muestra la mezcla de las diversas fuentes. Sin ningún conocimiento *a priori* de las fuentes cerebrales, solucionar este problema resulta una tarea muy complicada a resolver. Los resultados obtenidos con el uso de la BSS en clínica son prometedores.

Esta descripción y la metodología para el diseño (sección 3.1 de este capítulo) fueron presentadas en un curso de maestría del Programa de Matemática Educativa del CICATA, unidad Legaria, detallamos a continuación algunos elementos del curso y de la actividad que les fue solicitada a los profesores así como la manera en que fue resuelta.

3.3 Actividades didácticas producidas por los profesores de matemáticas en el marco de un curso de maestría

Como señalamos en la introducción de este capítulo, la metodología propuesta para el diseño de actividades de modelización matemática, requería ser probada. Es decir, tener una fase experimental en la cual poder observar si el uso de la metodología permitía realmente diseñar actividades didácticas. Para lo cual, propusimos en el curso de maestría, Procesos de institucionalización de la matemática escolar, una actividad utilizando la metodología para diseñar una actividad didáctica. Presentamos a continuación una breve descripción del curso y analizamos algunas actividades didácticas propuestas por los profesores de matemáticas, alumnos de dicho curso.

Breve descripción del curso, procesos de institucionalización de la matemática escolar

El curso de procesos (así lo nombraremos en adelante) es el tercer curso que se propone en la maestría del Programa de Matemática Educativa y tiene por objetivo general reflexionar sobre la naturaleza de los procesos de institucionalización que se producen en el aula. El curso que nosotros consideramos fue realizado en el primer semestre 2012 - 2013 del calendario oficial del Instituto Politécnico Nacional, que corresponde a enero-junio 2012. El objetivo de este curso fue:

> Reflexionar sobre los procesos de institucionalización que se producen en la clase de matemáticas y más precisamente analizar cómo dichos procesos tienen lugar en actividades didácticas de modelación matemática. Para lo cual se propondrá analizar y discutir la herramienta teórica de los momentos del estudio (Chevallard, 1999) (Documento de presentación del curso, p.2).

El curso consistió de cuatro actividades y la lectura de dos artículos de investigación, el primero referido a la modelización matemática (Skovsmose, O, 2001) y el segundo a elementos teóricos (Chevallard, 1999). La primera actividad consistió en resolver un problema de modelización matemática llamado “El problema de los aviones de papel” que constituye un problema abierto, en el cual a partir de ciertos datos deben responderse preguntas, las respuestas no son únicas. La segunda actividad del curso consistió en analizar este problema utilizando los elementos teóricos de uno de los artículos leídos.

Estas actividades y las dos lecturas nos parecieron el marco adecuado para proponer la actividad 3 del curso, la cual consistía en diseñar una actividad didáctica basada en modelización matemática. Para realizarla disponían de la descripción del método de la BSS y la metodología para el diseño de actividades (detallada en la sección 3.1 de este capítulo). Una vez que los profesores tuvieron la descripción de esta actividad, propusieron, a su iniciativa, un foro en el cual expresaron sus dudas tanto en lo relativo al método de la BSS como a las cuestiones propias para el diseño didáctico.

Las actividades didácticas producidas

Los profesores de matemáticas, alumnos del curso de procesos, produjeron actividades didácticas motivadas en el método de la BSS y basándose en la metodología para el diseño que les fue propuesta. Las actividades propuestas intentan adaptar el método de la BSS o su principio al nivel educativo en el que labora el profesor que las diseña. Para lograrlo los profesores efectúan investigaciones suplementarias que les permiten apropiarse del método de la BSS y posteriormente efectúan una “adaptación de la BSS”. Por ejemplo, una de las actividades que fue propuesta es la siguiente:

> Esta información proviene de la mezcla de diversas fuentes de origen cerebral. Propón una manera de separar la información inicial X en la combinación de otras representaciones más simples.

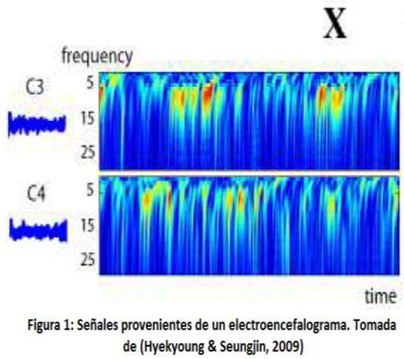


Figura 7. Imagen que muestra el profesor Luis en su actividad

Podemos ver que el profesor Luis elige esta imagen resultado de su propia investigación sobre la BSS. La tarea propuesta es muy general y no presenta el principio del método, pero el profesor Luis menciona antes de proponer la actividad que pedirá a los estudiantes hacer una investigación sobre la BSS. El mismo profesor presenta una reflexión en este sentido, señalando que esta tarea es abierta, amplia y que podría ser enfrentada de maneras diversas sin necesariamente lograr el objetivo que él se propone, acercarlos al principio de la BSS.

> Por ejemplo, se podría presentar una de las matrices que resultan de la observación de las señales en un EEG (Figura 1) [hace referencia a la Figura 7] y plantear a los estudiantes que, de manera preliminar, intenten proponer una estrategia para hacer separaciones de los registros del EEG. Seguramente, esta tarea no sea nada sencilla. Se piensa que existan quienes propongan separar la información por colores, por segmentos, etc. Como se puede inferir, este puede ser un inicio bastante significativo en torno, a lo que implicará posteriormente transformar una matriz en la suma o producto de otras. Y es que en esencia, para “separar” una matriz de esa manera, es necesario proponer la separación y luego realizar procesos que validen el resultado.

Analizando esta cita constatamos que la tarea que el profesor Luis propone no constituye una actividad propicia para el aula, sino una tarea en fase intermedia del proceso de diseño. Todas las actividades presentadas por los profesores son distintas y se encuentran en diferentes niveles de cercanía al aula. Lo que pudimos apreciar en una revisión general es que en todas las actividades se ejerce una adaptación del contexto de la BSS, que nosotros podríamos llamar como una transposición 1 ejercida sobre la descripción propuesta del método de la BSS, que podría ser considerada una transposición 0.

Las actividades propuestas por los profesores adoptan en lenguaje praxeológico para ser propuestas y en ese sentido consideramos que la metodología pone a su disposición una herramienta para expresar las actividades. Sin embargo, las actividades propuestas no constituyen, como lo mencionamos anteriormente, actividades que puedan ser llevadas al aula sino actividades en el proceso de diseño.

Nuestra hipótesis es que el marco institucional, el curso de maestría, es apto para probar la metodología, pues los profesores están comprometidos a utilizarla y a producir las actividades. La contraparte es que el tiempo se vuelve una limitante y no se logró tener suficientemente tiempo para retroalimentarlos, discutir entre pares y poder mejorar las actividades propuestas para acercarlas cada vez más al aula. Esto nos motivó a elegir una de las actividades propuestas y a desarrollarla en el marco de esta investigación.

3.4 Conclusión

En este capítulo hemos presentado una Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática. Una de las fases de esta metodología es la elección de un contexto extra-matemático lo que define en parte el tipo de actividades que permitirá diseñar esta metodología. Es decir, se considera específicamente que estas actividades son diseñadas con el objetivo de figurar en una formación de futuros ingenieros y por tanto ese contexto extra-matemático debe relacionarse o a las disciplinas de especialidad o a la práctica de ingenieros. Las otras tres fases buscan propiciar el paso del análisis de los modelos matemáticos en uso al diseño de una actividad didáctica. Describir la naturaleza de la actividad del contexto elegido, es una primera transición que consideramos orienta sobre el análisis de la actividad matemática del contexto pero no llega a ser tan fina como la de la tercera fase, donde específicamente se busca describir los modelos matemáticos en uso, pero desde una óptica didáctica. Es decir, esta tercera fase es más cercana al aula y más lejana al contexto que la segunda. La cuarta fase es la más cercana al aula, pues en ésta ya se describen las técnicas matemáticas y las tecnologías (saberes) que sustentan dichas técnicas. Esta fase es amplia, pues no sólo se trata de describir las técnicas y tecnologías matemáticas sino de analizar su relación con el programa de matemáticas, del dispositivo didáctico que puede generarse y de su pertinencia en el aula. Consideramos que esta metodología es una primera aproximación a las pautas que pueden orientar el diseño de actividades didácticas basadas en modelización.

El curso de procesos nos parece constituyó un marco institucional propicio para probar la metodología, pues los profesores utilizan la metodología como parte de una de las actividades del curso. Es decir, tienen condiciones y recursos dentro del mismo curso que hace que los profesores utilicen la metodología. Sin embargo, como todo curso existe un tiempo para cada actividad y eso no permite que los profesores empleen más tiempo en el diseño, ni tengan un espacio más amplio para retroalimentarse entre pares para producir actividades didácticas que puedan aplicarse en el aula. Esto nos motivó a elegir una de las actividades propuestas y desarrollarla para convertirla en una secuencia didáctica, la cual se presenta a detalle en el siguiente capítulo.

Finalmente, consideramos que el haber propuesto un contexto extra-matemático preciso, el método de la BSS, fue una variable de control para probar nuestra metodología. Dado que el tiempo para diseñar la actividad utilizando la metodología era limitado, contar con el contexto extra-matemático permitió economizar esta parte que es compleja y solicita por tanto un tiempo considerable. Notamos también que el contexto de la BSS es complejo, comprenderlo obligó a los profesores a investigar y a abrir un foro para intercambiar lo que entendían del mismo. Este foro fue un elemento fundamental para explicitarlo y pudimos contar con la colaboración de uno de los ingenieros, lo cual nos hace pensar que la ayuda de un experto en un tipo de proyecto como el nuestro es necesaria.

Capítulo IV

Secuencia de actividades de modelización que involucran conceptos de funciones vectoriales y vectores

4 Introducción

En este capítulo se presenta una secuencia didáctica que involucra el uso de funciones vectoriales para describir la trayectoria de un móvil. Dicha secuencia se inscribe en un proyecto de investigación que tiene por objetivo proponer actividades didácticas de modelización considerando contextos extra-matemáticos. En particular, se eligió un contexto de ingeniería biomédica, como se detalló en el capítulo anterior. Este contexto y más precisamente el método de la BSS fue objeto de dos transposiciones, la primera por matemáticos e ingenieros biomédicos y la segunda por profesores de matemáticas alumnos de una maestría en Matemática Educativa.

En el método de la BSS puede identificarse el uso de dos objetos matemáticos vectores y matrices. Con el objetivo de que los futuros ingenieros en Sistemas Computacionales, puedan conocer un uso de los vectores como modelos matemáticos en contextos extra-matemáticos, se generó una secuencia que involucra actividades de modelización matemática. La secuencia está pensada para estudiantes del curso de cálculo vectorial, de tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales, debido a que en un semestre anterior cursaron la materia de Álgebra lineal, donde trabajaron con vectores y matrices.

Para el diseño de la secuencia se consideró una pre-propuesta elaborada por un profesor de matemáticas, que llamaremos “profesor A”, en el marco de un curso de maestría en Matemática Educativa. En dicho curso se propuso la metodología de diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática (expuesta en el capítulo 3, p.18) y el contexto extra-matemático de la BSS. La pre-propuesta hecha por el profesor A y que aparece en el anexo 1 fue considerada como base para el desarrollo de la propuesta aquí presentada. Lo anterior obedece a que considerar un contexto extra-matemático como el método BSS requiere de diferentes “transposiciones” que aseguren su adaptabilidad al aula. Esta adaptabilidad será diferente en la medida en que se considere un nivel educativo, un curso de matemáticas, el tipo de estudiantes al cual será presentada y los objetivos didácticos que se pretendan. En este caso se ha elegido el nivel educativo universitario y en particular a estudiantes de Ingeniería en Sistemas Computacionales. Los objetivos didácticos que se persiguen es que los estudiantes enfrenten tareas en las que los conceptos de función vectorial y de vector sean utilizados como modelos matemáticos. Es decir, las tareas que componen la secuencia no son matemáticas, solicitan por tanto la adaptación de los modelos matemáticos de funciones vectoriales y de vectores al contexto del estudio de trayectorias, en el cual se han propuesto las tareas. Las validaciones de las resoluciones propuestas deben al menos darse en este contexto y se esperaría que puedan relacionarse con las validaciones matemáticas/teóricas. Dichas validaciones están asociadas al modelo matemático en uso, funciones vectoriales y vectores, mientras que las validaciones “contextuales” están asociadas al estudio de las trayectorias. Estas últimas permiten sustentar la adaptabilidad de los modelos y la eficacia de las soluciones propuestas en relación al contexto de las tareas. La idea que subyace lo anterior es que en la práctica los ingenieros adaptan modelos tipos en lugar de crearlos, como se muestra en el análisis hecho por Romo-Vázquez del trabajo de Bissell (2000), en el cual se señala:

> Contrariamente a lo que se postula, el ingeniero crea raramente un nuevo modelo; al contrario él selecciona un modelo estándar bien conocido, con dos soluciones bien conocidas y va a adaptarlo o a modificarlo ligeramente. El proceso de modelización es casi siempre incremental, es decir consiste en una afinación de modelos existentes hecho sobre la base de la experiencia y de la práctica, incluyendo lo que resulta de los fracasos de la modelización. (Romo-Vázquez, 2009, pp. 39-40)

Lo anterior es considerado en el diseño de nuestra secuencia, pero sólo en parte, pues si bien se señala que los ingenieros más que crear, adaptan modelos matemáticos se dice que dicha adaptación está hecha en base tanto al conocimiento del modelo matemático en uso como al fenómeno o proceso que se modela. Los estudiantes que enfrentaran la secuencia que aquí se presenta han cursado un curso de álgebra lineal, pero no sabemos sí han realizado algún estudio sobre las trayectorias.

El modelo teórico que sustenta el diseño y análisis de esta secuencia es el modelo praxeológico extendido (Castela y Romo-Vázquez, 2011), el cual se presentó en el capítulo 3. Presentamos a continuación un análisis de la actividad propuesta por el profesor A y cómo ésta constituye la base de la secuencia diseñada en esta tesis y llamada Buscando trayectorias. Esta última se presenta y analiza en la segunda parte de este capítulo.

4.1 La actividad propuesta por el profesor A, origen de la secuencia Buscando trayectorias

Como lo señalamos en el capítulo precedente, hemos elegido la actividad propuesta por uno de los profesores en el curso de procesos. La actividad elegida la propuso el profesor, que llamaremos A. Antecediendo la actividad de modelización, el profesor A presenta una descripción de la BSS:

> El problema de separación ciega de fuentes consiste en la recuperación de un conjunto de señales originales (fuentes) a partir de observaciones de mezclas lineales de ellas. Se trata de un problema de extraordinario interés en procesado de señal porque para resolverlo solo es necesario que se cumplan un conjunto de hipótesis muy poco restrictivas, a saber, la invertibilidad del sistema de mezcla, la independencia mutua entre las fuentes, y la distribución no gaussiana de las mismas (Documento profesor A, p.1).

En esta descripción general del método, el lenguaje matemático parece estar cristalizado por el lenguaje ingenieril, los únicos términos que aparecen como matemáticos es la invertibilidad del sistema y la distribución no gaussiana. Podemos notar que aparece el término independencia, pero no se habla de vectores sino de fuentes. En este extracto aparece la *función de motivación* del uso del método al señalarse, "…para resolverlo sólo es necesario que se cumplan un conjunto de hipótesis muy poco restrictivas…". Es decir, se señala que sus condiciones matemáticas, invertibilidad del sistema, independencia lineal y la distribución no gaussiana de las fuentes (funciones vectoriales) garantizan un confort en el uso, *facilitan el uso de la técnica*, o del método BSS. Posteriormente, el profesor A va a presentar características del método y el interés didáctico que puede generar, como se muestra a continuación:

> Por esta razón, las técnicas de separación ciega de fuentes encuentran numerosas aplicaciones en campos tan diversos como procesado en array, comunicaciones multiusuario y reconstrucción de voz o imágenes (Documento profesor A, p.2).
>
> La separación ciega de fuente s es un campo en el que se ha venido investigando intensamente a lo largo de los últimos diez años. Son numerosos los trabajos en los que se proponen algoritmos adaptativos para su solución pero muy pocos se preocupan de analizar con detenimiento, su aplicación a la escuela, es decir, al estudiante común y corriente; en esta pequeña actividad desarrollada, tratamos de incluir al estudiante como eje principal, en la búsqueda, o aplicación de modelos (Documento profesor A, p.2).

Podemos ver a partir de estas dos citas, que el profesor Luis pasa de describir la BSS como método ingenieril con bastante potencial para atacar diferentes problemáticas a considerarlo como objeto de análisis que permita llevarlo a la escuela. Este análisis no se profundiza pero le permite mostrar el objetivo de las actividades que va a proponer y la razón de exponer sintéticamente el método de la BSS. Podríamos decir, que este profesor entra en el contrato de la actividad propuesta en el curso, es decir reconoce el contexto de la BSS como el contexto extra-matemático para generar su actividad de modelización. Realiza una segunda transposición a partir de una presentación del modelo, apoyado en una tesis doctoral (Napena, 1999) cuyo título es: Algoritmos adaptativos para separación ciega de fuentes. Esta tesis se encuentra disponible en internet y aparece en las referencias del documento producido por el profesor A. Al revisar el documento podemos encontrar la siguiente figura:

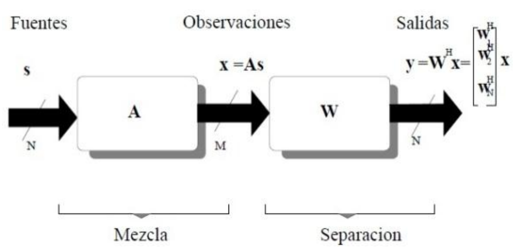


Figura 8 Método de la BSS Mezcla-separación, la cual aparece en el trabajo realizado por el profesor A

Esta figura es retomada por el profesor A y va acompañada de la siguiente explicación:

El problema no convolutivo, por tanto, puede ser expresado mediante un sistema lineal de m ecuaciones de mezcla con n incógnitas, donde A caracteriza a la matriz de mezclas, y s(t) y x(t) son los vectores de fuentes y observaciones respectivamente.
x(t) = A· s(t)
La solución al problema planteado se traduce entonces en encontrar la matriz de separación W^H, estimación de la inversa de la matriz de mezclas A, solución a la ecuación, donde y(t) será a su vez un vector de estimación de x(t) .
y(t) = $W^H \cdot$ x(t)

Donde $s(t) = [s_1, \ldots \ldots, s_N]^T$ vector de dimensiones (Nx1)

$x(t) = [x_1, \ldots \ldots, x_M]^T$ vector de dimensiones (Mx1)

$$x_1(t) = a_{11}.s_1(t) + \cdots + a_{1n}.s_n(t)$$

$$x_2(t) = a_{21}.s_1(t) + \cdots + a_{2n}.s_n(t)$$

$$\vdots$$

$$x_m(t) = a_{m1}.s_1(t) + \cdots + a_{mn}.s_n(t)$$

(Documento profesor A, p.2)

Esta explicación es una síntesis de la exposición sobre el método presentado en (Napena, 1999). Todo lo anterior le permite al profesor A traducir o transponer el contexto de la BSS para poder proponer un contexto de modelización extra-matemático inspirado en la BSS pero más apto o más cercano a los estudiantes del nivel universitario en el ciclo básico. El profesor A propone un contexto de modelización basado en el contexto del ruido del tráfico, el cual describe de la siguiente manera:

> El ruido de tráfico es una de las fuentes de ruido que más preocupa a la sociedad actual. Por esta razón, durante los últimos años se están dedicando esfuerzos para combatirlo; sin embargo, el número de investigaciones enfocadas hacia la obtención de técnicas eficientes de detección y clasificación siguen siendo escasas (Documento profesor A, p.3)

La relación del ruido de tráfico visto como objeto de modelización matemática y la BSS está dada en los siguientes términos: “En este escenario, el trabajo tienen como objetivo simular unos resultados, tomando el contexto de la separación de fuentes, como afianzamiento del conocimiento de vectores y matrices.” Para lo cual el profesor A propone 3 etapas que deben ser consideradas:

1. Los vectores, como parte básica, en el estudio del problema de separación de fuentes.
2. La matriz, como unión entre el vector fuente, y el vector observación, en el problema de separación de fuentes.
3. Modelización sobre el ruido causado por automotores, a través de una simulación del contexto separación ciega de fuentes. (Documento profesor A, p.3)[2]

[2] En el texto original estas tres etapas aparecen en negritas, nosotros hemos decidido dejar todas las citas en el mismo formato.

Para la primera etapa el profesor A propone un problema antecedido por un párrafo en el que explicita los elementos matemáticos en juego, funciones vectoriales y funciones reales, declarando como objetivo que los estudiantes puedan relacionarlas en el plano y en el espacio. El problema propuesto por el profesor A se acompaña de una descripción de las tareas que los componen y de las técnicas necesarias para realizarlas. Asimismo, describe el bloque teórico- práctico en el sentido de Teoría-tecnología, de la siguiente manera:

Un automovilista, analiza una de las curvas de un circuito, en el recorrido de prácticas, y le dice a su ingeniero, que quiere saber, como se vería la curva en el plano, con los vectores marcados, la rapidez, necesaria en cada uno de los tiempos dados, y el vector aceleración. El ingeniero averigua, que la curva tiene la siguiente función $r(t) = (2t - 3)i + (3 + 4t - t^2)$j; los tiempos en los cuales debe hallar la velocidad y aceleración t= -1, 0.5, 2, 3 y 4.

Tareas

1. Analizar el contexto en el que desarrolla la actividad
2. Establece el vector de la forma $r(t) = (2t - 3)i + (3 + 4t - t^2)$j
3. Hallar la ecuación vectorial de velocidad, y aceleración.
4. Representar, y llenar una tabla con los encabezados

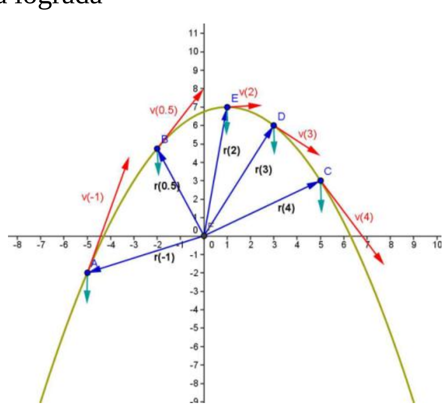
Tiempo	r(t)	v(t)	a(t)	Rapidez

5. Expresar la función vectorial, en función real.
6. Reconocer, la relación que puede existir entre funciones reales, y funciones vectoriales.
7. Graficar la función real en el plano.
8. Marcar los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración para cada tempo en la gráfica

Técnicas

1. Tomando cada uno de los valores de la función desplazamiento expresarlo como vector, simplemente relacionando visualmente el vector dado.
2. Utilizando derivadas en el vector desplazamiento se halla la velocidad, y aceleración $v(t) = r'(t), a(t) = v'(t) = r''(t)$
3. Rellenando los datos de la tabla para cada uno de los tiempos propuestos, usando calculadora.
4. Tomando $r(t) = (2t - 3)i + (3 + 4t - t^2)$j realizamos la conversión a función real $x(t) = 2t - 3$ y $y(t) = 3 + 4t - t^2$ despejando t de $x(t)$y remplazando en $y(t)$, se obtiene la función real $y = \frac{-x^2+2x+27}{4}$

5. Tomando la función real obtenida se grafica en el plano, usando cualquier graficador.
6. Con los datos de la tabla, marcamos los vectores, velocidad, desplazamiento y aceleración en la gráfica lograda



t	r(t)	v(t)	a(t)
-1	-5i-2j	2i+6j	-2j
0.5	-2i+4.75 j	2i+3j	-2j
2	i+7j	2i	-2j
3	3i+6j	2i-2j	-2j
4	5i+3j	2i-4j	-2j

Teoría-tecnología

De acuerdo a las técnicas planteadas, la teoría necesaria es la que tiene que ver con los conocimientos y conceptos de vectores, su posicionamiento, su correlación con coordenadas reales y sus gráficas; como recurso tecnológico, se utilizarán los diferentes software, como Cabri, Geogebra, Matlab, entre otros.

Este planteamiento nos permite ver que la metodología de diseño propuesta para realizar esta actividad provee a los profesores (estudiantes del curso de procesos) herramientas para diseñar esta actividad. Es por eso que el profesor A señala las tareas que componen el problema planteado, su desglose puede ampliarse o reducirse pues éste dependerá de la manera en la que se perciba que esta actividad debe ser resuelta. Esto debido a que es una actividad que no es totalmente cerrada. Puede observarse que las técnicas expuestas no aparecen exactamente en el orden de las tareas, por ejemplo para la tarea 1 no se explicita ninguna técnica. Sin embargo, para las demás tareas las técnicas son descritas. El componente tecnológico-teórico no es totalmente comprendido en el sentido de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y es por ello que la componente tecnológica está únicamente asociada al uso de programas computacionales.

El problema planteado refleja una primera adaptación a la situación del aula, pues se presenta un contexto cercano al estudiante, se presentan las praxeologías que componen la actividad, particularmente el bloque técnico-práctico. Sin embargo, el problema planteado no constituye como tal una actividad didáctica en su última fase. Es decir, en esta descripción no aparecen los objetivos de cada tarea ni tampoco los conocimientos necesarios para realizar las técnicas, ni tampoco cuáles tareas serán realizadas con la ayuda de programas computacionales. La actividad propuesta nos parece estar en una fase inicial, una buena base para desarrollar una secuencia didáctica, la cual presentamos en la siguiente sección.

4.2 Análisis de las tareas que componen la secuencia: Buscando Trayectorias

En esta sección se presenta un análisis de las tareas que componen la secuencia didáctica “Buscando trayectorias” con el objetivo de mostrar las razones que sustentan su diseño así como lo que se espera realicen los estudiantes que las enfrenten.

Objetivo general

En esta secuencia se pretende que los estudiantes reconozcan el uso de funciones vectoriales para representar la trayectoria de un móvil. La representación de una trayectoria a través de una función vectorial involucra también los conceptos de vector posición, vector velocidad y vector aceleración. De esta manera, una trayectoria seguida por un móvil puede representarse como una sucesión de posiciones a través de los vectores posición, los cuales tienen el mismo origen. Los vectores velocidad permiten representar la velocidad (dada por el módulo del vector) para cada posición del móvil y los vectores aceleración representan a su vez la aceleración. El momento clave de esta secuencia es pasar de una función vectorial a una función de variable real para expresar la misma trayectoria. Este paso es delicado porque es necesario que el estudiante reconozca que una función vectorial está definida como una función F tal que F: I ∈ R→R^2. Dado que las funciones vectoriales están dadas de la forma $r(t) = x(t)i + y(t)j$ donde $x(t)$ y $y(t)$ están definidas en función del tiempo y son funciones paramétricas de $r(t)$ que está definida sobre R o sobre I ∈ R. Para pasar de $r(t)$ a $y(t)$ la técnica que lo permite, en los casos donde esto es posible, consiste en eliminar al parámetro t en una de las funciones paramétricas y sustituirla en la otra. Determinar la tecnología que sustenta esta técnica y más aún exponer las razones que motivan el paso de una función vectorial a una real nos parece que no es natural ni evidente. La secuencia se ha diseñado de manera gradual para lograr este paso, el cual es solicitado en las actividades 4 y 5.

La secuencia ha sido diseñada utilizando el programa computacional Geogebra con el objetivo de poder graficar tanto las trayectorias como los vectores posición, velocidad y aceleración. Conocer Geogebra no es un requisito para los estudiantes que enfrenten la secuencia, para las actividades 1 y 2 se ha relatado una guía de uso de las funciones del programa que son requeridas. Dichas guías son suficientes para desarrollar toda la secuencia. Geogebra es utilizado como una herramienta para el desarrollo de las tareas propuestas en la secuencia, pero su uso no es objeto de análisis en esta investigación.

Presentamos a continuación la secuencia y un análisis de tareas que comprende tanto las razones de su diseño como lo que se espera que realicen los estudiantes al enfrentarlas.

4.3 Análisis de tareas que conforman la secuencia

Análisis de la tarea 1

La tarea 1 de la secuencia es la siguiente:

Tarea 1
Pepito Creatividad es un ingeniero a quien se la ha solicitado encontrar la trayectoria de un móvil conocido como "luna", las primeras informaciones que recibe le indican que "luna" pasa por los siguientes puntos: A, B, C, D, E, F y G; cuyas coordenadas son:

A = (-3.93, 0.92)
B = (-2.5, 3.93)
C = (0, 6.75)
D = (2.43, 6.49)
E = (4.5, 3.94)
F = (6,0.75)

Con ayuda de GEOGEBRA, localiza en el plano XY las coordenadas anteriores.

Esta tarea, como la secuencia misma, se propone en un contexto no matemático, en el cual un ingeniero llamado Pepito Creatividad debe analizar la trayectoria de diferentes móviles. En esta primera tarea se tiene por objetivo que los estudiantes identifiquen parejas de coordenadas en el plano XY utilizando el programa Geogebra y puedan posteriormente relacionarlos con puntos de la trayectoria de un móvil (en el contexto de la tarea "luna") establecida en relación al tiempo. El estudio de una curva continua puede ser tratado como una función vectorial (discreta). Consideremos la definición matemática de una función vectorial:

> Definición. *Sea $m \leq 1$ entero*. Se llama función vectorial de *m* componentes a toda función cuyo dominio es un subconjunto de números reales y su recorrido un subconjunto del espacio euclídeo *m* dimensional.
>
> Las funciones vectoriales son funciones que a cada número real o escalar *t* perteneciente a su dominio asocian un vector **r**(*t*). Las funciones con valores reales hasta ahora estudiadas se llaman funciones escalares cuando necesitemos distinguirlas de las funciones vectoriales. Las componentes del vector **r**(*t*) son funciones escalares y se escribe: $\mathbf{r}(t) = (x_1(t),\ldots,x_m(t))$.
> En el caso $m = 2$ es habitual escribir $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ o
>
> $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ (Amarillo, 2006, p.2)

Esta definición es extraída del curso "Funciones Vectoriales y Curvas" propuesto por June Amarillo del Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. El curso está disponible en línea y está avocado únicamente a este tema y desarrollado con bastante claridad, por lo cual lo hemos analizado para el desarrollo de esta secuencia. Después de la definición de función vectorial, se presentan las componentes de la función vectorial **r**(*t*) como ecuaciones que parametrizan dicha función.

> Si **r** es una función vectorial de dos componentes y su dominio un intervalo *I*, al variar *t* el extremo del vector **r**(*t*) describe una curva en el plano. Se dice que las ecuaciones $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in I$ constituyen una parametrización de dicha curva. En este caso la variable real *t* se llama parámetro. A veces es fácil eliminar el parámetro *t* entre ambas ecuaciones para obtener ecuaciones explícitas o implícitas de la curva. (Amarillo, 2006, p.3)
>
> Estos elementos tecnológicos son los que sustentan las tareas que conforman la presente secuencia. El caso que hemos elegido en las tareas 1, 2, 3 y 4 corresponde a las ecuaciones paramétricas: $x(t) = 2t - 3$ y $y(t) = 3 + 4t - t^2$, por lo que eliminar el parámetro *t* es posible y permite expresar de manera explícita la función $y = \frac{-x^2+2x+27}{4}$ donde $x \in R$. Es decir, es una función de variable real. En la tarea 5 se propone una nueva función vectorial que aparece de manera explícita y la cual analizáremos más adelante.

Consideramos importante señalar que en el curso "Funciones Vectoriales y Curvas" el vector posición es el elemento utilizado para motivar la necesidad de definir las funciones vectoriales como se muestra a continuación:

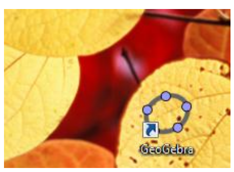
> Consideremos una partícula en movimiento sobre un plano. Su posición en un determinado instante *t* viene determinada por dos coordenadas *x*(*t*) e *y*(*t*) que dependen de *t*. Si la partícula se mueve en el espacio su posición queda determinada por tres coordenadas *x*(*t*), *y*(*t*) y *z*(*t*) dependientes de *t*. En el primer caso la posición de la partícula se describe mediante un vector de dimensión dos cuyas componentes dependen de *t* y en el segundo caso mediante un vector de tres coordenadas cuyas componentes son función de *t*. Esto nos lleva a considerar un nuevo tipo de funciones. (Amarillo, 2006, p.1)

Así la posición instantánea del móvil es representada por el vector posición con coordenadas $x(t)e\ y(t)x(t)$ que dependen de t. Para introducir a los estudiantes al vector posición hemos propuesto una primera tarea en la cual se pide ubicar algunos puntos a partir de sus coordenadas con el objetivo de que en la tarea 2 representen los vectores posiciones asociados a dichos puntos. No se hace explícito que las coordenadas están dadas por las funciones $x(t)e\ y(t)$ pero esto aparecerá en las tareas

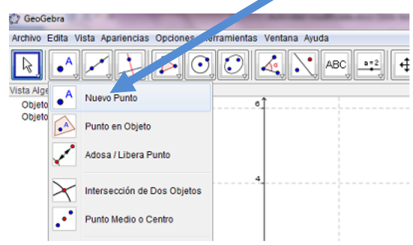
Para realizar la tarea 1 se propone el uso de Geogebra, visto como herramienta que permite ejecutar esta tarea, una guía del uso de dicho programa computacional es propuesta en nuestra secuencia y es la siguiente:

Uso de Geogebra:

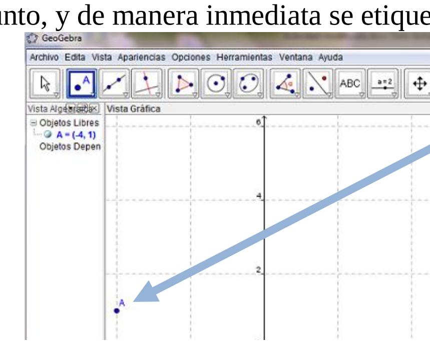
a) Abrir el programa Geogebra haciendo clic en el logo del programa como aparece en la siguiente figura:



b) Deberás de elegir la opción de nuevo punto que se encuentra en la barra superior de la pantalla, como se muestra en la siguiente figura



c) Para localizar los puntos deberás darle clic en el lugar donde quieres que aparezca el punto, y de manera inmediata se etiquetará el punto elegido.



Análisis de la tarea 2

Tarea 2

Para determinar la trayectoria del móvil “luna” Pepito Creatividad decide trazar el vector posición para cada uno de los puntos. En la figura 2 se ha trazado el vector posición r_0 correspondiente al punto A, cuyas coordenadas son (-3.93, 0.92).

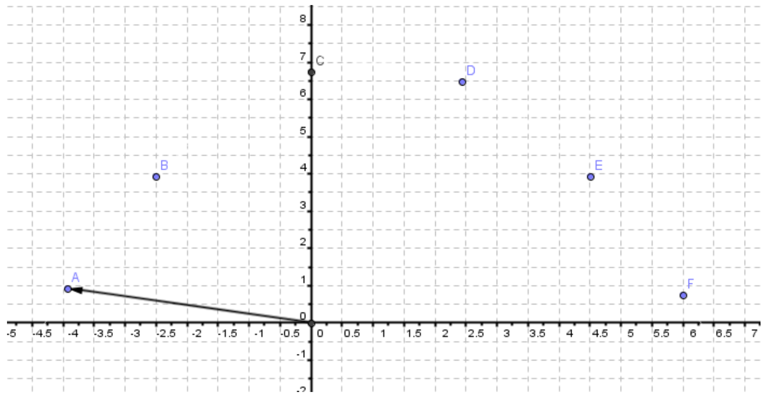


Figura. 2 Vector posición r_0

Con ayuda de Geogebra traza los vectores posición r, para cada uno de los puntos localizados anteriormente, donde r_0 estará asociado al punto A, r_1 estará asociado al punto B, r_2 al punto C y así sucesivamente.

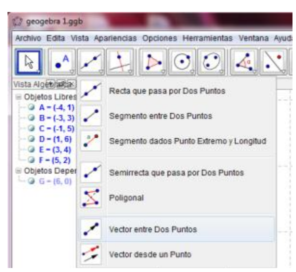
En esta tarea el estudiante debe trazar el vector posición asociado a los puntos A, B, C, D, E y F. Para realizar esta tarea el estudiante debe observar el vector posición r_0 asociado al punto A que aparece en la Figura 2. Por tanto, el estudiante sin hacer referencia a la definición de vector posición debe darse cuenta de que los vectores van del origen (0, 0) al punto considerado. Con base en esta tarea y la siguiente se espera que el estudiante asocie los vectores posición a una descripción de la trayectoria del móvil en relación al tiempo.

De la misma manera que en la tarea 1, se les proporcionó para realizar la tarea 2 una guía de uso del programa Geogebra como se muestra a continuación.

Uso de Geogebra:

a) Trabajarás sobre los puntos de la Figura 2. Localiza los puntos con el mismo mecanismo anterior. Posteriormente ubicarás el cursor en el icono de recta que pasa por dos puntos

b) Ahora vas a elegir del submenú el vector entre dos puntos.



c) Ahora sobre la gráfica deberás colocar el cursor en el origen (coordenadas (0,0)) y dirigirlo hacia el punto A dándole un clic, después volverás al origen y lo guiarás al punto B dándole clic y así sucesivamente para los demás puntos.

Análisis de la tarea 3

Tarea 3
El ingeniero recibe una nueva figura (Figura 3), donde se muestran más puntos por las cuales pasó el móvil “luna”.

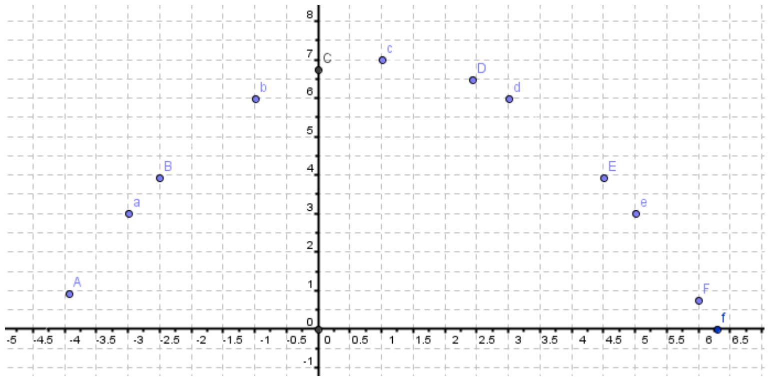


Figura 3. Puntos por donde pasa el móvil luna

a) Utilizando la Figura 3 traza el vector posición para cada uno de los puntos a, b, c, d, e y f.

b) Al trazar los vectores posición de los puntos A, B, C, D, E y F (Figura 2) y de los puntos a, b, c, d, e y f (Figura 3). ¿Podrías generar una gráfica de la trayectoria que siguió “luna”?

c) ¿Podrías decir con certeza que la trayectoria que encuentras en el inciso anterior es la que siguió el móvil luna?

¿Por qué sí?

¿Por qué no?

En esta tarea se dan más puntos de la trayectoria que siguió el móvil “luna” con el objetivo de que los estudiantes puedan intuitivamente generar una idea de la forma de la trayectoria. Los vectores posición permiten tener una idea más precisa de la trayectoria seguida por un móvil, es por ello que se les pide en el inciso a que grafiquen los vectores posición de los puntos a, b, c, d, e y f. Los estudiantes de requerirlo pueden también graficar en la misma figura (Figura 3) los vectores posición de los puntos A, B, C, D, E y F que ya han graficado en la tarea 2. En el inciso b de esta tarea se pide que consideren los vectores posición de todos los puntos (A, a, B, b, C, c, D, d, E, e, F y f) para hacer una primera gráfica de la trayectoria. El objetivo que subyace a esta tarea es que los estudiantes puedan visualizar el uso de los vectores posición como herramientas para describir/analizar/estudiar/producir una trayectoria. Ciertamente, este objetivo es general y la tarea es muy local pero se inscribe dentro de éste. El inciso c tiene por objetivo que los estudiantes validen la manera en la que han producido la trayectoria de “luna”, es decir que analicen la unicidad de la trayectoria producida. Nos parece necesario decir, que una de las herramientas de Geogebra “cónica dados cinco de sus puntos” permite dados cinco puntos trazar la gráfica de la función polinómica a la cual pertenecen dichos puntos. El uso de esta herramienta no está sugerido explícitamente en esta tarea, sin embargo es muy probable que los estudiantes la utilicen para validar la trayectoria producida.

Continuando con las actividades de la tarea 3 tenemos el inciso d, que aparece a continuación:

Pepito está interesado en conocer la posiciones que ha seguido “luna” pero esta vez con respecto al tiempo. Consideremos que en esta trayectoria cada punto es de la forma $P(x(t), y(t))$ donde $x(t) = 2t - 3$. Para conocer el tiempo de las posiciones conocidas (A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e y f). Completa la siguiente tabla:

Punto	x(t)	y(t)	$x(t) = 2t - 3$	T
A	-3.93	0.92		
a				
B	-2.5	3.93		
b				
C	0	6.75		
c				
D	2.43	6.49		
d				
E	4.5	3.94		
e				
F	6	0.75		
f				

En esta tarea se expresan elementos de la función vectorial, primeramente se describe la forma general de un punto de la trayectoria dada por $P(x(t), y(t))$. Es decir, se explícita que las coordenadas de estos puntos están dadas por dos funciones x y y cuya variable es t (tiempo). La ecuación paramétrica $x(t)$ aparece de manera explícita y dado que ellos conocen las coordenadas de los puntos, se les pide calcular la coordenada en x a través de esta ecuación paramétrica con dos objetivos. El primero que comprueben que efectivamente las primeras entradas de los puntos A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e y f ya conocidas fueron obtenidas con esta ecuación. El segundo es que determinen el valor del parámetro t para estos puntos. Esto para que los estudiantes se den cuenta que la curva de la trayectoria no está dada en función de t sino de x, aunque la tarea no les solicite un análisis sobre esto.

Continuando con el análisis de esta tarea consideramos ahora el inciso e, que aparece a continuación:

Pepito sigue estudiando la trayectoria que siguió “luna” y ahora desea conocer cuáles son las posiciones de dicho móvil en los siguientes tiempos, t=-2, -1, 0.5, 2, 3, 4 y 5. Para lograrlo Pepito primeramente averigua que la posición r(t) está dada por r(t)= x(t)i +y(t)j. Completa la siguiente tabla:

t	$x(t) = 2t - 3$	$y(t) = 3 + 4t - t^2$	$r(t) = x(t)i + y(t)j$
-2			
-1			
0.5	-2	4.75	-2i+4.75j
2			
3			
4			
5			

En esta tarea se solicita que se determine la posición en la cual se encuentra el móvil "luna" para diferentes valores de t. Para realizar esta tarea se le proporciona a los estudiantes, por primera vez de manera explícita, la función vectorial $r(t) = x(t)i + y(t)j$ donde $x(t) = 2t - 3$ y $y(t) = 3 + 4t - t^2$. Se les proporciona una tabla con cuatro columnas, en la primera aparece el parámetro t con los valores t=-2, -1, 0.5, 2, 3, 4 y 5, en la segunda la ecuación paramétrica $x(t) = 2t - 3$, en la tercera la ecuación paramétrica $y(t) = 3 + 4t - t^2$ y en la cuarta $r(t) = x(t)i + y(t)j$. Para completar la tabla los estudiantes deben de seguir una técnica basada en procedimientos algebraicos, sustituyendo en cada caso el parámetro t. El objetivo de que los estudiantes sustituyan el parámetro en las diferentes ecuaciones y expresen la función vectorial en sus dos componentes (i, j)es que ellos trabajen la representación vectorial de la posición del móvil respecto del tiempo. Es decir, en esta tarea no grafican los vectores posición sino que los representan en su notación vectorial, distinguiendo cada ecuación paramétrica como elemento de la función vectorial. Esta última es elemento tecnológico de la praxeología en juego.

Después de esta tarea se hacen las siguientes tres preguntas:

d) ¿Podría Pepito conocer la posición de luna para t=100? Justifica.
e) ¿Y para t= 37,800? Justifica.
f) ¿Podría Pepito conocer la posición de "luna" para cualquier tiempo? ¿Cómo?

El objetivo de estas preguntas es que los estudiantes se den cuenta de que la función vectorial permite encontrar la posición del móvil "luna" para cualquier t. En la pregunta f) se proporciona un valor de 100 para t y en la g) de 37, 800. Se espera que los estudiantes sustituyan dichos valores en las ecuaciones paramétricas *x(t) y y(t)* y posteriormente en la función vectorial *r(t).* Por último se les pide que analicen si esta técnica puede funcionar para cualquier valor de t con el objetivo de que se den cuenta de que la función vectorial permite determinar cualquier posición del móvil. Por supuesto esto último dependerá del dominio de la función vectorial, aunque las preguntas por sí mismas no requieren la explicitación de este elemento tecnológico.

Analizando la última cuestión de la tarea 3:

g) ¿Qué representa r(t)?

En este cuestionamiento se le pide a los estudiantes que reflexionen a lo ya realizado anteriormente y que generen una explicación de lo que para ellos representa $r(t)$. Se pretende que incluyan en su explicación/argumentación palabras como vector posición, tiempo, puntos localizados en el plano XY y trayectoria.

Análisis de la tarea 4

En la tarea 4 se introduce el concepto de vector velocidad a partir de su relación con el vector posición, para lo cual se presenta una tabla y un gráfico. En la tabla aparecen el parámetro t, el vector posición calculado a través de la función vectorial $r(t)$ y el vector velocidad para los puntos A, B y C. En el gráfico aparecen los vectores posición y los vectores velocidad para cada uno de estos puntos y además los vectores posición para los puntos D y E. No se dice cómo se obtiene el vector velocidad ni cuál es su relación con el vector posición, se representan tanto en la tabla como en el gráfico. El objetivo de esta tarea es que los estudiantes puedan reconocer las características del vector velocidad, origen, dirección o sentido y longitud, a partir de estas dos representaciones. Para lo cual se les hacen las preguntas i, ii, iii, iv, v y vi. Todas estas preguntas pueden responderse a partir de un análisis del gráfico donde aparecen los vectores velocidad $v1, v2\ y\ v3$.
En la pregunta i se les pide señalar el origen de cada vector velocidad con el objetivo de que reconozcan que éste es justamente el punto sobre la trayectoria del vector posición. Al mismo tiempo se espera que puedan apreciar que los vectores velocidad se representan considerando al vector posición como su origen.

En la pregunta ii se pide que se reconozca la dirección o sentido de los vectores velocidad con el objetivo de explicitar que el sentido muestra la dirección seguida por el móvil en la trayectoria.

En la pregunta iii se busca que el estudiante calcule la longitud de estos vectores que serán distintas y representan la velocidad del móvil en esos puntos. Sin embargo, el análisis solicitado en esta pregunta se limita a reconocer distintas longitudes. En Geogebra es posible calcular dicha longitud.

La pregunta iv tiene por objetivo que los estudiantes den cuenta de que los vectores velocidad son tangentes a la curva $y(x)$, para lo cual se les pide que expresen si éstos se parecen a la curva. Por primera vez en esta secuencia se menciona a la curva como $y(x)$ sin decir que no estamos hablando de la función vectorial sino de la función de variable real x. Notemos que el análisis solicitado por la pregunta está basado en el gráfico por lo que el grosor de los vectores puede llevar a los estudiantes a considerar que el vector velocidad toca en más de un punto a la curva. Esto mismo aplica para la pregunta v que solicita señalar si el vector velocidad toca al vector posición en más de un punto. Consideramos que el análisis hecho por los estudiantes para responder esta pregunta no se verá afectado por el grosor de los vectores velocidad.
La pregunta vi tiene por objetivo que los estudiantes se cuestionen sobre cómo calcular la velocidad con la que le móvil ha seguido la trayectoria. Aunque es la longitud del vector velocidad la que permitiría responder esta pregunta, consideramos que la secuencia no da

elementos para emitir tal respuesta. Lo que se busca es introducir esta cuestión para poder abordarla posteriormente.

Esta es la tarea 4 propuesta en la secuencia:

Tarea 4

Pepito recibe una nueva figura sobre la trayectoria que siguió “luna”, acompañada de la siguiente información: “Estimado Pepito, en esta gráfica podrás apreciar 3 vectores posición $r_{1,} r_{2,} r_3$ y sus respectivos vectores velocidad $v_1, v_{2,} v_3$, los cuales se expresan en la siguiente tabla:

t			$r(t)$	$v(t)$	
-1	A	r_1	-5i - 2j	v_1	2i + 6j
0.5	B	r_2	-2i + 4.75j	v_2	2i + 3j
2	C	r_3	1i + 7j	v_3	2i + 0j

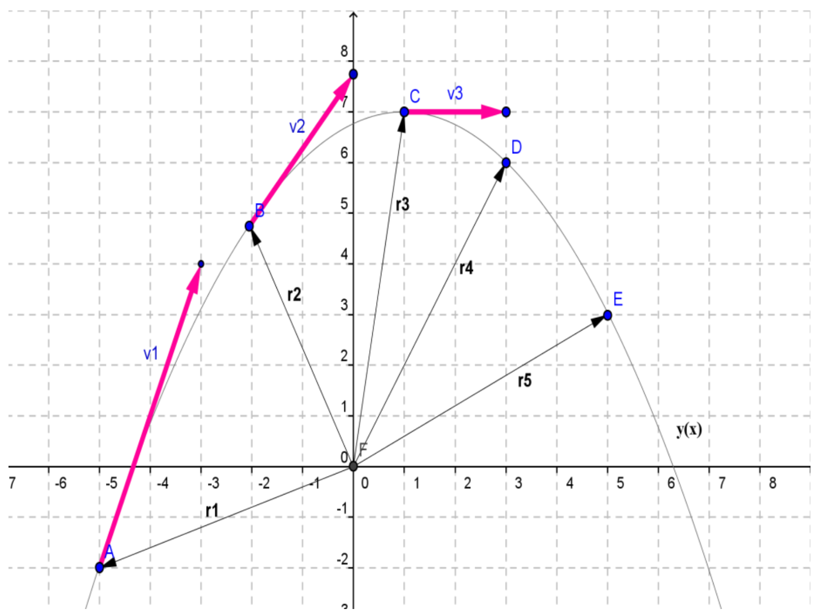


Figura 5. Gráfica de trayectoria, vectores posición y velocidad

a) Observa los vectores velocidad $v_1, v_{2,} v_3$ responde las siguientes preguntas:

i. Señala el origen de cada uno de los vectores

v_1
v_2
v_3

ii. ¿Tienen la misma dirección?

iii. ¿Tienen la misma longitud? Utiliza Geogebra para justificar tu respuesta.

iv. ¿Se parecen a la trayectoria dada por la curva *y(x)?*

v. ¿Tocan al vector posición?, ¿en cuántos puntos?

vi. ¿El móvil "luna" fue siempre a la misma velocidad? Justifica tu respuesta.

Posteriormente se les solicita a los estudiantes involucrar el análisis anterior para poder reafirmar las características de los vectores velocidad utilizando ahora los vectores $v_4\ y\ v_5$. Lo que se les pide es representarlos en el gráfico y se les solicita que detallen el procedimiento para la obtención de dicho grafico. Esto con el objetivo de que describan las técnicas producidas y seguidas para resolver la tarea vii. Para que puedan realizar esta tarea se les proporciona el archivo de la figura 5.

vii. A partir de tu análisis anterior, podrías conocer:
1. el origen de los vectores v_4 y v_5:
2. su dirección:
3. su longitud:

b) Grafica los vectores velocidad v_3 y v_4. Sabiendo que $v_4 = 2i - 2j$ y $v_5 = 2i - 4j$. Describe detalladamente el procedimiento que seguiste.

Indicaciones: Abre el archivo llamado tarea 4b que esta en la carpeta de secuencia didáctica. Trabaja sobre la gráfica que se te proporciona para poder trazar los vectores velocidad que se te solicitan.

En el inciso j se le pide al estudiante que determine el vector velocidad del móvil en diferentes tiempos, y se le dice que para calcular el vector velocidad considere que $v(t) = r'(t)$. Es decir, se explicita que el vector velocidad corresponde a la derivada de la función vectorial $r(t)$. Lo anterior, con el objetivo de que los estudiantes puedan calcular la velocidad para cualquier tiempo que les sea propuesto en diferentes posiciones que alcance el móvil.

Esta es la tarea propuesta:

h) Pepito está interesado en conocer con qué velocidad se desplazó "luna" en los tiempos t=-2, -1, 0.5, 2, 3, 4 y 5. Pepito pudo averiguar que la velocidad de una trayectoria $r(t)$ la siguiente manera: $v(t) = r'(t)$. Completa la siguiente tabla:

t	$r(t)$	$v(t)$
-2		
-1		
0.5		
2		

3		
4		
5		

Análisis de la tarea 5

La tarea 5 es la siguiente:

Tarea 5

Un móvil llamado "espejo humeante" tiene una trayectoria descrita en un plano por

$r(t) = \big(x(t), y(t)\big) = ((t^2 + 2)i + (t - 3)j$, siendo $x(t)$ y $y(t)$ dos funciones paramétricas, es decir en función del tiempo.

Para poder reconocer la expresión analítica de la función real (definida en R) de una curva dada por ecuaciones paramétricas, sería deseable eliminar el parámetro. En este caso, el parámetro es t, por lo que es necesario despejarlo en una de las ecuaciones dadas por $x(t)$ o por $y(t)$ y sustituirlo en la otra –en la que no se despejó t-.

a) Tomando en cuenta la información anterior, expresa $r(t)$ como una función de la forma $y(x)$, para lo cual es necesario eliminar el parámetro t.

En la tarea 5 se proporciona a los estudiantes los elementos que permiten determinar la trayectoria de un nuevo móvil. Se presenta la función vectorial de la forma $r\,(t) = (x(t), y(t))$, que es la que describe la trayectoria del móvil donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones paramétricas cuya variable es el tiempo t. En el inciso a) se le propone a los estudiantes expresar la función vectorial en forma real, explicitando la técnica que le permite realizar dicha tarea y que consiste en eliminar el parámetro t, despejando de una de las ecuaciones el parámetro y sustituyéndolo en la otra. El objetivo que se pretende alcanzar dentro de esta tarea es que el estudiante mediante técnicas algebraicas puede expresar a $r(t)$ como $y(x)$, es decir, expresar una función vectorial como una función real.

Esto le permitirá al estudiante desarrollar la tarea del inciso b, donde se le pide que realice el gráfico de la trayectoria móvil "espejo humeante", de la siguiente manera:

b) Con la ayuda de Geogebra realiza la gráfica de la función real *y(x)* de la trayectoria $r(t)$ del móvil "espejo humeante".

Figura 7. Trayectoria $r(t)$ del móvil "espejo humeante"

El estudiante deberá indagar sobre Geogebra, ya que no se le proporciona de manera explícita las indicaciones para realizar el gráfico. Así que teniendo la expresión analítica de *y*(*x*), deberá producir la gráfica.

En el inciso c, se pide determinar la posición en la cual se encuentra el móvil "espejo humeante" para diferentes valores de *t*. Para realizar esta tarea cuentan con la función vectorial $r(t) = (t^2 + 2)i + (t - 3)j$. Se les proporciona una tabla en la que aparecen diferentes valores de *t* = -250, 0, 300, 720 y 1200, así mismo el $r(t) = x(t)i + y(t)j$. Los estudiantes deben de seguir una técnica basada en procedimientos algebraicos, sustituyendo en cada ecuación paramétrica $x(t)$ y $y(t)$ el parámetro t. El objetivo de que los estudiantes sustituyan el parámetro es que ellos trabajen la representación vectorial de la posición del móvil respecto del tiempo y puedan tener una argumentación para los cuestionamientos d) y e), donde se tiene por objetivo que los estudiantes se den cuenta que la función vectorial le permite encontrar la posición del móvil "espejo humeante" para cualquier tiempo. Los estudiantes podrían identificar que la función vectorial al estar expresada en relación con el tiempo, permitirá que al variar dicho parámetro se puede obtener la posición correspondiente. En esta tarea se hace explícito que $r(t)$ es equivalente a $y(x)$, las cuales describen la trayectoria seguida por el móvil. Para encontrar la posición del móvil se propone una técnica basada en un tratamiento vectorial. Aunque en esta tarea no se pide ninguna reflexión sobre la conveniencia de hacer este tratamiento, todas las tareas anteriores han ido proveyendo elementos para encontrar la posición instantánea de un móvil a través del vector posición.

c) Determina la posición de dicho móvil para los siguientes tiempos dados en segundos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$r(t) = x(t)i + y(t)j$					

Tabla 1. Posición del móvil espejo humeante

d) ¿Podrías encontrar la posición del móvil para cualquier tiempo dado?

e) ¿Por qué sí? O ¿Por qué no?

Continuando con el análisis de la tarea 5:

Cuando se conoce la trayectoria $r(t)$ de un móvil, es posible realizar el cálculo de la velocidad de la siguiente manera: $v(t) = r'(t)$

f) Encuentra la velocidad para los siguientes tiempos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$v(t)$					

Tabla 2. Velocidad del móvil espejo humeante

Se le dice al estudiante para realizar el cálculo del vector velocidad considere que $v(t) = r'(t)$. Es decir, que el vector velocidad corresponde a la derivada de la función vectorial

$r(t)$. Se le da una tabla donde le proponen diferentes valores de t y se le solicita al estudiante que determine la velocidad que alcanza el móvil para cada valor proporcionado. Esto con el objetivo de que los estudiantes puedan calcular la velocidad para cualquier tiempo que les sea propuesto en diferentes posiciones que alcance el móvil.

En la tarea siguiente se le proporciona al estudiante la técnica para realizar el cálculo de la aceleración, proponiéndole así que cuando se conoce la trayectoria de un móvil expresada de la forma $r(t)$, la puede calcular de la siguiente manera $a(t) = r''(t)$. Se le proporciona una tabla donde se le presentan diversos tiempos t, y realizando los cálculos necesarios, le permitirá al estudiante obtener la aceleración para diferentes tiempos.

La tarea a la cual hacemos referencia con lo anterior, es la siguiente:

Cuando se conoce la trayectoria $r(t)$ de un móvil, es posible realizar el cálculo de la aceleración de la siguiente manera: $a(t) = r''(t)$

g) Encuentra la aceleración para los siguientes tiempos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$a(t)$					

Tabla 3. Aceleración del móvil espejo humeante

En la tarea h, se le pide al estudiante realizar la gráfica de la trayectoria del móvil "espejo humeante" indicando cada uno de los elementos ya trabajados en las tareas anteriores, vector posición, vector velocidad y los vectores aceleración en diferentes tiempos, t=-250, 0, 300, 720 y 1200. A partir de esta tarea los estudiantes reconocerán que el uso de funciones vectoriales permite representar la trayectoria de un móvil con ayuda de los elementos ya mencionados.

Esta es la actividad h)

h) Realiza una gráfica de la trayectoria que siguió el móvil "espejo humeante" y marca los vectores posición, los vectores velocidad y los vectores aceleración para t= -250, 0, 300, 720 y 1200. La tabla puede ayudarte. Utiliza Geogebra.

t	r(t)	v(t)	a(t)
-250			
0			
300			
720			
1200			

4.4 Conclusión

En este capítulo se presentó un análisis de la propuesta hecha por el profesor A que permitió reconocer el uso de funciones vectoriales para el estudio de trayectorias como posible contexto para el diseño de una secuencia didáctica. El profesor A propone en su actividad tres etapas y tres contextos diferentes para lograr en una secuencia didáctica construir/dar sentido al principio del método de la BSS. Para el desarrollo de la secuencia de “Buscando trayectorias” sólo se consideró la primera etapa propuesta por este profesor y que tenía que ver con el estudio de una trayectoria. El análisis de su propuesta nos hizo interesarnos en las funciones vectoriales y en cómo éstas son útiles para analizar trayectorias. Las nociones de vector posición, vector velocidad y vector aceleración nos parece que en el estudio de trayectorias tienen un sentido.

Consideramos que el conjunto de tareas que componen esta secuencia permiten a quien la enfrente generar una idea acerca de porqué los vectores resultan útiles en el estudio de las trayectorias. Los vectores posición teniendo el mismo origen van representando las posiciones seguidas por un móvil, es decir permiten un análisis discreto (puntal) de la trayectoria seguida por el móvil e intuitivamente nos parece que uno puede asociarlo a seguir el movimiento de un objeto con la vista. Es una manera de representar la trayectoria y de poder analizarla que nos parece no se contrapone a la intuición. Sin embargo, el paso de la función vectorial a la función real nos parece que sí resulta contra-intuitivo, pues no es natural pensar que diferentes parametrizaciones pueden asociarse a la misma función real y(x) que describe la trayectoria. Consideramos que ésta es una de las limitantes de esta secuencia y creemos que en una nueva versión diferentes parametrizaciones deberían ser consideradas para mostrarlo.

El uso de Geogebra nos parece que favorece la visualización de los vectores posición, velocidad y aceleración. Geogebra ofrece diferentes herramientas que permiten la exploración e incluso graficar la función y(x) desde las primeras tareas, pero esto nos parece no ser un obstáculo para el desarrollo de la secuencia, pues las tareas mediante diferentes preguntas van solicitando reflexión que puede ser producida a través de la exploración el programa.

Esta secuencia fue aplicada a un grupo de profesores con la intención de probar su diseño, el análisis se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo V

Análisis de la aplicación de la secuencia didáctica

5 Análisis de la aplicación de la secuencia didáctica

5.1 Introducción

La secuencia didáctica "Buscando trayectorias" presentada en el capítulo anterior fue aplicada a profesores que estudian la maestría en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, CICATA-IPN. Más precisamente, dicha secuencia fue propuesta como una actividad del curso de Procesos de Institucionalización de la Matemática del primer semestre 2012 - 2013. Es decir, los participantes de este curso son la generación siguiente a los que participaron en el curso donde se probó la metodología para el diseño (propuesta en la sección 3.1 de esta tesis).

El objetivo de solicitar que los estudiantes de la maestría, recordemos que todos son profesores de matemáticas en servicio, resolvieran esta secuencia fue probar su diseño. Es decir, que tanto la forma de presentar las tareas como su organización permitieran a quienes la realizan dar cuenta de que las ecuaciones paramétricas y las funciones vectoriales permiten el estudio de trayectorias. Reconocemos que lo anterior es abordado de manera local en nuestra secuencia ya que sólo se considera un tipo particular de funciones vectoriales que jamás se explicita como tal, sino que funciona como un elemento tecnológico que fundamenta las técnicas empleadas.

En este mismo curso de procesos se solicitó a los estudiantes realizar un análisis de la secuencia, identificando las praxeologías mixtas en juego. Dicha actividad no es objeto de análisis en esta investigación pero será considerada para mejorar la secuencia, lo cual es una perspectiva de este trabajo.

Para realizar el análisis de la secuencia resuelta por los estudiantes del curso de Proceso, se eligieron cinco resoluciones. Los estudiantes elegidos han sido nombrados de la siguiente manera: Jacinto, Juan, Julio, Jimena y Julieta. Las resoluciones serán analizadas por tareas, teniendo como base el análisis presentado en el capítulo anterior. Es decir, se considerará cada tarea, las técnicas empleadas evidenciadas por las figuras obtenidas, los elementos tecnológicos explicitados en argumentaciones, comentarios, propuestas e incluso la confrontación de resultados entre las mismas tareas analizadas.

En este capítulo presentamos primeramente una breve descripción del curso de procesos, el lugar que ocupa la secuencia "Buscando trayectorias" en el mismo, el análisis de las resoluciones presentadas por cinco de los estudiantes en el curso y finalmente un análisis global del diseño de la secuencia.

5.2 Breve descripción del curso de procesos

El curso de Procesos de Institucionalización de la Matemática tiene por objetivo: "Reflexionar sobre los procesos de institucionalización que se producen en la clase de matemáticas y analizar cómo dichos procesos tienen lugar en actividades didácticas de modelización matemática." Para lograr este objetivo el curso tiene 5 actividades y la primera de ellas consiste en que los estudiantes resuelvan la secuencia "Buscando trayectorias", la segunda en que analicen las praxeologías matemáticas en juego; las actividades 3, 4 y 5 están diseñadas para que los estudiantes del curso diseñen una actividad didáctica basada en modelización matemática. En la actividad 4 se les presenta la metodología para el diseño de este tipo de actividades y que fue presentada en el capítulo 3 de esta investigación, así como el contexto de la BSS también presentado en dicho capítulo.

El objetivo de que los estudiantes resuelvan la secuencia "Buscando trayectorias" en este curso es que resuelvan una actividad parecida a ésta que ellos deben diseñar. Es decir, ellos la resuelven primeramente para enfrentarse a tareas en contextos no matemáticos, lo que les permite reconocer los conocimientos necesarios para resolverla, tanto los disponibles como los no disponibles. Reconocen por tanto las herramientas necesarias para resolver la actividad, conocimientos sobre el programa Geogebra, uso de internet para investigar acerca de las herramientas del programa o bien sobre ecuaciones paramétricas o estudio de trayectorias. Asimismo, pueden reconocer el uso de programas computacionales como Geogebra para el diseño de la secuencia y la experimentación que este tipo de programas permite y cómo puede aprovecharse para el diseño de la actividad de modelización que les será solicitada.

En el curso también se crearon espacios de discusión y de exposición de dudas, foros, para que los estudiantes puedan comunicar sus dudas y comentarios.

Las instrucciones para la resolución de "Buscando trayectorias" se presentaron de la siguiente manera:

Actividad 1

Debes resolver la secuencia "Buscando trayectorias" para lo cual será necesario utilizar el programa Geogebra.

Debes resolver cada tarea de la secuencia y entregar un archivo en formato pdf con el nombre apellido.actividad1.

Recomendaciones para el desarrollo de la actividad:

- Descargar de la red el programa Geogebra (http://www.geogebra.org/cms/), el cual es gratuito;
- Seguir las indicaciones del uso de Geogebra que aparecen en la secuencia "Buscando trayectorias";
- Detallar lo más posible cada respuesta de la secuencia.

La última instrucción tiene por objetivo que los estudiantes expliciten y argumenten lo más detallado posible la manera en que procedieron para resolver las tareas de la secuencia. Esto nos permitirá en el análisis identificar los componentes de la tecnología tanto teóricos como prácticos. Estos últimos pueden estar asociados tanto al contexto de la actividad pero sobre todo a aquellos que fueron utilizados para resolver las tareas de la secuencia.

Presentamos a continuación el análisis de las resoluciones hechas por los cinco estudiantes del curso de Procesos.

5.3 Análisis de las resoluciones hechas por los estudiantes del curso de procesos

Para presentar el análisis hemos considerado útil poner primeramente cada tarea y luego las resoluciones hechas por los estudiantes. En muchas de las tareas los cinco estudiantes procedieron de la misma manera, particularmente en la tarea 1 y 2, pues son las menos abiertas. Por lo que en cada análisis se presentara “la técnica” utilizada por varios estudiantes y se presentarán las técnicas diferentes, analizando las razones de este uso a través de los elementos tecnológicos que ellos hayan explicitado.

5.1.1 Análisis de la Tarea 1

La tarea 1 de la secuencia se presentó de la siguiente manera:

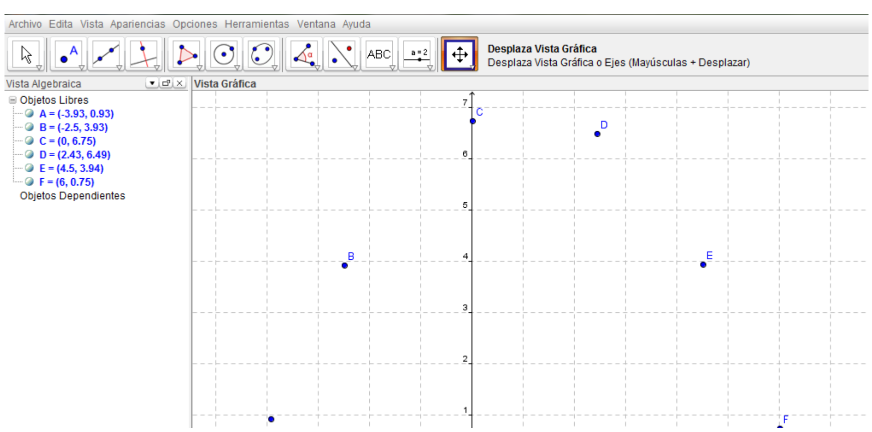
Tarea1

Pepito Creatividad es un ingeniero a quien se la ha solicitado encontrar la trayectoria de un móvil conocido como “luna”, las primeras informaciones que recibe le indican que “luna” pasa por los siguientes puntos: A, B, C, D, E, F y G; cuyas coordenadas son:

A = (-3.93, 0.92)
B = (-2.5, 3.93)
C = (0, 6.75)
D = (2.43, 6.49)
E = (4.5, 3.94)
F = (6,0.75)

Con ayuda de GEOGEBRA, localiza en el plano XY las coordenadas anteriores

En la solución de dicha tarea, los cinco estudiantes obtuvieron la siguiente gráfica:



En las cinco respuestas de los estudiantes considerados para este análisis aparece la siguiente figura:

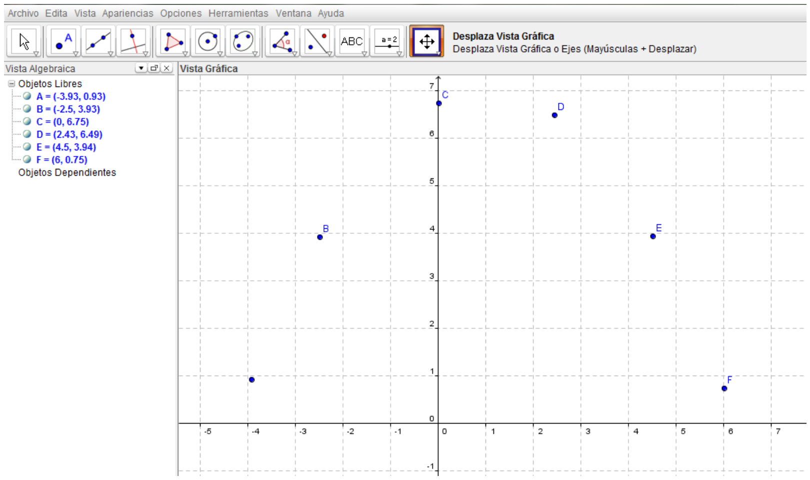


Figura 9 Gráfica obtenida por los cinco estudiantes en la tarea 1.

Una de las estudiantes, Julieta, presentó una figura donde se muestra la trayectoria seguida por "luna", aunque esto no era pedido en la tarea.

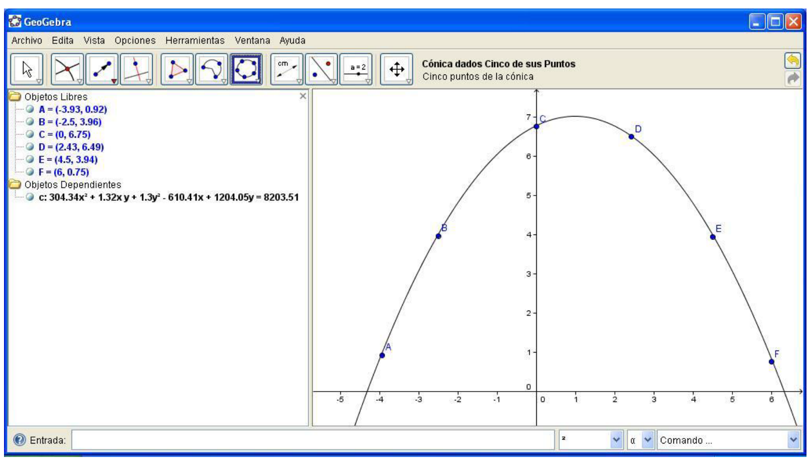


Figura 10. Gráfica obtenida por la estudiante Julieta en la tarea 1

Al ver este gráfico nos pareció que la motivación de Julieta podría estar relacionada con la exploración que realizó en Geogebra y al darse cuenta de que existen herramientas para graficar la trayectoria a partir de los datos proporcionados la realizó. Para conocer su motivación real se le contactó vía correo electrónico, unos días después de haber entregado la secuencia, y su respuesta fue la siguiente:

> Lo que pasa es que leí que a Pepito Creatividad se le solicitó encontrar la trayectoria del móvil luna y para ello se le dieron 6 puntos. Así que mi razonamiento fue: si ya se le proporcionaron los 6 puntos y se me pide que los localice los puntos en geogebra debe

ser para obtener la trayectoria es decir la gráfica para completar la tarea que se le solicitó al Ingeniero.

Lo que podemos ver en esta respuesta es que Julieta reconoce el objetivo general de las tareas 1, 2 y 3, encontrar la trayectoria seguida por “luna”. Las herramientas de Geogebra le permiten desde esta primera tarea encontrar dicha trayectoria, Julieta no realiza un análisis de los elementos que le permiten asegurar que esta es la trayectoria buscada y considera que la herramienta del programa es suficientemente confiable como para justificar su validez. Es decir, no se interesa en conocer la unicidad de la trayectoria y esto puede también deberse al tipo de tarea propuesto, la consigna no pide, ni sugiere considerar la unicidad de la trayectoria.

Consideramos que para resolver esta tarea todos los estudiantes siguieron la técnica expuesta en la guía del uso de Geogebra y esto puede ser confirmado por el hecho de que todos llegan a obtener la figura solicitada. Una de las estudiantes, Jimena describe la técnica utilizada de la siguiente manera:

a) Ya que se tiene el programa de Geogebra abierto, en la barra de herramientas se pulsa con el mouse en el icono con la letra A, al mostrarse el submenú correspondiente se pulsa en la indicación “Nuevo Punto”, como se muestra en la siguiente figura.

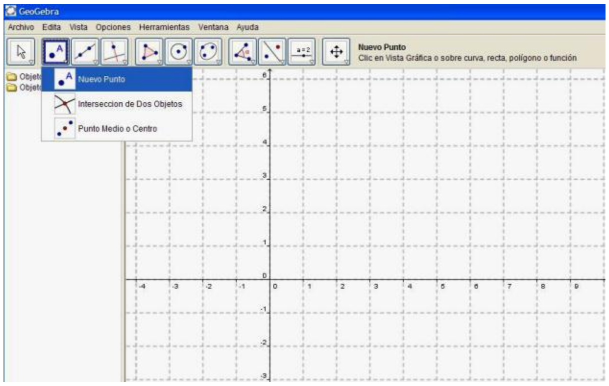


Figura 11. Gráfica mostrada por la estudiante Jimena al realizar el primer paso en la tarea 1

b) En la barra de entrada que se encuentra en la parte de abajo se escribe la coordenada que se desea graficar, como A= (-3.93, 0.92).

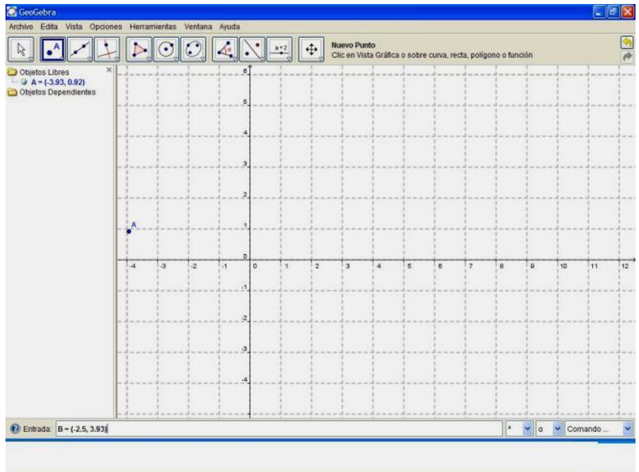


Figura 12. Gráfica mostrada por la estudiante Jimena al localizar los puntos en la tarea 1

Consideramos que el objetivo de esta tarea se cumple, pues permite que los estudiantes se familiaricen tanto con el contexto de la secuencia como con el uso de Geogebra. En el plano didáctico esta tarea es cerrada y la técnica está dada por lo que no puede ser objeto de un análisis más profundo.

5.1.2 Análisis de la Tarea 2

Considerando la tarea 2:

Tarea 2

Para determinar la trayectoria del móvil “luna” Pepito Creatividad decide trazar el vector posición para cada uno de los puntos.

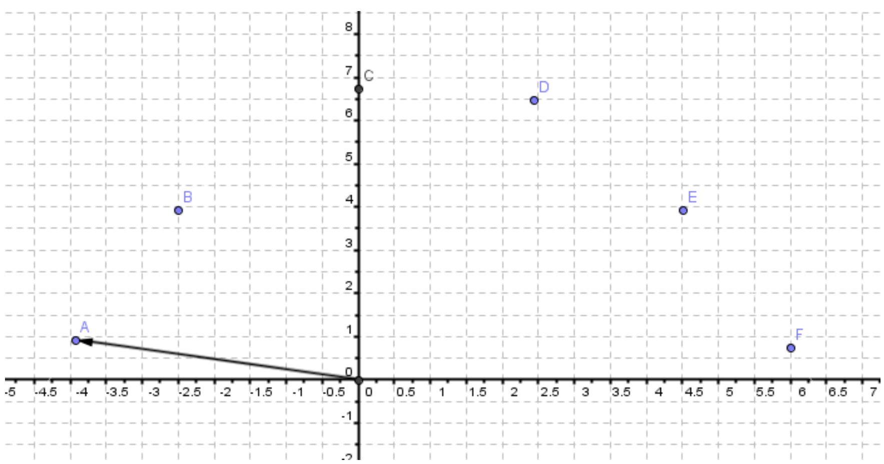


Figura 2. Vector posición r0

En la figura 2 se ha trazado el vector posición r_0 correspondiente al punto A, cuyas coordenadas son (-3.93, 0.92).

Con ayuda de Geogebra traza los vectores posición r, para cada uno de los puntos localizados anteriormente, donde r0 estará asociado al punto A, r_1 estará asociado al punto B, r_2 al punto C y así sucesivamente.

Al igual que en la tarea anterior, consideramos que al proporcionar una guía de uso de Geogebra, permitió que los estudiantes no tuvieran complicación para la obtención de la figura pedida. Los cinco estudiantes la propusieron de la siguiente manera:

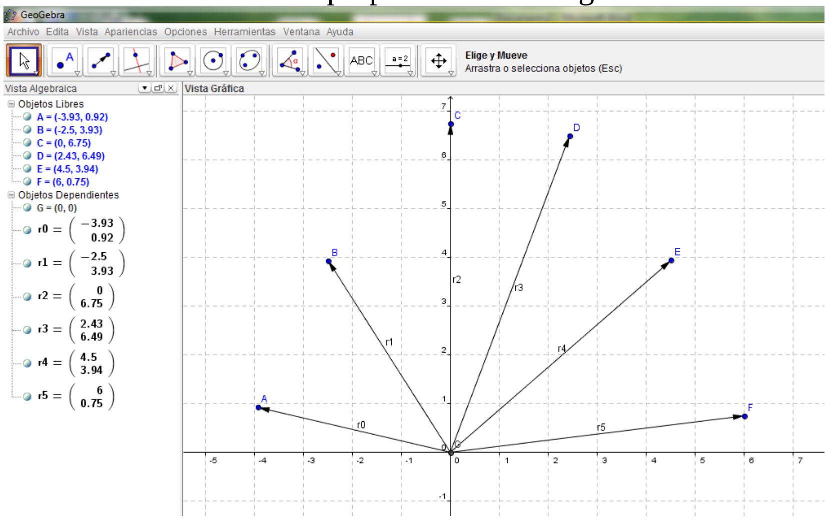
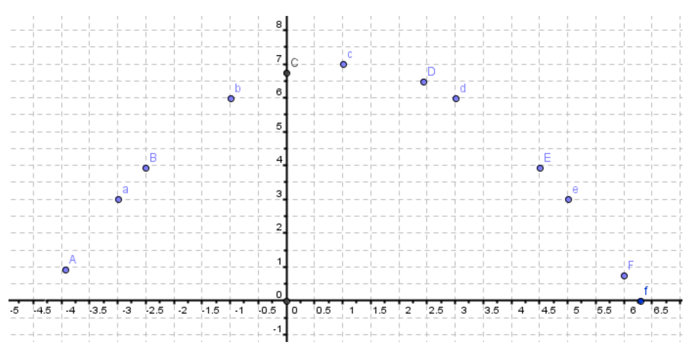


Figura 13. Gráfica obtenida por lo cinco estudiantes en la tarea 2

Estas dos tareas 1 y 2 son introductorias en la secuencia y constituyen la base para introducir el vector desplazamiento o posición a partir de su representación geométrica. Hasta ahora ningún análisis es solicitado y los elementos tecnológicos no figuran todavía.

5.1.3 Análisis de la Tarea 3

Continuando con la tarea 3:

> Tarea 3
>
> El ingeniero recibe una nueva figura (Figura 3), donde se muestran más puntos por las cuales pasó el móvil "luna".
>
> 
>
> Figura 3. Puntos por donde pasa el móvil luna
>
> **a)** Utilizando la Figura 3 traza el vector posición para cada uno de los puntos a, b, c, d, e y f.
>
> **b)** Al trazar los vectores posición de los puntos A, B, C, D, E y F (Figura 2) y de los puntos a, b, c, d, e y f (Figura 3). ¿Podrías generar una gráfica de la trayectoria que siguió "luna"?
>
> **c)** ¿Podrías decir con certeza que la trayectoria que encuentras en el inciso anterior es la que siguió el móvil luna?
>
> ¿Por qué sí?
>
> ¿Por qué no?

d) Pepito está interesado en conocer la posiciones que ha seguido "luna" pero esta vez con respecto al tiempo. Consideremos que en esta trayectoria cada punto es de la forma $P(x(t), y(t))$ donde $x(t) = 2t - 3$. Para conocer el tiempo de las posiciones conocidas (A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e y f). Completa la siguiente tabla:

Punto	$x(t)$	$y(t)$	$x(t) = 2t - 3$	t
A	-3.93	0.92		
a				
B	-2.5	3.93		
b				
C	0	6.75		
c				
D	2.43	6.49		
d				
E	4.5	3.94		
e				
F	6	0.75		
f				

e) Pepito sigue estudiando la trayectoria que siguió "luna" y ahora desea conocer cuáles son las posiciones de dicho móvil en los siguientes tiempos, t=-2, -1, 0.5, 2, 3, 4 y 5. Para lograrlo Pepito primeramente averigua que la posición r(t) está dada por r(t)= x(t)i +y(t)j.

t	x(t)= 2t - 3	y(t) = 3 + 4t - t^2	r(t)= x(t)i +y(t)j
-2			
-1			
0.5	-2	4.75	-2i+4.75j
2			
3			
4			
5			

f) Pepito quiere conocer con qué velocidad se desplazó "luna" en los tiempos t=-2, -1, 0.5, 2, 3, 4 y 5. Conociendo la trayectoria r(t) de un móvil, es posible realizar el cálculo de la velocidad de la siguiente manera: v(t) = r´(t). Completa la siguiente tabla:

t	$r(t)$	$v(t)$
-2		
-1		
0.5		
2		
3		
4		
5		

Analicemos cada uno de los cuestionamientos:

Análisis del inciso a)
De acuerdo al inciso a, Jimena y Julieta, dos de los cinco estudiantes producen la siguiente figura:

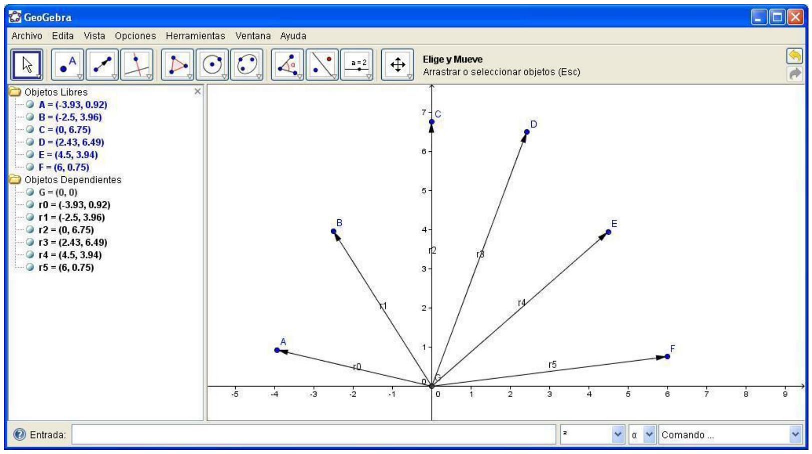


Figura 14. Gráfica obtenida por las estudiantes Jimena y Julieta en la tarea 3

Donde sólo ubican los vectores posición de los puntos a, b, c, d, e y f, tal como se pide en el inciso. El resto de los cinco estudiantes, Jacinto, Julia y Juan, al realizar la figura ubicaron los puntos que se ya se habían generado A, B, C, D, E y F e incluyeron los nuevos puntos a, b, c, d, e y f, obteniendo así la siguiente figura:

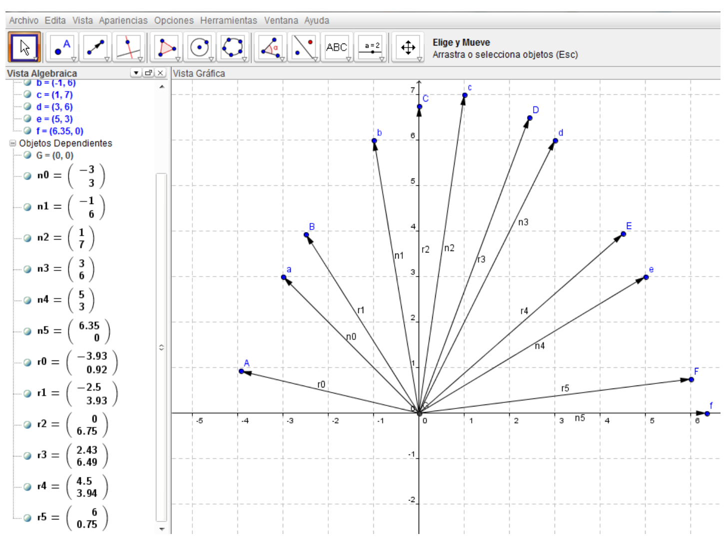


Figura 15. Gráfica de los estudiantes Jacinto, Julia y Juan obtenida en la tarea 3

Suponemos que lo que motivó a estos tres estudiantes para obtener dicha figura, fue el observar la figura que se muestra en las indicaciones que se dan en la tarea 3. Donde se ubican todos los datos: A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e y f. Esta configuración permite tener más vectores desplazamiento o posición de la trayectoria y poder generar una primera gráfica de la misma. Por supuesto, esto conlleva que los estudiantes consideren que ésta es continua lo cual no se ha declarado ni hay elementos para afirmarlo o negarlo. En la secuencia el objetivo es que los estudiantes puedan ver que los vectores posición permiten, en cierta medida, describir la trayectoria y sobre todo poder estudiarla de manera puntual.

Análisis de los incisos b) y c)

En esta tarea se solicita explícitamente un primer dibujo de la trayectoria, se espera que los estudiantes analicen el inciso anterior y puedan dar su argumentación de si se podría generar o no la trayectoria del móvil. Julia y Juan no contestaron la actividad solicitada. Jacinto comenta que realizó dos figuras. La primera representa la unión de puntos por medio de líneas rectas y argumenta que “aparentemente” se trata de una parábola. La figura que obtuvo fue la siguiente:

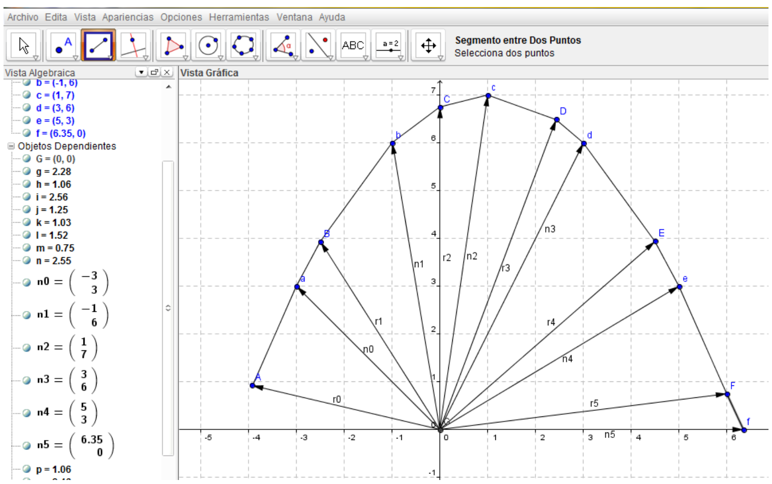


Figura 16. Gráfica obtenida por Jacinto en la tarea 3 b) obtenida mediante la unión de puntos por líneas rectas.

Podemos ver que Jacinto sigue la consigna de la actividad, dibujar una primera trayectoria a partir de los vectores posición conocidos y graficados. En su técnica Jacinto utiliza las herramientas de Geogebra que le permiten generar esta primera trayectoria y se podría corresponder a un dibujo a mano alzada en lápiz y papel. La segunda figura propuesta por Jacinto es producida utilizando el comando “Cónica dado 5 de sus puntos” y por tanto logra hacer una figura más exacta de la trayectoria del móvil y señala “…los puntos se ajustan muy bien a una parábola”. Tomando las respuestas de Jimena, ella realiza un estudio analítico donde supone que la trayectoria del móvil “luna” es tiro parabólico. Por lo que justifica su análisis mediante las características percibidas y considera lo siguiente:

> “[…] Partiendo de esta idea, consideramos el eje horizontal “x” y el eje vertical “y”, en donde en “x” tenemos un movimiento rectilíneo uniforme (no hay fuerza, la aceleración a=0), y el eje “y” representa a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, considerando que el peso es constante, el móvil se ve sometido a la fuerza de gravedad en cuyo caso, la aceleración $a = g = -9.81\, m/s$, el signo indica que atrae al móvil hacia abajo.”

Considera las ecuaciones de tiro parabólico. Menciona que se utilizan dos ecuaciones $x(t)$ y $y(t)$, que están dadas en función del tiempo. Realiza la eliminación de parámetro para encontrar y en función de x y le pueda dar la ecuación que describe la trayectoria del móvil.

Al realizar los cálculos correspondientes grafica con Geogebra la ecuación obtenida y se percata que efectivamente los puntos A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e y f pertenecen a la trayectoria obtenida.

La forma en la cual grafica dicha ecuación con ayuda de Geogebra es colocando en el espacio de entrada la ecuación obtenida. La figura es la siguiente

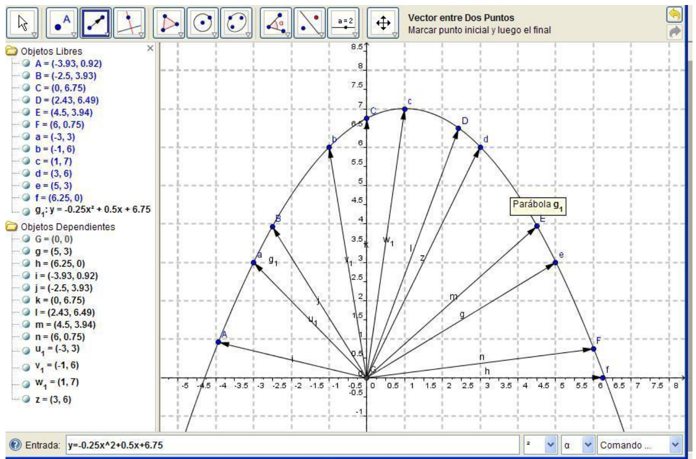


Figura 17. Gráfica obtenida por Julieta en la tarea 3 b)

Julieta utiliza el comando "cónica dado 5 de los puntos" y genera la figura. Afirma que obtuvo una parábola que se ajusta a los puntos solicitados. Comenta que la ecuación que describe la trayectoria es $x^2 - 2x + 4y = 27$ propone su ecuación canónica $(x-1)^2 = -4(y-7)$ y una tabla utilizando Excel para comprobar que efectivamente los puntos proporcionados pueden forman parte de la función $y(x)$. La tabla es la siguiente:

x del punto original	$y = \frac{(x-1)^2}{-4} + 7$	**Punto obtenido de la ecuación**	**Punto original**
-3.93	0.923775	(-3.93, 0.923775)	A (-3.93, 0.92)
-2.5	3.9375	(-2.5, 3.9375)	B (-2.5, 3.93)
0	6.75	(0, 6.75)	C (0, 6.75)
2.43	6.488775	(2.43, 6.488775)	D (2.43, 6.49)
4.5	3.9375	(4.5, 3.9375)	E (4.5, 3.94)
6	0.75	(6, 0.75)	F (6, 0.75)
-3	3	(-3, 3)	a (-3, 3)
-1	6	(-1, 6)	b (-1, 6)
1	7	(1, 7)	c (1, 7)
3	6	(3, 6)	d (3, 6)
5	3	(5, 3)	e (5, 3)
6.29	0.003975	(6.29, 0.003925)	f (6.29, 0)

En la columna 3 y columna 4 se observa la comprobación que Julieta realizó.

Otro de los estudiantes, Juan, determina que no puede decir con certeza que la supuesta trayectoria a partir de la figura mostrada es la que siguió el móvil. Lo justifica argumentando que existen varias trayectorias que pueden pasar los puntos, como una línea recta, una curva, etc. El resto de los estudiantes coinciden en la respuesta afirmativa, es decir, si podrían decir con certeza que la trayectoria anterior propuesta es la que siguió el móvil, utilizando diferentes justificaciones.

Por ejemplo, Jacinto realiza el estudio sobre la parábola de la siguiente manera:

Una parábola que abre sobre el eje "y" tiene la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Observando la grafica y seleccionando tres puntos de la aparente parábola podemos hallar los coeficientes a, b y c de la ecuación.

Tomamos tres puntos y los reemplazamos en la ecuación: $p_1(-3,3),\ p_2(1,7),\ p_3(5,3)$

$$\begin{array}{lcl} ax^2+bx+c=y & & \\ (-3)^2a+(-3)b+c=3 & & 9a-3b+c=3 \\ (1)^2a+(1)b+c=7 & \Rightarrow & a+b+c=7 \\ (5)^2a+(5)b+c=3 & & 25a+5b+c=3 \end{array}$$

Al resolver estas tres ecuaciones tenemos que los valores de los coeficientes son:

$$a=-\frac{1}{4}$$

$$b=\frac{1}{2}$$

$$c=\frac{27}{4}$$

Así la ecuación de la parábola queda de la siguiente manera $y=-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{27}{4}$

Jacinto utiliza la ecuación general de una parábola, este elemento tecnológico le permite hacer un estudio de la gráfica obtenida, para lo cual sustituye tres puntos conocidos en la ecuación general y encuentra la ecuación de la parábola que describe la trayectoria de "luna". Finalmente, Jacinto se apoya de Excel para obtener una tabla donde comprueba que los puntos utilizados en un inicio de la actividad pertenecen a la ecuación encontrada. Utiliza elementos algebraicos para la obtención de la ecuación. Dicha tabla es:

	A	B	C
1	puntos	X	Y
2	A	-3.93	0.92
3	B	-2.5	3.94
4	C	0	6.75
5	D	2.43	6.49
6	E	4.5	3.94
7	F	6	0.75
8	a	-3	3.00
9	b	-1	6.00
10	c	1	7.00
11	d	3	6.00
12	e	5	3.00
13	f	6.35	-0.16

$$y=\frac{-x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{27}{4}$$

Figura 18. Tabla de valores obtenida por Jacinto con ayuda de Excel

Jimena argumenta que la información proporcionada son los vectores posición y éstos permiten describir la posición del móvil sobre su trayectoria. Es decir, reconoce que los vectores permiten reconocer puntos de la trayectoria pero no la trayectoria misma.

La técnica que propone Julia es convertir los puntos propuestos a coordenadas polares para saber la magnitud y los grados correspondientes a cada uno de los vectores que se tienen, pero no justifica cómo esta información podría ayudar a conocer con certeza la trayectoria del móvil. Ella muestra la siguiente figura:

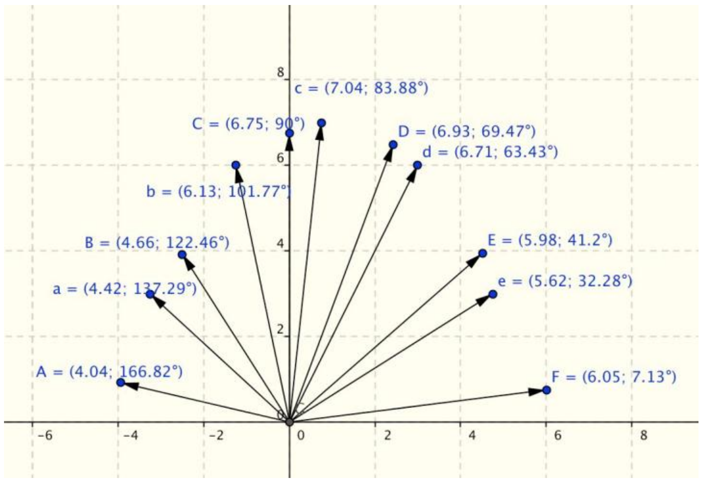


Figura 19. Gráfica obtenida por Julia convirtiendo los puntos propuestos a coordenadas polares

Julieta, otra de las estudiantes, argumenta que al sustituir los puntos dados en la ecuación obtenida observa que cuatro puntos difieren por centésimas en el resultado pero el resto se ajusta en su totalidad a lo esperado. (Recordemos que esta estudiante obtuvo en la tarea anterior la ecuación canónica de la trayectoria de los puntos dados).

Análisis del inciso d)

La tarea propuesta en este inciso, completar la tabla y particularmente las columnas 4 y 5, $x(t) = 2t - 3$ y t, respectivamente, tiene por objetivo que el estudiante pueda comprobar que en efecto x, la primera coordenada está dada por la ecuación paramétrica $x(t)$. Las técnicas utilizadas en esta tarea por los estudiantes Jacinto, Jimena y Juan, fueron semejantes, realizaron un despeje de t, para obtener los valores de la última columna y al sustituir el valor encontrado en la tercera columna comprobaban que coincide con el valor de $x(t)$ dado en la segunda columna. Los estudiantes Julia y Julieta, sólo mostraron la tabla de resultado sin mostrar la técnica empleada para la obtención de los datos, pero podemos suponer que es la misma seguida por los otros tres estudiantes. Los valores obtenidos en la tabla fueron los siguientes:

Punto	$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{y(t)}$	$\boldsymbol{x(t) = 2t - 3}$	$\boldsymbol{t}$
A	-3.93	0.92	-3.93	-0.465
a	-3	3	-3	0
B	-2.5	3.93	-2.5	0.25
b	-1	6	-1	1
C	0	6.75	0	1.5
c	1	7	1	2

D	2.43	6.49	2.43	2.715
d	3	6	3	3
E	4.5	3.94	4.5	3.75
e	5	3	5	4
F	6	0.75	6	4.5
f	6.35	-0.16	6.35	4.675

Análisis del inciso d)

Continuando con el análisis de las tareas, en el inciso e se les pide que se encuentren las posiciones en las cuales se encuentra el móvil en diferentes tiempos, y se les proporcionan las ecuaciones paramétricas de $x(t)$ y $y(t)$. Dentro de esta tarea, lo que realizan los estudiantes es la sustitución en las ecuaciones proporcionadas y la obtención de la forma $r(t) = x(t)i + y$(t)j para cada tiempo propuesto; lo que varía es la forma de presentar la tabla y la técnica utilizada para obtenerla.

Jacinto utiliza Excel para realizar las sustituciones correspondientes, mostrando la siguiente tabla de valores:

t	x(t)= 2t - 3	y(t) = 3 + 4t - t^2	r(t)= x(t)i +y(t)j
-2	-7	-9	-7i-9j
-1	-5	-2	-5i-2j
0.5	-2	4.75	-2i+4.75j
2	1	7	i+7j
3	3	6	3i+6j
4	5	3	5i+3j
5	7	-2	7i-2j

Las celdas en azul son las que inicialmente estaban vacías y las celdas de color blanco son las que contenían los valores iníciales

Para llenar la tabla tome los valores de t de la primera columna y los remplace en x(t)= 2t - 3 y en y(t) = 3 + 4t - t^2 y con ayuda de Excel halle los respectivos valores de x(t) y y(t), estos valores son las coordenadas del vector posición r(t)=x(t)i+y(t)j que también complete.

Figura 20. Datos obtenidos por Jacinto en la tarea 3 en el inciso d

Como podemos ver Jacinto produce una descripción de la técnica empleada. Jimena explicita la técnica en la tabla misma, como se muestra a continuación:

Punto	$x(t)$	$y(t)$	$x(t) = 2t - 3$	$t = (x+3)/2$
A	**-3.93**	**0.92**	X(-0.465)=2(-0.465)-3=-3.93	t= (-3.93+3)/2= -0.465
a	-3	3	X(-3)= 2(-3)-3=-3	0
B	**-2.5**	**3.93**	X(-2.5)= 2(-2.5)-3=-2.5	0.25
b	-1	6	X(-1)= 2(-1)-3=-1	1
C	**0**	**6.75**	X(0)= 2(0)-3=0	1.5
c	1	7	X(1)= 2(1)-3=1	2
D	**2.43**	**6.49**	X(2.43)= 2(2.43)-3=2.43	2.715
d	3	6	X(3)= 2(3)-3=3	3
E	**4.5**	**3.94**	X(4.5)= 2(4.5)-3=4.5	3.75
e	5	3	X(5)= 2(5)-3=5	4
F	**6**	**0.75**	X(6)= 2(6)-3=6	4.5
f	6.25	0	X(6.25)= 2(6.25)-3=6.25	4.625

Juan por su parte muestra la tabla con los valores obtenidos y después argumenta su técnica para obtener dichos valores, ésta consistió en evaluar los datos de "t" para obtener $x(t)$ y $y(t)$. Finalmente comenta que obtiene a $r(t)$ sumando las componente de $x(t)$ y $y(t)$. Los estudiantes Julio y Julieta sólo muestran la tabla con los valores obtenidos sin proporcionar ninguna justificación.

Análisis del inciso f)

Analizando la siguiente tarea, inciso f, se les solicita que obtengan la velocidad que alcanza el móvil en diferentes tiempos, por lo que deberán encontrar los valores obtenidos en la tabla propuesta. Los estudiantes Jimena, Julia, Juan y Julieta encontraron la derivada de $r(t)$, tal como se propone y posteriormente presentaron la tabla con los valores solicitados de la siguiente manera:

t	$\boldsymbol{r(t)}$	$\boldsymbol{v(t)}$
-2	-7i-9j	2i+8j
-1	-5i-2j	2i+6j
0.5	-2i+4.75j	2i+3j
2	i+7j	2i+0j
3	3i+6j	2i-2j
4	5i+3j	2i-4j
5	7i-2j	2i-6j

El estudiante Jacinto, mostró el cálculo de la derivada pero incluyó el estudio del módulo de $r(t)$, es decir, argumentó que auxiliándose del teorema de Pitágoras y con la siguiente ecuación $|V| = \sqrt{Vi^2 + Vj^2}$, puede calcular el valor de la velocidad. Anexó una columna más obteniendo así la siguiente tabla de valores:

t	r(t)	V(t)	$\boldsymbol{|V|}$
-2	-7i-9j	2i+8j	8.25
-1	-5i-2j	2i+6j	6.32
0.5	-2i+4.75j	2i+3j	3.61
2	i+7j	2i+0j	2.00
3	3i+6j	2i-2j	2.83
4	5i+3j	2i-4j	4.47
5	7i-2j	2i-6j	6.32

5.1.4 Análisis de la Tarea 4

Continuando con nuestro análisis:

Tarea 4

Un móvil llamado "espejo humeante" tiene una trayectoria descrita en un plano por $r(t)$, con la siguiente forma $r(t) = f(t)i + g(t)j = < f(t), g\,(t) >$ siendo $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones paramétricas, es decir, están en función del tiempo. Para poder reconocer la expresión analítica de la función real (definida en R) de una curva dada por ecuaciones paramétricas, sería deseable eliminar el parámetro. En este caso, el parámetro es t, por lo que es necesario despejarlo en una ecuación y sustituirlo en la otra.

a) Si $x(t) = t^2 + 2t \; y \; y(t) = t - 3$ tomando en cuenta la información anterior, elimina el parámetro t.

b) Con la ayuda de Geogebra realiza la gráfica de la función real de la trayectoria $r(t)$ del móvil "espejo humeante".

Si la trayectoria del móvil "espejo humeante" esta descrita por: $r(t) = (t^2 + 2t)i + (\,t - 3)j$

c) Determina la posición de dicho móvil para los siguientes tiempos dados en segundos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$r(t)$					

Tabla 1. Posición del móvil espejo humeante

d) ¿Podrías encontrar la posición del móvil para cualquier tiempo dado? ¿Por qué sí? O ¿Por qué no?

Cuando se conoce la trayectoria $r(t)$ de un móvil, es posible realizar el cálculo de la velocidad de la siguiente manera: $v(t) = r'(t)$

f) Encuentra la velocidad para los siguientes tiempos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$v(t)$					

Tabla 2. Velocidad del móvil espejo humeante

Cuando se conoce la trayectoria $r(t)$ de un móvil, es posible realizar el cálculo de la aceleración de la siguiente manera: $a(t) = v'(t) = r''(t)$

g) Encuentra la aceleración para los siguientes tiempos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$a(t)$					

Tabla 3. Aceleración del móvil espejo humeante

h) Realiza una gráfica de la trayectoria que siguió el móvil "espejo humeante" y marca los vectores posición, los vectores velocidad y los vectores aceleración para t= -250, 0, 300, 720 y 1200.

Comenzamos con la actividad a, de la tarea 4, en ella deben desarrollar la eliminación del parámetro *t*, por lo que se les propone que lo despejen de una ecuación y que lo sustituyan en la otra que no ocuparon. Es decir, la técnica que debe ser empleada se explicita en la misma descripción de la tarea. Así tenemos que los estudiantes Jacinto y Julieta obtuvieron

$$y = \pm\sqrt{x+1} - 4$$

Mientras que el resto de los estudiantes, Jimena, Julia y Juan obtuvieron

$$x = y^2 + 8y + 15$$

y de manera explícita Julia, la expresó de la siguiente manera $y^2 - x + 8y + 15 = 0$

Estas respuestas se dieron debido a que en el primer caso, los estudiantes Jacinto y Julieta expresaron a *y* en función de *x*, y los estudiantes Jimena, Julia y Juan a *x* en función de *y*. De acuerdo al inciso b, deben realizar la gráfica correspondiente a la trayectoria del móvil, con ayuda de Geogebra.

Los cinco estudiantes obtuvieron el siguiente gráfico:

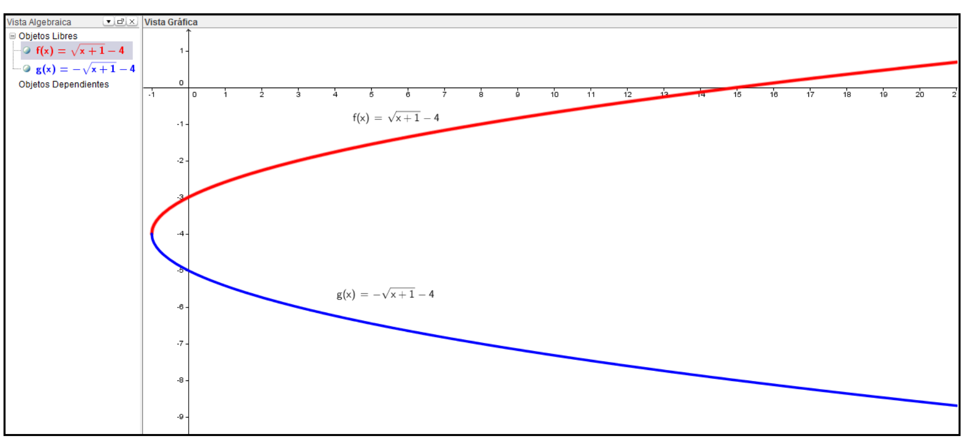


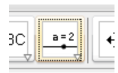
Figura 21. Gráfica obtenida por los cinco estudiantes en la tarea 4

Jacinto,

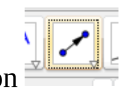
compartió lo siguiente:

Otra forma de graficar la trayectoria es hacer uso de las ecuaciones paramétricas que describen la posición del móvil. Para hacer la grafica usando las ecuaciones paramétricas:

1. Definimos el parámetro **t** con el comando deslizador, este parámetro t es un número real.



2 Escribimos en el campo de entrada el vector posición del móvil, el punto generado lo renombramos con el nombre de "móvil" y en las opciones le activamos la opción de mostrar el rastro

3 Desde el punto de referencia (0,0) y con el botón  generamos un vector hacia el punto llamado "móvil".

4 Deslizamos a t (deslizador) y de esta forma el vector posición cambiara de acuerdo al valor tomado por el parámetro t y se mostrara el rastro dejado por el móvil, este rastro es la trayectoria.

Por lo que el gráfico obtenido es:

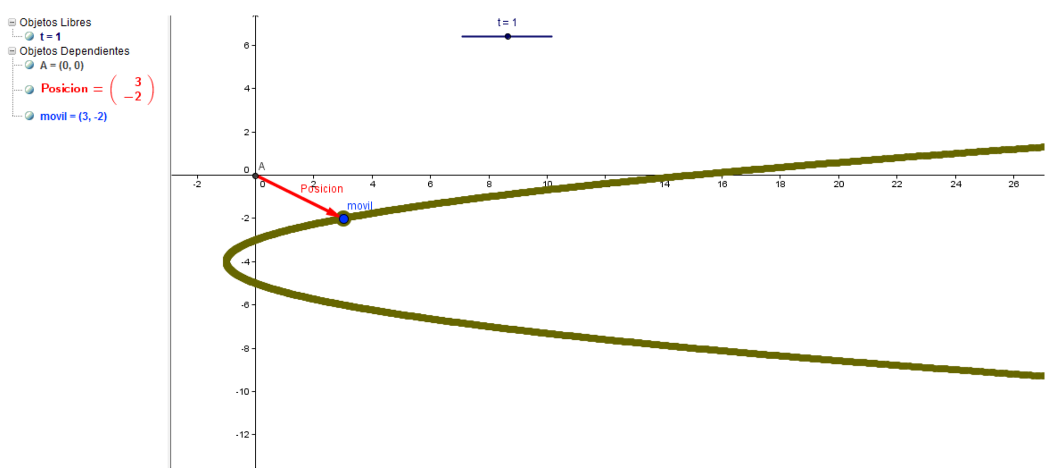


Figura 22. Gráfica obtenida por Jacinto en la tarea 4

El análisis que propone Jimena es similar al anterior pero lo hace de una manera más detallada con respecto a Geogebra:

a) Debemos generar un deslizador que es el parámetro "*t*". En la barra de herramientas elegimos el penúltimo icono y del submenú que aparece elegimos deslizador, como se muestra en la siguiente imagen:

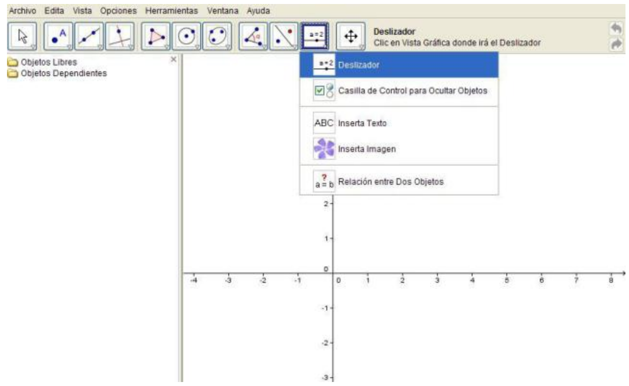


Figura 23. Gráfica que propone Jimena de forma más detallada con Geogebra

b) En la pantalla aparece un recuadro en donde debemos escribir la información de los valores mínimo y máximo que deseemos.

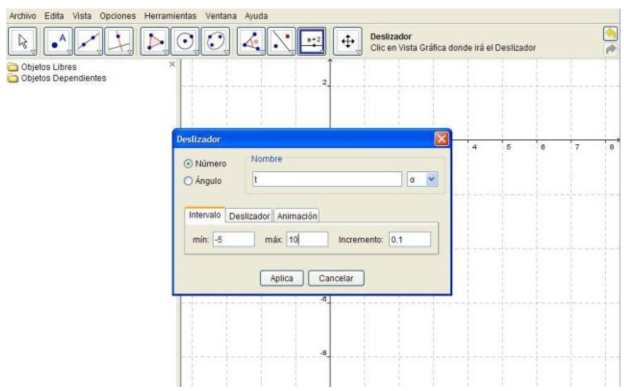


Figura 24 Gráfica realizada por Jimena de una manera más detallada con Geogebra

c) En la pantalla (vista gráfica) aparece una recta con el parámetro "t", colocamos el mouse o cursor sobre el punto "t" y pulsamos el mouse con el botón derecho en donde aparece un menú, de éste elegimos la opción propiedades, y de éste submenú elegimos deslizador.

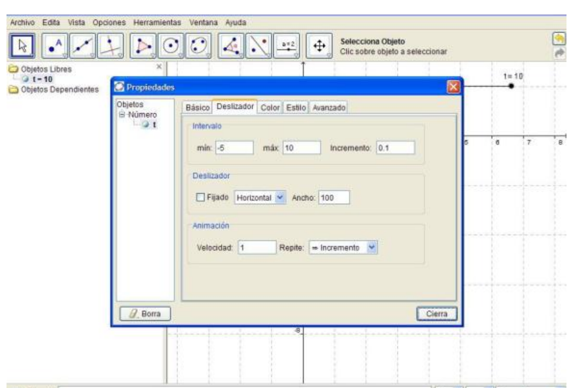


Figura 25. Gráfica realizada de una manera más detallada con Geogebra hecha Jimena en la tarea 4 b)

d) En la barra de entrada escribimos Curva[expresión de x, expresión de y, el nombre del cambio de variable, valor inicial, valor final] que en nuestro caso sería Curva[u² + 2u,u -3,u,-10,t], y nos grafica la siguiente curva:

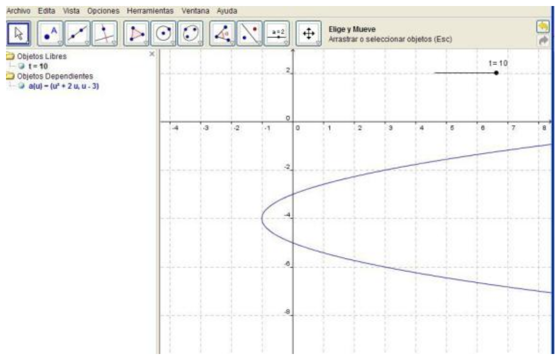


Figura 26. Gráfica de Jimena donde obtuvo la curva en la tarea 4 b)

Graficando tanto la curva paramétrica $r(t)$, como la función sin el parámetro (función real) la gráfica que se obtiene es la misma.

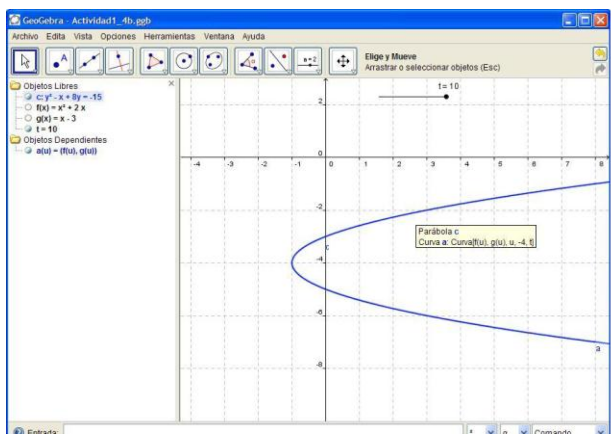


Figura 27 Gráfica que realizo Jimena en la tarea 4 b)

Podemos darnos cuenta que utilizando Geogebra se pueden seguir diferentes técnicas pero llegando a la misma solución. Esta tarea no pide un análisis sobre las dos diferentes técnicas, eliminar el parámetro en x o en y, con el objetivo de mostrar que se llega a la misma trayectoria, las diferentes técnicas empleadas lo muestran. Por lo que consideramos que en un grupo de estudiantes universitarios convendría pedir la resolución de la secuencia en equipos y después tener un espacio de puesta común lo que permitiría tener esta discusión/debate y generar este elemento tecnológico antes descrito.

Análisis del inciso c), tarea 4

Continuando con el análisis del inciso c de la tarea 4. Se les solicita que determinen la posición del móvil descrita por $r(t)$ dados los diferentes tiempos.

Los estudiantes Jacinto, Jimena, Julia y Juan obtuvieron los siguientes datos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
r(t)	62000i-253j	0i-3j	90600i+297j	519840i+717j	1442400i+1197j

Figura 28. Tabla de valores que obtiene Jacinto, Jimena, Julia y Juan en el inciso c de la tarea 4

En cambio Julieta señala que para t=-250, r(t) no existe, no genera ninguna argumentación sino hasta la siguiente tarea.

Análisis del inciso d), tarea 4

Continuando con el cuestionamiento del inciso d, estos son los estudiantes quienes dan una respuesta afirmativa argumentando lo siguiente:

Jacinto señala, "Si podría, ya que no hay una restricción en las ecuaciones". Complementa diciendo que:

> De la ecuación se determina que "X" tiene que ser mayor o igual a -1, pero teniendo en cuenta que "$x = t^2 + 2t$" se cumple que para cualquier valor de "t" el valor de "x" siempre será mayor o igual a -1, en la figura 7 se evidencia que $t^2 + 2t$≥-1, para todo valor de t. M*uestra la siguiente figura:*

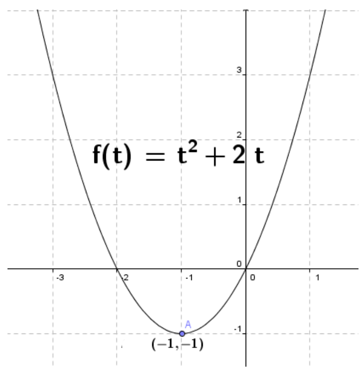


Figura 29. Gráfica que obtiene Jacinto al realizar el análisis de la tarea 4 en el inciso d

Jimena comenta: "Sí, porque ya se cuenta con la ecuación que describe la trayectoria del móvil, simplemente se realiza la sustitución de t en la ecuación". Mientras que Julia señala, "Sí, mientras los valores buscados están dentro de los rangos establecidos por la gráfica". Por su lado, los estudiantes Juan y Julieta, argumentan lo siguiente:

> Juan: No porque no se sabe si el objeto viaja para cualquier tiempo t ∈ **R,** sin embargo el si realiza el cálculo del tiempo negativo en la tabla propuesta.
> Julieta: No podría, por que $r(t)$ solo esta definido a partir de -1, además de los tiempos no pueden ser negativos, así que solo se podría evaluar a partir de $t = 0$.

Continuando con el inciso f tenemos:

Los estudiantes Jimena, Julia, Juan y Julieta llegan a la misma tabla de valores:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
v(t)	-498i+j	2i+j	602i+j	1442i+j	2402i+j

Siendo Julieta quien omite el primer cálculo, donde t= -250.

En esta tarea Jacinto vuelve a utilizar el concepto de módulo para el cálculo de la velocidad y anexa una fila con el dato correspondiente para los datos propuestos:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$v(t)$	-498i+j	2i+j	602i+j	1442i+j	2402i+j
$\|v\|$	498.001004	2.23606798	602.000831	1442.00035	2402.00021

Pasando al inciso g, se les solicita a los estudiantes que calculen la aceleración para diferentes tiempos, y se les propone que lo calculen de la forma $a(t) = v'(t) = r''(t)$. Por lo que los estudiantes Jimena, Juan y Julieta nuevamente coinciden con la tabla de valores:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
a(t)	2i	2i	2i	2i	2i

Jacinto propone el uso del módulo, pero ahora para la aceleración de la siguiente manera: $|a| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$. Él es el único que analiza y comenta que al realizar $r''(t)$ obtiene que el valor de la aceleración es constante y sólo tiene una componente en la dirección i con magnitud 2. Por lo que su tabla de valores obtenidos queda de la siguiente forma:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$\boldsymbol{a(t)}$	2i+0j	2i+0j	2i+0j	2i+0j	2i+0j
$\boldsymbol{\|a\|}$	2	2	2	2	2

En cambio Julia, obtuvo una tabla con valores diferentes. No se puede detectar cuál fue la razón que la llevó a presentar como único resultado $2i + 1j$, además no presenta ninguna argumentación. La tabla obtenida por el estudiante es:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$\boldsymbol{a(t)}$	2i+1j	2i+1j	2i+1j	2i+1j	2i+1j

Analizando el último inciso de la actividad 4, se les pide que realicen la gráfica de la trayectoria que siguió el móvil espejo humeante marcando los vectores posición, los vectores aceleración, vectores velocidad para diferentes tiempos, t = -250, 0, 300, 720 y

1200. Los estudiantes Jacinto y Jimena, proponen una tabla donde se concentran los datos que se solicitan en la gráfica. La tabla de valores es:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$\boldsymbol{r(t)}$	(62000,-253)	(0,-3)	(90600,297)	(519840,717)	(1442400,1197)
$\boldsymbol{v(t)}$	(-498,1)	(2,1)	(602,1)	(1442,1)	(2402,1)

Jacinto, decide realizar 5 gráficas, una para cada valor de t ya que comenta que es difícil ver los detalles de los vectores cuando se dibujan de manera simultánea. La descripción que él presenta para introducir estas cinco gráficas es la siguiente:

> En las cinco figuras el vector posición de color rojo tiene como origen el punto (0,0) este punto por motivos de escala no es mostrado en las figuras.
> El vector velocidad es de color verde y el vector aceleración es de color azul, estos dos vectores están graficados de tal manera que la cola o inicio está ubicada en el móvil.

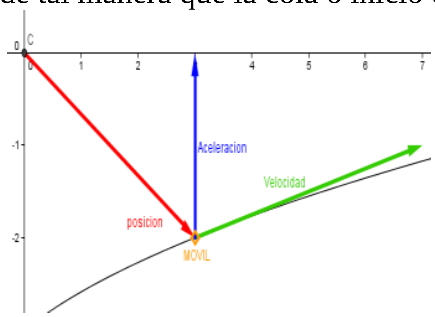


Figura 30. Gráfica de vector velocidad y vector aceleración obtenido por Jacinto

Por lo que presenta las siguientes figuras para cada uno de los tiempos propuestos. Para

t = -250

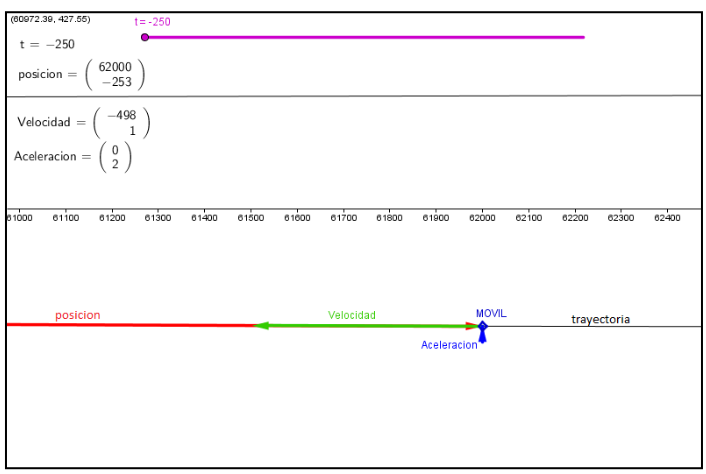


Figura 31. Gráfica de vector velocidad y aceleración cuando $\boldsymbol{t = -250}$

Para t = 0

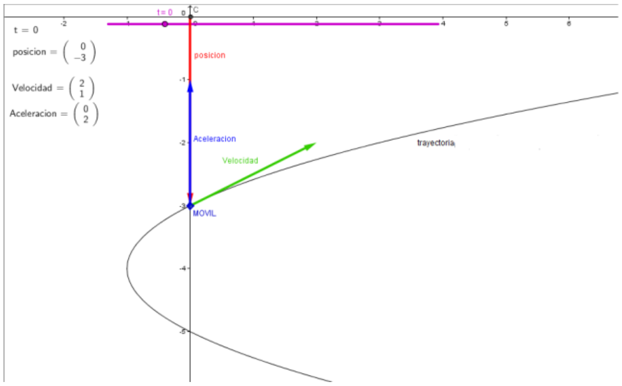


Figura 32.Gráfica de vector velocidad y aceleración cuando $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$

Para t = 300

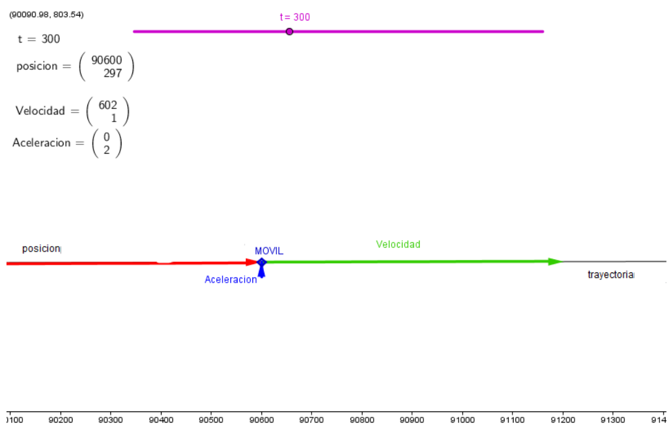


Figura 33. Gráfica de vector velocidad y aceleración cuando $\boldsymbol{t} = \mathbf{300}$

Para t = 1200

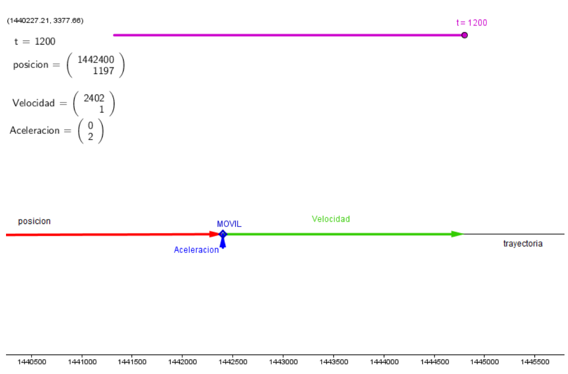


Figura 34. Gráfica de vector velocidad y aceleración cuando $\boldsymbol{t} = \mathbf{1200}$

El estudiante finaliza colocando la figura donde muestra los vectores posición, velocidad y aceleración graficados de manera simultánea. Comenta que dicha figura fue obtenida mediante Geogebra y Paint.

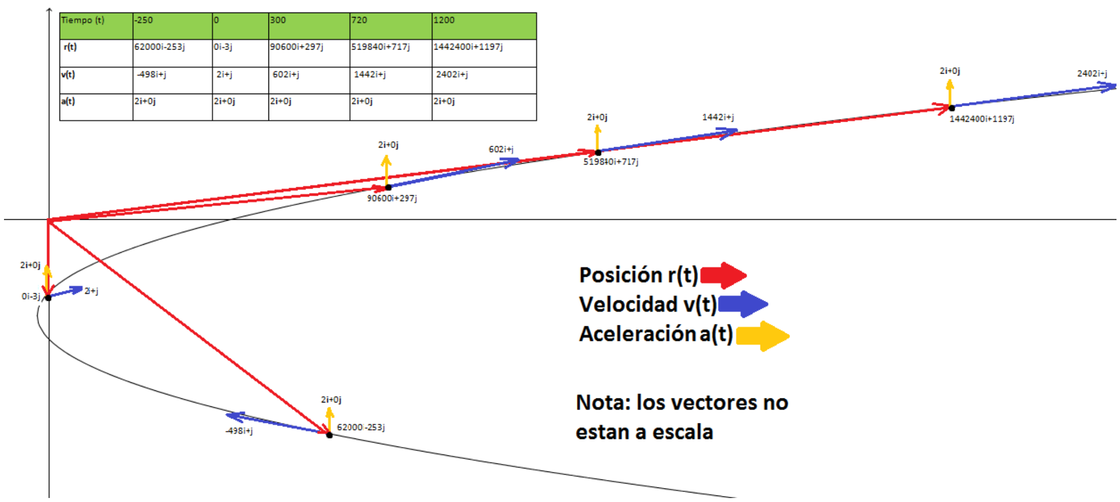


Figura 35. Gráfica final de vector posición, vector velocidad y vector aceleración para los diferentes valores de t

Jimena en la solución de esta tarea, realiza la siguiente aportación:

> Como la velocidad es tangencial al punto de posición, para poder graficar el vector velocidad, se tiene que sumar la coordenada del punto posición a la coordenada del vector velocidad, porque “el origen” del vector velocidad es la coordenada del punto posición, no la coordenada (0,0). En nuestro caso para graficar con Geogebra generamos los nuevos puntos (que incluyen la translación de las coordenadas de la velocidad dadas por la coordenada de la posición) para poder realizar la grafica de los vectores, para ello generamos estos nuevos puntos:

Propone la siguiente tabla de valores:

Tiempo (t)	-250	0	300	720	1200
$r(t)$	(62000,-253)	(0,-3)	(90600,297)	(519840,717)	(1442400,1197)
$v(t)$	(-498,1)	(2,1)	(602,1)	(1442,1)	(2402,1)
$f(t)$	(61502,-252)	(2,-2)	(91202,298)	(521282,718)	(1444802,1198

donde $f(t)$ es la suma de coordenadas de $r(t)$ y $v(t)$. Dentro de su análisis comenta que “la aceleración como es constante, en este caso a=2, no se puede graficar como vector, pues representa a un escalar”. La figura que obtiene es:

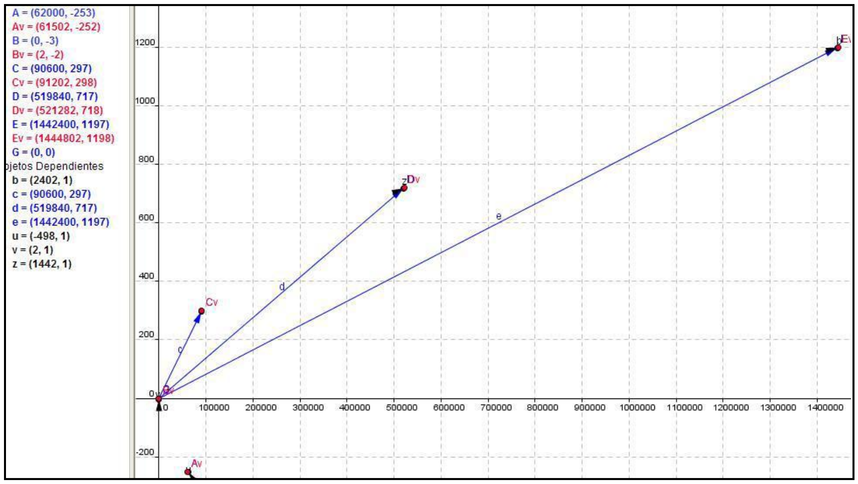


Figura 36. Gráfica de vector velocidad y aceleración obtenida por Jimena

Donde efectivamente no grafica los vectores aceleración y se puede visualizar la grafica incompleta.

Realizando ahora el análisis de resultados de esta tarea los estudiantes Juan y Julieta, no muestran alguna argumentación de lo obtenido solo el grafico:

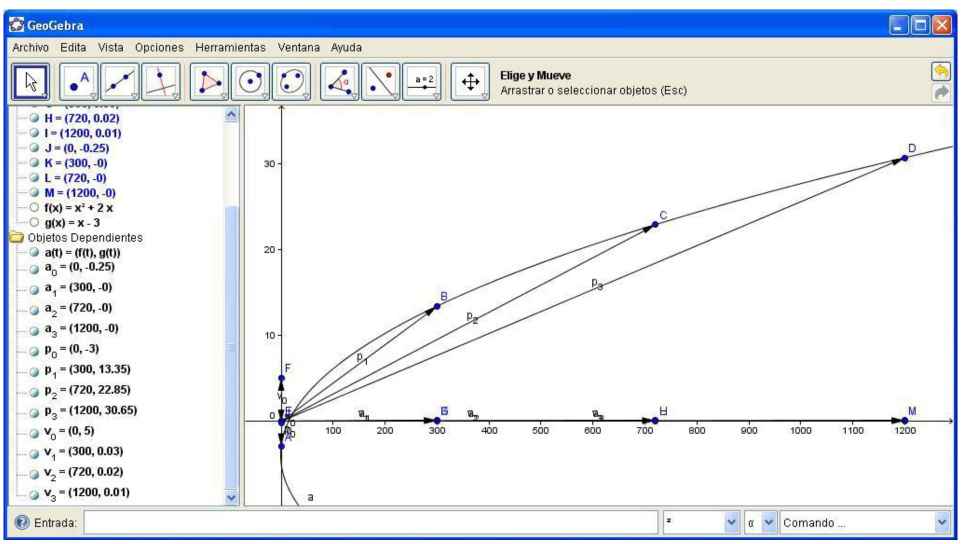


Figura 37. Gráfica de vector velocidad y aceleración obtenida por Juan y Julieta

Julia no realizó esta tarea.

5.4 Conclusiones

La secuencia "Buscando trayectorias" tuvo una primera fase de prueba en el marco de un curso de didáctica ofrecido en un programa de maestría en Matemática Educativa. Por lo que no fue todavía puesta a prueba con estudiantes, futuros ingenieros, objetivo que se tenía al inicio del diseño de la misma. Sin embargo, consideramos que esta fase nos ofrece posibilidades para reconocer potencialidades y límites de dicha secuencia. Primeramente, podemos notar que todas las tareas son resueltas, aparecen diferentes técnicas y en muchos de los casos se explicitan los elementos tecnológicos que la sustentan. Consideramos que un análisis más fino de las técnicas empleadas por Jacinto y por Julieta permitiría modificar las tareas para lograr que desde su forma puedan sugerir los análisis realizados por estos dos estudiantes. El objetivo de esta modificación sería que las tareas soliciten la explicitación y/o generación de dichos componentes.

Consideramos que Geogebra permite generar diferentes técnicas y que la exploración del programa lo facilita, sus diferentes herramientas pueden permitir la generación de diferentes técnicas. Las técnicas utilizadas por los estudiantes nos permiten ver que la secuencia es hasta cierto punto abierta y que la exploración puede darse en efecto.

Uno de los límites que hemos percibido es que en la secuencia no se ve la necesidad de hacer el cambio de la función vectorial a la función en variable real, debido a que la trayectoria elegida no se analiza el sentido con el que se mueve el móvil, sino solamente cómo la posición está dada en relación al tiempo. Consideramos que este elemento puede ser explotado modificando o agregando algunas tareas y eso permitiría hacer evidente esta relación entre función vectorial y función en variable real, la cual permite obtener la curva de la trayectoria.

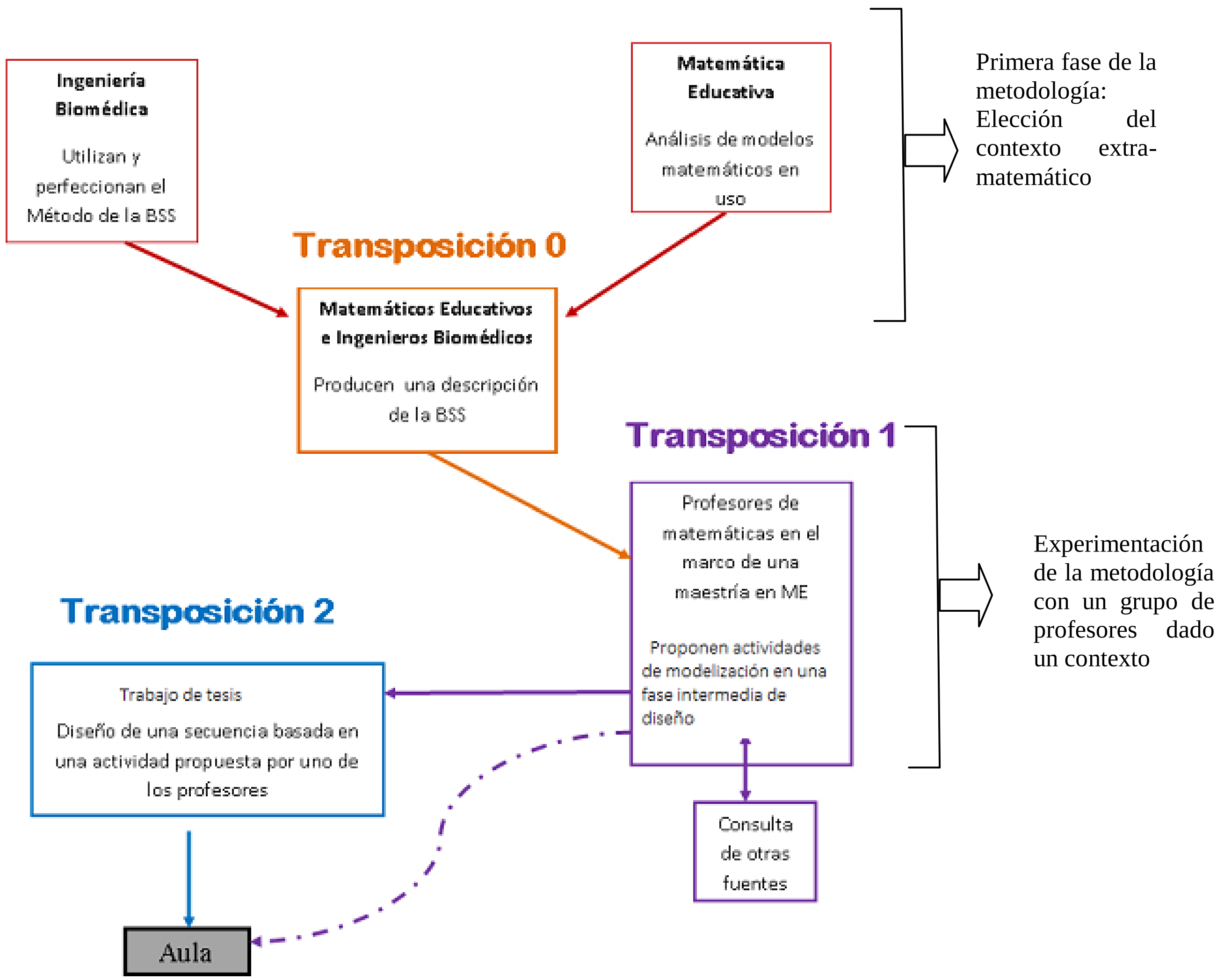
Este estudio de trayectorias motivado en la actividad del profesor A nos muestra la complejidad del diseño de actividades de modelización, pero consideramos que este camino puede ser productivo y que las diferentes etapas son necesarias para tener elementos de control en la puesta en escena en el aula. Consideramos necesario un análisis más fino para poder decir cómo se produce la modelización matemática en la resolución de esta actividad.

CONCLUSIONES

6 Conclusión general

Esta investigación se avocó a la cuestión del diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática considerando específicamente una formación de ingenieros. Para abordar la cuestión del diseño se procedió primeramente a analizar algunas investigaciones sobre la modelización matemática en la práctica de ingenieros donde particularmente se consideraron los trabajos de Bissell y Dillon (2000) y Bissell (2002) pero también los de Kent y Noss (2002) y los de Romo-Vázquez (2009 y 2010). El análisis de estos trabajos nos permitió elegir una vía para el desarrollo de esta investigación, analizar modelos matemáticos en uso que pudieran luego ser considerados para diseñar actividades didácticas. Dado que nuestro interés está en la formación de futuros ingenieros, decidimos diseñar una metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática. Dicha metodología está basada en el modelo praxeológico exendido (Castela y Romo, 2011) y comporta cuatro fases. La primera fase tiene que ver con la elección del contexto extra-matemático, esto se motiva en tanto en el análisis de las investigaciones precedentes a nuestro trabajo y en el análisis del curso de álgebra lineal, ambos reportados en el capítulo 1. Es decir, buscábamos que las actividades diseñadas provengan de contextos de ingeniería, ya sea de las disciplinas intermediarias (Ciencias del ingeniero que conforman la formación de especialidad) o de la práctica ingenieril.
Con el objetivo de desarrollar esta fase y probar su factibilidad, decidimos realizar un trabajo colaborativo con ingenieros-investigadores, particularmente con ingenieros biomédicos. En esta colaboración se analizó conjuntamente, matemáticos educativos e ingenieros biomédicos, el uso de modelos matemáticos en el desarrollo de su práctica investigativa. A partir de este trabajo pudimos identificar el uso de matrices y vectores en el método de Separación Ciega de Fuentes (Blind Sources Separation –BBS) el cual es utilizado para mejorar el diagnóstico de la epilepsia. Con el objetivo de consensar la comprensión sobre el uso de estos modelos matemáticos se produjo un documento descriptivo del método que consideramos fue en efecto una transposición de dicho método, en la cual el lenguaje ingenieril fue modificado para hacer más transparente la manera en que los modelos son utilizados, las tareas que están en juego, las técnicas que intervienen y las justificaciones empleadas.

Con el objetivo de probar esta metodología en su conjunto decidimos generar una actividad dentro de un curso de maestría del Programa de Matemática Educativa del CICATA, unidad Legaria. En el curso se pidió a los estudiantes, profesores de matemáticas, generar actividades didácticas basadas en modelización utilizando la metodología y el contexto de la BSS. Las actividades propuestas por los profesores nos parecieron, en un primer análisis, no constituir actividades didácticas propicias para el aula, sino actividades en una fase de diseño. A pesar de que ofrecimos el contexto de la BSS como extra-matemático para que no tuvieran que encontrar uno propicio y poder acotar el diseño y la fase experimental de la metodología, comprender el contexto de la BSS resultó complejo. Los profesores tuvieron que realizar investigaciones en diversas fuentes tanto para comprender este método como para adaptarlo al nivel educativo en el que laboran. Esto último no estaba previsto, pues se esperaba que ellos diseñaran una actividad para el nivel superior, para alumnos que hubieran cursado la asignatura de álgebra lineal. Los profesores decidieron adaptar el contexto al nivel en el que laboran y eso agregó complejidad a la actividad del curso y a la experimentación de la metodología. En efecto, pudimos observar que los profesores transponían el principio del método de la BSS a otros contextos, aunque en esta investigación sólo analizamos, más a detalle, la actividad propuesta por el profesor A, tenemos elementos para suponer que esta metodología requiere de varias fases para ser utilizada eficazmente. Esto lo representamos mediante el siguiente esquema:



En el primer recuadro del esquema aparece el contexto extra-matemático elegido, correspondiente a la primera fase de la metodología. Dicho contexto es de la ingeniería biomédica relativo al estudio de la actividad eléctrica del organismo y más particularmente a la del cerebro mediante el registro de señales electrofisiológicas. Las señales registradas permiten, en un trabajo de clínica, determinar el estado de salud de las personas. Para fines clínicos el interés está en conocer las fuentes de origen cerebral a partir de un registro que muestra la mezcla de diversas fuentes. Esto sin ningún conocimiento a priori de las fuentes cerebrales, solucionar este problema resulta una tarea muy complicada. El análisis de este contexto nos permitió encontrar modelos matemáticos en uso, vectores y matrices, susceptibles de ser considerados para el diseño de actividades didácticas. Para llegar a obtener estas últimas diferentes transposiciones son necesarias.

Transposición 0

En esta etapa del esquema entran en juego representantes de dos instituciones, la Ingeniería Biomédica y la Matemática Educativa, que tendrán la tarea de producir una descripción del contexto de uso, en este caso del método de Separación Ciega de Fuentes (BSS). La descripción servirá para conformar un contexto extra-matemático base para el diseño de actividades didácticas de modelización. Para lograr la descripción deseada es necesario un trabajo colaborativo entre ingenieros y matemáticos educativos, produciendo un mismo código, es decir expresar en un mismo lenguaje los diferentes conceptos, modelos, técnicas matemáticas y no matemáticas en juego.

Transposición 1

Los profesores de la maestría tendrán para diseñar actividades didácticas basadas en modelización dos documentos: una metodología para diseñar las actividades y el contexto extra-matemático (resultado de la transposición 0). Basados en estos documentos y consultando todas las fuentes a su alcance los profesores realizan una transposición 2 del contexto extra-matemático. Muchas de las actividades propuestas por los profesores modifican el contexto pero el principio del método de la BSS se mantiene.

Transposición 2

Esta trasposición se genera al considerar como base alguna de las actividades propuestas por los profesores para desarrollar una secuencia didáctica apta para aplicarse en el aula. Esta trasposición 2 se efectuó al producir la secuencia “Buscando trayectorias” que tuvo como origen la actividad propuesta por el profesor A.

La secuencia de “Buscando trayectorias” fue generada para ser parte de una formación de ingenieros en un curso de Álgebra Lineal. Un caso particular de funciones vectoriales y los conceptos de vector posición, vector velocidad y vector aceleración son elementos de las praxeologías mixtas que componen la secuencia; nos parece que las tareas propuestas permiten darles un sentido a partir del estudio de trayectorias. Dicha secuencia tuvo una primera fase de prueba en otro curso del programa de maestría en Matemática Educativa y no fue posible todavía emplearla con estudiantes, futuros ingenieros siendo este el objetivo inicial desde su diseño. Sin embargo, se considera que esta primera experimentación nos permitió conocer potencialidades y límites de dicha secuencia para así llevar a cabo modificaciones requeridas en cada una de las tareas solicitadas.

El uso de una herramienta tecnológica, como lo es Geogebra permite generar diferentes técnicas de solución para la misma tarea, lo que consideramos es un elemento que debe ser analizado para mejorar la secuencia. Asimismo consideramos que el análisis del uso de Geogebra en la realización de las tareas puede y debe ser profundizado para conocer el rol que está jugando y cómo puede potenciarse la modelización a partir de nuevas tareas.

Consideramos que este trabajo sienta las bases para desarrollar actividades didácticas basadas en modelización, ofreciendo pistas metodológicas interesantes como son el análisis de modelos matemáticos en uso, la metodología para el diseño de actividades, el involucramiento de profesores de matemática en el diseño y el desarrollo de secuencias didácticas en el marco de una investigación. Este programa metodológico fue apenas propuesto en este trabajo, pero consideramos que futuras investigaciones deben generarse para fortalecerlo.

7 Bibliografía

Alberti, M., Amat, S., Busquier. S., Romero, P. y Tejada, J. (2010). Mathematics for Engineering and Engineering for Mathematics. Actas de la Conferencia del estudio ICMI 20 Educational Interfaces between Mathematics and Industry. http://co122w.col122.mail.live.com/default.aspx?wa=wsignin1.0

Blum, W. Galbraith, L., Henn, H. y Niss, M. (2007) Modelling and Applications in Mathematics Education. New York: Springer

Bissell, C.C. (2002). Histoires, héritages et herméneutique (la vie quotidienne des mathématiques de l'ingénieur, Annales des Ponts et Chaussées, 107-8, 4–9

Bissell, C.C. (2000). Telling tales (models, stories and meanings, For the learning of mathematics, 20(3), 3—11.

Castela C. et Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. Recherches en Didactique des Mathématiques, 31(1). 79-130.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2), 221- 266.

Congedo, M., Gouypailler, C. & Jutten, C. (2008). On the blind source separation of human electroencephalogram by approximate joint diagonalization of second order statistics. Clinical Neurophysiology, 119(12). 2677–2686.

Jung, T., Makeig, S., Humphries, C., Lee, T., Mckeown, M., Iragui, V. & Sejnowski, T. (2000). Removing electroencephalographic artifacts by blind source separation. Psychophysiology, 37(02), 163–178.

Kachenoura, A. (2006). Traitement Aveugle de Signaux Biomédicaux. Traitement dusignal et telecommunications. L'Universite de Rennes 1, France.

Kent, P., & Noss, R. (2002) The mathematical components of engineering expertise : The relationship between doing and understanding mathematics. Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2 (pp.39/1 -39/7). London U.K.

Kent, P. (2007), Learning Advanced Mathematics: The case of Engineering courses.
contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at postsecondary level. In Lester, K., F. (Ed.), Second handbook of research on

mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics. (pp. 1042-1051). Charlotte, NC: Information Age Pub

Napena, A. (1999). Algoritmos adaptativos para separación ciega de fuentes (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de la Coruña. España

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject- why? In A. G. Howson et al. (Eds), Mathematics as a service subject. pp.28-34. Cambridge: Cambridge University Press (Series : ICMI study).

Romo Vázquez, A. (2010) Projets d'ingénierie : Étude d'une activité pratique dans la formation d'ingénieurs. Annales de didactique et de sciences cognitives. 15 pp. 195-212.

Romo-Vázquez, A. (2009). Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs. Paris: Irem de Paris.

Romo A. y Castela C. (2010). Mathematics in the training of engineers: an approach from two different perspectives. Actas de la Conferencia del estudio ICMI 20 Educational Interfaces between Mathematics and Industry. Disponible en: http://co122w.col122.mail.live.com/default.aspx?wa=wsignin1.0

R. Romo-Vazquez, H. Velez-Perez, R. Ranta, V. Louis-Dorr, D. Maquin, L. Maillard. (2012). Blind source separation, wavelet denoising and discriminant analysis for EEG artefacts and noise cancelling, Biomedical Signal Processing and Control, 7(4). 389-400.

Skovsmose, O (2001). Landscapes of Investigation. ZDM, 33(4) 123-132.