INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

IDEAS PREVIAS A LA CONSTRUCCIÓN DEL INFINITO EN ESCENARIOS NO ESCOLARES

Tesis que para obtener el grado de
Maestria en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Patricia Lestón

Director y Directora de Tesis:
Dr. Apolo Castañeda Alonso
Dra. Cecilia R. Crespo Crespo

México, D. F., Diciembre de 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 10 del mes de diciembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Ideas Previas a la Construcción del Infinito en Escenarios No Escolares"

Presentada por la alumna:

LESTÓN		PATRICIA
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 5 | 0 | 4 | 0 | 2 |

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Cecilia Rita Crespo Crespo

Director de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Gustavo Martínez Sierra

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 19 del mes diciembre del año 2007, el (la) que suscribe Patricia Lestón alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A050398, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Apolo Castañeda Alonso y Dra. Cecilia Crespo Crespo y cede los derechos del trabajo intitulado Ideas Previas a la Construcción del Infinito de Escenarios No Escolares, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección patricialeston@yahoo.com.ar. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Patricia Lestón

Índice

Resumen

Este trabajo presenta un estudio sobre las ideas intuitivas asociadas al concepto de infinito, generadas en situaciones no escolares. El objetivo de esta investigación es detectar la forma en que dichas ideas surgen y cómo se comportan como parte del modelo mental que el estudiante forma para el infinito, afectando la construcción del infinito matemático.

Las ideas a las que se hace referencia son generadas en situaciones naturales de convivencia social, por lo cual la investigación se centra en la aproximación socioepistemológica, que considera a la componente social como una de las componentes de la construcción del conocimiento matemático.

Debido a que el centro de esta tesis es la construcción de ideas en entornos sociales, la línea de investigación a la que adhiere es a la Construcción Social del Conocimiento, entendiendo a toda construcción de conocimiento como el resultado de las interacciones que se dan dentro de un grupo social, que comparte un bagaje cultural común.

Se realizan para poder lograr el objetivo propuesto, tres etapas de acción: el estudio de investigaciones previas, con el fin de detectar puntos de partida comunes, el estudio del devenir histórico del concepto, en distintas culturas, para poder identificar algunas de las respuestas que los estudiantes presentan; y finalmente, un experimentación con estudiantes de escuela media, para poder analizar lo que dicen, piensan, hacen y entienden en relación al infinito.

Abstract

This work presents a study on the intuitive ideas associated to the infinite concept, generated in non scholar situations. The aim of this investigation is to detect the way these ideas arise and how they behave like part of the mental model that the student forms for the infinite, affecting the construction of the mathematical infinite.

The ideas we are referring to are generated in natural situations of social coexistence, thus the investigation is centered in the socioepistemological approach, which considers the social component as one of the components of the construction of the mathematical knowledge.

Because the center of this thesis is the construction of ideas in social surroundings, the line of investigation to which it adheres to is the Social Construction of the Knowledge, understanding all construction of knowledge as the result of the interactions that occur within a social group, which shares a common cultural baggage.

Three stages of action are made to be able to obtain the proposed objective: the study of previous investigations, with the purpose of detecting common starting points, the study of historical happening of the concept, in different cultures, to identify some of the answers that the students present; and finally, an experimentation with students of high school, to analyze what they say, think, do and understand regarding the infinite.

Glosario

Infinito:

infinito, ta.

(Del lat. *infinītus*).

1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.

2. adj. Muy numeroso o enorme.

3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*

4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.

5. m. *Mat.* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.

6. m. *Mat.* Signo (∞) con que se expresa ese valor.

7. adv. m. Excesivamente, muchísimo.

Real Academia Española (2001).

Ideas intuitivas:

Asociaciones mentales sobre un concepto que no tienen relación con fundamentos científicos, no promovidas desde la escuela, sino en función de las sensaciones que el término despierta en una persona.

Aproximación socioepistemológica:

Visión en función de la cual se plantea el estudio del conocimiento en situación, considerando las circunstancias y escenarios socioculturales que lo rodean y lo generan. Se asume al conocimiento como el producto de las interacciones epistemológicas y los factores sociales. (Lezama, 2005).

Contradicción:

contradicción

(Del lat. *contradictĭo, -ōnis*).

1. f. Acción y efecto de contradecir.

2. f. Afirmación y negación que se oponen una a otra y recíprocamente se destruyen.

3. f. oposición (contrariedad).

Real Academia Española (2001).

Modelo Mental:

Modelo intuitivo que sustituye a un modelo científico para lograr la significación de un concepto matemático, a través de un proceso de integración.

Dichos modelos intuitivos se generan al inicio de la aproximación con un concepto matemático y que continúan apareciendo a lo largo de la educación formal, influyendo tácitamente la interpretación y decisiones de resolución de los alumnos. (Fischbein, 1989)

Introducción

La matemática escolar que se presenta a diario en las aulas está plagada de términos asociados a conceptos, procesos y operaciones, que los docentes consideran comprendidos, especialmente a medida que la formación académica de los alumnos ha llegado a la escuela secundaria, y en particular a los últimos años (15 a 17 años). Por ejemplo, cuando hacia el final de la escuela primaria (12-13 años) un maestro hace referencia a la operación multiplicación entre números naturales, no verifica que todos los alumnos tengan la misma imagen mental, la misma idea, con respecto a esto. Simplemente se supone que a lo largo de esos siete años previos que el alumno ha tenido de educación matemática escolar han sido suficientes como para aclarar esta operación; su definición, su uso dentro de la matemática, sus aplicaciones a situaciones no matemáticas, los conflictos con que se pueden encontrar y los posibles resultados que pueden resultar de su aplicación. Sin embargo, la multiplicación es una operación que “nace” para el alumno dentro de la escuela, los niños no multiplican de manera intuitiva, ese conocimiento se construye dentro de la escuela, en un escenario controlado por el docente, con un discurso matemático escolar construido a lo largo de años de tradición educativa.

El concepto que es centro de la presente investigación, es uno conocido por los alumnos, aunque sea por el término con que se lo denomina: el infinito. El infinito se usa habitualmente para referirse a distintas situaciones fuera de la escuela, en particular por los niños: “el amor es infinito”, “el cielo es infinito”, “las estrellas son infinitas”, entre otras. Es decir, antes de ser presentado y discutido en la escuela, el alumno tiene para el infinito ideas asociadas de su vida no escolar, que nacen del diálogo con sus padres y pares, ideas que toda persona que viva en una sociedad ha ido construyendo.

Como concepto matemático, el infinito se construye luego en la escuela, en la clase de matemática, se lo trabaja como cardinal de los conjuntos numéricos, como “cantidad” de puntos de un segmento, como la “longitud” de una recta, como la “cantidad” de puntos que hay en el plano, como “valor” al que tienden funciones al tomar un límite o una variable y asociado a muchos otros conceptos matemáticos. El conflicto surge entonces cuando estas dos ideas, la intuitiva y la matemática, diferentes en su construcción y en su naturaleza, tienen que convivir en la mente de los alumnos. Es en el proceso de la construcción que se produce dentro del aula, influenciada por ideas intuitivas y extraescolares, en donde las ideas intuitivas reaparecerán, afectando la idea matemática que los alumnos construyan.

De acuerdo a la naturaleza de las ideas asociadas al infinito, puede entenderse que la idea intuitiva de infinito es anterior al infinito matemático. La primera se obtiene fuera del sistema escolar, lejos de la institución y por lo general, sin intencionalidad explícita de transmisión de ideas matemáticas. Las relaciones de intercambio que se dan en la vida cotidiana no siempre tienen intención de enseñanza como se entiende en el sistema escolar ni son siempre controladas, de manera que un niño puede llegar a desarrollar una serie de ideas de las cuales no hay constancia hasta que no sean evocadas en una situación (didáctica o no) desarrollada a tal fin o hasta que surjan naturalmente provocando un “error” en la clase. La segunda, la idea matemática del infinito, se presenta en la escuela, en un escenario escolar generado con el fin de transmisión de conocimientos. Algunos docentes, intencionalmente, presentan a los alumnos situaciones que provoquen la necesidad de discusión de este concepto y lo formalizan a fin de darle el “status” de conocimiento científico.

El objetivo de esta tesis es entonces, identificar cuáles son esas ideas intuitivas asociadas al infinito, cómo se construyen en escenarios no escolares, en situaciones cotidianas, y qué influencias tienen en la posterior construcción del infinito matemático dentro de la escuela.

CAPÍTULO I

El infinito desde el enfoque socioepistemológico de la Matemática Educativa

En este capítulo, se presentan las componentes teóricas que permiten el desarrollo de esta investigación. Inicialmente se introduce a la Matemática Educativa como disciplina dentro de la cual se desarrolla el trabajo. Dentro de la Matemática Educativa, en particular, la aproximación que funciona como marco teórico de esta tesis es la aproximación socioepistemológica y el estudio que ésta hace de la Construcción Social del Conocimiento, ambas descriptas a grandes rasgos a continuación. Y finalmente, se considera la teoría de modelos mentales, dado que ésta servirá para estudiar las respuestas que aparezcan a lo largo de las distintas entrevistas y encuestas. Se espera entonces que este capítulo permita al lector generarse una primera idea de las características del estudio realizado.

Matemática Educativa

El problema que se propone estudiar esta investigación gira, como ya se ha mencionado, en torno a la construcción de un concepto matemático. Sin embargo, el interés del estudio no es puramente matemático, sino en función de la vida de este concepto en la escuela y fuera de ella. En este sentido, lo que se desea estudiar es cómo el infinito se presenta en el discurso matemático escolar y cómo surge en la vida de las personas en sociedad, cómo aparece, en qué sentido se lo comprende, cuál es la función que cumple dentro de la cultura del grupo en que se transmite. Es debido a esto que se ubica la investigación dentro de la Matemática Educativa, disciplina que aunque relativamente nueva, presenta determinadas características respecto a los problemas que aborda. Se considera entonces como una primera idea la que se presenta en Imaz acerca de la Matemática Educativa:

> *"Matemática Educativa es lo que surge cuando, haciendo cierto tipo de abstracciones, abordamos la matemática como un problema de comunicación, entendida ésta última en su sentido moderno, es decir, como emisión y recepción de mensajes que deben producir cambios conductuales observables en los receptores y que, en caso de que estos cambios no se producen o no suceden en forma deseada, deben producir cambios en la conducta de los emisores, continuando con el proceso hasta que se consiguen los objetivos deseados originalmente u otros objetivos alternos".*
>
> (Imaz, 1987, p. 262)

Se considera entonces a la Matemática Educativa en esta primera aproximación en un intento por definirse como la disciplina científica que se interesa por estudiar a los problemas de la educación matemática entendiéndolos como problemas de comunicación, y es una comunicación que tiene lugar en un escenario particular: el escenario escolar, aunque el escenario es un concepto ausente en la aproximación antes presentada. Es en ese escenario en donde se espera que los alumnos construyan el infinito matemático, que será logrado entonces a partir de un proceso de intercambio entre docente y alumnos y alumnos entre sí. Uno de los conflictos observados en relación a la construcción del infinito matemático en la escuela, en el discurso matemático actual, se relaciona con la ausencia de un intercambio de las ideas intuitivas que los alumnos poseen previamente en referencia a este concepto. La comunicación que se da en este sentido por lo general es unilateral, correspondiente a una idea de transmisión de conocimiento desde el docente, considerado como el representante del saber erudito, hacia los alumnos. Lo conflictivo de este tipo de prácticas educativas es que impide que la construcción de este saber se adapte a los modelos que ya están presentes en las mentes de los alumnos en referencia al infinito, aparte de negar la hipótesis de que la construcción del conocimiento es un proceso social. En muchas oportunidades el docente no retoma las asociaciones que los alumnos hacen entre el infinito y las cuestiones de sus vidas no escolares, provocando como consecuencia que no se tomen en cuenta los posibles obstáculos que pueden surgir.

Esta primera idea de Matemática Educativa como disciplina, ha ido avanzando desde esa primera visión a la realidad en que se está trabajando actualmente. Si se quiere tomar una postura más actual sobre la naturaleza de los problemas que se plantea la Matemática Educativa, puede considerarse la visión que describe Martínez que considera que:

> *"partimos del supuesto de que los saberes matemáticos son un bien cultural y que son producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir su realidad, tanto natural como social. Trabajamos con la hipótesis del origen social del conocimiento, asumiendo que los procesos de construcción y de creación humana son procesos de síntesis de los objetos y herramientas culturales presentes en una sociedad o un grupo específico.*
>
> *[…] nuestras investigaciones se inscriben dentro de la problemática general que busca entender las circunstancias en la cuales son llevados a cabo los procesos de construcción de conocimiento. Entender estas circunstancias es interpretada como la elaboración de una teoría que los describa, explique y prediga los procesos de construcción de conocimiento."*
>
> (Martínez, 2005, p. 198)

Esta visión, más actual, completa la caracterización antes considerada de la Matemática Educativa. No sólo es necesario estudiar el proceso de comunicación: es necesario que los resultados de las investigaciones de Matemática Educativa expliquen cómo se construyen los conocimientos en situaciones sociales y escolares, buscando la relación que este tipo de construcción tiene con las situaciones sociales que determinan el surgimiento de los conocimientos, reconociendo entonces a los escenarios socioculturales como los espacios que provocan el surgimiento de los saberes y los que le dan significado a los conocimientos para los alumnos, logrando así saberes situados y funcionales.

La socioepistemología como enfoque para este estudio

Como ya se ha planteado, es en los escenarios no escolares en los que los alumnos llegan a su primera aproximación de la idea de infinito, tomada de la noción que sus padres, sus pares, los medios de comunicación y la literatura presentan sobre este término. Lo que se analiza en esta investigación es la existencia de actividades humanas en estos escenarios no escolares que condicionan la construcción de un conocimiento de naturaleza matemática, a pesar de que se use primero fuera de la cultura matemática.

Queda claro entonces que el escenario sociocultural es determinante para el estudio que se plantea. Es la componente social la que da sentido y ámbito de pertenencia a esta investigación. Si bien se espera que finalmente los resultados puedan modificar la realidad escolar del concepto, es en los escenarios no escolares donde deben buscarse las fuentes de las ideas que existen en relación al infinito, y esos escenarios son puramente sociales. Debido a esto es que la aproximación socioepistemológica es la que provee de teoría científica a esta tesis.

Para lograr entonces un estudio que integre para este análisis con las componentes cognitiva, epistemológica, didáctica y social que rodean a la construcción de este concepto se propone enmarcar la investigación en la aproximación socioepistemológica.

> *"[…] el conocimiento matemático, aún aquel que se considera avanzado, tiene una función social y un origen asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas. […] Nuestra tesis tiene una orientación sociológica, puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos.*
>
> *[…] Las investigaciones que hemos desarrollado a fin de "hacer ver" la postura descrita, han seguido una aproximación sistemática que permite tratar con las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento, a saber; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Esta aproximación múltiple ha sido nombrada como el acercamiento socioepistemológico."*
>
> (Cantoral, 2001, p. 65)

En la visión socioepistemológica se considera la importancia de la componente social en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión permite entonces que el presente trabajo se apoye en el estudio de las actividades humanas para poder comprender cómo se generan las ideas intuitivas sobre el infinito, fuera de las instituciones escolares y exterior al discurso matemático escolar.

Como se presenta en Lezama, la socioepistemología hace aportes fundamentales para poder explicar la forma en que el conocimiento surge de las interacciones sociales de una cultura particular.

> *“Mientras* [las aproximaciones epistemológicas tradicionales] *asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana, la socioepistemología plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales”*
>
> (Lezama, 2005, p. 341)

Dado que esta investigación se propone dar cuenta de las situaciones e interacciones por las que pasa un alumno con respecto a este término a lo largo de su vida que le permiten desde luego crearse un modelo mental de representación del infinito, para entender cómo actúa este modelo en la mente de los estudiantes, frente a qué tipo de situaciones reaparece y qué tipo de obstáculos genera al momento de enfrentarse con la idea matemática del infinito; es que es necesario comprender la importancia de los escenarios sociales y culturales en que han surgido estas “intuiciones”. Las particularidades de dichos escenarios serán determinantes al momento de comprender las asociaciones hechas en función del infinito.

Es en el estudio de las intuiciones y de las ideas menos consideradas en las que se hará hincapié para lograr determinar cómo pueden afectar la posterior construcción del concepto de infinito.

> *“Se ha puesto en evidencia que los alumnos construyen conocimiento con cierta independencia del discurso matemático de la enseñanza. Con frecuencia, construyen explicaciones inadecuadas e inclusive erróneas desde un punto de vista matemático, a la vez que descubren profundas relaciones entre piezas del saber matemático, sin que eso haya sido parte explícita de su enseñanza.*

Consideramos que estos conocimientos son el fruto de la interacción con su entorno: con sus compañeros, con sus historias de vida o con su ambiente académico y cultural, entre otros.”

(Cantoral & Montiel, 2001, p. v)

Se puede comprender entonces la idea de que el conocimiento se genera sobre la base de interacciones sociales y, es en función y en reconocimiento de las mismas, que debe considerarse la reorganización del discurso matemático escolar. Las dificultades que los alumnos presentan con respecto a la idea de infinito y, en general, de otras temáticas, no sólo deben explicarse desde la ignorancia o complejidad de los conceptos, sino en relación a la forma en que se han aproximado a estas ideas y a la forma en que los estudiantes ven y caracterizan al conocimiento matemático. La forma en que los alumnos aprenden (o no) debería explicarse también desde el tipo de interacción social que se da en el sentido de este concepto, en especial, el infinito.

Construcción Social del Conocimiento

Debido a que la investigación se centra en la construcción del infinito en un escenario sociocultural, la línea de investigación que se seguirá es la de Construcción Social del Conocimiento, línea que busca encontrar situaciones socioculturales que provocan o determinan el surgimiento de los conocimientos matemáticos.

“Profundizando en estas investigaciones podemos distinguir momentos de uso del concepto (en tanto actividad humana), momentos de influencia cultural (como las prácticas sociales), etapas de consenso (teorización o consolidación de los conceptos), a la par que se distinguen las herramientas y contextos matemáticos accesibles para la evolución de

nociones y conceptos. Dicho en otras palabras, encontraremos los factores sociales que generan conocimiento matemático, entendidos éstos como aquellas restricciones que pesan sobre los individuos por el sólo hecho de vivir en sociedad y que no son estrictamente modificables por una voluntad individual"

(Montiel, 2005, p.20)

Como se lo plantea Montiel, lo social marca en la construcción del conocimiento, el camino que el concepto o idea ha de seguir. Los miembros de una sociedad comparten, por herencia cultural, formas de expresarse y de explicar (o al menos intentar explicar) la realidad que los rodea. Las individualidades de los miembros de un grupo pueden influir en la manera en que se representan las ideas, pero estarán siempre sujetas a los factores sociales circundantes. En el caso de esta investigación, puede analizarse a lo largo de la historia las distintas formas en que se ha pensado y representado el infinito, que se corresponden con la forma de observar la realidad que rodea al grupo, ya sea desde la religión, la filosofía, la espiritualidad o la racionalidad.

La cuestión está entonces en el lugar que estas actividades humanas y sus producciones (las ideas o modelos mentales generados en función de las ideas intuitivas) deben ocupar dentro de la realidad del aula, ya en particular, en el proceso de reorganización del discurso matemático escolar. En este sentido, se puede considerar a Cantoral, que afirma:

"En síntesis, en virtud de que las matemáticas se han constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su introducción al sistema de enseñanza les obliga a tomar una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, pues habrán de buscarse aproximaciones educativas que permitan la adaptación de tales saberes especializados a las prácticas culturales que tienen lugar al seno de la escuela y la universidad. […]

En este sentido las articulaciones entre los procesos avanzados del pensamiento, la epistemología de la matemática avanzada y las prácticas humanas altamente especializadas, nos permitirá, sostenemos esta hipótesis, orientar estudios sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado según se refiere en la aproximación socioepistemológica."

(Cantoral, 2003, pp. 4 - 5)

Para el caso del infinito, se pueden rastrear algunas de las ideas de las antiguas civilizaciones en este sentido, se puede luego continuar hasta encontrar la teoría de Cantor, que le da finalmente al concepto el carácter científico que hasta entonces se le negaba; y se puede también estudiar cómo se presenta en la actualidad dentro de la escuela. Sin embargo, por la naturaleza de este concepto, cada generación retoma la idea intuitiva del infinito, y se la utiliza como elemento descriptivo, fuertemente arraigado a los sentimientos o a las situaciones de difícil explicación. Es en este punto, en su existencia independiente de su realidad de elemento matemático que tiene en la actualidad, en donde este trabajo enfoca su atención, que puede o no representar en distinta medida a las ideas de las civilizaciones más antiguas, en sus modelos del infinito previos a Cantor.

Modelos mentales asociados a construcciones matemáticas

Con el fin de observar entonces las relaciones entre el infinito y la realidad en que viven los alumnos, que se presentan e influyen en la creación de modelos mentales, se elige como teoría para el estudio de las mismas la Teoría de Modelos Mentales de Fischbein (1989). De acuerdo a este autor, la significación de un concepto se da a través de un proceso de integración en que un modelo mental sustituye al modelo científico, que por su abstracción resulta inaccesible al alumno.

Muchas de las dificultades de los estudiantes surgen, según Fischbein, de la influencia sin control consciente de estos modelos intuitivos en los procesos de razonamiento. Los modelos a los que se hace referencia son modelos intuitivos que se generan al inicio de la aproximación con un concepto matemático y que continúan apareciendo a lo largo de la educación formal, influyendo tácitamente la interpretación y decisiones de resolución de los alumnos.

Estos modelos son caracterizados por el autor de la siguiente forma:

- ✓ *Entidad Estructural*.

  Esta característica permite que el modelo sea una entidad, con reglas y definiciones que le otorga un significado a un concepto.

- ✓ *Naturaleza concreta, práctica y de comportamiento*.

  La naturaleza del modelo deja entender como se asocia el modelo tácito a las experiencias que lo generaron, y por ende, a las situaciones que aparezcan posteriormente y que se relacionen de alguna manera con las primeras.

- ✓ *Simplicidad*.

  Para funcionar en el sentido que lo hacen, los modelos implícitos deben ser simples y económicos, permitiendo al alumno decidir de manera inmediata el curso de acción a tomar frente a una situación determinada.

- ✓ *Imposición de restricciones*.

Los modelos mentales de acuerdo a lo que se plantea en el primer punto contienen reglas. Estas reglas plantean, como consecuencia, restricciones a lo que se puede o no resolver en función del concepto que se reconoce en la situación y que se representa en el modelo mental.

- ✓ *Entidad Autónoma*.

  Un modelo mental no depende de reglas externas a él, funciona como una unidad independiente y coherente, es autónomo.

- ✓ *Robustez*.

  Esta característica es la que explica la subsistencia de los modelos a lo largo del tiempo, aún a pesar del avance en la formación matemática del estudiante y de las contradicciones que ésta presente con el modelo implícito.

Para el concepto que aquí se estudia, los modelos implícitos se generan en el inicio de la caracterización del infinito: alejado de la matemática, como característica de elementos de la realidad que no se pueden medir ni contar de manera evidente. Y esos mismos modelos serán los que operarán cuando el infinito se considere dentro de la matemática, en la clase de matemática, y arrastrarán a ella todas sus reglas y restricciones.

En conclusión, en este capítulo se presentan los elementos teóricos que permiten fundamentar la tarea realizada. Y en función de estas teorías es que se propone estudiar las ideas intuitivas asociadas al infinito. A continuación, se formulan una serie de preguntas que serán las que han guiado este trabajo.

CAPÍTULO II

Influencias del infinito intuitivo en la construcción escolar del infinito

El objetivo de este capítulo es introducir el problema de investigación, con las características particulares que presenta dentro y fuera de la matemática. Se expresan además una serie de preguntas que se buscará contestar con las distintas indagaciones hechas a estudiantes de escuela media y se concluye finalmente con la pregunta de la investigación.

Cómo surgen las ideas intuitivas del infinito y cómo afectan su posterior construcción en el aula

Es necesario en este capítulo, a pesar de que el término ya ha sido utilizado, definir claramente con que intención se habla de idea intuitiva o infinito intuitivo. Según Fischbein, una intuición, o idea intuitiva, puede entenderse como una concepción cerrada, por lo general prematuramente, en la cual la falta de información se oculta de manera tal que la persona la entiende como coherente, completa e inmediata. Es necesaria para actuar, para ejecutar, la duda continua, la incertidumbre, paralizan y no permiten el avance. La intuición es una forma de conocimiento inmediata, es una forma de cognición que se presenta como auto-evidente. Es creíble, tiene sentido y sus diversas formas de representación permiten que actúe en diferentes situaciones. Además, se comporta como una pseudo teoría, se extrapola aún cuando la evidencia que la genera no de evidencias suficientes para esto.

El conocimiento intuitivo no se basa en evidencia suficiente ni en un razonamiento lógico riguroso, y sin embargo, la persona lo acepta como cierto y evidente.

> *"La intuición se trata de una sensación, de una idea en la que tiene gran influencia la subjetividad. Algo puede ser intuitivamente comprendido por alguien y no por otro. Depende de la experiencia, de los conocimientos previos, pero también de cualidades personales... Podemos discutir razonamientos, pero no intuiciones, compartir resultados, pero no evidencias."*
>
> (Crespo Crespo, 2007)

El infinito intuitivo al que se hace referencia en el primer capítulo de este trabajo es una construcción que se da fuera del aula de matemática, producida por el intercambio de experiencias entre personas que comparten ciertos códigos culturales. En este intercambio, las personas le otorgan al infinito una serie de características que formarán posteriormente parte de su modelo mental asociado, formado por elementos que han ido adquiriendo a lo largo de toda su vida. Por ejemplo, si se analiza la idea que de padres a hijos se transmite sobre este concepto, ésta dependerá de la propia idea que los primeros tengan o recuerden tener en su niñez, y que por supuesto estará afectada además por la idea matemática que hayan logrado en su paso por la escuela, si es que el tema fue abordado. Si bien hay un bagaje cultural compartido por la sociedad, la experiencia de vida y los contactos que se tengan en función al concepto están influenciados por las individualidades particulares de cada persona. Una canción, una imagen, una frase, un cuento, pueden determinar la persistencia de una forma de representación por sobre otra y eso también afecta a la imagen que luego se transmita en la comunicación. Para citar un ejemplo, quien haya leído *El libro de Arena* (Borges, 1998), tendrá una idea de un infinito casi demoníaco, que atormenta con su extensión y que puede provocar una catástrofe por el sólo hecho de ser infinito. En cambio, los niños que ahora ven en una película animada como Toy Story, a uno de sus protagonistas, Buzz Lightyear proclamar su valentía y su vuelo con la frase “hasta el infinito y más allá” tendrán una imagen de infinito distinta, asociada a la fantasía, al espacio infinito y lugares aún no descubiertos.

Sin embargo, la intención de esta investigación es analizar no sólo el proceso de construcción de estas ideas intuitivas, sino cómo influyen en la comprensión de este término en sentido matemático, provocando la generación de modelos mentales internos asociados a este concepto; más allá de las dificultades propias y de los conocimientos matemáticos previos que hayan adquirido en relación a esta temática.

Si se piensa en los modelos implícitos, que rigen la adaptación de nuevas ideas en la mente de las personas, entonces se debería observar cómo se han ido formando estos modelos en función de todas las circunstancias que han rodeado la adquisición de este término a lo largo de la vida de los alumnos; para determinar en qué medida pueden resultar favorecedores o entorpecedores del posterior aprendizaje; teniendo en cuenta la complejidad del rompimiento con los viejos esquemas mentales. El conocimiento que se pueda lograr de esas primeras ideas permite entonces comprender el estado en que el desarrollo del infinito se encuentra una persona. La indagación sobre las características que cada alumno le otorga a este término se puede lograr a través de una encuesta, una actividad diseñada que permita exponer los esquemas o simplemente un diálogo abierto en un salón de clases.

La idea de modelos mentales presentada por Fischbein (1989) y descripta anteriormente, permite a este estudio una explicación de los conflictos que se provocan cuando existe una idea generada en su entorno sociocultural fuera de la clase de matemática asociada a un concepto que ya ha sido incorporada por los alumnos y que luego es modificada en su naturaleza. Esa primera conceptualización provoca una elaboración de un esquema con características propias de acuerdo a la clasificación antes presentada: su entidad estructural, su naturaleza concreta, práctica y de comportamiento, su simplicidad, su imposición de restricciones, su entidad autónoma y su robustez. Ese esquema es el que luego deberá adaptarse para permitir la "convivencia" de las ideas intuitivas y las ideas matemáticas asociadas al infinito. Y es en esa adaptación, que lleva consigo una modificación, donde surgen los conflictos u obstáculos cognitivos. La adaptación a la que se hace referencia se relaciona con la modificación del esquema para permitir la inserción de las nuevas ideas en el mismo, que facilite la convivencia de ambas.

El concepto de infinito presenta, por otro lado, obstáculos asociados a su naturaleza, obstáculos epistemológicos, que se manifiestan desde los inicios de su desarrollo científico, conflictos que civilizaciones altamente desarrolladas como la griega no pudieron resolver, y son esos mismos conflictos los que pueden reconocerse en el proceso de construcción de esta idea matemática. Se estudian entonces en esta investigación las ideas primitivas que a lo largo de la historia han permanecido en el inconsciente colectivo asociadas a este concepto, dado que permitirá por un lado determinar qué características de esta idea son las que más persisten a nivel cotidiano, y por otro lado, las dificultades y los pasos que ha tenido que seguir la sociedad científica para lograr una teoría matemática del infinito. A través del análisis histórico y de las concepciones filosóficas de las distintas culturas que han logrado un desarrollo de este concepto puede determinarse cómo y por qué ciertas ideas muy antiguas subsisten en la idea popular del infinito.

Estos obstáculos epistemológicos asociados a su naturaleza no pueden ser dejados de lado si se desea lograr una aproximación completa a esta temática. Con respecto a los motivos que hacen que el infinito se presente como un obstáculo epistemológico, se retoma la idea que presenta D'Amore (2005):

> *"¿Cuándo y en ocasión de cuáles ideas matemáticas es probable que se tenga un obstáculo epistemológico?*
>
> - *Se tiene casi siempre un obstáculo epistemológico a propósito de aquellas ideas para las cuales en un análisis histórico de estas se*

reconoce una fractura, un pasaje brusco, una no continuidad en la evolución histórico – crítica de la misma idea;

- *Se tiene un obstáculo epistemológico a propósito de una idea cuando el mismo error se verifica como recurrente más o menos en los mismos términos alrededor de dicha idea*

La búsqueda de los obstáculos va entonces hecha contemporáneamente, y este ligamen es muy interesante:

- *en la escuela, en la práctica didáctica;*
- *en el estudio de la historia de la Matemática,*

uniendo una investigación con la otra."

(D'Amore, 2005, p. 66)

En esta idea presentada se considera además una iniciativa que se espera llevar a cabo en la presente investigación, tomar en cuenta tanto a las decisiones didácticas detrás del infinito como a los conflictos que en torno a él han surgido a lo largo de la historia de la humanidad con el fin de poder comprender la realidad que se da en la mente de los alumnos al estudiar este tema. El infinito ha sido un tema controversial a lo largo de la historia de la matemática y lo es aún en la actualidad cuando se presenta dentro de la clase. Y son esas controversias las que se intentan identificar con el estudio de la epistemología del tema y el estudio de ideas de alumnos de escuela media asociadas a este tema.

Debido a la necesidad de enfocar el problema desde las distintas características del concepto que se desean estudiar, es necesario buscar focos a partir de los cuales indagar. Por ello, se consideran inicialmente pretensiones que guían la investigación, pretensiones en función de las cuales se desarrollarán las indagaciones en las entrevistas, los estudios de textos y currícula y el devenir histórico del concepto:

1. ¿Cuál es la primera idea que un niño tiene en referencia al infinito?

Lo que se busca con esta pregunta es comprender las representaciones asociadas (ideas, imágenes, descripciones) iniciales que una persona tiene con respecto a este término. ¿Son de carácter emocional: amor, odio, esperanza? ¿Son asociaciones relacionadas a explicar realidades sensibles que no pueden comprender: la extensión del cielo, del mar, la cantidad de estrellas?

2. ¿El infinito se comprende en una primera instancia de su construcción como un resultado (o cantidad o número), un lugar o una cualidad?

De acuerdo a las ideas que se plantean en la primera pregunta, el infinito como término toma distintas funciones: una cualidad de elementos no tangibles, como los sentimientos; un número o cantidad, como el número que representa la cantidad de estrellas o granos de arena; un lugar: el lugar donde termina el cielo o el mar o el lugar hasta donde llegan los sentimientos.

3. ¿Qué tipo de objetos (reales o no) tienen la cualidad de ser infinitos para los niños?

Esta pregunta busca lograr una caracterización de elementos (concretos o no) que un niño puede pensar que sean infinitos. En las respuestas encontradas se podrá detectar la usual confusión entre excesivamente grande o con gran cantidad de elementos e infinito. Se busca también indagar con más profundidad en la función de infinito como cualidad.

4. ¿Cuál es la actividad o actividades que generan la necesidad del infinito para un niño?

Debido a que una de las hipótesis de la socioepistemología es que existen algunas actividades que generan la necesidad del conocimiento matemático, en este caso, una idea intuitiva de infinito, el propósito de esta pregunta es detectar cuáles son esas actividades que lo provocan.

5. ¿Cómo aparecen esas ideas intuitivas en la escuela? ¿Qué conceptos matemáticos las revelan?

Una de las hipótesis que se plantean en este trabajo es que no es habitual en la escuela que los docentes retomen las ideas intuitivas de los alumnos en el sentido de este concepto cuando se lo trata matemáticamente. Sin embargo se considera, de acuerdo a lo que plantea Fischbein, que estas ideas surgirán a lo largo de este tratamiento, provocando conflictos de tipo cognitivo (Fischbein, 1989). Se espera entonces poder determinar qué conceptos matemáticos provocan el resurgimiento de las ideas encontradas en las primeras preguntas de esta lista.

6. ¿Cómo se presenta el infinito en la escuela media?

Los obstáculos que se plantean en relación a este concepto no sólo serán de tipo cognitivo, ni epistemológico, como ya se ha discutido. Existen también asociados al infinito conflictos didácticos provocados por la forma en que el conocimiento vive dentro de la escuela. Dentro de las decisiones didácticas que un docente toma en este sentido, está la de considerar o no las ideas intuitivas de los alumnos. Se propone entonces analizar si el infinito que se presenta a los alumnos en la escuela media, al estudiar conjuntos numéricos o límites de funciones, retoma o no las ideas que ya traen.

7. ¿Cuáles son los posibles conflictos que pueden surgir si se ignoran las ideas intuitivas de los alumnos en referencia a este concepto?

Los obstáculos de los que se habla en los apartados previos, tanto epistemológicos, didácticos como cognitivos, pueden estar asociados a las dificultades por parte de los alumnos para “separar” en sus mentes las ideas intuitivas de las ideas matemáticas asociadas al infinito. Es en función de estas dificultades, descriptas en la teoría de Fischbien de Modelos Mentales, que se desea observar los conflictos que aparecen en el aula debido a la decisión de la mayoría de los docentes de no tomar en cuenta las ideas intuitivas.

Con respecto a estas preguntas podrían distinguirse dos grupos: en un primer grupo, la respuesta a las preguntas proviene de fuera de la escuela, en la vida diaria de los alumnos. Un segundo grupo en cambio deberá buscar sus respuestas en la escuela: en sus actividades, en sus currícula y en los libros de texto determinados por el discurso matemático escolar predominante.

La pregunta de investigación en consecuencia puede plantearse en función de lo anterior de la siguiente manera:

¿Cuáles son las ideas previas al estudio escolar del infinito que traen los alumnos y cómo influyen en la construcción escolar del infinito matemático?

Es en función de todo lo antes planteado que se espera entonces que los resultados encontrados al finalizar este trabajo puedan generar indicios que permitan posteriormente impactar en la escuela, logrando un cambio en la forma en que los docentes deciden la manera en que guiarán la construcción escolar de un concepto tan complejo como el infinito.

Con el fin de lograr responder estas preguntas y considerar su pertinencia para un trabajo de investigación, se presentan en el capítulo siguiente resultados de otras investigaciones que por su enfoque, el tema sobre el cual se trabaja o su aproximación, sirven como elementos de partida para esta tesis.

CAPÍTULO III

Investigaciones relacionadas con el infinito y la construcción social del conocimiento

En este capítulo, se estudian algunas investigaciones que se relacionan con ésta a fin de encontrar elementos que justifiquen la necesidad de este estudio. Si bien mucho se ha dicho y escrito respecto al infinito, es muy poco lo que se ha hecho en referencia al infinito fuera de la escuela, y menos aún lo que hay en referencia a las ideas no matemáticas del infinito. La justificación para esta tesis puede encontrarse entonces en la búsqueda de respuestas para lo que se observa y ocurre dentro del aula: ¿por qué es tan compleja la construcción del infinito? ¿por qué las definiciones que se dan no se comprenden ni se aprehenden de manera significativa? ¿qué hay detrás de lo que dicen los alumnos? ¿de dónde han salido las ideas que ya traen, por qué son obstáculos? Los antecedentes que se presentan a continuación intentan presentar algunos resultados que sirvan de base; sin embargo, la componente social, eje central de este trabajo, no es considerada en la mayoría de las investigaciones analizadas. La socioepistemología hace de lo social una fuente de respuestas a algunas de estas preguntas, y las respuestas que se encuentran situadas en otros paradigmas, si bien importantes y significativas, no son las que se buscan aquí.

Estudios sobre el infinito

El infinito ha deslumbrado a la humanidad desde hace miles de años. Particularmente ha sido estudiado en todas las épocas (y hasta rechazado durante muchos siglos de desarrollo matemático por algunas culturas) y ha adquirido su entidad de objeto matemático aceptado recién tras el trabajo de Cantor en el siglo XIX. Dentro de la Matemática Educativa, la Didáctica de la Matemática, o la Educación Matemática, dependiendo del paradigma que se considere, ha sido también investigado dentro de la escuela y fuera de ella. Es en este tipo de investigaciones, las que se centran en el infinito matemático que vive en el escenario escolar o en escenarios no escolares, en las que se enfocan estos antecedentes. Se pueden sin embargo distinguir aquellas investigaciones que tratan las ideas de los alumnos generadas por la escuela de aquellas que consideran su presencia en distintos ámbitos de la realidad de los alumnos y que influyen sobre la construcción de los modelos mentales antes nombrados.

Por otra parte los trabajos enmarcados dentro de la Construcción Social del Conocimiento Matemático representan también una fuente de antecedentes que debe considerarse para este estudio, aún cuando el conocimiento matemático al que se haga referencia no sea el infinito. Este tipo de trabajo presenta una base imprescindible: fundamentar la construcción de conceptos matemáticos fuera del ámbito escolar, elementos que tienen que convivir luego, o al menos deberían hacerlo, con los elementos matemáticos presentes en la escuela.

A modo de organización, se separaron para su análisis los antecedentes de investigaciones previas en dos grupos: Antecedentes de Construcción Social y Antecedentes en referencia al infinito desde otros marcos teóricos.

Antecedentes de Construcción Social

Se considera como primer antecedente para esta investigación la tesis de Espinoza (2006). En este trabajo se realiza un estudio del sistema de numeración Náhuatl, explicándose dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan para la transmisión de este sistema los que se dan como actividades prácticas en las sociedades, dado que como sistema de numeración, vive fuera de la escuela y su transmisión es puramente social; no es parte del discurso matemático escolar de ese grupo.

El autor de la investigación intenta recuperar la matemática de esta cultura mexicana que en la actualidad está separada del discurso matemático escolar, invadido por conocimientos que se han generado en el viejo continente. El sistema Náhuatl, propio de un grupo humano, conocido por las personas que forman parte de ese grupo, se abandona en la escuela, perdiéndose así la riqueza de conocimiento que podría aportar a la construcción del sistema de numeración decimal, que es el aceptado por la obra matemática y por el discurso matemático escolar de Latinoamérica.

Las preguntas que guían dicha investigación, y que se responden a lo largo de la tesis proveen al presente trabajo de algunas respuestas que podrían ser útiles, especialmente si se considera que esta tesis se enmarca dentro de la aproximación socioepistemológica en la línea de investigación de Construcción Social del Conocimiento. Las preguntas que aparecen son:

- *¿Cómo los seres humanos aprenden a construir conocimientos matemáticos en contextos socioculturales?*
- *¿Dónde y cómo se originan los conocimientos matemáticos que se enseñan en los contextos escolares?*

Pueden considerarse además otros aportes que este trabajo hace a la presente investigación, en referencia a la naturaleza y génesis del proceso de contar y por consecuencia, la cardinalidad y el concepto de número, ambos asociados a la construcción del infinito.

Por otro lado, el autor de este trabajo define un proceso que le permite caracterizar el tipo de transmisión que se da fuera de la escuela y del sistema educativo tradicional. Denomina este proceso como Transposición Didáctica No Convencional.

> *"De esta manera, consideramos que la **TDNC**, centra su atención en el sujeto que aprende a través de las actividades sociales que desarrolla y situados en contextos socioculturales, y de grupos homogéneos de individuos específicos; tomando en cuenta, los individuos quienes construyen sus conocimientos en sociedad, donde el lenguaje (idioma), la comunicación, la actividad, la ideología, la cultura, la espiritualidad, y los diferentes tipos de registros de los hechos y fenómenos, son factores determinantes para la construcción social de conocimientos. Construcción social de conocimientos que se produce de manera natural, sin tanto esfuerzo, como el que se requiere para la construcción de conocimientos matemáticos institucionalizados. Por tanto, el tratar de reproducir este mecanismo de aprendizaje para la construcción de conocimientos validados socialmente, será posible mediante la TDNC."*
>
> *(Espinoza, 2006, p. 103)*

La caracterización de este proceso, que puede extrapolarse a toda construcción de conocimiento no escolarizado, permitirá a esta investigación fundamentar la necesidad de considerar las ideas intuitivas para modificar el discurso matemático escolar. En síntesis, es en la recuperación de los procesos naturales y no forzados de construcción de conocimiento donde la Matemática Educativa deberá orientar su mirada a fin de lograr su objetivo último: lograr que los procesos de comunicación provoquen el efecto deseado. La significación de los conceptos matemáticos no debe ser sólo buscada en su génesis histórica, sino también en su vida fuera de la escuela, donde los alumnos los encuentran y los utilizan.

> *"El reconocimiento del papel de la actividad social, la comunicación y la socialización como partes integrales de un mismo proceso, la unidad entre*

lo cognitivo, lo afectivo y lo volitivo, dotan al ser humano de un bagaje intelectual suficiente para afrontar los retos de la vida real y de la edad adulta.

Cuando los individuos aprenden a realizar las actividades, éstos construyen conocimientos basándose en la historia personal, en el discurso y saberes frente a la realidad social. A través de las diferentes actividades emerge la solidez de la asimilación de los conocimientos, habilidades, normas de relación emocional, de comportamiento y valores, legados por la humanidad. Es en la actividad, en la comunicación con el adulto y los procesos de socialización, el ser humano construye conocimientos, de esta manera, pasan de lo externo (material, con objetos), a lo verbal (lenguaje interno y externo) y posteriormente al plano interno (mental), es entonces cuando el ser humano llega a apropiarse del conocimiento auténtico."

(Espinoza, 2006, pp. 104-105)

El proceso de internalización al que se hace referencia en este párrafo debe surgir entonces de los procesos sociales, y es en el reconocimiento del valor que tienen donde debe orientarse toda modificación que se intente hacer del discurso matemático escolar para la construcción de conocimientos.

La investigación de Espinoza (2006) presenta entonces tres elementos fundamentales como antecedentes a esta investigación: la recuperación de las actividades humanas como fuente de transmisión de conocimiento; el proceso de Transposición Didáctica No Tradicional, que explica la forma en que el proceso natural de construcción de conocimientos provocada por la actividad es menos forzada que la se utiliza habitualmente en la escuela; y el proceso de internalización, que explica la *apropiación* del conocimiento en función de las actividades y los procesos de socialización que la generan.

Como segundo antecedente dentro de las tesis que se consideran por la proximidad en su naturaleza a ésta, aún cuando el contenido sea diferente, se puede considerar la tesis de Mingüer (2006). En este trabajo, la autora centra su estudio en la cultura matemática del profesor de matemática y se estudian las actividades socioculturales como las que generan este bagaje matemático de la cultura del profesor.

> *"Se puede decir que las matemáticas no son únicamente una cuestión escolar; éstas se encuentran insertas en diversos ámbitos de la sociedad.*
>
> *[…] Así, todo individuo que vive en sociedad, de manera consciente o inconsciente, tiene una opinión acerca de las matemáticas; mientras más las utilice de forma intuitiva o formal, más elementos tendrá acerca de sus ideas, nociones, prácticas de uso, manejo y aplicación de conceptos, etc., en su bagaje de conocimientos matemático, lo cual –desde la perspectiva de Vigotsky– desarrollará funciones mentales superiores. Por lo tanto, éste constituirá un terreno fértil para la construcción, a su vez, de nuevas nociones matemáticas y de ideas y prácticas de índole social vinculadas a dicha disciplina."*

(Mingüer, 2006, p. 7)

El reconocimiento que se hace de la vida en sociedad como situación generadora de ideas comulga con la hipótesis que se propone en el presente trabajo: el infinito tomará sus primeras identificaciones y relaciones de la vida en sociedad y estas afectaran al infinito matemático de los alumnos. Es necesario entonces reconocer esas primeras concepciones como punto de partida para poder lograr una construcción del infinito matemático que pueda encajar en los modelos ya logrados por los alumnos.

Antecedentes en referencia al infinito desde otros marcos teóricos

Se consideran a continuación una serie de trabajos que se orientan al estudio de las ideas que los alumnos construyen en relación al infinito en el proceso de su educación formal así como también otros trabajos que muestran la presencia del infinito fuera de la escuela. La importancia de su consideración para esta investigación se basa en la consideración de lo que ya se ha hecho, las respuestas que ya han sido detectadas y sobre todo, tener en cuenta lo que aún falta por hacer, dándole sentido a esta tarea.

Como primer antecedente en esta línea se considera el trabajo de Garbin (2003). Este trabajo es la primera fase de una investigación a través de la cual la autora intenta observar cómo los alumnos universitarios con un buen conocimiento de matemática entienden al infinito, en particular, el infinito actual. A través de dos cuestionarios aplicados a 89 estudiantes de entre 18 y 25 años, se recogen resultados que se agrupan en cuadros tomando en cuenta principalmente para su análisis la coherencia. Se destaca en este trabajo la búsqueda de líneas de pensamiento "coherentes" asociadas a la negación de la infinitud, el infinito actual o el infinito potencial que expliquen las imágenes del concepto subyacentes a la definición matemática de infinito.

Este trabajo se completa con un segundo artículo de la misma autora. En este segundo trabajo de Garbin (2005), la autora reporta ideas referentes al infinito en alumnos que se encuentran en transición entre el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Para distinguir estas dos etapas se consideran la complejidad y frecuencias de ciertos procesos de pensamiento, así como una clasificación que hacen para identificar esta que se centran principalmente en los cambios de la enseñanza y la evaluación en la clase de matemática. Es en el proceso entre esos dos estados de pensamiento en que se encuentran los alumnos con se trabajó para determinar las ideas que se buscaban en relación al infinito. En un apartado, la autora se centra en la importancia del intercambio e interconexión entre los docentes que enseñan en los distintos momentos del pensamiento. Los docentes que forman a los alumnos en sus ideas elementales deben dejar las estructuras lo suficientemente abiertas y flexibles para que los conceptos posteriores, en este caso el infinito, puedan generarse sin dificultades impuestas por la forma de enseñar previa (decisiones didácticas) y las construcciones que los alumnos han logrado con respecto a su “antecesor”: lo finito. Haciendo uso de los trabajos de Tall y Vinner, se presenta en el artículo la diferencia entre los esquemas formales e informales sobre el concepto de infinito y el interés por observar cómo la imagen informal que se genera previamente a la formalización del concepto se mantiene aún después del encuentro con el concepto en el aula de matemática. Para explicar las dificultades asociadas a este concepto, se toma la visión aristotélica en que el concepto de infinito que se concibe como sensato es el de infinito potencial: la posibilidad de que algo continúe o se repita una “cantidad” infinita de veces. El infinito actual, en cambio, contradice la intuición y es negado por la mayoría de los alumnos que participaron de la indagación.

Es en esa forma de ver lo infinito en que se centra la investigación reportada tomando como cualidades del infinito actual la totalidad, la completitud y la unidad. El cuestionario aplicado a los estudiantes consistía en cinco preguntas, todas referentes a la misma situación, aunque presentadas en distintos registros, ya sea en lenguaje natural o en distintas representaciones matemáticas: geométrica, algebraica, funcional, etc. En todas las preguntas se buscaba que el alumno identificara la posibilidad de efectuar un proceso infinito (división, suma, etc.) y reconociera a este proceso infinito como algo terminado, es decir, que lograra ver en la situación al infinito actual y no sólo a la potencialidad de un proceso de ser infinito. A partir de las respuestas de los alumnos a estas preguntas, la autora realiza dos tareas, por un lado identificar el tipo de lectura que se hace de la situación: finita, infinita potencial o infinita actual. Por otro lado se busca observar si existe la conexión entre las distintas representaciones, es decir, si los alumnos lograron establecer una relación de equivalencia en los distintos problemas que corresponden a la misma situación. La finalidad de esta tarea es lograr identificar la coherencia de las respuestas: ante la misma situación representada en registros distintos, los alumnos pueden llegar a cambiar su percepción de proceso finito a infinito o de proceso infinitamente posible a situación terminada.

Este trabajo, compuesto por dos investigaciones conectadas por el tema elegido y la intención de las indagaciones presentan algunas respuestas interesantes para esta investigación: la descripción de los conflictos que se mantienen aún después de haber logrado un nivel académico de matemática alto y la negación al infinito actual, compartida por alumnos y matemáticos a lo largo de la historia. Sin embargo, no se considera el marco sociocultural que rodea la construcción de los modelos a los que se hace referencia. La investigación, principalmente descriptiva, muestra de manera eficiente la realidad en la que se trabaja en función a este concepto y los obstáculos cognitivos que se encuentran, mostrando además los problemas que se generan a causa de una educación dividida, sin contacto en los distintos niveles. Pero no hace referencia a lo intuitivo detrás del infinito, a las ideas "naturales", al infinito que existe fuera de la matemática, como idea, como cualidad, o al menos, como licencia poética.

Se consideran también como antecedentes a esta investigación dos trabajos que estudian las ideas presentes asociadas al infinito tanto en docentes como en alumnos. En primer lugar se considera el trabajo de Valdivé Fernández (2006). Este trabajo describe una investigación llevada a cabo con 15 profesores matemática con quienes se realizó una doble tarea, inicialmente un trabajo sobre las ideas de los propios docentes y por otra parte, la descripción y estudio de la reacción de los estudiantes a la discusión de las características de conjuntos infinitos.

Las temáticas trabajadas van desde la forma en que se construyen y justifican los conjuntos infinitos en la clase de matemática hasta la posibilidad de coordinar el conjunto de los naturales con los enteros, los racionales y los reales. El estudio y análisis de las respuestas a las preguntas en torno a esas temáticas dejan ver de alguna manera la imagen mental que los docentes tienen con respecto a estos conceptos.

En esta investigación se presenta una indagación en las formas en que los docentes enfrentan a sus alumnos con el infinito y las ideas que quedan luego de haber sido expuestos a esta temática en las mentes de los alumnos. Una vez más, en este trabajo, la componente social en la construcción del conocimiento no se considera, el trabajo es en el aula, entre alumnos y docentes y no se evalúa como influencia lo que puede existir fuera de la escuela en relación al infinito.

El segundo trabajo es el de Montoro y Scheuer. En este trabajo se muestran los resultados de una investigación llevada a cabo con estudiantes universitarios con distinto tipo de formación (en matemática, biología o educación física). El objetivo de este trabajo es lograr en base a la resolución de un cuestionario una caracterización de las ideas que los alumnos tienen con respecto al infinito. Las autoras consideran en este trabajo, como formas de clasificación, ideas que relacionan al infinito con el todo o con cantidades extremadamente grandes. Se observa a través del estudio de las respuestas las contradicciones con que los alumnos enfrentan este concepto desde la matemática y se propone un estudio del concepto de forma explícita para resolver este tipo de "confusiones".

> *"Nuestro estudio realizado en un contexto "hipotético cotidiano" de conteo, nos muestra que la mayoría de los ingresantes y de los estudiantes sin una instrucción específica formal sobre el infinito matemático, poseen ideas confusas y contradictorias frente a esta noción; incluso en aspectos muy elementales como la extensión de colecciones de combinaciones de un número finito de elementos que pueden repetirse. Este aspecto de la influencia del contenido sobre el razonamiento de los jóvenes y adultos sumado a que los estudiantes parecen ser muy propensos a confiar en sus presunciones y las experiencias cotidianas sugiere que una razón de las dificultades para aprender estos conceptos no es solamente su complejidad sino que no tengan un trato explícito y formal con estos conceptos."*
>
> (Montoro & Scheuer, 2006)

En este trabajo reportado se trabajan las ideas intuitivas provenientes de las experiencias cotidianas y se las relaciona con las dificultades que se presentan en la matemática detrás del infinito. La investigación, que trabaja con un amplio espectro de estudiantes (120 casos de distintas carreras y niveles) no busca identificar cuáles son las ideas intuitivas ni cómo se originan, sino simplemente caracterizar las respuestas y buscar estándares para poder agruparlas.

Finalmente se pueden considerar como antecedentes a esta investigación publicaciones que muestran cómo el infinito está presente en la vida social de los alumnos. En estos artículos se presenta una presencia del infinito fuera de la escuela, en donde los docentes raramente buscan elementos para llevar a las aulas. Sin embargo, este concepto se presenta primero fuera del aula y luego es forzado a aparecer en ellas. En este sentido, los trabajos que a continuación se describen permiten comprender las diversas situaciones en que el infinito invade otras disciplinas y las conexiones que de esta vida no matemática del infinito pueden obtenerse.

Inicialmente se considera un trabajo de Lestón y Veiga (2004) en el cual a través de una serie de actividades y cuentos fantásticos se intenta introducir la idea de infinito antes de su aparición en el estudio de límites. El tipo de actividades e indagación que se realiza busca identificar las ideas que se traen previas al desarrollo de la unidad de análisis matemático en fin de la escuela media y proponer por otro lado, una forma de introducción de un tema que por lo general se da por comprendido. El trabajo no considera, como los presentados en el apartado anterior, el origen de esas ideas “erróneas”, simplemente las identifica y propone una forma de mostrar al alumnado algunas de las características particulares del infinito de forma no tradicional.

En segundo lugar se considera el trabajo de Franco y Ochoviet (2006a).En este artículo se toma un cuento de Borges, *El libro de arena*, y se realiza a partir de él el estudio del cardinal del conjunto de hojas de este libro, que Borges describe en su obra como infinitas. A partir de un estudio de los métodos de comparación de conjuntos de Cantor para determinar los cardinales de los conjuntos infinitos, los autores logran probar que el cardinal de este conjunto es el cardinal del conjunto de los racionales, aleph cero, y que esa obra incluye en su descripción del libro algunas características particulares del conjunto de los números racionales.

Luego se considera un tercer trabajo de los mismos autores con una dinámica similar. Franco y Ochoviet (2006b) presentan dos obras, una de Borges y otro de Vasconcelos a partir de las cuales se discute el infinito actual y el infinito potencial y, brevemente, la teoría de números transfinitos de Cantor. Se logra con el paralelismo entre la matemática y la literatura una propuesta para presentar al infinito en la clase de matemática relacionándolo con dos obras de la literatura que en sí discuten el infinito potencial y actual. En estos trabajos, sin embargo, no se hace indagación en lo que el alumno piensa o sabe previamente en relación al concepto. Simplemente se presentan actividades para hacer del tratamiento del infinito una situación más amena y dinámica.

Hasta aquí, los resultados que se han logrado en otros trabajos muestran algunas de las ideas o formas de entender tanto las ideas intuitivas (del infinito u otros conceptos) como las formas de construcción del conocimiento no escolares. A partir de ahora es la intención de este trabajo detectar la presencia y generación de la intuición asociada al infinito. Antes, sin embargo, se realiza un breve estudio de la evolución histórica de algunas ideas asociadas al infinito, para ver cómo lo antes planteado ha surgido también desde el inicio de la discusión de este concepto.

CAPÍTULO IV

El infinito a través de la historia

Como se estableció anteriormente, si se realiza un estudio del desarrollo del infinito a lo largo de la historia, pueden detectarse ideas que aún en la actualidad surgen como parte del concepto no matemático del infinito pues habitan en el inconciente colectivo, ideas compartidas socialmente. El propósito del presente capítulo no es hacer una recorrida detallada por el devenir histórico del concepto, sino buscar algunas de las ideas que aún hoy se mantienen vigentes y se repiten intuitivamente en las ideas de los estudiantes. El infinito que aquí se estudia surge como una construcción social previa a la construcción matemática. Socialmente el hombre sigue en la búsqueda de explicaciones, de categorizaciones; y surge entonces el infinito como concepto que da respuestas, aunque en su naturaleza amplia y abierta no tiene significado concreto, ni único. Intuitivamente, el infinito puede representar distintas cosas, y es esa versatilidad lo que lo convierte en un concepto tan fuerte y usado en la sociedad.

Para organizar el estudio se distinguirán los avances que distintas civilizaciones lograron en función de este concepto y se buscará identificar en cada una alguna de las ideas que se mantienen en la actualidad.

El infinito para los jainas

Esta civilización, que se desarrolló alrededor del siglo VI a.C., se interesó de manera sorprendente por los grandes números, así como por otros campos de la matemática. El infinito para los jainas representaba una cualidad para explicar la extensión del tiempo, el espacio y el universo. Como se describe a continuación:

> *"Las ideas sobre el infinito matemático en las matemáticas jainistas son realmente muy interesantes y evolucionan debido a las ideas cosmológicas del Jainismo. En la cosmología jainista se cree que el tiempo es eterno y sin forma. El mundo es infinito, nunca fue creado y siempre ha existido. El espacio lo invade todo y no tiene forma. Todos los objetos del universo existen en el espacio, el cual está dividido entre el espacio del universo y el espacio del no-universo. Hay una región central del universo en la cual todos los seres vivos, incluyendo los hombres, animales, dioses y demonios, viven. Sobre esta región central se encuentra el mundo superior dividido a su vez en dos partes. Bajo la región central está el mundo inferior dividido en siete pisos."*
>
> (O'Connor & Robertson, 2000)

Como se puede observar, el infinito de los jainas surge de la observación y de la necesidad de explicar la extensión del tiempo, del universo, del espacio. El infinito trabaja como la explicación para el todo: el tiempo, el espacio, el universo existen y abarcan todo lo que existe, siempre fueron y siempre serán: no tienen ni inicio ni fin.

Además, la descripción de las extensiones de tiempo y espacio se asocian a grandes números, buscando en explicaciones casi poéticas, que implican al infinito.

> *"Los sabios indios del movimiento religioso jaina, tras la disminución de los sacrificios védicos, se familiarizaron con las especulaciones numéricas puestas en juego por medio de grandes números, calificando a los números compuestos por ochenta o incluso cien cifras como pequeños. Para ellos, por ejemplo, la totalidad de los seres humanos de la creación son* 2^{96}*, definían distancias como la recorrida por un dios en seis meses si éste cubre una distancia de 100.000 yojanna (aproximadamente un 10 Km.) en cada parpadeo de sus ojos, o bien el tiempo que tardaría en vaciarse una vasija cúbica de un yojanna de lado llena con lana de*

corderos recién nacidos si se quita una hebra de lana cada cien años. Al intentar situar los límites cada vez más lejos las cantidades, aparecieron conceptos como lo "imposible de contar", lo "innumerable", "el número imposible de concebir" y finalmente, el infinito. Para esta doctrina el universo es indestructible porque es infinito tanto en tiempo como en espacio."

(Crespo Crespo, 2002, p. 529)

La exageración del número ya sea desde la explicación de las distancias como del tiempo, les permite asociar a los grandes números con el infinito. Se presenta por ejemplo, para el tiempo una descripción que mezcla el infinito con lo extremadamente grande, como se presenta en Maza Gómez. El tiempo está representado por seis radios que lo hacen avanzar mientras que otros seis lo hacen retroceder. Dependiendo del avance o retroceso del tiempo, lo mismo hace la cantidad de hombres así como su conocimiento. Los ciclos se dan alternadamente y de forma continua. En estos ciclos se presenta la primera introducción a la noción de infinito:

"El primer período descendente es la "edad extremadamente maravillosa" donde empezamos a encontrar grandes cantidades ya que se dice dura 400 billones de océanos de años. Hay que tener en cuenta que un océano de años equivale a cien millones de veces cien millones de palyopamas, término que a su vez designa un período de incontables años. El palyopama es en realidad una aproximación a la noción de infinito, considerando que ya se presenta el hecho de que haya otros infinitos superiores, como el océano de años."

(Maza Gómez, 2002)

La idea de incontables años, asociada al término palyopama, como dice el autor, se puede asociar a la noción de infinito, a una primera aproximación de la imposibilidad de contar, no hay número para medirlo.

Además de poder describir al infinito, los jainas logran también determinar que hay distintos tipos de infinitos, aunque lo hacen de una manera distinta a lo que después se logrará con la teoría de los números transfinitos de Cantor a fines del siglo XIX.

> *“Pues bien, dentro de su afán clasificatorio, el filósofo jaina concibe los números habituales denominándolos numerables (samkhyata) y dividiéndolos en tres niveles: mínimos, intermedios y máximos. Esto permite llegar a un número máximo numerable N, el llamado en la matemática occidental primer número transfinito, construido por George Cantor a finales del siglo XIX.*
>
> *[...] Pero después de los números innumerables aún existen los infinitos (ananta), divididos en casi infinitos, verdaderamente infinitos e infinitamente infinitos. Este ananta que está presente frecuentemente en la literatura jaina es descrito en ella como: “Aquel número que no se agota por la sustracción continua por un tiempo sin fin””*

(Maza Gómez, 2002)

Esta civilización logra distinguir distintos infinitos, logra lo que la civilización occidental negó hasta después de la teoría de Cantor. Aún más, lograron determinar la relación directa entre el infinito y un cociente de denominador cero.

> *“La palabra sánscrita cuyo significado es infinito es ananta. Había sido empleada anteriormente para designar diez millones, y también curiosamente, con anterioridad para denominar al cero. Esta es una clara muestra de la relación existente entre dos conceptos tan distintos. En la mitología hindú designa una gigantesca serpiente que simboliza la eternidad y la inmensidad del espacio. Ananta, el señor de los infiernos, es representado como una serpiente enroscada sobre sí misma en una especie de "8" acostado o en la repetición de este símbolo, sobre la que muchas veces descansa Vishnú.*

En 628 d.C., el matemático y astrónomo indio Brahmagupta habla del infinito matemático, al que llama khachheda, que define como la "cantidad cuyo denominador es cero".”

(Crespo Crespo, 2002, p. 530)

Se ve además, que esta cultura logró asociar al infinito una imagen, que además, es similar a la que se utiliza en la actualidad y que se atribuye a John Wallis, la lemniscata.

Luego de esta breve reseña se puede ver en el desarrollo logrado por los jainas algunas de las ideas que perduran en la actualidad a nivel popular:

- El tiempo, el mundo, el espacio son elementos de la realidad que pueden calificarse de infinitos
- Los números muy grandes y el infinito se confunden, la idea de las distancias recorridas en parpadeos y el tiempo que demoran en acabarse las hebras de lana de los corderos, son grandes cantidades, pero no infinitas.
- El palyopama, lo incontable, aquello que no puede definirse con ningún número, se asocia con el infinito.

El infinito para los griegos

Los griegos fueron en occidente los primeros en interesarse por el infinito. Si bien el planteo que se hace del mismo no coincide con el infinito matemático actual, fue una concepción que se mantuvo durante más de dos mil años.

“Los primeros griegos habían llegado al problema del infinito en una etapa temprana en su desarrollo de la ciencia y las matemáticas. En su estudio de la materia hicieron la pregunta fundamental: ¿se puede dividir de forma continua la materia en trozos más y más pequeños o se alcanza una

pieza tan diminuta que no puede dividirse aún más? Pitágoras había argumentado que "todo son números" y su Universo estaba hecho de un número finito de números naturales. Entonces llegaron los Atomistas que creían que la materia estaba compuesta de un número infinito de indivisibles. Parménides y la Escuela Eleática, con Zenón incluido, argumentaban contra los Atomistas. Sin embargo las paradojas de Zenón demuestran que ambos creían que la materia es continuamente divisible y la creencia en la teoría atómica llevó a ambos a aparentes contradicciones.”

(O’Connor & Robertson, 2002)

La composición de la materia por indivisibles, un mundo compuesto por números. Los griegos intentaban explicar el mundo que los rodeaba y su composición desde la filosofía, y la matemática, que se mezclaban más de lo que se distinguían una de la otra. El infinito surge como una explicación a lo inexplicable, surge como un argumento para desacreditar otros argumentos menos convincentes. Las paradojas de Zenón surgen del infinito, y provocan la desestabilización de las ideas pitagóricas.

“Mediante el razonamiento de Zenón, la carrera no llega a terminar ni Aquiles logra alcanzar a la tortuga. Sin embargo, todos sabemos que en la práctica esto no es así. Entonces, ¿cuál es el engaño? Zenón explicó que el problema era que el movimiento no existe, sino que es un engaño de nuestros sentidos. Pero en realidad, el problema es que estamos analizando las distancias recorridas a través de este movimiento como una serie, mientras que olvidamos que el tiempo es continuo. Es el tratamiento discreto del movimiento el que ocasiona la paradoja.”

(Crespo Crespo, 2002, p. 531)

No es el infinito ni su existencia lo que provoca las paradojas de Zenón, sino el tratamiento que Zenón hace del mismo. Los griegos no lograron avanzar en el desarrollo de una teoría del infinito. Inclusive Aristóteles no se ocupó demasiado de este tema. Su única aportación en este sentido fue una de las ideas que más persiste en la actualidad: la distinción entre infinito actual y potencial, y la negación del infinito actual.

> *"La principal objeción de Aristóteles a Zenón, consistió en la distinción entre infinito por suma e infinito por división. Si se considera una unidad de longitud y se la suma infinitas veces, se obtiene una distancia ilimitada no recorrible en un tiempo finito. Pero si se prefigura lo ilimitado conforme a un procedimiento "en cierto modo opuesto", como el llevado a cabo por Zenón, dividiendo la unidad de longitud en infinitos intervalos, entonces la infinitud puede considerarse agotable en un intervalo limitado de tiempo. Los matemáticos griegos a partir de Aristóteles, concibieron el infinito sólo en su esencia potencial."*

(Crespo Crespo, 2002, p. 532)

Estas ideas se mantienen a lo largo del desarrollo de la matemática griega y son sólo los matemáticos atomistas, como Demócrito, Epicuro y Lucrecio, los que aceptan el infinito actual, percibiendo el universo y los átomos que lo forman son en sí infinitos. (Crespo Crespo, 2002).

Pueden tomarse del estudio que los griegos hacen del infinito algunas ideas que persisten en la actualidad:

- El infinito potencial se acepta, la recta, los números, pueden continuar infinitamente
- El infinito actual en cambio, provoca rechazo: el conjunto de los números naturales es infinito porque puede continuarse, para cualquier número que se piense, pueden encontrarse otros mayores a él. Sin embargo la idea de ser infinito como un todo presenta dificultades.

El infinito y la religión

El cristianismo contribuyó a la discusión sobre el infinito. Particularmente adjudicando a Dios la cualidad de ser infinito: ¿de qué otra manera podría comprenderse que todo lo sabe, todo lo ve y esté en todos lados al mismo tiempo? No sólo el poder de Dios es infinito, él es infinito en acto. Uno de los representantes del catolicismo que trabajó sobre esta cuestión es San Agustín:

> *"San Agustín, el filósofo cristiano que trasladó gran parte de la filosofía de Platón al cristianismo a principios del siglo V d.C, argumentaba en favor de un Dios infinito y también un Dios capaz de pensamientos infinitos. Escribió en su trabajo más famoso Ciudad de Dios: "Tal como digo que tales cosas infinitas son pasado en el conocimiento de Dios podrían también saltar precipitadamente este agujero de impiedad, y digo que Dios no conoce todos los números. ... ¿Qué loco diría eso? ... Sería miserable atreverse a presumir que tiene límites en su sabiduría"."*
>
> (O'Connor & Robertson, 2002)

Dios conoce todos los números, todos al mismo tiempo, los entiende como un conjunto infinito en acto, porque él es infinito en acto y él es el Creador. Pero nada fuera de Dios y su poder y su conocimiento son infinitos, y sólo ellos.

Otros representantes de este pensamiento son Robert Grosseteste y Gregorio de Rimini:

> *"El obispo inglés Robert Grosseteste, en el mismo siglo, afirma que el único que puede manejar el infinito es Dios, pues para Él los infinitos son finitos.*
>
> *Por su parte, Gregorio de Rimini, en el siglo XIV, se apoya en Dios para demostrar la existencia del infinito. El infinito en acto existe pues es*

pensable, por lo que Dios tiene que haberlo pensado y si lo pensó ya es acto. Afirma que no se puede hablar de todo y parte en el caso del infinito, pues la parte de un infinito puede ser infinita y no tiene sentido comparar infinitos."

(Crespo Crespo, 2002, 532)

Otros representantes del cristianismo, en cambio, negaron la existencia del infinito actual. Entre ellos, Tomás de Aquino, quien niega la existencia del infinito actual dado que el número infinito no existe, y si él no existe, no existe conjunto alguno de infinitos elementos, considerando que un conjunto se asocia con la cantidad de elementos que a él pertenecen (O'Connor & Robertson, 2002).

El dogma de fe, el poder infinito de Dios, puede interpretarse como la representación que un alumno hace de sus sentimientos: el amor a los padres es infinito, infinito en acto. Lo es de por sí, no sólo porque es posible extenderlo hasta que sea infinito: es el único infinito actual que se acepta, aquel que se identifica con los sentimientos.

El infinito occidental

Se consideran a continuación las ideas de algunos de los pensadores más importantes del mundo occidental. Hasta aquí las ideas de los griegos se mantenían sin mayores cambios, hasta que surgen cuestiones que considerar.

Galileo Galilei, por ejemplo, en el año 1600, de manera ambigua, niega la idea del infinito por ir en contra de la razón, del sentido común. Galileo observa que puede establecerse una correspondencia entre los puntos que forman dos segmentos de distinta longitud, es decir, observa que en el caso de dos segmentos, el todo no tiene porqué ser mayor que una de sus partes: eso podía provocarlo el infinito y no coincidía con las ideas de la intuición. Sin embargo, a pesar del rechazo que el infinito le generaba, acepta que la recta es infinita (infinita en acto) y que está constituida por un número infinito de puntos (Ortiz, J., 1994).

Hacia mediados del siglo XVII, Newton y Leibniz con sus trabajos, hacen resurgir las contradicciones detrás del infinito que se arrastraban desde hacia 1500 años. El uso de las cantidades evanescentes de Newton y el uso de los diferenciales de Leibniz eran discutidos. Y a pesar de que ambos conceptos se relacionaban con el infinito actual, ninguno de los dos intenta definirlos, es más, se mantienen dentro de la “tradición del infinito aristotélico”. (Recalde, 2004).

Uno de los críticos más fuertes de los trabajos de estos dos matemáticos, fue Berkeley:

> *“En su libro El Analista, publicado en 1734, Berkeley desnudaba los problemas de rigor de cálculo. En este texto plantea serios reparos al uso de aquellos aspectos ligados a la palabra infinito, específicamente al infinito en acto. Para Berkeley los infinitesimales y los infinitesimales de los infinitesimales llevaban a inconsistencia.*
>
> *[...] Para Berkeley los matemáticos no eran coherentes, pues al comienzo usaban los infinitesimales en los denominadores por ser diferente de cero, pero al final, cuando aparecían como sumandos, simplemente los hacían iguales a cero por tener un valor despreciable. Berkeley los denominaba jocosamente “los fantasmas de las cantidades evanescentes””*
>
> (Recalde, 2004, p. 3)

Las discusiones de Berkeley se siguen escuchando en las aulas en cuanto nos adentramos en el tratamiento del análisis matemático. Y a nuestros alumnos, por lo general, no se les aceptan.

Leibniz deja dentro de su trabajo, poco antes de morir en el año 1716, algunas otras ideas que podemos rescatar en las aulas, si nos detenemos a discutir y a escuchar, siempre que el clima contribuya a la no censura de las ideas.

Como se cita en Recalde 2004:

“Cuando discutía en Francia con el Abat Gallois, el padre Rouge y otros, les manifesté que no creía que hubiera magnitudes verdaderamente infinitas ni verdaderamente infinitesimales: que sólo eran ficciones, pero ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente. Pero como el señor Marqués de L’Hospital creía que por ello yo traicionaba la causa, me rogaron que no dijera nada, aparte de lo que había dicho en una parte de las Actas de Leipzing; con placer accedí a ese ruego (Leibniz, 1716)”

(Recalde, 2004, p. 4)

El primero en lograr una salida decorosa del tema de los infinitesimales es Cauchy en 1821, cuando comienza con su conceptualización de límite. A través del límite, logra Cauchy incorporar las ideas de infinitamente pequeño e infinitamente grande, especialmente destacable es la utilización en su definición de las inecuaciones. (Recalde, 2004)

A partir del concepto de límite, Cauchy busca entonces darle entidad matemática al infinito, por lo que afirma:

“Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que desciende por debajo de cualquier número dado, esta variable deviene lo que suele llamar un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene al cero por límite.

Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que ascienden por encima de cualquier número dado, esta variable tiene por límite al infinito positivo, indicado por el signo ∞, si se trata de una variable positiva, y al infinito negativo, indicado por la notación $-\infty$, si se trata de una variable negativa. “

(Recalde, 2004, p. 5)

El primero en intentar fundamentar la noción de infinito actual fue Bernhard Bolzano quien en el siglo XIX acepta la biyección como una forma de equivalencia entre dos conjuntos, sean ellos finitos o infinitos y acepta que en el caso de los conjuntos infinitos, el todo pueda ser equivalente a una parte de ellos mismos, definición que luego toman Cantor y Dedekind para fundamentar sus trabajos. De esta manera es Bolzano el primero en sentar las bases para la posterior creación de la teoría de conjuntos (Ortiz, 1994).

Se puede ver en esta sección cómo el infinito, los infinitesimales y todo lo asociado a ellos ha conflictuado a grandes científicos, cuyos aportes a la matemática son indiscutibles. Y se puede también ver cómo las ideas que surgen, los conflictos, las dudas e incertidumbres, son las mismas que se censuran en las clases de matemática ¿Cuántas veces se han escuchado alumnos buscando sentido a la idea de un límite cuando la variable tiende al infinito? ¿Quién no se ha encontrado con estudiantes que ven en los infinitesimales "fantasmas de las cantidades evanescentes"? Leibniz calla para "no traicionar a la causa", no cree en el infinito ni en los infinitesimales, pero no lo dice, igual que los alumnos que callan para aprobar una materia y poder seguir con su educación superior, que tal vez los aleje del infinito matemático sin sentido.

Los transfinitos de Cantor

Es recién a fines del siglo XIX en que Cantor desarrolla una teoría que permite fundamentar el infinito. Su primera tarea fue buscar que el infinito actual, y los conjuntos infinitos fueran aceptados con sus peculiaridades: su comportamiento distinto a aquel de los conjuntos finitos no implicaba que fueran inconsistentes, sino que su aritmética no era la de los primeros y debía ser definida. Asume también que la distinción entre infinito potencial e infinito actual era innecesaria: la aceptación del infinito potencial implica la existencia de un infinito actual al que se "completa" (Ortiz, J., 1994).

Siguiendo la tarea comenzada por Bolzano, Cantor toma como herramienta de comparación de conjuntos infinitos la biyección. Si dos conjuntos pueden ser puestos en biyección entonces son equipolentes, es decir, tienen la misma potencia. La idea de potencia le permite a Cantor luego hablar de número cardinal. (Ortiz, 1994).

La justificación de que los números transfinitos debían ser incluidos en la matemática se basaba en que su naturaleza y su status era ontológicamente el mismo que el de los números irracionales, además de generarse por procesos similares y en función de conjuntos infinitos. (Ortiz, 1994).

> *"Para Cantor, lo más importante era desarrollar una teoría satisfactoria de los números irracionales, evitando caer en el círculo vicioso de definir los números reales como límites de sucesiones convergentes sin haber definido de antemano un conjunto al cual le pertenezcan dichos límites [...] se propone desarrollar una teoría de los irracionales sin presuponer su existencia"*
>
> (Recalde, 2004, p. 7)

Cantor define entonces el concepto de potencia como medio que surge de la biyección al comparar conjuntos.

> *"Se dice que dos conjuntos M y N son de la misma potencia si a todo elemento de M corresponde un elemento de N, y recíprocamente, a todo elemento de N corresponde un elemento de M"*
>
> (Cantor, 1882, citado por Recalde, 2004, p. 9)

Se definen entonces los conjuntos numerables aquellos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. El conjunto de los números reales tendrá luego la potencia del continuo (c).

En las ideas de Cantor también se mezclan la filosofía, la religión y la matemática. Como se plantea en Ortiz:

“Cantor consideraba tres contextos donde surge el concepto del infinito actual: “primero cuando es realizado en la forma más completa, en un ser independiente de otro mundo, en Dios, al cual llamo el Infinito Absoluto o simplemente Absoluto; segundo cuando ocurre en lo contingente, en el mundo físico; tercero cuando la mente lo aprehende en abstracto como una magnitud matemática, número o tipo de orden. Quiero hacer un claro contraste entre el Absoluto y lo que yo llamo Transfinito, es decir, los infinitos actuales de las dos últimas clases, los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por lo tanto relacionados con lo finito”

(Cantor, 1932, citado en Ortiz, 1994, p. 67)

La idea de infinito absoluto se relaciona con la búsqueda del Creador, la búsqueda de Dios, en esta categoría sólo entran Dios, el conjunto de todos los conjuntos y Ω, el último cardinal. (Ortiz, 1994)

Cantor se da cuenta de que los racionales eran numerables, es decir, coordinables con los números naturales, pero nada podía decir sobre la numerabilidad de los números reales. Finalmente, Cantor logra probar que los reales son un conjunto no numerable. (Ortiz, 1994).

Cantor logra finalmente dar entidad de objeto matemático al infinito, a pesar de su lucha (interna y externa) para lograr su objetivo, el aporte que hace a la matemática es innegable. Sin embargo, también en su trabajo se mezclan las cosas: los cardinales, los conjuntos y Dios, son parte de la misma categoría. En infinito no sólo es matemático, es además religioso, y por ser religioso, es social.

El infinito en el mundo físico

Desde la antigüedad, ya en tiempos de Aristóteles, se tenía la idea de que el tiempo y el espacio debían ser infinitos, y cualquier intervalo de tiempo o espacio, puede dividirse infinitamente. Sin embargo hemos llegado en la actualidad a la aceptación de que no podemos percibir al infinito.

> *"Todo lo que podemos decir del espacio físico es que no hay pruebas conclusivas de que todo en el universo sea finito, y por lo tanto el infinito continua siendo una posibilidad ontológica."*

(Ortiz, 1994, p. 75).

En el universo matemático la idea de un tiempo infinitamente divisible, considerado como un número infinito de instantes, puede considerarse correcta. En la física, sin embargo, esto no ocurre. La idea de infinitésimo en la física puede asociarse a la posibilidad de que la materia sea infinitamente divisible. (Ortiz, 1994).

Algunas ideas de la actualidad

Por lo general la idea de infinito que aparece en el imaginario colectivo es poética o filosófica, relacionado a amores u odios inconmensurables, a sentimientos y sensaciones y descripciones de objetos que exceden la posibilidad de ser puestos en palabras, algo infinito suele ser algo indescriptible, para lo cual, todos los adjetivos resultan escasos. Y de esta manera ha aparecido también en la historia de la ciencia.

Este tipo de presentaciones de la idea la alejan aún más de la matemática, de su carácter de objeto científico. Y es ésta una de las razones por las cuales su enseñanza y su aprendizaje resultan tan complejos.

Como comenta José Biedma acerca de las ideas de Giordano Bruno

> *"La misión del hombre es el entusiasmo ante la contemplación de esta infinitud: la adoración del infinito del que él mismo participa. En esta*

devoción al infinito –pensaba Bruno- encontraremos la verdadera unidad de las creencias religiosas, más allá de todo dogma positivo.”

(Biedma, s.f.)

El infinito se mezcla con todo y en todo, las creencias religiosas, la observación de la realidad que rodea al hombre, sea ya el universo, o el tiempo. El mismo autor presenta luego algunas ideas al respecto que aportan distintas visiones de lo que el infinito representa desde una visión filosófica.

“La idea de lo infinito, que no puede proceder de mí, que soy finito y falible, ni de la experiencia, presupone su misma existencia.

[...] El que podamos hablar de lo infinito, aun sin entender demasiado lo que decimos, es un gran consuelo, puede que el único motivo de esperanza. Sólo la actualidad de la potencia infinita garantiza la estabilidad del cosmos.

[...] Se puede decir que la idea de infinito no ha cesado de abrirse camino en nuestras razones, a la par que en nuestros corazones. [...] Hace falta algo más que un esfuerzo de imaginación para acercarse al infinito, tal vez se trate de auténtica iluminación.

[...] La correspondencia de doble dirección entre el todo y cada una de sus partes..., ¿no sería el vínculo sagrado entre el Creador y sus criaturas?

[...] Como en la ética también en las matemáticas la intuición deja de ser un recurso frente a la libertad, la más peligrosa de las infinitudes, la más evidente, la infinitud de las encrucijadas, de las opciones”

(Biedma, s.f.)

En estas ideas se habla de muchas cuestiones que en el aula, en la escuela, no se consideran cuando se piensa en el infinito. Se analiza la experiencia de una persona, ligada a su existencia, a su paso por el mundo, finita y acotada. Sin embargo la realidad que rodea a la persona ya existía previo al inicio de la vida, y continua cuando la existencia propia se acaba, aunque ya no sea para uno.

El infinito presente en la razón: como búsqueda de explicaciones, como demanda de racionalidad a lo inexplicable: cuándo empezó todo, cómo, hasta cuándo... Inclusive habla de iluminación: ¿podemos basar el desarrollo de una currícula de escuela media pensando que nuestros alumnos deben ser seres iluminados?

La biyección se relaciona con la relación que el Creador (desde la religión que se lo mire) mantiene con sus “subordinados”. Él es el todo; lo creado, una parte de Él, un “subconjunto propio” de su totalidad. En esa visión, el infinito en acto existe: es el Creador, completo, uno e infinito al mismo tiempo.

El poder que el Creador otorga a sus creaciones, el “libre albedrío” representa el infinito en la realidad del hombre: ¿pero las opciones con que se cuenta son realmente infinitas, o simplemente incalculables? ¿Qué sean incalculables nos hace asociarlas con el infinito: lo que no podemos calcular, lo que aumenta de forma exponencial, es infinito? ¿O simplemente es “infinito” para el ser humano, porque en su naturaleza es un ser limitado?

Otras ideas relacionadas con el infinito aparecen en una de las obras de Ernesto Sábato, *Uno y el Universo* (1995), donde el autor hace un análisis de algunas ideas y términos que provocan discusiones a los hombres. Con respecto al infinito dice:

> *“Es digno de ser meditado el hecho de que, cada vez que es posible, el hombre elimina apresuradamente el infinito. Los griegos, tan amantes de lo mesurado y perfecto, trataron de descartarlo, pues les parecía irracional, impensable e imperfecto. Por desgracia, la realidad se ha visto frecuentemente obligada a refutar a los griegos, y el fantasma rechazado*

por la puerta ha entrado por la ventana, acompañado de varios parientes. La matemática moderna exhibe una considerable variedad de infinitos, como si se hubieran reproducido en el éxodo, como los judíos. Desde luego, todos son inintuibles y jalonan el creciente alejamiento entre el mundo sensible y el mundo matemático. El infinitamente pequeño y el infinitamente grande marcan las fronteras de las zonas prohibidas para el ciudadano. Cuando un enamorado afirma un amor infinito, su forma de hablar debe ser denunciada como una forma filosóficamente irresponsable."

(Sábato, 1995, pp. 79-80)

En esta definición que el autor presenta se reúnen varias de las características que el infinito representa en sus muchas "personalidades": su negación, su existencia, su vida como ente matemático y como idea filosófica, su forma de manifestar sentimientos y su "desconocimiento" para el ciudadano. No es sensible, no es intuitivo, y, según Sábato, no es "para todos".

A modo de reflexión final

Como se plantea en el inicio del capítulo, la búsqueda en la historia del infinito no tiene relación sólo con el devenir del concepto, sino con las preguntas que al ser planteadas, se respondieron a partir del infinito. Esas preguntas, en su mayoría de índole filosófica, son las que se repiten en la actualidad y las que se deben hacer si se desea evocar en los estudiantes, los orígenes del infinito para ellos.

Para los jainas, el infinito se relaciona con una pregunta que aún hoy se plantea: ¿cuándo empezó todo?, ¿hasta cuándo va a durar?, ¿hay algo más allá del espacio? Para ellos, el tiempo es eterno, el mundo es infinito y ha existido por siempre, el espacio lo invade todo. Si bien en la actualidad, la teoría del origen del universo, el big bang, explica alguna de estas preguntas, no se acepta de manera natural: ¿por qué empezó?, ¿cuándo?, ¿cómo se sabe?

Desde la matemática, los jainas empiezan a discutir el infinito, surge la idea de imposible de contar, innumerable, el número imposible de concebir, los incontables años. Y aquí es necesario hacer una distinción: la imposibilidad de contar, ¿tiene que ver con la finitud humana? ¿El infinito es infinito porque el ser humano es finito o es infinito en sí mismo?

Los griegos hacen a través de la filosofía un tratamiento más científico de este concepto, buscan el origen y composición de la materia, su característica propia: ¿se puede dividir infinitamente antes de que deje de ser materia? Los atomistas intentan una explicación de infinitos indivisibles, pero la realidad es que el infinito en sí, el infinito actual, no se acepta. Las rectas pueden ser infinitas porque se pueden extender infinitamente, pero no son infinitas en sí mismas.

La razón impide a la humanidad resolver los conflictos que el infinito arrastra. Se busca entonces, salir a través de lo que la razón no logra explicar: la fe. La religión explica lo único que como infinito no se discute: Dios es infinito, lo es todo. Si hay algo infinito, entonces eso es Dios, su poder. La ciencia no puede explicar antes de Bolzano, antes de Cantor, el infinito. Sin embargo, la religión en general y el catolicismo en particular, se ocupan de él. Y el infinito que se plantea en el poder de Dios, es un infinito "controlador, persecutor": Dios todo lo ve, todo lo sabe, nada se escapa a su poder. Se debe temer el infinito poder de Dios.

Con los orígenes del cálculo, es necesario volver a discutir este concepto desde la ciencia. Surgen los infinitesimales y con ellos las posturas de algunos de los matemáticos más importantes de la historia de la humanidad. El infinito se rechaza: contradice a la razón, el infinitesimal provoca incertidumbre, duda, sospecha de inconsistencia, provoca silencios para no despertar ira en otros pensadores. Esto mismo es lo que se puede observar en las aulas: ¿cuántos alumnos rechazan al infinito matemático?, ¿cuántos descreen los infinitesimales?, ¿a cuántos les parece sospechoso que lo que a veces es importante y no se puede olvidar, a veces es despreciable?, ¿cuántos callan para no enojar a sus docentes? La realidad de nuestros alumnos es como la de Berkeley, Leibniz y otros: pre-Cantoriana. Los estudiantes no conocen a Cantor, los docentes sí, pero en la medida que no se les transmita, lo esperable es que opinen como los matemáticos anteriores a Cantor.

E inclusive Cantor rechaza alguna de las cuestiones que encuentra, el infinito lo sorprende, lo desencaja y lo lleva alo que el hombre busca cuando la realidad lo supera: Dios. Cantor pone en la misma categoría de infinito absoluto al conjunto de todos los conjuntos, al último número transfinito (omega) y Dios. El infinito sigue siendo para el gran teórico del infinito una cuestión de fe.

Para cerrar, se puede reconsiderar lo que Sábato, físico y autor argentino opina al respecto: el infinito fue expulsado, volvió, y volvió con “parientes”, todos inintuibles, el infinito y el infinitesimal está fuera de las fronteras del ciudadano, y hasta para el amor, habría que evitarlo.

En este capítulo, se presentan algunas de las perspectivas que las distintas culturas han tomado en relación al infinito. Se han destacado además algunas ideas que permitirán asociar las respuestas a las indagaciones con los distintos grupos presentados. El estudio de la historia permite no sólo comprender de dónde viene el concepto, sino cómo ha surgido, en la búsqueda de qué respuestas. Y la visión que desde la actualidad, algunos autores comparten.

Las ideas generadoras (o al menos algunas de ellas) se retoman como núcleo para las indagaciones. De igual modo, algunas de las cuestiones más rechazadas, se consideran para provocar situaciones que generen el mismo rechazo en los estudiantes.

CAPITULO V

Ideas asociadas al infinito

Este capítulo está dedicado completamente a la presentación de las entrevistas y encuestas realizadas para indagar sobre las cuestiones discutidas anteriormente. Con el fin de organizarlo, se han dividido las cinco experiencias en tres grupos distintos: El infinito fuera de la escuela, El infinito en la escuela fuera de la clase de matemática y El infinito en la clase de matemática. En todos los casos, las experiencias se realizaron en escuelas medias y en cada una se exponen objetivos, diseño y resultados logrados en cada una de ellas.

El infinito fuera de la escuela

Primera Experiencia: El infinito intuitivo

Objetivo

Se ha establecido en la presentación de este trabajo que las ideas que se asocian al infinito intuitivamente surgen de la vida cotidiana. Y esas son las ideas que reaparecen luego cuando se intenta conceptualizar al infinito dentro de la clase de matemática. Con el objetivo de caracterizar estas ideas se presentó una encuesta cuyo objetivo era, por un lado, buscar en la memoria de los alumnos las ideas más antiguas que tuvieran en referencia a este término, recuerdos de su infancia. Por otro lado, se les pidió que analizaran distintas situaciones habitualmente relacionadas con el infinito y que buscaran fuera de la matemática referencias sobre este tema.

La encuesta presenta primero ciertas imágenes que habitualmente se asocian al infinito. Luego apela a que el encuestado explique las ideas que de niño asociaba al infinito y por último se pide que inventen un símbolo y una imagen para explicar el infinito.

Destinatarios de la encuesta

La aplicación de la encuesta se realizó en un curso de 4º año (16-17 años) de escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina. El nivel socioeconómico del alumnado es medio-alto y académicamente podría situarse por encima del promedio. La encuesta se les presentó como una actividad extra, fuera del currículo del curso y se les dio libertad absoluta para responderla. En ningún momento hubo intervención del docente, excepto para aclarar dudas puntuales que surgía al momento de la presentación de las respuestas: el lenguaje natural es habitualmente rechazado en el aula de matemática, y siendo dentro del horario de clase en que se desarrolló la actividad, se generaron inicialmente dudas al respecto de cómo debían abordarse las distintas temáticas. Se trabajó en pequeños grupos de dos o tres alumnos, dentro de los cuales se abordaron las discusiones con intención de lograr un consenso en las respuestas.

Diseño de la encuesta

1. ¿Cómo explicarían la presencia del infinito en cada una de estas situaciones?

Imagen 1 Imagen 2

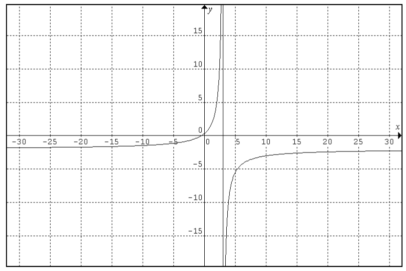

Imagen 3

2. Escriban dos frases como mínimo en que se utilice la palabra infinito y que no se relaciones con la matemática. Explica qué significado tiene ahí esta palabra. (Pueden ser frases que utilizaban de pequeñas o que hayan oído a niños con los que tienen contacto).

3. ¿Cuál es la primera idea que recuerdan haber tenido cuando eran niñas en relación al infinito?

4. ¿Qué cuestiones relacionaban cuando eran niñas con el infinito? ¿Qué cosas poseían la cualidad de ser infinitas? ¿Por qué?

5. ¿Han encontrado en libros, películas, programas de TV, canciones, etc., el tema del infinito? Comentan brevemente en cuáles y expliquen la idea que se presenta en este sentido

6. Propongan algún objeto o elemento matemático que pueda ser definido como infinito y expliquen por qué. De no encontrarlo, justifiquen esta ausencia.

7. El símbolo que representa al infinito es ∞. ¿Cómo lo describirían? ¿Por qué creen que se utiliza esa imagen? Creen otro símbolo y expliquen por qué podría servir

8. Considerando lo que respondieron en las preguntas anteriores, propongan una definición y un dibujo que les permita explicarle a un chico de seis años qué es el infinito.

Resultados de la experimentación

La encuesta fue respondida de la manera esperada, los estudiantes se prestaron a la experiencia y explicitaron lo que creían necesario para que se comprendieran los conceptos a los cuales apelaban.

Con respecto a la primera pregunta, la mayoría de los estudiantes justifica la presencia de la cualidad de infinito en las dos primeras imágenes debido a que "*no se ve el final*". Pero no se animan a decir, excepto en un caso que sea de hecho finito.

> *"Desde lo visual, es infinito, no se ve donde termina ni el mar ni el universo"*
>
> *"Hay millones de estrellas, es imposible contarlas, entonces pareciera que fueran infinitas"*

En el único caso en que se declara que el mar es finito, la justificación es en referencia a ser parte de algo de volumen finito, el planeta, de dimensiones fijas.

> *"El agua del planeta no es infinita porque se puede calcular su volumen en litros. Esto es porque está en un medio, la Tierra, que mantiene igual o con pocos cambios, su volumen, que es finito"*

Con respecto a la tercera imagen, es posible detectar a partir de las respuestas de los estudiantes dos tipos de visiones: el objetivo de presentar una función con asíntotas era que se reconociera el límite de la función. Sin embargo, por la poca familiaridad que hasta ese momento tienen con funciones de este tipo, la mayoría de las encuestadas se quedó con la función en sí, completa, como relación de conjuntos numéricos y no con el cálculo de límites para determinar asíntotas.

Por eso, en esta imagen, todos los encuestados aseguran que es infinita, ya sea la curva, la función o el resultado del límite.

> *"El límite de la función es infinito, porque aumenta a medida que se acerca al valor, y se sigue acercando, así que se sigue agrandando y nunca deja de crecer: es infinito"*

“Todas las funciones son infinitas: no tienen ni principio ni porque para un valor de x siempre hay una valor de y”

“Los números son infinitos, entonces las funciones son todas infinitas”

En el campo de la matemática, evidentemente, resulta más fácil asegurar que algo sea infinito, hay menos temor de equivocarse, el término parece más adecuado, posiblemente se deba esto a las ideas impuestas en la escuela de que “*lo único infinito son los números y las rectas*”.

En la segunda pregunta se pedían frases, referencias al infinito exteriores a la matemática. La mayoría de las encuestadas propone frases muy similares:

“Hasta el infinito y más allá”.

Esta frase pertenece a la película Toy Story, estrenada en 1995, y que, seguramente formó parte de su infancia. Algunas explican el sentido en que se usaba la frase en la película.

“Buzz Lightyear creía que venía del espacio y lo que decía era que iba a recorrer el espacio, que no tiene fin ni principio, es más que infinito”

Otra de las frases que más aparece es *“infinito punto rojo”* y se la recuerda como una frase asociada al juego de buscar el número más grande:

“si alguien te decía infinito, vos decías infinito punto rojo y le ganabas, porque es más grande. El único que le ganaba al infinito punto rojo es el infinito punto de todos los colores, pero ese no se aceptaba, era trampa”.

La búsqueda del último número terminaba entonces con el agregado al infinito de un punto de color, que de alguna manera aumentaba su infinitud. Al ser consultadas los estudiantes que hacen referencia a esta frase, ninguna puede decir porqué es mayor este infinito que otro, todas aseguran que todo el mundo lo decía, entonces debía ser cierto.

Las otras frases que aparecen más frecuentemente son en relación al amor:

“Te quiero hasta el infinito”

“Mi amor por vos es infinito”

Y la explicación tiene que ver con un amor que no se acaba, que no tiene fin, que no se puede medir ni contar, sencillamente es infinito. Este caso podría considerarse el más representativo del infinito actual: no en un amor que se puede seguir produciendo, es, en su naturaleza, infinito.

En la tercera pregunta de la encuesta se pedía a los estudiantes que buscaran los primeros recuerdos que tenían asociados al infinito: la mayoría evoca la búsqueda de dimensiones de grandes extensiones: el cielo, el mar, el espacio, el universo. Sólo una recuerda preguntarse por los números: cuál es el último, dónde se acaban. Aparecen una vez más asociaciones directas a aquello que no termina o no puede asegurarse dónde termina, lo desconocido en su amplitud se considera infinito.

La cuarta pregunta, que buscaba elementos con la cualidad de ser infinitos, generó respuestas semejantes a la pregunta anterior y agrega a los sentimientos: una vez que se sabe que el cielo, el universo, el espacio son infinitos y que no hay nada más grande que lo que es infinito, entonces los sentimientos pasan a tener esa propiedad: no hay nada más grande que el amor, y en general, se hace referencia al amor por los padres. Para una de los estudiantes, la explicación de por qué el universo era infinito tenía que ver con las respuestas poco convincentes que se le daban:

> *“El universo es infinito. Cuando le preguntabas a tus papás o las maestras dónde terminaba, no te podían explicar nada claro. No eran convincentes en lo que decían. Entonces suponés que es infinito si nadie sabe dónde termina”*

La quinta pregunta buscaba referencias al infinito fuera de la matemática y, por su edad y nivel educativo, la mayoría encuentra los mismos ejemplos: la película Toy

Story y algunos cuentos de Borges leídos en la escuela, como *El libro de arena* y *El Aleph.* También hay referencias a novelas televisivas, donde los protagonistas se declaran su amor infinito unos por otros.

La sexta pregunta que apelaba a la búsqueda de elementos matemáticos que fueran infinitos tiene por respuesta los ejemplos clásicos que se dan en la escuela de infinitud: los números y las rectas. Algunas amplían la respuesta incluyendo a las funciones por ser relaciones entre números, y una de ellas hace referencia a la expresión decimal de los números periódicos. Claramente aceptan la infinitud de los conjuntos numéricos, de las extensiones de las rectas (aunque en su representación solo se observa una porción de longitud finita) y la expresión de los números periódicos como una repetición infinita de decimales que nunca termina.

Con respecto a la séptima pregunta, el símbolo es aceptado por la mayoría, excepto en un caso, con una explicación que hace referencia a su continuidad:

> *"Es adecuado porque no se ve dónde empieza ni dónde termina. Es continuo, no lo terminás de recorrer nunca"*

Como símbolo alternativo aparecen círculos que tienen la misma característica que antes nombraron, y también tres círculos superpuestos, como se muestra a continuación, con la misma razón.

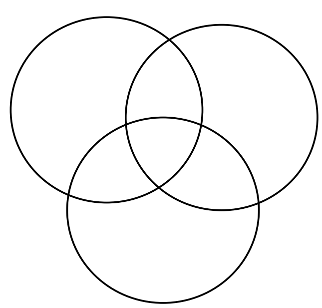

Figura 1

La alumna que rechaza al símbolo plantea que *"no es adecuado porque es cerrado, debería mostrar que sigue siempre"* y propone como símbolo alternativo el siguiente

Figura 2

Finalmente en la octava pregunta se pedía un dibujo y una explicación del infinito y se repiten algunas de las ideas ya presentadas. Algunas de los estudiantes proponen una estrella *"porque no se pueden contar y eso un chico lo entiende"*, otras proponen círculos *"porque no tienen principio ni fin"*, una de los estudiantes hace una flecha en cuatro sentidos, como la que se muestra a continuación *"porque muestra que lo infinito sigue para todos lados".*

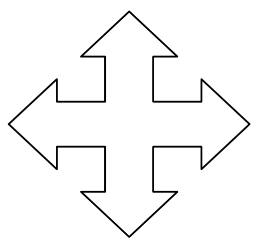

Figura 3

Una además, propone como dibujo un cuadro en blanco y explica que:

> *"lo más fácil de explicarle a un chico es que los sentimientos son infinitos, pero como no se pueden dibujar, dejo un cuadro en blanco"*

Como se ve a lo largo de todas las respuestas aquí presentadas, lo infinito se relaciona con aquello de lo cual no se puede asegurar dónde termina ni donde comienza, lo que no se puede medir ni contar; aún cuando se sepa que el final existe, como en el caso del mar. Por otro lado, las referencias a la infancia están más teñidas de sentimentalismo: el amor a los padres es infinito. Ese infinito en realidad tiene un significado distinto al matemático: es inalterable, no se modifica y no existe nada mayor que él en cuestión de sentimientos. Ha de ser, entonces, infinito.

Segunda Experiencia: El infinito en la literatura

Objetivo

Se ha planteado en la hipótesis de esta tesis que las ideas intuitivas asociadas al infinito se construyen por el mero hecho de ser social de las personas: el contacto con otras personas y con la cultura circundante hacen que cada uno genere en función del infinito una serie de ideas que pueden verse reflejadas, o no, en distintas expresiones culturales como pueden ser la literatura, las películas, la música u otras formas de expresión. El objetivo de esta encuesta es el de enfrentar a los estudiantes con una serie de textos y tiras cómicas en que se tratara al infinito, aunque no de forma matemática, e identificar cuáles son las ideas que ese tratamiento despertaba en ellas. A partir de ideas presentadas en textos, se espera que puedan salir a la vista las ideas intuitivas que forman parte del modelo de los estudiantes, evidenciadas a partir del análisis o crítica que puedan hacer de las ideas presentadas por otros.

Destinatarios de la encuesta

El formulario fue aplicado a un curso de 5º año (17-18 años) de una escuela media de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina. La escuela es la misma en que se hizo la encuesta descripta y analizada en el apartado anterior, aunque este curso es un curso de la modalidad de Bachillerato en Letras, por lo cual el conocimiento que tienen de matemática es menos profundo, dado que tienen una carga horaria de sólo 80 minutos de clase de matemática por semana (dos horas cátedra) contra seis horas cátedra que tiene la modalidad en Ciencias, destinatarias de la encuesta anterior. La aplicación de esta encuesta en la modalidad Letras se justifica en el gusto que estas estudiantes presentan frente a la literatura en general y la formación que han logrado en análisis de textos.

Diseño de la encuesta

La encuesta consiste de cuatro textos de diversa naturaleza: *El libro de Arena* (Borges, 1998, pp. 130-137), *La paradoja de Tristam Shandy* (Palacios y otros, 1995, p. 23), *El hotel de Hilbert* (Palacios y otros, 1995, p. 29) y *El infinito* (Moledo, 1994, pp.194-195). Y finalmente se les presentan cinco tiras cómicas de *Clemente* (Caloi, 2000) publicadas en el diario Clarín.

En el Anexo 1 se encuentran completos los textos que se utilizaron para realizar esta encuesta.

Para cada uno de los cuatro primeros textos se les pide que analicen cuál es el elemento matemático que se trabaja y si están o no de acuerdo con el enfoque que se le da. Para el último de los textos se pide que, en función de la explicación que se da, reconsideren las respuestas de los puntos anteriores y las tiras cómicas se presentan simplemente para que las lean y opinen sobre la idea popular que en ellas se presenta. En la consigna oral que se dio a los estudiantes se les pidió que fueran tan explícitas como lo consideraran necesario, dado que los trabajos serían leídos no sólo por la profesora de matemática, sino también por la profesora de literatura del curso.

Resultados de la experimentación

El primer texto, *El libro de Arena,* es un relato que la mayoría de los estudiantes comprende fácilmente, en donde el autor toma al infinito como tema central para esta obra. Y en su mayoría, además, coincide con el tratamiento que hace del tema.

> *"El tema que se trabaja es el infinito y es muy claro cuando habla de que no hay ni primera ni última hoja, es como con los números enteros, por más atrás o adelante que vayas no se encuentran los extremos; pasa que con el libros es como inimaginable que no se pueda hallar la primera hoja ni la última, pero como recurso es muy bueno y es muy clara la idea de haber infinitas páginas"*
>
> *"Es claro que el elemento matemático que se trabaja es el infinito, lo explica con varias comparaciones distintas: que no hay primera ni última hoja, que una página no se puede volver a encontrar, que la numeración es arbitraria y no se repite, es más, el nombre del cuento, El libro de Arena, hace*

referencia a la comparación entre las hojas y la arena, aunque la arena no es infinita pero es imposible encontrar el primer o último grano"

Además de analizar las analogías que se hacen para explicar cómo se utiliza el infinito como recurso, los estudiantes encontraron también algunas cuestiones que les resultaron contradictorias.

"No es claro cómo puede ser que infinitas hojas, que tienen un espesor aunque sea mínimo, estén dentro de un libro que se puede manejar. Él dice que lo va a poner en el lugar donde sacó la biblia, y la biblia tiene una cantidad finita de hojas"

"En un momento el autor dice que guarda el nuevo libro detrás de una copia de Las Mil y Una Noches, y creo que lo hace porque justo ese libro tiene en su título otro número, 1001, que es finito y entonces no se entiende cómo un libro finito puede esconder a un libro infinito"

"No tiene sentido lo que dice del temor que le daba quemarlo, el libro tiene un tamaño determinado, el fuego no puede quemar cada hoja, quema todo el libro junto, por más infinito que sea... aunque se entiende lo que quiere decir".

"Inclusive, el vendedor le llama un libro diabólico y se lleva una biblia en su lugar, es como si quisiera resguardarse del poder del libro con la biblia"

Evidentemente, es claro que la idea de infinito del autor se comparte: no hay principio, no hay fin, los elementos no se repiten, se pueden mezclar y siguen siendo infinitos. Sin embargo, la idea de algo infinito de dimensiones finitas es incompresible: la idea de un segmento de infinitos puntos no es algo incorporado o natural, no tiene sentido hablar de algo de dimensiones finitas que incluya infinitos elementos. Los conjuntos infinitos deben tener dimensiones infinitas: deben poder seguir infinitamente. La idea que se observa compartida claramente es la del infinito potencial, pero no el infinito actual, no es posible que algo sea infinito "hacia adentro".

El segundo texto presentaba a los estudiantes una idea de infinito mucho más fácil de comprender y que todas observaron como clara y correcta.

> *"La idea que se plantea es la del infinito, pero el del infinito como los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5... Y es claro lo que se quiere hacer entender: tanto con la numeración de los días como el de los años se puede extender infinitamente. Obviamente es un relato que pretende explicar este aspecto de infinito del tiempo, ya sea de los días como de los años"*

> *"El autor es muy claro con lo quiere decir, tanto los días como los años se siguen sucediendo, lo que ocurre es que sería imposible llegar al final del relato porque el material se acumula cada vez más... por cada día que escribe en un año se agregan otros 364 para escribir"*

La idea de infinito que se explica en este relato y la forma en que está presentado es muy clara: la idea de infinito potencial. El infinito potencial es el infinito intuitivo: puedo seguir enumerando días y años indefinidamente sin problemas, esta idea de infinito es la que se acepta desde la intuición: lo infinito es infinito porque existe la posibilidad de seguir infinitamente.

El tercer relato, *El Hotel de Hilbert*, muestra una situación que se da con los conjuntos infinitos que niega la razón: no es lógico que a un conjunto se le agreguen más elementos y la "cantidad" de elementos no varíe. Frente a este texto se encontraron respuestas diversas: por un lado se acepta lo que el autor plantea como correcto desde lo matemático, pero en la situación planteada, de la vida real, se niega el sentido que tiene el texto.

Una de los estudiantes plantea:

> *"La idea de infinito que aparece acá es distinta a las anteriores, porque lo que hace el autor es dividir al conjunto en partes iguales (las habitaciones pares y las impares) y ocupar unas con las personas que ya estaban y las otras con las que llegan. Está bien lo que hace porque hay la misma*

cantidad de números pares que de impares, pero no tiene sentido el planteo: si hay infinitas personas cambiándose de habitación no hay última persona, entonces nunca terminan de acomodarse. Es ilógico el planteo, no tiene sentido..."

Se puede observar aquí como la intuición, el negar que un subconjunto propio puede tener el mismo cardinal que el conjunto que lo contiene, pone en tela de juicio la explicación que se presenta para esta característica de los conjuntos infinitos: se acepta pero... No se encuentra en la explicación evidencia suficiente para validar lo que se afirma. Lo que el autor explica se toma como un juego de palabras más que como una característica de los conjuntos infinitos.

Otra de las respuestas más llamativas con respecto a este texto es la negación de que se puedan ubicar todas las personas que había antes en la mitad de las habitaciones que ocupaban:

"Lo que se plantea no tiene sentido: el autor dice que todas las habitaciones están ocupadas y llegan infinitas personas para ubicarse, entonces los que ya estaban ahora ocupan las habitaciones pares y los que llegan las impares; pero si todas estaban ocupadas y ahora las quiero ubicar en la mitad no entran, por más que los números pares sean infinitos: ya estaban todos usados y también estaban usados los impares, y ahora con la misma cantidad de habitaciones pretendo ubicar al doble de pasajeros. No se puede, lo que el autor hace es jugar con la idea de infinito, pero en el fondo es como lo de las paradojas de 1º Año, no lo puede explicar entonces hace un relato tipo fantástico para que se vea lo difícil que es..."

Vale aclarar que la alumna hace referencia a las paradojas de Zenón, que se ven en primer año como una curiosidad aunque no se profundiza en su tratamiento. Lo que se observa aquí es que en un conjunto infinito deben cumplirse las mismas propiedades que se dan en los conjuntos finitos: si duplico la cantidad de elementos, el cardinal del conjunto cambia. La transferencia de propiedades es clara y se entiende el relato como un juego de palabras para desorientar al lector: no hay matemática en este texto, simplemente hay un relato fantástico.

Por último, se considera una de las respuestas que toma ciertas cuestiones del relato para negar su aceptación:

> *"El conserje dice que llama a todas las habitaciones y le dice a cada uno de los ocupantes que se pase a la par que le corresponde multiplicando su número de habitación por dos, y cuando estos se movieron, los nuevos se ubican en las impares, pero ¿cómo puede llamar a todos si son infinitos? Si espera a que todos se muevan para poner a los nuevos en su lugar, ¿cuándo empiezan a ubicarse? Lo que plantea es ilógico, no tiene sentido: nunca terminaría de llamar, por lo cual nunca terminarían de cambiarse de habitación, por lo cual nunca los nuevos estarían ubicados en su lugar... Lo hace para confundir pero si uno analiza detenidamente el proceso, se da cuenta que el planteo que hace no es válido"*

Esta respuesta toma la idea intuitiva de infinito y en función de ella niega todo el planteo que el autor hace: si algo infinito es algo que no termina, entonces ya desde que empieza a llamar a cada habitación, nada más que dependa de la finalización de este paso puede ocurrir, porque ese primer proceso es infinito. Desde ese punto niega todo lo que se propone: no es posible ubicar al doble de pasajeros en el mismo hotel.

Para el cuarto texto, sin embargo, los estudiantes aceptan algunas de las cuestiones que hasta aquí habían negado, aunque aún en este caso, la evidencia para aceptar lo que se dice no alcanza: no llegan a comprender lo que se plantea, pero por ser un texto más "científico", más cercano a la matemática, se lo acepta, el *contrato didáctico* las obliga.

> *"Dice más o menos lo mismo que los otros textos, pero desde el principio plantea que lo único infinito son los conjuntos de números, entonces se entiende que todos los otros cuentos tuvieran errores; porque toman para hablar de infinito cosas que no son infinitas. No se entiende bien la parte que habla de los números transfinitos y los aleph y además dice cosas de las fracciones y los puntos de la recta pero no las explica: no da ejemplos"*

> *"En este cuento se dice lo mismo que en los otros al principio pero después empieza con cosas más difíciles y no las explica... lo de las fracciones, por ejemplo: dice que hay la misma cantidad de fracciones que de números naturales, pero no lo explica. Y no puede ser porque entre las fracciones hay infinitas fracciones (eran densos esos ¿no?) y entre dos naturales no hay nunca infinitos, por ejemplo entre 5 y 8 hay dos números (6 y 7) pero si yo lo escribo como fracción, tipo* $\frac{10}{2}$ *al 5 y* $\frac{16}{2}$ *al 8, entre esos hay infinitos, que con los naturales no estaban y no pueden estar en otro lado porque están todos ordenados, entonces no puede haber la misma cantidad. Es lo mismo que con lo del hotel, pero en lo del hotel te lo explica, acá no..."*

Se puede observar que siguen quedando sospechas de la veracidad de lo que se dice, y sólo se animan a discutir lo que pueden fundamentar matemáticamente, como en el segundo caso. Nada de lo que se plantea es evidente, nada tiene sentido: se cree porque está bien elaborado el relato, se cree porque está presentado como una actividad de clase, donde se asume que el conocimiento que se presenta es verdadero y no se cuestiona su validez, pero la aceptación absoluta no llega en una actividad como esta. Se puede aceptar parcialmente con el único objetivo de completar la tarea, pero no se modifica, prácticamente en ningún caso, la idea no matemática que hay respecto al infinito. Persiste y se explicita en la mayoría de los casos que no hay evidencia concreta y matemática para entender lo contrario.

Finalmente, los chistes de Clemente no generan discusión, simplemente muestran para los estudiantes lo que la gente cree en su vida diaria.

> *"Los chistes están buenos, es lo que todos piensan. Y lo del ocho acostado seguro que viene de otro lado (que se use ese símbolo para infinito) pero está bien pensado, si yo tengo que explicar cómo es el símbolo, es un ocho acostado"*

“La discusión entre Clemente y La Mulatona está buena porque discuten lo que pensamos todos: cuál es el último número, porque el símbolo es un ocho acostado... Las respuestas que dan no son matemáticas, pero son las que todos pensamos”

Los textos abren la discusión a algunas cuestiones referidas al infinito, sin embargo no cambian las ideas ya formadas en función a este tema. Desde la información matemática que tienen sobre qué es el infinito (lo que no termina nunca) buscan hacer una lectura más crítica que comprensiva, buscan desacreditar algunos de los aspectos que aparecen en los relatos para poder entonces, continuar con sus ideas, que sí comprenden. El infinito potencial se acepta, el relato de Tristam Shandy, es uno de los que menos discusiones genera. El relato del Libro de Arena, en cambio, desafía el conocimiento que han construido: si algo es infinito, no puede entrar en un libro de dimensiones finitas. Se busca entonces algo en donde el autor se haya “equivocado” para desacreditar lo que no pueden comprender.

El infinito en la escuela fuera de la clase de matemática

Tercera Experiencia: Las Contradicciones detrás del Infinito

Objetivo

Esta experiencia tiene por objetivo estudiar las reacciones de los alumnos de escuela media al enfrentarse a las contradicciones que surgen entre las ideas intuitivas y las ideas matemáticas del infinito. Con el fin de lograr este objetivo, se analiza la argumentación que el alumno de escuela media puede lograr respecto a las imágenes mentales que se ha hecho respecto de una temática.

El contrato didáctico impuesto por la situación escolar y la tradición de rigor de la matemática obligan al alumno a respetar los formatos y estructuras de la comunicación de ideas matemáticas. Sin embargo, en determinadas circunstancias las imágenes mentales no pueden ser puestas en palabras o términos de acuerdo a estas restricciones. Es por eso que se ha buscado a lo largo del diseño de la actividad llevar a los alumnos a expresarse de manera “no matemática”, con el fin de poder observar, lo más fielmente posible, lo que realmente piensan y conjeturan en relación al infinito.

Al enfrentarse con los conjuntos infinitos, uno de los primeros obstáculos epistemológicos que aparecen es el de poder reconocer que en estos conjuntos el todo puede ser igual a una de sus partes. Este es uno de los puntos iniciales que nos muestran que estos conjuntos tienen características muy distintas de las que se puede hallar en los conjuntos finitos, y que, en particular, pueden contradecir lo que obtenemos de nuestra intuición.

La finalidad matemática de esta actividad es presentar a los alumnos con una serie de situaciones que los conduzcan a reconocer esta peculiaridad.

Destinatarios de la encuesta

La actividad se resolvió en un grupo de 5º año de escuela media (17-18 años) en la Ciudad de Buenos Aires, Argentina. El grupo está formado por doce estudiantes y tienen en su educación una orientación de Bachillerato en Ciencias, con una carga horaria en 4º y 5º año de seis horas cátedra de 40 minutos cada una de matemática por semana.

El nivel académico general del grupo es medio-alto, destacándose las habilidades algorítmicas por sobre las situaciones no estructuradas, como la que se presentó para resolver. La actividad se resolvió en un módulo de dos horas cátedra (80 minutos), pidiendo a los estudiantes que trabajaran de forma individual, y se terminó con la etapa de institucionalización para aclarar los conflictos que surgieron al finalizar la encuesta.

Diseño de la actividad

La actividad se plantea en dos etapas. En la primera parte se permite que los estudiantes respondan a preguntas abiertas sobre la base de la resolución de situaciones sencillas que no presentan dificultades al nivel en que los estudiantes están trabajando. En esta etapa se desea establecer las ideas intuitivas con que los estudiantes cuentan sobre la comparación entre los cardinales de conjuntos finitos e infinitos y algunos de sus subconjuntos propios.

En la segunda parte se plantea a través de un ejemplo la biyección como una posibilidad para comparar conjuntos cuando estos son demasiado grandes o infinitos; y se intenta con el final de la actividad que los estudiantes contradigan las conclusiones alcanzadas anteriormente. Las preguntas abiertas que aquí se presentan tienen por objetivo no sistematizar el tipo de respuesta, sino llevarlas a expresarse a través de un texto, una argumentación presentada en lenguaje natural.

Primera Parte

Pregunta 1

1. Considera el conjunto A de los números naturales sin el cero menores que 20

a. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación. Si tu respuesta es no, explica por qué.

$A = \{$

b. Considera ahora el conjunto A’ de los números pares que pertenecen al conjunto A del punto anterior. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación. Si tu respuesta es no, explica por qué.

$A' = \{$

c. ¿Cuál de los dos conjuntos anteriores tiene mayor cantidad de elementos? Justifica tu respuesta.

Pregunta 2

2. Considera el conjunto B de los números naturales sin el cero menores que 100.000

a. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué

$B = \{$

b. Considera ahora el conjunto B’ de los números pares que pertenecen al conjunto B del punto anterior. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué

$B' = \{$

c. ¿Cuál de los dos conjuntos anteriores tiene mayor cantidad de elementos? Justifica tu respuesta.

Pregunta 3

3. Considera el conjunto C de todos los números naturales sin el cero

a. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué.

$C = \{$

b. Considera ahora el conjunto C’ de los números pares que pertenecen al conjunto C del punto anterior. ¿Puedes hacer una lista completa de ellos? Si tu respuesta es sí, hazlo en el espacio dejado a continuación (puedes utilizar alguna forma de expresión general, como los puntos suspensivos). Si tu respuesta es no, explica por qué.

$C' = \{$

c. ¿Cuál de los dos conjuntos anteriores tiene mayor cantidad de elementos? Justifica tu respuesta.

Segunda Parte

Pregunta 1

Dados dos conjuntos A y B finitos cualesquiera, se sabe que al compararlos de acuerdo a su cantidad de elementos, se presenta entre ellos una de las siguientes relaciones:

$$cantidad\ de\ elementos\ de\ A > cantidad\ de\ elementos\ de\ B$$
$$cantidad\ de\ elementos\ de\ A < cantidad\ de\ elementos\ de\ B$$
$$cantidad\ de\ elementos\ de\ A = cantidad\ de\ elementos\ de\ B$$

1. Presenta un ejemplo para cada uno de estos casos, proponiendo un conjunto A y un conjunto B que se puedan comparar.

Preguntas 2 y 3. a)

2. Una forma de comparar conjuntos sin necesidad de contar la cantidad de elementos en cada conjunto es a partir de una relación que se pueda establecer entre ambos. Considera este ejemplo:

En la fiesta de entrega de los premios Oscar, los organizadores requieren, por una cuestión de estética, que ninguna silla se encuentre vacía mientras dura la ceremonia. A tal fin, se contratan extras que, vestidos de gala, se encargan de ocupar todos los asientos haya vacíos, ya sea porque hay celebridades ausentes o porque se han retirado antes de tiempo o llegado tarde, o simplemente, han ido al toilette. A fin de saber si el conjunto de las personas es menor que el conjunto *de los asientos, basta con observar la sala y determinar si hay asientos vacíos. Si llamamos P al conjunto de las personas invitadas a la ceremonia y S al conjunto de las sillas y vemos sillas vacías, podemos afirmar que* $P<S$*. Si en cambio, hay personas de pie, entonces* $P>S$ *y los extras deberán pararse para devolver sus sillas a las celebridades, y si todas las sillas se encuentran ocupadas por algún invitado a la ceremonia, entonces se puede decir que* $P=S$*.*

3. Considera ahora los conjuntos A y A’ de la primera parte. Podemos comparar la cantidad de elementos estableciendo una relación como en el caso de los premios.

Planteamos la relación: *a cada elemento de A lo relaciono con su doble.*

Tendremos entonces:

$$\begin{array}{lccccccccccccccccccc}
A = \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19\} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & \\
A' = \{ & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18\} & & & & & & & & & &
\end{array}$$

De esta manera, se observa que la cantidad de elementos de A es mayor que la cantidad de elementos de A’, dado que hay elementos de A que quedan sin relacionar con ningún elemento de A’.

Se puede también hacer una relación similar entre los conjuntos B y B’.

$$\begin{array}{lccccccccccccccccc}
B = \{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \ldots & 24.999 & 25.000 & \ldots & 99.999\} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \\
B' = \{ & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & \ldots & 49.998\} & & &
\end{array}$$

a. ¿Qué puedes decir de los conjuntos B y B’?. Justifica tu respuesta.

Pregunta 3. b)

b. Intenta establecer ahora una relación entre C y C’, utilizando la forma de comparación presentada en esta segunda parte. ¿Qué puedes decir? ¿Coincide esta respuesta con lo que planteaste en la primera parte? ¿Por qué?

Resultados Obtenidos

Primera Parte

Pregunta 1

- Algunas de los estudiantes dudaron sobre si incluir o no al 20 en la secuencia de los conjuntos A y A', aunque finalmente lo resolvieron no incluyéndolo
- Todas los estudiantes lograron contestar correctamente la tercera pregunta, identificando a A como al conjunto que tiene mayor cantidad de elementos, y entre las respuestas que se dieron están:
    - *El conjunto A tiene más porque son 19 números y el A' tiene 9*
    - *El conjunto A es más grande porque son los pares y los impares*
    - *El conjunto A es más grande porque los de A' son algunos de los que hay en A*

Pregunta 2

En general, la actividad se presentó sin mayores dificultades. Se destacaron estas respuestas y planteos

- Una de los estudiantes no escribió el último número de la lista, presentando a los conjuntos de la siguiente manera:

$$B = \{1,2,3,4,...\}$$
$$B' = \{2,4,6,8,...\}$$

- Algunas de los estudiantes contestaron que si bien es posible hacer una lista completa para cada uno de los conjuntos, es muy tedioso *("difícil, complicado, muy lento")*, por lo cual la expresión con puntos suspensivos es un buen sustituto.

- Todas los estudiantes lograron contestar correctamente la tercera pregunta, identificando a B como al conjunto que tiene mayor cantidad de elementos, aunque en este caso ninguna de los estudiantes escribió la cantidad de elementos en cada conjunto, simplemente recurrieron como justificaciones a las siguientes:
    - *El conjunto B es más grande porque son los pares y los impares*
    - *El conjunto B es más grande porque los de B' son algunos de los que hay en B*

Pregunta 3

Los estudiantes pudieron resolver las dos primeras preguntas correctamente, argumentando que es imposible escribir una lista de todos los números naturales (o de todos los números naturales pares) dado que son infinitos, aunque intentaron algunas expresiones como las siguientes (algunas de ellas incorrectas):

- $C = \{1,2,3,4,5,...\}$
  $C' = \{2,4,6,8,10,...\}$
- $C = [1;+\infty)$
  $C' = [2;+\infty)$
- $C = \{1,2,3,4,5,...,+\infty\}$
  $C' = \{2,4,6,8,10,...,+\infty\}$
- Una de los estudiantes expresó que debe leerse al símbolo de más infinito como *"y se sigue así sucesivamente"*

Con respecto a la tercera pregunta, aparecieron tres respuestas bien distintas:

- *El conjunto C es mayor que C' dado que tiene a todos los naturales, no sólo a los pares*
- *No sabemos cuando terminan ni C ni C' pero seguramente C es mayor porque C' es una parte de C y en C quedan los impares si saco los pares para llevarlos a C', si siguen quedando, entonces C es más grande, tenía más elementos en él.*

- *No se pueden comparar, los dos son infinitos, así que no se puede saber.*

Segunda Parte

Pregunta 1

En esta parte se esperaron varias respuestas incorrectas, dado que, como era esperado, muchas estudiantes buscaron ejemplos dentro de los conjuntos infinitos, además de desconocer notaciones correctas para utilizar.

- Algunas estudiantes presentaron colecciones finitas de números, bien pequeñas y fácilmente comparables, presentando los conjuntos por extensión, y considerando el menor de los conjuntos como un subconjunto del mayor de los dos presentados en los casos de desigualdad. Por ejemplo:

  $\{1,2,3,4,5\} > \{1,2,3\}$
  $\{5,6,7,8,9,10\} < \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
  $\{1,2,3\} = \{4,5,6\}$

- Una de los estudiantes definió conjuntos numéricos por comprensión, de la siguiente manera

  Divisores de 100 > divisores de 10

  Divisores de 5 < divisores de 50

  Divisores de 8 = divisores de 6

- Otra de los estudiantes trabajó con conjuntos no numéricos, también definidos por comprensión

  Consonantes del alfabeto > vocales del alfabeto

  Cantidad de hombres de la Argentina < cantidad de mujeres de la Argentina

  Dedos de la mano = dedos de los pies

- Los estudiantes que buscaron ejemplos dentro de los conjuntos infinitos por lo general tuvieron errores, aunque otras lograron ejemplos certeros comparando conjuntos finitos con conjuntos infinitos, como por ejemplo:

  Reales menores que 10 > naturales menores que 10

  Naturales menores que 10 < enteros menores que 10

  Naturales mayores que 10 = enteros mayores que 10

- Otras estudiantes confundieron conjuntos con intervalos y presentaron ejemplos dentro de intervalos reales de distinta amplitud, obteniendo respuestas incorrectas.

  $(1;10) > (1;2)$
  $(0;1) < [0;1]$
  $(0;1) = (1;2)$

Pregunta 3. a)

Esta pregunta se respondió correctamente en todos los casos aunque no siempre con los argumentos esperados. Se destacaron estos tres tipos de respuestas:

- *En B hay más cantidad de elementos que en B' porque hay elementos de B que no se relacionan con nadie*
- *En B hay el doble de elementos que en B'*
- *El conjunto de B' se acaba primero, por lo cual, quedan elementos de B sin juntarse con ninguno, dado que los de B' se acabaron, porque eran menos.*

Pregunta 3. b)

Con respecto al establecimiento de la relación entre ambos conjuntos, todos los estudiantes lograron escribirla, expresando los conjuntos como colección y asociando cada número con su doble.

Con respecto a la comparación entre los dos conjuntos, algunas de las respuestas presentadas fueron las siguientes:

- *Se puede decir que acá en realidad no se sabe bien, porque no sabemos su fin, pero debería pasar lo mismo que con los dos ejemplos anteriores*
- *No, porque cuando los números son infinitos se llega muy lejos, en este caso todos tendrían relación con un número, porque cualquier número por 2 da otro número siempre. Entonces hay la misma cantidad.*
- *No coincide con lo que había dicho antes, porque ahora a todos los números de C les corresponde su doble, entonces tienen la misma cantidad.*
- *Son infinitos los dos así que ninguno tiene más elementos que el otro.*

Luego de haber finalizado con la resolución de la actividad, el grupo hizo una puesta en común de las respuestas que habían presentado a cada una de las preguntas de la actividad y se finalizó con la intervención del docente, discutiendo en particular el método de la biyección y la característica entre el todo y las partes de los conjuntos infinitos. Se consideraron otros conjuntos para comparar (naturales e impares, naturales y cuadrados perfecto, naturales y enteros) y poder observar que para los conjuntos infinitos, lo esperado no es lo que ocurre.

La forma natural de comparar tamaños de conjuntos es con el conteo de sus elementos. Si no es posible contar, entonces todos deberían ser iguales... a menos que uno sea una parte de otro. En ese caso, contar se hace innecesario, el "completo" es mayor que el "incompleto".

La biyección aparece como una estrategia de apareamiento de elementos, pero no convence a los estudiantes completamente. La imposibilidad de "ver" todos los pares que se establecen hace dudar sobre la veracidad de la hipótesis que un subconjunto de un conjunto infinito puede tener tantos elementos como el conjunto del que era parte. Si bien el procedimiento se comprende, no se termina, es decir, no se puede ver la última asignación. Lo que se dice, se intuye. Y ya se ha observado, la intuición, en el infinito, generalmente, falla.

El infinito en la clase de matemática

Cuarta Experiencia: Conjuntos numéricos y el infinito

Objetivo

La introducción del infinito dentro de la clase de matemática se hace en función de los conjuntos numéricos. Cuando se comienza con el estudio de los distintos conjuntos (definición, propiedades, características de las operaciones en ellos), una de las características que se presentan es la de ser infinitos, pero no se profundiza en este tema: simplemente se afirma que son infinitos, se acepta que los alumnos saben que los números "continúan infinitamente" y en pocos casos se analiza las diferencias entre "ser infinitos" y "poder ser infinitos". El objetivo de esta encuesta es indagar en estudiantes que ya han estudiado la unidad correspondiente a conjuntos numéricos cuál es la idea que les queda respecto al infinito y cómo se relaciona con las ideas que ya traían, reflejadas o no en dos textos de literatura fantásticos.

Destinatarios de la encuesta

Esta encuesta fue aplicada a un grupo de estudiantes de 2º Año (14-15 años) y un grupo de 3º año (15-16 años). La unidad de conjuntos numéricos se imparte en el primer cuatrimestre de segundo año, de manera que cuando la encuesta fue aplicada en el segundo cuatrimestre, los estudiantes ya habían estudiado y habían sido evaluadas en estos contenidos.

Diseño de la encuesta

La secuencia que se presenta a continuación tiene por objetivo observar la situación del aprendizaje de los alumnos que ya habían trabajado la unidad correspondiente a conjuntos numéricos, para poder concluir si los contenidos enseñados habían realmente sido incorporados como conceptos significativos. Inicialmente se les solicitaba a los alumnos que caracterizaran a los conjuntos numéricos (natural, entero, racional y real) como resultado de la necesidad de definir operaciones que no eran cerradas en el conjunto a partir del cual se los define. Esta selección de introducción de los conjuntos se debe a que es de esta forma como se la presenta en las currícula y los libros de texto.

A continuación, se presentaban una serie de propiedades y características que debían relacionar con cada uno de los conjuntos numéricos y que apelaban a observar qué tan significativo había sido el aprendizaje. Se pide luego que definan con sus palabras la densidad y la continuidad y digan qué conjunto tiene cada una de esas propiedades.

Por último se pide que relacionen los conjuntos antes definidos con dos cuentos de Jorge Luis Borges que se relacionan con el concepto de infinito. El primer relato con el que se trabajó es *El libro de Arena*, y el segundo, *El Aleph*.

La encuesta se resolvió en dos etapas: la primera parte se realizó en una clase (80 minutos) y la segunda debía ser resuelta de tarea y entregada en la clase siguiente.

ENCUESTA

Primera Parte

1. Cuando estudiaste los conjuntos numéricos, viste que cada uno se definía a fin de lograr que alguna de las operaciones aritméticas fuera cerrada, es decir tuviera un resultado que para todos los casos resultara un elemento del conjunto. ¿Recuerdas que operación define a cada uno de estos conjuntos? Explica con tus palabras.

a) Conjunto de los números enteros

b) Conjunto de los números racionales

c) Conjunto de los números irracionales

2. Selecciona las propiedades de cada conjunto numérico de la siguiente lista. Cada una de las propiedades puede corresponder a **más** de un

conjunto y puede haber alguna que no corresponda a ningún conjunto. Agrega cualquier otra que se te ocurra.

Es denso	*Todo elemento tiene anterior*	*Tiene primer elemento*	*Todo elemento tiene anterior excepto el primero*
Entre dos elementos existe una cantidad finita de elementos	*Puede hacerse una lista de todos los elementos de menor a mayor*	*Es continuo*	*Es infinito*
Tiene último elemento	*Todo elemento tiene siguiente excepto el último*	*Puede determinarse la cantidad de elementos*	*Todo elemento tiene siguiente*
Existe relación de mayor y menor entre dos elementos dados	*Entre dos elementos existe una cantidad infinita de elementos*	*Completa la recta numérica*	*Puede hacerse una lista de todos los elementos de mayor a menor*

Cuadro 1

a) Conjunto de los números naturales

b) Conjunto de los números enteros

c) Conjunto de los números racionales

d) Conjunto de los números reales

3. El conjunto de los números racionales tiene una propiedad que se relaciona con la "cantidad" de números racionales que pueden encontrarse entre dos dados. Esa propiedad se llama *densidad*.

a) Define esa propiedad con tus palabras

b) De los conjuntos enumerados en el punto anterior, analiza si hay algún otro que la cumpla y explica por qué la cumplen o no de acuerdo a tu definición del punto anterior. Presenta un ejemplo.

4. El conjunto de los números reales tiene una propiedad conocida como *continuidad.* ¿Puedes definirla? ¿Cómo relacionas esta propiedad con la recta real?

Segunda Parte

5. Lee el relato *El libro de Arena (1)*, de Jorge Luis Borges, y analiza:

a) ¿Qué concepto o conceptos de los antes trabajados involucra este texto?

b) Si tuvieras que numerar las hojas de ese libro, ¿qué conjunto numérico utilizarías? ¿Por qué?

6. Lee el relato *El Aleph (2)*, de Jorge Luis Borges, y analiza:

a) ¿Qué concepto de los hasta aquí tratados te parece que se relaciona con *El Aleph*?

b) ¿Qué conjunto numérico te parece que puede relacionarse con esta idea? ¿Por qué?

Resultados de la experimentación

Si bien los resultados no fueron tabulados, dado que el tipo de análisis que se buscaba no era cuantitativo sino cualitativo, se observaron ciertas cuestiones que por su frecuencia resultan llamativas. Algunas de ellas se presentan a continuación.

- ✓ Por lo general, los estudiantes logran encontrar la operación cerrada que “define” el conjunto numérico. El más complejo es el de los números irracionales, dado que presentan a la radicación como la operación que lo genera pero no se distingue la aparición de raíces de índice par de valores negativos.

- ✓ Con respecto a las propiedades, muchas de los estudiantes presentan ciertas ideas contradictorias. Si bien la gran mayoría logra decir que los números racionales forman un conjunto denso y reconoce que entre dos racionales hay infinitos racionales, un grupo importante afirma que se puede hallar un siguiente y anterior para todo número racional.

- ✓ Algunas estudiantes, una minoría, concluyó que el conjunto de los números reales es denso dado que “siendo más que los racionales, tienen que ser densos”. El resto no pudo extender esta propiedad al conjunto de los números reales.

- ✓ Todos los estudiantes reconocieron que los números reales forman un conjunto continuo, pero para definirlo sólo pueden recurrir a la característica de “completar” la recta. Por ser ésta una explicación geométrica y la de densidad una explicación algebraica, el conjunto de los reales no parece ser un conjunto denso.

Con respecto al análisis de los textos, los estudiantes no tuvieron problema en relacionar al Aleph con el conjunto de los números reales pero se les complicó determinar una relación con el relato del libro de arena, dado que si bien son infinitas y no hay primera ni última podría ser el conjunto de los racionales o de los reales.

> *“El Aleph se puede relacionar con el conjunto de los números reales, porque el autor explica que ahí está todo. El libro de Arena en cambio, puede ser el de los racionales. Si fuera el de los reales, no se podrían separar las hojas: debería ser un bloque de papel, debería ser continuo”*
>
> *“Lo del Aleph no se entiende bien: es como si fuera el conjunto de los reales: ahí están todos los números, pero en vez de estar en la recta, están en una bolita. Es como si fuera una parte de la recta que tiene a toda la recta adentro: no sé si puede igualar a un conjunto numérico. El del Aleph en cambio, si podría ser el de los números reales, están todos los números, no hay primero ni último, cada hoja tiene otras pegadas, no están ordenadas, es decir, no hay anterior ni siguiente”*

Por lo observado en las respuestas obtenidas, se puede concluir que teóricamente, los estudiantes manejan las definiciones y propiedades de los conjuntos numéricos. Sin embargo, conceptualmente, muchas de las ideas que manejan no están claras y se presentan como contradictorias.

Quinta experiencia: Asíntotas y discontinuidades puntuales

Objetivo y Destinatarios de la entrevista

La siguiente experiencia se desarrolla en el transcurso de una clase de 4º Año Ciencias, del mismo colegio antes mencionado. Si bien el objetivo de la clase no era provocar una discusión como la que a continuación se describe, la temática desarrollada provocó el desencadenamiento de algunas ideas que permiten ilustrar lo que ocurre cuando el infinito intuitivo y lo que han ido aprendiendo del infinito matemático y de la matemática en general se mezclan con un infinito como valor al que tiende un límite.

La discusión se dio durante una clase en que se comenzaba a introducir la idea de funciones continuas y discontinuas pero sin haber trabajado previamente la unidad de límites. En el currículum de 4º Año, los estudiantes estudian funciones racionales, como uno de los tipos de funciones, pero no se profundiza en el estudio del análisis matemático, que es un contenido de 5º Año.

Hasta ese momento los estudiantes han trabajado con representaciones gráficas de funciones (sin conocer la expresión funcional de las mismas) y en función de lo que observan pueden decir si es o no continua, si hay asíntotas verticales o "agujeritos" (discontinuidades puntuales). Este trabajo se hace durante el segundo año de escuela media (14-15 años) dentro de la unidad de Funciones y Generalidades. El objetivo de esa unidad es simplemente que los estudiantes reconozcan a partir de una gráfica si la representación corresponde a una función, definen el dominio, la imagen, los intervalos de positividad y negatividad, el conjunto de ceros y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. También se trabaja con la existencia o no de puntos donde la función no está definida y si existen en ese punto asíntotas o discontinuidades puntuales.

Diseño de la actividad

La clase se desarrolló a partir del estudio de tres funciones, a partir de las cuales se esperaba extrapolar condiciones para poder identificar las características que la representación gráfica de las mismas iban a tener.

Las funciones que se analizaron fueron:

$$a.\ f(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

$$b.\ f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$$

$$c.\ f(x)=\frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-2x-3}$$

Como primer punto, se discutió el dominio de estas funciones. La unidad anterior, destinada al estudio de funciones polinómicas, había abierto la discusión al definición de dominio de una función y a las condiciones que provocaban que las funciones polinómicas estuvieran definidas en todo el conjunto de los números reales.

Para el caso de estas funciones, se discutió con el grupo si el dominio iba a volver a ser el conjunto de los números reales o existían valores para los cuales la función no estaba definida. Surge como consecuencia el problema de la división por cero, frente a lo cual los estudiantes "postulan" que no se puede dividir por cero por lo cual hay que eliminar las raíces de los denominadores.

La fundamentación de porqué no se puede dividir por cero surge desde dos perspectivas distintas: la negación que han escuchado a lo largo de toda su escolaridad "no se puede dividir por cero" o por el resultado que la calculadora no encuentra. Algunas de las justificaciones fueron:

> *"No se puede dividir por cero porque es como repartir entre nada... no tiene sentido"*
>
> *"Nunca se puede dividir por cero porque la calculadora da MATH ERROR"*

Luego de discutir porqué no se podía dividir por cero, se avanzó a la discusión de qué ocurría en ese punto que estábamos extrayendo del dominio para el caso de la función a. Y en ese momento comenzó la discusión en donde todas las ideas sobre infinito, continuidad, densidad, reaparecieron.

Se acordó primero que ese punto podía generar dos cosas: una asíntota vertical o una discontinuidad puntual: esas son las dos formas de discontinuidad que ellas conocen.

Se realizó entonces una tabla para ver qué ocurría alrededor de ese punto.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

x	f(x)
-5	0,571428571
-4	0,5
-3	0,4
-2	0,25
-1	0
0	-0,5
1	-2
2	no existe
3	4
4	2,5
5	2
6	1,75
7	1,6
8	1,5

Tabla 1

Pero al momento de hacer la gráfica, surgió la necesidad de observar qué ocurría cuando nos acercábamos más la valor x=2, por lo cual, se realizó otra tabla.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

x	f(x)=(x+1)/(x-2)
1,6	-6,5
1,7	-9
1,8	-14
1,9	-29
1,99	-299
1,999	-2999

1,9999	-29999
2	no existe
2,0001	30001
2,001	3001
2,01	301
2,1	31
2,2	16
2,3	11

Tabla 2

Al volcar los resultados hallados en la tabla a una gráfica, aparece una nueva dificultad.

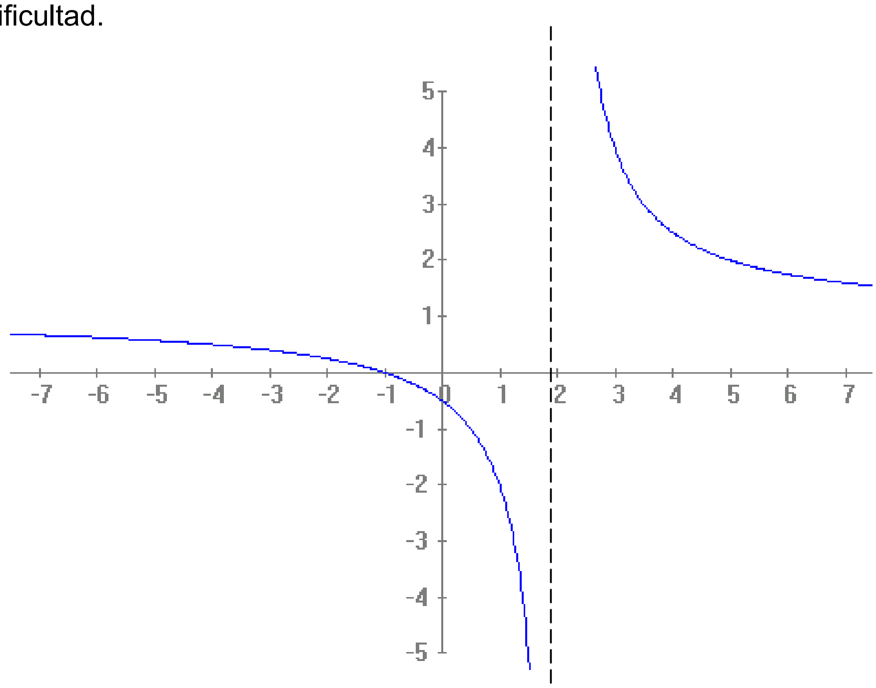

Gráfico 1

Los estudiantes reconocen que en x=2 hay una asíntota vertical (lo reconocen por la forma). El conflicto es ¿qué quiere decir que hay una asíntota?

La definición que los estudiantes presentan es:

> *"Hay una asíntota vertical cuando tenés un valor que genera una recta (acá x=2) al cual la función se va pegando pero nunca toca, porque como acá, no existe el resultado en la función"*

Sin embargo, a pesar de que esta idea es la idea que los estudiantes tienen desde 2º año, surgieron las preguntas que suelen aparecer en función a esta temática.

> *Alumna A: "Es imposible que nunca toque, en algún momento se juntan, nomás por el espesor del lápiz"*
>
> *Alumna B: "Pero no podés pensar en el espesor del lápiz, es en teoría, pensá que es como un lápiz pero sin espesor"*
>
> *Alumna A: "Pero si yo estoy viendo que es asíntota en la gráfica, la gráfica se dibuja, y cualquier línea que se vea tiene espesor, no tiene sentido, no se puede seguir infinitamente. Es como lo de las paradojas de Zenón: la distancia se acaba, el movimiento existe, Aquiles pasa a la tortuga. Es lo mismo, entre el punto que te pares de la recta y dos, la distancia se acaba, en algún momento se tocan"*
>
> *Alumna B: "No es lo mismo, porque es en teoría, lo otro es en la práctica"*

Sin convencerse, la alumna terminó por aceptar que la asíntota y la función no se intersecan en ningún punto.

Después de estudiar este ejemplo, se pasó al siguiente.

$$b.\, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Se realizó la misma discusión del dominio y se determinó que debía extraerse al valor x=-1 dado que provocaba una división por cero.

De manera análoga a lo que se había hecho en el punto anterior, se realizó una primera tabla con valores enteros, y una segunda tabla con valores cada vez más próximos a x=-1, para ver qué ocurría en las cercanías de ese punto.

Primera Tabla

x	f(x)
-8	-9
-7	-8
-6	-7
-5	-6

-4	-5
-3	-4
-2	-3
-1	no existe
0	-1
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7

Tabla 3

Segunda Tabla

x	f(x)
-0,4	-1,4
-0,5	-1,5
-0,6	-1,6
-0,7	-1,7
-0,8	-1,8
-0,9	-1,9
-0,99	-1,99
-0,999	-1,999
-0,9999	-1,9999
-1	no existe
-1,0001	-2,0001
-1,001	-2,001
-1,01	-2,01
-1,1	-2,1
-1,2	-2,2
-1,3	-2,3
-1,4	-2,4

Tabla 4

Se realizó a continuación una gráfica de la función

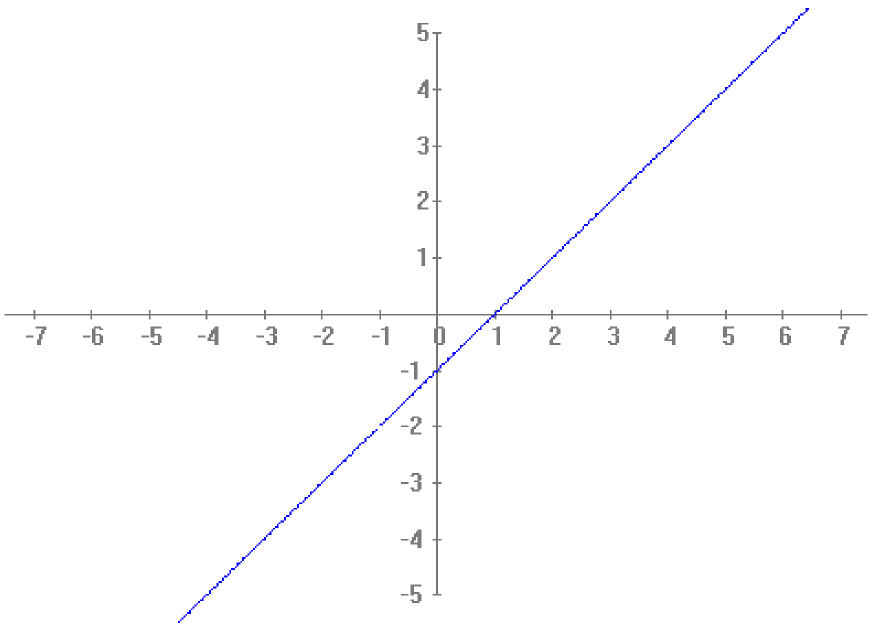

Gráfico 2

Y la gráfica aparece como una recta con un “agujerito”. Y nuevamente surgen las dificultades.

> *Alumna A: “¿Porqué ahora sí se ve el agujerito? ¿No era que el lápiz no tiene espesor? Además, supuestamente entre dos puntos de una recta hay infinitos, si saco uno solo no se ve, no se puede ver”*
>
> *Alumna B: “Pero es en teoría, es así, se marca para que entiendas que ahí falta un punto, no importa si se ve o no se ve, vos tenés que saber que es discontinua, entonces lo marcás agujereado para acordarte que ahí falta un punto”*
>
> *Alumna A: “Entonces es cualquiera: cuando querés que se vea, se ve; cuando no querés que se vea, no se ve... Es cualquier cosa...”*
>
> *Alumna B: “Bueno, no importa, es todo teórico, en realidad tampoco es que hay infinitos puntos entre dos cualquiera, eso es teoría”*

El resto de los estudiantes toman partido por una u otra, en distintos momentos, algunas aceptan lo que se les presenta, otras dudan pero finalmente aceptan. Aún las que no se convencen, terminan por aceptarlo, por el sólo hecho de que es un medio para aprobar la materia.

Una de los estudiantes aboga por el argumento de la alumna A (que por lo general se pregunta y cuestiona todo hasta convencerse) y recuerda la teoría de Geometría que estudiaron en primer año:

> *Alumna C: "¿Quién era el que estudiamos de Geometría, que tenía los 13 libros?"*
>
> *Alumna D: "Euclides"*
>
> *Alumna C: "Bueno, ahí decía que un punto es lo que no tiene partes. Entonces A tiene razón, no se ve, así como no se ven las líneas, porque las líneas tenían una sola dimensión, no tenían espesor, entonces tampoco sé si toca o no la asíntota, porque la asíntota tampoco se ve"*
>
> *Alumna B: "Bueno, pero con ese criterio, no podría ver tampoco la función, y entonces no tiene sentido nada. No podés tomar todo al pie de la letra, si no, no hagás nada y listo"*
>
> *Alumna A: "Sí bueno, está bien, no importa. La teoría dice una cosa y yo hago lo que me sirve en cada caso... No es muy claro, me parece, pero no importa"*

Evidentemente, todo se mezcla: lo que se ve, lo que se dice, lo que se hace, lo que hay que hacer... Ninguna de los estudiantes presenta una idea consistente en sí misma, pero todas terminan aceptando lo que se les presenta. El contrato didáctico las obliga, pero todo se mezcla. Y seguramente siga mezclado.

Reflexiones Finales

A modo de cierre, se retoman las cinco experiencias realizadas, para poder luego intentar, desde las respuestas obtenidas, responder las preguntas planteadas al inicio de este trabajo; para ver si se ha logrado o no detectar algún tipo de respuesta que satisfaga la indagación.

1. Primera experiencia: El infinito intuitivo

En esta experiencia se buscó caracterizar las ideas intuitivas que los estudiantes tienen en relación al infinito. En esta actividad, aplicada a modo de encuesta, se apelaba a la memoria (ideas que se tenían en la niñez) y a las relaciones que se establecen en la vida diaria con el concepto de infinito.

Del análisis de las respuestas surge que lo infinito se relaciona con aquello de lo cual no se puede asegurar dónde termina ni donde comienza, lo que no se puede medir ni contar; aún cuando se sepa que el final existe. Por otro lado, el infinito se relaciona con el amor, los sentimientos, la fe. Es un infinito sentimental y poético, muy distinto del matemático, muy parecido al histórico presentado al principio del capítulo anterior.

2. Segunda experiencia: El infinito en la literatura

En esta experiencia, se busca a través de distintos textos despertar (al ver reflejadas), distintas ideas que los estudiantes tienen en relación al infinito. El trabajo que se realiza busca alejar al concepto de la matemática, y en especial, de la clase de matemática, para poder encontrar evidencias de intuiciones lo más naturales posible.

Los resultados obtenidos muestran que frente a la lectura, las ideas que surgen son críticas al tratamiento que se hace del infinito, por inexacto, poco científico, poco profundo o demasiado fantástico. Lo que saben del infinito, lo que piensan, los lleva a desacreditar lo que los autores intentan transmitir. Como científico, el tratamiento no alcanza, como literario y poético, es aceptado. Pero los dos infinitos, son distintos.

3. Tercera Experiencia: Las contradicciones detrás del infinito

Esta experiencia busca enfrentar a los estudiantes con una situación que provoque un quiebre dentro del modelo mental asociado al infinito. Se busca en función de una serie de preguntas sencillas que elaboren una teoría respecto al tamaño de dos conjuntos infinitos, uno subconjunto propio de otro, para luego mostrarles a través de la biyección, una forma de equipara ambos conjuntos, probando que “hay tantos elementos en uno como en el otro”.

En las respuestas se encuentra lo esperado, el “nuevo” método de comparación se comprende, se ve en el resultado de su aplicación que se contradice lo que se pensaba desde la extrapolación de propiedades de conjuntos finitos, pero sin embargo, “no convence”. Los estudiantes lo aceptan, lo comprenden, pero lo ven como un “artilugio”, no tiene la fuerza suficiente para hacer tambalear lo que creen, lo que se construyó a lo largo de toda la vida. Puede evocarse, a pequeña escala, lo que provocó Cantor en sus colegas: no puede una teoría desacreditar años de cultura matemática respecto al infinito. Al menos, no de inmediato...

4. Cuarta Experiencia: Conjuntos numéricos y el infinito

Esta actividad se presenta a estudiantes que ya hayan estudiado los distintos conjuntos numéricos, en los cuales el infinito aparece como “propiedad”: hay infinitos naturales, infinito a izquierda y a derecha, infinitos elementos entre dos dados... Se apela a esos conocimientos y se intenta que los alumnos relacionen estas ideas con otras que aparecen en algunos textos, en este caso, dos textos de Jorge Luis Borges.

De las respuestas obtenidas, se observa que lo teórico está, los alumnos comprenden los distintos conjuntos numéricos y las diferencias entre los “distintos” infinitos que tienen cada uno. Sin embargo, esas ideas no resurgen todo el tiempo. Se contradicen, no son parte del modelo mental de lo que es el infinito. El otro infinito, el natural, el filosófico; ese es el que esta siempre presente. El matemático está sólo cuando se lo referencia de manera directa: ese no es natural, contradice la intuición, provoca incomodidad... pero esos conflictos se callan, para no provocar ira, por respeto a lo que los docentes han enseñado.

5. Quinta Experiencia: Asíntotas y discontinuidades puntuales

En esta experiencia se relata una situación de clase en donde se presentaban a un grupo de estudiantes las funciones racionales. A lo largo del desarrollo de la clase surgen discusiones entre las alumnas, que comparten por un lado, un bagaje común de conocimientos adquiridos a lo largo de la escolaridad, y por otro, códigos comunes, por su edad, su nivel económico y social, una cultura compartida.

De la lectura de los diálogos se observa que el infinito dificulta el consenso: se mezcla el deber con el pensar, el comprender con el aceptar, el cumplir con el discutir. El infinito los coloca en una situación donde ninguno tiene razón (o al menos no sabe si la tiene) por lo cual el consenso llega de la mano de la necesidad de aprobar una materia. Las ideas que se generan como resultado de esos diálogos tienen sólo un fin utilitario, pero no modifican lo que se sabe, lo que se cree, lo que se entiende.

Hasta aquí, se han presentado los resultados de las cinco experimentaciones realizadas. Como se puede observar los resultados coinciden en gran parte con los resultados que se ven en el estudio de la historia del concepto. En el próximo capítulo, con el fin de poder observar si las preguntas planteadas al comienzo de la investigación hallan o no respuesta, se analizan cada una en función de lo que se ha hallado como resultado de las experiencias. Se analiza también en el siguiente capítulo las características de los modelos mentales que se forman los alumnos. Y por último, se busca determinar cuáles son las cuestiones que generan en la gente la necesidad del infinito: por qué surge el infinito como concepto.

CAPÍTULO VI

Intuiciones sobre el infinito. Modelos mentales.

En este capítulo se realizan tres tareas que buscan clasificar los resultados encontrados hasta aquí. Por un lado, se espera dar respuestas a las preguntas planteadas en la investigación. Por otro lado, se busca caracterizar los modelos mentales que se observan de las ideas de los alumnos. Y por último, se busca determinar el tipo de preguntas y acciones que provocan el surgimiento del infinito en una persona.

Preguntas de la investigación

Retomando ahora las preguntas planteadas anteriormente, en función de las cuales se declaró se iba a realizar la experimentación, se buscarán respuestas en las distintas conclusiones obtenidas. Para poder identificar de qué experiencia se toma la frase, se aclarará entre paréntesis la situación a la cuál corresponde (E1) significaría Experiencia 1.

1. ¿Cuál es la primera idea que un niño tiene en referencia al infinito?

Se puede observar con respecto a este punto que los niños asocian al infinito con distintas cuestiones que no tiene explicación racional:

> *“Desde lo visual, es infinito, no se ve donde termina ni el mar ni el universo”* (E1)

“Hay millones de estrellas, es imposible contarlas, entonces pareciera que fueran infinitas” (E1)

“Te quiero hasta el infinito” (E1)

“Mi amor por vos es infinito” (E1)

“El universo es infinito. Cuando le preguntabas a tus papás o las maestras dónde terminaba, no te podían explicar nada claro. No eran convincentes en lo que decían. Entonces suponés que es infinito si nadie sabe dónde termina” (E1)

“Es adecuado porque no se ve dónde empieza ni dónde termina. Es continuo, no lo terminás de recorrer nunca” (E1)

En conclusión, el infinito se asocia a cuestiones semejantes a las que provocaban a los jainas a discutir este concepto:

- Los sentimientos
- Las grandes extensiones: cielo, mar
- Los grandes números: la cantidad de granos de arena, la cantidad de estrellas
- Los lugares distantes: el fin del espacio, el horizonte

2. ¿El infinito se comprende en una primera instancia de su construcción como un resultado (o cantidad o número), un lugar o una cualidad?

De acuerdo a lo planteado en la pregunta uno, las tres perspectivas de infinito surgen de acuerdo a las distintas formas de acercarse al infinito.

- Es una cualidad para el caso de los sentimientos

  “Mi amor por vos es infinito” (E1)

- Es un número en cuanto representa la cantidad de estrellas o granos de arena

“Hay millones de estrellas, es imposible contarlas, entonces pareciera que fueran infinitas” (E1)

- Es un lugar si se lo considera como la posición donde se encuentran el cielo y el mar (el horizonte)

  “Desde lo visual, es infinito, no se ve donde termina ni el mar ni el universo” (E1)

3. ¿Qué tipo de objetos (reales o no) tienen la cualidad de ser infinitos para los niños?

Si se estudia desde lo real (lo que se obtiene a través de los sentidos), el universo es infinito: el no poder ver su final, la ausencia de una respuesta convincente a la pregunta de su finalización, lo hace infinito.

> *“El universo es infinito. Cuando le preguntabas a tus papás o las maestras dónde terminaba, no te podían explicar nada claro. No eran convincentes en lo que decían. Entonces suponés que es infinito si nadie sabe dónde termina”* (E1)

Si se estudian los números, también son infinitos: puedo seguir siempre, no hay último, no hay el más grande. La idea del infinito griego, potencial. El número más grande está representado por el infinito.

> *“El tema que se trabaja es el infinito y es muy claro cuando habla de que no hay ni primera ni última hoja, es como con los números enteros, por más atrás o adelante que vayas no se encuentran los extremos; pasa que con el libros es como inimaginable que no se pueda hallar la primera hoja ni la última, pero como recurso es muy bueno y es muy clara la idea de haber infinitas páginas”* (E2)

> *"La idea que se plantea es la del infinito, pero el del infinito como los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5... Y es claro lo que se quiere hacer entender: tanto con la numeración de los días como el de los años se puede extender infinitamente. Obviamente es un relato que pretende explicar este aspecto de infinito del tiempo, ya sea de los días como de los años"* (E2)

4. ¿Cuál es la actividad o actividades que generan la necesidad del infinito para un niño?

La actividad que podría asociarse a la aparición de infinito es la de contar: tener que dejar de contar porque nunca se acaba hace que tenga que surgir el infinito como extremo para asegurar que nunca se termina. La observación de lo que los rodea y la búsqueda explicaciones también lleva a la necesidad del infinito como explicación: es una respuesta y como tal funciona, aún cuando no se la comprenda.

> *"si alguien te decía infinito, vos decías infinito punto rojo y le ganabas, porque es más grande. El único que le ganaba al infinito punto rojo es el infinito punto de todos los colores, pero ese no se aceptaba, era trampa"*. (E1)

5. ¿Cómo aparecen esas ideas intuitivas en la escuela? ¿Qué conceptos matemáticos las revelan?

A lo largo de las experiencias se pueden observar ciertas cuestiones que determinan que el infinito y las ideas intuitivas asociadas a él surjan de manera natural:

- ✓ Con respecto a las propiedades, muchas de los estudiantes presentan ciertas ideas contradictorias. Si bien la gran mayoría logra decir que los números racionales forman un conjunto denso y reconoce que entre dos racionales hay infinitos racionales, un grupo importante afirma que se puede hallar un siguiente y anterior para todo número racional.

- ✓ Algunas estudiantes, una minoría, concluyó que el conjunto de los números reales es denso dado que “siendo más que los racionales, tienen que ser densos”. El resto no pudo extender esta propiedad al conjunto de los números reales.

- ✓ Todos los estudiantes reconocieron que los números reales forman un conjunto continuo, pero para definirlo sólo pueden recurrir a la característica de “completar” la recta. Por ser ésta una explicación geométrica y la de densidad una explicación algebraica, el conjunto de los reales no parece ser un conjunto denso. (E4)

Alumna A: “Es imposible que nunca toque, en algún momento se juntan, nomás por el espesor del lápiz”

Alumna B: “Pero no podés pensar en el espesor del lápiz, es en teoría, pensá que es como un lápiz pero sin espesor”

Alumna A: “Pero si yo estoy viendo que es asíntota en la gráfica, la gráfica se dibuja, y cualquier línea que se vea tiene espesor, no tiene sentido, no se puede seguir infinitamente. Es como lo de las paradojas de Zenón: la distancia se acaba, el movimiento existe, Aquiles pasa a la tortuga. Es lo mismo, entre el punto que te pares de la recta y dos, la distancia se acaba, en algún momento se tocan”

Alumna B: “No es lo mismo, porque es en teoría, lo otro es en la práctica” (E5)

En conclusión, se pueden generalizar en las bases del cálculo, las ideas de Berkeley, de Leibniz, las de los estudiantes que aún desconocen la teoría de Cantor

- Las propiedades de los conjuntos numéricos: densidad, continuidad

- Asíntotas
- Cardinalidad de conjuntos
- La recta numérica

Pueden considerarse también los textos que toman al infinito como eje del relato, que aparecen en la escuela, en otras asignaturas no matemáticas, y en cuyo análisis las ideas intuitivas tienen libertad de salir sin restricciones: no hay matemática en la hora de Literatura, lo que se diga en este sentido puede aceptarse como opinión, no hace falta ser "científicamente" correcto.

6. ¿Cómo se presenta el infinito en la escuela media?

La primera introducción, aquella que se hace en la escuela primaria, presenta a un infinito potencial fácil de aceptar: los números naturales son infinitos, para cualquiera que se me ocurra puedo buscar otro mayor a él. Esta idea, la más intuitiva del infinito matemático, se acepta.

> *"El autor es muy claro con lo quiere decir, tanto los días como los años se siguen sucediendo, lo que ocurre es que sería imposible llegar al final del relato porque el material se acumula cada vez más... por cada día que escribe en un año se agregan otros 364 para escribir"* (E2)

Cuando en la escuela media se estudian los números racionales, y se define la densidad, una propiedad que para ser comprendida requiere del infinito actual, surge los problemas. Se acepta que se pueden conseguir infinitos racionales entre dos dados, pero esto no quiere decir que estén todos al mismo tiempo (de hecho, la mayoría de los alumnos dirá que se puede encontrar el anterior y el siguiente de un número racional, aún cuando sepan que son un conjunto denso).

> *"En este cuento se dice lo mismo que en los otros al principio pero después empieza con cosas más difíciles y no las explica... lo de las fracciones, por ejemplo: dice que hay la misma cantidad de fracciones que de números naturales, pero no lo explica. Y no puede ser porque entre las fracciones hay infinitas fracciones (eran densos esos ¿no?) y entre dos naturales no*

hay nunca infinitos, por ejemplo entre 5 y 8 hay dos números (6 y 7) pero si yo lo escribo como fracción, tipo $\frac{10}{2}$ *al 5 y* $\frac{16}{2}$ *al 8, entre esos hay infinitos, que con los naturales no estaban y no pueden estar en otro lado porque están todos ordenados, entonces no puede haber la misma cantidad. Es lo mismo que con lo del hotel, pero en lo del hotel te lo explica, acá no..."* (E2)

La continuidad, el estudio de límites, provocan otro conflicto con el infinito: las definiciones se mezclan con la intuición: el infinito aparece como un valor al que tiende un límite. Un límite entonces puede ser un número o puede tender a infinito, tomando entonces a la vista de los estudiantes la misma categoría que los números. Una variable puede ser un número o puede tender a infinito: no tiene sentido, pero es difícil que esto se comunique. Por lo general, se calla, una vez más, aún cuando la incertidumbre sea grande.

Alumna A: "¿Porqué ahora sí se ve el agujerito? ¿No era que el lápiz no tiene espesor? Además, supuestamente entre dos puntos de una recta hay infinitos, si saco uno solo no se ve, no se puede ver"

Alumna B: "Pero es en teoría, es así, se marca para que entiendas que ahí falta un punto, no importa si se ve o no se ve, vos tenés que saber que es discontinua, entonces lo marcás agujereado para acordarte que ahí falta un punto"

Alumna A: "Entonces es cualquiera: cuando querés que se vea, se ve; cuando no querés que se vea, no se ve... Es cualquier cosa..."

Alumna B: "Bueno, no importa, es todo teórico, en realidad tampoco es que hay infinitos puntos entre dos cualquiera, eso es teoría" (E5)

7. ¿Cuáles son los posibles conflictos que pueden surgir si se ignoran las ideas intuitivas de los alumnos en referencia a este concepto?

Ideas como las que se presentan en la descripción de la actividad de clase son parte de los pensamientos de la mayoría de los alumnos, pocas veces verbalizadas, y menos veces aún comprendidas correctamente.

- *Se puede decir que acá en realidad no se sabe bien, porque no sabemos su fin, pero debería pasar lo mismo que con los dos ejemplos anteriores*
- *No, porque cuando los números son infinitos se llega muy lejos, en este caso todos tendrían relación con un número, porque cualquier número por 2 da otro número siempre. Entonces hay la misma cantidad.*
- *No coincide con lo que había dicho antes, porque ahora a todos los números de C les corresponde su doble, entonces tienen la misma cantidad.*
- *Son infinitos los dos así que ninguno tiene más elementos que el otro.* (E3)

La forma en que se tratan las funciones, el trabajo con límites, provocaran en los modelos que los alumnos se han formado, inconsistencias en más de una ocasión: los conceptos se confunden, las propiedades y definiciones se aprenden y aplican, pero poco significan. Evidencia de esto es la dificultad general que presentan los alumnos en la primera aproximación que tiene ante el estudio del análisis matemático.

> *Alumna B: "Bueno, no importa, es todo teórico, en realidad tampoco es que hay infinitos puntos entre dos cualquiera, eso es teoría"* (E5)

Modelos mentales

Para completar la hipótesis de que las ideas intuitivas forman el modelo mental como lo describe Fischbein, se analizará a continuación en base a las conclusiones de la experimentación qué elementos se pueden considerar a fin de intentar armar un modelo intuitivo del infinito.

Las características de los modelos mentales de acuerdo a este autor son:

- ✓ *Entidad Estructural*.

La entidad estructural debe aportar al modelo entidad, reglas de aplicación y definición al concepto. Para el caso del infinito, se puede considerar como característica inherente el no tener fin, o como equivalente, el no poder asegurarse de su finitud. Por ejemplo, es infinito el conjunto de los números naturales (de hecho no termina), y el universo es infinito (no se sabe si termina o no, pero de cualquier modo, no se puede medir, no se puede contar). Se puede establecer una equivalencia entre lo que es fácilmente numerable, y por consiguiente finito, y lo que es demasiado trabajoso de ser numerado o imposible de serlo, y entonces es infinito. Ese concepto de infinito es el que define las situaciones en las que es aplicable. Para el caso de la posibilidad de aproximar una función infinitamente a una asíntota, ese infinito no está dentro de la categoría que aquí se considera: físicamente se tocan, la distancia es finita, se achica cada vez más, por ende, se acaba.

- ✓ *Naturaleza concreta, práctica y de comportamiento*.

Esta característica explica la relación entre el modelo y las situaciones que lo generan. De acuerdo a las respuestas obtenidas en las distintas experiencias realizadas, se puede concluir que las ideas se asocian a la imposibilidad de ver el fin de lo que se esté analizando, eso es lo que en la práctica lleva a calificar a cosas de infinitas: sin fin.

- ✓ *Simplicidad*.

La economía de los modelos es imprescindible. Dado que existen para reemplazar a los modelos científicos, inaccesibles por lo general, deben ser muy accesibles. Para la intuición, el infinito es uno, no hay distintos tipos de infinitos, lo que es infinito es infinito y ya no hay que seguir discutiendo. Los conflictos que surgen frente a los distintos infinitos no se plantean en las situaciones fuera de la matemática: ¿cuál infinito es mayor: el del tiempo o el del universo? En realidad, no importa, son infinitos, listo. Para los estudiantes, parece como si aceptaran que todo lo que no es finito, es infinito y en esa categoría no habría posibilidad de diferenciación.

- ✓ *Imposición de restricciones*.

Las restricciones para el caso del infinito aparecen cuando la realidad, lo físico, que genera el concepto, desafía la definición científica del concepto. La aceptación de infinitos puntos en un segmento queda justificada por una necesidad, pero no entra dentro de la categoría de lo que es infinito para una persona: veo donde empieza el segmento, veo donde termina, la extensión es finita, no pueden haber infinitos puntos ahí. Sí en una recta, porque la puedo continuar (no porque sea infinita, en apariencia, es un segmento “autorizado” a extenderse), pero un segmento con inicio y fin es finito.

- ✓ *Entidad Autónoma*.

El modelo que se genera es entonces, independiente del modelo matemático del infinito: no lo necesita y, es más, el modelo matemático dificulta su “accionar”: genera conflictos, provoca incertidumbres y contradicciones. Sus reglas no se aplican a este modelo porque no coinciden con las propias.

- ✓ *Robustez*.

No hay duda de esta cualidad cuando nos referimos al infinito: culturalmente, el concepto de infinito es el intuitivo, aún cuando hayan generaciones que ya lo hayan estudiado desde la matemática. Se mantiene y sigue, principalmente, tal vez, por ser previo a la escuela. El modelo científico, que la escuela obliga a construir, nace y termina

> en la escuela, porque no es natural, porque es impuesto y porque no es razonable: desafía al sentido común.

Cabe preguntarnos, entonces, ¿cuál es el conflicto que se encuentra cuando impedimos que las ideas intuitivas entren a la escuela? Como dice Barbero cuando caracteriza a la escuela actual;

> "una escuela que sigue exigiendo a los alumnos dejar afuera su cuerpo y su alma, sus sensibilidades, sus experiencias y sus culturas, sean éstas orales, gestuales, sonoras, visuales, musicales, narrativas o escriturales"
>
> (Barbero, 2006, p. 4)

El efecto que las ideas intuitivas tienen en el posterior desarrollo matemático del infinito en la escuela es uno de los objetivos principales de la presente investigación, para lo cual es posible estudiar las propuestas didácticas que se hacen en este sentido, analizando los planes de estudio de escuela media y los textos escolares en referencia a este tema, así como algunas propuestas de clase de docentes de escuela secundaria.

Los obstáculos que surgen al momento de "mezclar" las dos vidas del concepto, pueden considerarse obstáculos epistemológicos aunque no siempre propios del conocimiento en juego, sino de las experiencias por las que el alumno ha pasado.

> [Bajo esta aproximación se] *"han desarrollado estrategias de investigación de naturaleza epistemológicas que no se reducen a la búsqueda de obstáculos epistemológicos ni a su eventual clasificación, sino más bien, se ocupan de la epistemología en otro sentido. La entienden como el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento, por ello incluyen entre los aspectos o circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento los aspectos sociales y culturales, de manera que en esta visión se pretende develar el origen social del conocimiento, sus*

diversos usos sociales y su evolución en las instituciones, como la escuela, la academia, los servicios, entre otros.

[…]

En síntesis, nuestra línea de investigación toma como objeto de estudio a la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las intuiciones primarias de los alumnos con el fin de rediseñar el Discurso matemático escolar."

(Cantoral, 2000, pp. 215-216)

Se afirma que las intuiciones primarias deben guiar la modificación del discurso matemático escolar, pero para eso deben primeros ser conocidas: tarea que no es sencilla. Como se ha observado, las ideas surgen cuando quieren y en situaciones en que no son buscadas, el docente debe estar atento a los "errores" de los estudiantes, a lo que dicen al pasar en una clase o en un diálogo, a lo que opinan cuando la situación de clase rompe con la situación tradicional que se asocia al contrato didáctico y que impide la libertad requerida para expresar ideas que se suponen "no matemáticas".

La necesidad del infinito

Si se analizan los resultados presentados hasta aquí en este capítulo y los dos anteriores, puede observarse que existen situaciones, circunstancias, que determinan la necesidad de un concepto como el infinito a nivel social. Estas circunstancias son las que han de ser buscadas si se intenta armar una secuencia didáctica, o una actividad de clase, que busque evocar en los alumnos la primera aproximación que tuvieron con el concepto para poder después llevarlos a la construcción del infinito matemático. Se pueden considerar como algunas de las actividades que generan al infinito las siguientes:

- La enumeración: la necesidad de asignar cantidades a grupos de elementos semejantes (estrellas, granos de arena)
- La medida: conocer la extensión del mar, del espacio, del universo, de todo cuanto rodea al ser humano
- La temporalidad: comprender desde cuándo y hasta cuándo existe lo que se conoce
- La clasificación numérica: conjuntos pequeños, grandes, muy grandes... e infinitos. El infinito como adjetivo ayuda a la clasificación de colecciones de elementos similares.
- La clasificación cualitativa: el amor, la esperanza, la fe, el poder de Dios, requieren de calificativos lo suficientemente poderosos como para destacar la distancia entre estas situaciones y otras menos importantes (me gusta mucho el color rojo, pero amo infinitamente a mis padres)

Las antes presentadas son las cuestiones que surgen de lo que se lee en la historia, lo que se observa en las experiencias de esta trabajo, pero principalmente, de la vida. Cuando los niños preguntan, insisten, cuestionan, surge para los padres el infinito como un “comodín”: no es claro lo que representa, no es claro lo que quiere decir, y sin embargo los niños lo adoptan.

Lo mismo ocurre en el aula: el infinito desde el nivel inicial se convierte en un concepto que define muchas cosas, pero que no se define en ningún momento. Los alumnos lo aceptan, como aceptan tantas otras cosas de la escuela que no comprenden, pero es cuando su entendimiento es necesario para basar la construcción de otros conceptos cuando surgen los conflictos.

En el siguiente capítulo se describen a grandes rasgos las conclusiones que se han ido obteniendo en los capítulos anteriores y se presentan posibles formas en que puede continuarse esta investigación.

CAPÍTULO VII

Conclusiones

Como se plantea en el inicio, el infinito es uno de los conceptos matemáticos que tiene previa a su existencia en el aula de la matemática, un campo de ideas asociadas a él. Culturalmente se generan ideas que rodean al infinito. Surge el término como adjetivo para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como “mucho”, “muy grande”. Es lo que excede a todo lo que es cuantificable. Es además una expresión de extensión del amor, del deseo, de la fe. Un amor infinito es un amor absoluto. Tan absoluto como es para un religioso el poder de Dios.

En la historia se ha visto como el infinito ha sido conectado con todo, con la religión, con la inmortalidad, con el tiempo, con el espacio, con el universo, y por supuesto, con los números. Y ha sido rechazado y negado, desacreditado como elemento matemático durante muchos siglos de matemática.

Lo mismo se ve en las experiencias hechas con estudiantes: el infinito se mete en muchos aspectos de la vida, inclusive en la clase de matemática. Y sin embargo, hay un divorcio evidente entre lo que se cree (desde la intuición) y lo que se sabe (desde la matemática). Y es ese divorcio el que dificulta la construcción matemática del infinito.

El objetivo de esta tesis es presentar esas ideas intuitivas: dónde aparecen, cómo y por qué. Pero la tarea no es sencilla. La escuela está inmersa en un escenario social que hace de ella un lugar en el cual la intuición no tiene espacio. El alumnado sabe que lo que cree o siente no acredita conocimiento, solo el saber, el saber de los libros o el transmitido por los docentes permite la promoción de las materias. Y la escuela media es un medio para lograr un primer escalón en el avance de la educación. Y la manera de concluirlo es acreditar el conocimiento que la sociedad ha aceptado como importante y necesario en su sistema de valores.

La escuela no puede seguir mirando a la cultura popular como algo sin valor. Las ideas intuitivas, lo que se construye en la vida no escolar es parte de lo que los estudiantes saben, y debe aceptarse como elemento, ya sea para colaborar o para mostrar las contradicciones que con el conocimiento erudito presenta.

El impacto de las ideas intuitivas en el caso del infinito es innegable, especialmente porque fuera de la matemática el infinito no es contradictorio. En los sentimientos, en el tiempo, en el espacio, en la religión, el infinito “cierra”: convence, caracteriza de manera tal que todo el mundo sabe de lo que se está hablando. Los conflictos aparecen sólo dentro de la matemática: entonces, ¿por qué alguien cambiaría un modelo que no tiene problemas (el modelo intuitivo) por un modelo que se muestra contradictorio, conflictivo y que “no convence” (el modelo matemático)? La matemática escolar debe tomar parte en la modificación del discurso de manera tal que los alumnos encuentren en el sistema matemático un modelo compatible y sin problemas.

El aula es el lugar natural en el cual deben incluirse las investigaciones que son producto de la matemática educativa. Ésta en particular, enmarcada dentro de la socioepistemología, intenta establecer el contacto directo entre el medio social en que se desarrollan los estudiantes y en el que está incluida la escuela. La necesidad de un marco teórico que establezca el escenario social como una de las componentes de la construcción del conocimiento es evidente: lo que se busca, lo que se encuentra, lo que se intenta establecer, es resultado de interacción social entre las personas y su medio, y especialmente, entre personas entre sí. El infinito surge y ha surgido, no desde la matemática, sino desde la contemplación de lo que rodea al ser humano. Es un concepto que se construye socialmente antes que matemáticamente, y es por esa naturaleza que debe incluirse en la escuela el medio social y las ideas construidas en ese medio dentro de la escuela.

Algunas líneas en que se podría seguir con el trabajo que aquí se ha iniciado son:

- El impacto que la intuición tiene en la construcción del infinito matemático
- La forma en que la matemática escolar podría incorporar las ideas intuitivas en su discurso
- Una secuencia didáctica que reproduzca el trabajo de Cantor para generar un sistema del infinito sin contradicciones para escuela media

Finalmente, se espera que las ideas aquí presentadas acerquen a la escuela la idea de que las construcciones no escolares que se asocian al infinito y a otros conceptos matemáticos deben incluirse en el tratamiento escolar de dichos conceptos, y que la intuición, las creencias y las ideas propias, no escolares, deben entrar a la escuela, especialmente para acortar la brecha que en este momento la separa del escenario en que está inmersa.

Referencias bibliográficas

- Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas.
- Barallobres, G. & Sassano, M. (1994). *Matemática 4*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.
- Bell, E. T. (1948). *Los grandes matemáticos. Desde Zenón a Poincaré*. Buenos Aires: Editorial Losada.
- Bell, E. T. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México DF: Fondo de Cultura Económica.
- Biedma, J. (s.f.). La madre de las ideas: a vueltas con el infinito. En http://www.aafi.filosofia.net/NOCTUA/index.html (17/05/07)
- Borges, J. L. (1998). El Libro de Arena. En Borges, J. *El Libro de Arena*. (pp. 130 -137). Madrid: Editorial Alianza.
- Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, No.2, pp. 33-115
- Cantoral, R. (2001) *Sobre la articulación del Discurso matemático escolar y sus Efectos Didácticos.* En Beitía G. (Editor) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 14.* México DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática*. Tema: Educación

Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau.

- Cantoral, R. & Montiel, G. (2001) *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* México DF: Pearson Education.
- Maza Gómez, C. (2002) *El infinito entre los jainas*. Tesis de Maestría no publicada. Cicata, Mexico. [En línea]. Disponible en: http://www.personal.us.es/cmaza/india/numeracion.htm
- Corbalán, F. (1998). *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*. Madrid: Ed. Graó.
- Cordero, F. (2003). La noción de infinito a través de la historia. En Delgado Rubí, J. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (16)1, pp. 73-78. Santiago de Chile: Lorena Editores.
- Courant, R. & Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática?* Editorial Aguilar.
- Crespo Crespo, C. (2001). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad*. En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.
- Crespo Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Vol 15, Tomo I, pp. 529-534). México.
- Crespo Crespo, C. (2007, julio). *Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático.* Relme 21, Clame, Maracaibo, Venezuela.
- D’Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México DF: Editorial Reverté.
- De Morgan, A. (1997). Colección de Paradojas. En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas. (*Vol 6, pp. 304-318). Barcelona: Ed. Grijalbo.

- Espinoza P. (2006). *La Matemática Náhuatl: Estudio del Sistema de Numeración Náhuatl.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.
- Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. En *For the learning of Mathematics. 9, 2.* (pp. 9 – 14)
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: Reidel.
- Franco, G. & Ochoviet, C. (2006a). Cantor, Borges y después… una luz de almacén. En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol 19, pp. 491-495). México.
- Franco, G. & Ochoviet, C. (2006b). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol 19, pp. 509-513). México.
- Garbin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. En Delgado Rubí, J. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol 16, Tomo II, pp. 406-414). Santiago de Chile.
- Garbin, S. (2005). "¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos". *Relime 8* (2), 169-193.
- Hahn, H. (1997). El infinito. En Newman, J. (Ed.) *Sigma. El mundo de las matemáticas. (*Vol 4, pp 384-401). Barcelona: Editorial Grijalbo.
- Imaz, C. (1987). ¿Qué es la Matemática Educativa? En Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV – IPN, *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* (pp: 267-272). México.
- Jahnke, H. N. (2001). Cantor's Cardinal And Ordinal Infinities: An Epistemological And Didactic View. *Educational Studies in Mathematics. 48.* (pp 175-197)

- Lestón, P. & Veiga, D. (2004). Introducción al infinito. En Díaz, L. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Vol 17, Tomo I, pp.404-410). México.
- Lezama, J. (2005). "Una Mirada Socioepistemológica al Fenómeno de la Reproducibilidad". *Relime 3* (8), 339-362.
- Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimientos. *Relime 8* (2), 195-218.
- Mingüer, L. (2006). *Entorno Sociocultural y cultura matemática en profesores de nivel superior de educación. Estudio de caso: el* Instituto Tecnológico de Oaxaca: *Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.
- Moledo, L. (1994). *De las tortugas a las estrellas. Una introducción a la ciencia.* Buenos Aires: AZ Editora.
- Montoro, V. & Scheuer, N. (2006). Distintas formas de pensar el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol 19, pp. 156-161). México.
- Moore, A. (1995, junio). Breve historia del infinito. *Investigación y Ciencia*. pp 54-65.
- O'Connor, J., Robertson,E. (2000). Jaina Mathematics. En http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Jaina_mathematics.html (05/04/2007)
- O'Connor, J., Robertson,E. (2002). *Infinity. En h*ttp://www.astroseti.org/vernew.php?codigo=2036 *(05/04/2007)*
- Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana. Boletín volumen 1* (2), 59-81.
- Palacios, A., Barcia, P., Bosch, J., Otero, N. (1995). *Los Matematicuentos. Presencia matemática en la literatura.* Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

- Real Academia Española (2001). Vigésima segunda Edición del Diccionario de la Real Academia Española [En línea] Disponible en: http://www.rae.es/
- Recalde, L. (dic 2004). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. *Revista de la Corporación Escuela Regional de Matemáticas ERM Universidad del Valle 12* (1), 1-19. [En línea]. Disponible en: http://revistaerm.univalle.edu.co/VolXIIN1/resumerecalde.html
- Sábato, E. (1995). *Uno y el Universo.* Buenos Aires: Seix Barral.
- Tahan, M. (2000). *El hombre que calculaba*. Madrid: Veron Editores.
- Valdivé Fernández, C. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: "el paso del infinito potencial al infinito 'como un todo' para comprender la construcción de los conjuntos infinitos". En Martínez, G. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol 19, pp. 544-550). México.

Anexo 1

1. El libro de arena

...thy rope of sands...

George Herbert (1593-1623)

La línea consta de un número infinito de puntos; el plano, de un número infinito de líneas; el volumen, de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes... No, decididamente no es éste, *more geométrico*, el mejor modo de iniciar mi relato. Afirmar que es verídico es ahora una convención de todo relato fantástico; el mío, sin embargo, es verídico.

Yo vivo solo, en un cuarto piso de la calle Belgrano. Hará unos meses, al atardecer, oí un golpe en la puerta. Abrí y entró un desconocido. Era un hombre alto, de rasgos desdibujados. Acaso mi miopía los vio así. Todo su aspecto era de pobreza decente. Estaba de gris y traía una valija gris en la mano. En seguida sentí que era extranjero. Al principio lo creí viejo; luego advertí que me había engañado su escaso pelo rubio, casi blanco, a la manera escandinava. En el curso de nuestra conversación, que no duraría una hora, supe que procedía de las Orcadas.

Le señalé una silla. El hombre tardó un rato en hablar. Exhalaba melancolía, como yo ahora.

-Vendo biblias -me dijo.

No sin pedantería le contesté:

-En esta casa hay algunas biblias inglesas, incluso la primera, la de John Wiclif. Tengo asimismo la de Cipriano de Valera, la de Lutero, que literariamente es la peor, y un ejemplar latino de la Vulgata. Como usted ve, no son precisamente biblias lo que me falta.

Al cabo de un silencio me contestó:

-No sólo vendo biblias. Puedo mostrarle un libro sagrado que tal vez le interese. Lo adquirí en los confines de Bikanir.

Abrió la valija y lo dejó sobre la mesa. Era un volumen en octavo, encuadernado en tela. Sin duda había pasado por muchas manos. Lo examiné;

su inusitado peso me sorprendió. En el lomo decía *Holy Writ* y abajo *Bombay*.

-Será del siglo diecinueve -observé.

-No sé. No lo he sabido nunca -fue la respuesta.

Lo abrí al azar. Los caracteres me eran extraños. Las páginas, que me parecieron gastadas y de pobre tipografía, estaban impresas a dos columnas a la manera de una biblia. El texto era apretado y estaba ordenado en versículos. En el ángulo superior de las páginas había cifras arábigas. Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. La volví; el dorso estaba numerado con ocho cifras. Llevaba una pequeña ilustración, como es de uso en los diccionarios: un ancla dibujada a la pluma, como por la torpe mano de un niño.

Fue entonces que el desconocido me dijo:

-Mírela bien. Ya no la verá nunca más.

Había una amenaza en la afirmación, pero no en la voz.

Me fijé en el lugar y cerré el volumen. Inmediatamente lo abrí.

En vano busqué la figura del ancla, hoja tras hoja. Para ocultar mi desconcierto, le dije:

-Se trata de una versión de la Escritura en alguna lengua indostánica, ¿no es verdad?

-No -me replicó.

Luego bajó la voz como para confiarme un secreto:

-Lo adquirí en un pueblo de la llanura, a cambio de unas rupias y de la Biblia. Su poseedor no sabía leer. Sospecho que en el Libro de los Libros vio un amuleto. Era de la casta más baja; la gente no podía pisar su sombra, sin contaminación. Me dijo que su libro se llamaba el Libro de Arena, porque ni el libro ni la arena tienen principio ni fin.

Me pidió que buscara la primera hoja.

Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.

-Ahora busque el final.

También fracasé; apenas logré balbucear con una voz que no era la mía:

-Esto no puede ser.

Siempre en voz baja el vendedor de biblias me dijo:

-No puede ser, pero es. El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última. No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita aceptan cualquier número.

Después, como si pensara en voz alta:

-Si el espacio es infinito estamos en cualquier punto del espacio. Si el tiempo es infinito estamos en cualquier punto del tiempo.

Sus consideraciones me irritaron. Le pregunté:

-¿Usted es religioso, sin duda?

-Sí, soy presbiteriano. Mi conciencia está clara. Estoy seguro de no haber estafado al nativo cuando le di la Palabra del Señor a trueque de su libro diabólico.

Le aseguré que nada tenía que reprocharse, y le pregunté si estaba de paso por estas tierras. Me respondió que dentro de unos días pensaba regresar a su patria. Fue entonces cuando supe que era escocés, de las islas Orcadas. Le dije que a Escocia yo la quería personalmente por el amor de Stevenson y de Hume.

-Y de Robbie Burns -corrigió.

Mientras hablábamos, yo seguía explorando el libro infinito. Con falsa indiferencia le pregunté:

-¿Usted se propone ofrecer este curioso espécimen al Museo Británico?

-No. Se le ofrezco a usted -me replicó, y fijó una suma elevada.

Le respondí, con toda verdad, que esa suma era inaccesible para mí y me quedé pensando. Al cabo de unos pocos minutos había urdido mi plan.

-Le propongo un canje -le dije-. Usted obtuvo este volumen por unas rupias y por la Escritura Sagrada; yo le ofrezco el monto de mi jubilación, que acabo de cobrar, y la Biblia de Wiclif en letra gótica. La heredé de mis padres.

-A black letter Wiclif! -murmuró.

Fui a mi dormitorio y le traje el dinero y el libro. Volvió las hojas y estudió la carátula con fervor de bibliófilo.

-Trato hecho -me dijo.

Me asombró que no regateara. Sólo después comprendería que había entrado en mi casa con la decisión de vender el libro. No contó los billetes, y los guardó.

Hablamos de la India, de las Orcadas y de los jarls noruegos que las rigieron. Era de noche cuando el hombre se fue. No he vuelto a verlo ni sé su nombre.

Pensé guardar el Libro de Arena en el hueco que había dejado el Wiclif, pero opté al fin por esconderlo detrás de unos volúmenes descalabrados de *Las mil y una noches*.

Me acosté y no dormí. A las tres o cuatro de la mañana prendí la luz. Busqué el libro imposible, y volví las hojas. En una de ellas vi grabada una máscara. En ángulo llevaba una cifra, ya no sé cuál, elevada a la novena potencia.

No mostré a nadie mi tesoro. A la dicha de poseerlo se agregó el temor de que lo robaran, y después el recelo de que no fuera verdaderamente infinito. Esas dos inquietudes agravaron mi ya vieja misantropía.

Me quedaban unos amigos; dejé de verlos. Prisionero del Libro, casi no me asomaba a la calle. Examiné con una lupa el gastado lomo y las tapas, y rechacé la posibilidad de algún artificio. Comprobé que las pequeñas ilustraciones distaban dos mil páginas una de otra. Las fui anotando en una libreta alfabética, que no tardé en llenar. Nunca se repitieron. De noche, en los escasos intervalos que me concedía el insomnio, soñaba con el libro.

Declinaba el verano, y comprendí que el libro era monstruoso. De nada me sirvió considerar que no menos monstruoso era yo, que lo percibía con ojos y lo palpaba con diez dedos con uñas. Sentí que era un objeto de pesadilla, una cosa obscena que infamaba y corrompía la realidad.

Pensé en el fuego, pero temí que la combustión de un libro infinito fuera parejamente infinita y sofocara de humo al planeta.

Recordé haber leído que el mejor lugar para ocultar una hoja es un bosque. Antes de jubilarme trabajaba en la Biblioteca Nacional, que guarda novecientos mil libros; sé que a mano derecha del vestíbulo una escalera curva se hunde en el sótano, donde están los periódicos y los mapas. Aproveché un descuido de los empleados para perder el Libro de Arena en uno de los húmedos anaqueles. Traté de no fijarme a qué altura ni a qué distancia de la puerta.

Siento un poco de alivio, pero no quiero ni pasar por la calle México.

2. La Paradoja de Tristam Shandy

Tristam Shandy, como se sabe, invirtió dos años para hacer la crónica de los dos primeros días de su vida, y se lamentaba de que a ese ritmo el material se acumularía más rápidamente de lo que él era capaz de elaborarlo, de suerte que con el paso de los años cada vez estaría más lejos del final de su relato. Ahora bien; yo sostengo que si él hubiese vivido eternamente sin sentirse cansado de su trabajo, entonces, aún en el caso de que su vida hubiese estado tan repleta de acontecimientos como cuando comenzó, ninguna parte de su biografía habría quedado sin escribirse. En efecto: el día centésimo será escrito en el año centésimo, el día milésimo en el año milésimo, y así sucesivamente. Cualquier día que elijamos, tan lejano que se pierdan las esperanzas de llegar a él, ese día será descrito en el año correspondiente. Así, cualquier día que pueda mencionarse será escrito más tarde o más temprano, y, por ende, ninguna parte de la biografía quedará permanentemente por escribir. Esta proposición paradójica, pero perfectamente verdadera, depende del hecho de que el número de días de todo el tiempo no es mayor que el número de años.

3. El Hotel de Hilbert

Imaginemos un hotel con un número finito de cuartos, y supongamos que todos están ocupados. Llega un nuevo pensionista y pide una habitación. "Lo lamento –dice el propietario-, pero todos los cuartos están ocupados."

Ahora imaginemos un hotel con un número *infinito* de cuartos, también todos ocupados. A dicho hotel viene un nuevo pensionista y pide una habitación. "¡Por supuesto!" –exclama el propietario; y traslada la persona que ocupaba anteriormente el cuarto N° 1 al cuarto N° 2, el ocupante del cuarto N° 2 al N° 3, el ocupante del cuarto N° 3 al N° 4 y así sucesivamente. El nuevo cliente recibe la habitación N° 1, que queda libre como consecuencia de tales traslados.

Imaginemos ahora un hotel con un número infinito de cuartos, todos ocupados, y un número infinito de nuevos pensionistas que vienen y piden habitaciones. "Sin duda, caballeros –dice el propietario-; esperen nada más que un minuto". Pasa al ocupante del N° 1 al N° 2, el del N° 2 al N° 4, el del N° 3 al N° 6 y así sucesivamente... Ahora todos los cuartos con número impar quedan desocupados y el infinito de los nuevos pensionistas se puede acomodar fácilmente en ellos.

4. El Infinito

¿Qué es el infinito? ¿El número de granos de arena de una playa, o el de estrellas que vemos en el cielo? Felizmente, ni el uno ni el otro. Aun la cantidad de átomos en el universo es tan poco infinita que da lástima. En realidad, semejante cifra no está más cerca del infinito que otras más modestas como 2, 26 ó 3089.

¿Y entonces? Para encontrarnos con conjuntos que ningún número pueda contar, debemos recurrir al mundo de las matemáticas. Pero no necesitamos adentrarnos demasiado en él: los números naturales (1, 2, 3, 4, 5...) o los puntos de una recta, son infinitos, terriblemente infinitos. Y cuando se enfrenta con conjuntos infinitos, enseguida encuentra que funcionan de manera peculiar, para decirlo suavemente.

El gran matemático David Hilbert ponía como ejemplo un hotel de infinitas habitaciones y un viajero que llega durante una noche de tormenta y ve en la puerta un cartel que dice "completo". En un hotel finito, la temible palabra lo sumiría en la desesperación (el hotel de Hilbert queda a cientos de kilómetros de cualquier otro lugar civilizado, en medio de un páramo, rodeado de ciénagas espantosas, habitadas por caníbales), pero en este caso nuestro viajero pide tranquilamente un cuarto. El conserje no se inmuta (en realidad ni siquiera se sorprende). Levanta el teléfono y da una orden general: que el ocupante de la habitación uno se mude a la habitación dos, es de la habitación dos a la habitación tres, el de la tres a la cuatro, y así sucesivamente. Mediante esta sencilla operación, la habitación uno queda vacía lista para el nuevo huésped: todos los ocupantes del hotel tienen, como antes, una habitación, y el hotel seguirá, también como antes, completo. Ahora supongamos que en vez de llegar un solo viajero, llegaran infinitos. El conserje, esta vez, indicaría al ocupante de la habitación uno, que se mudara a la dos, al de la dos, a la cuatro, al de la tres, a la seis; y otra vez lograría acomodar a la multitud recién venida en las habitaciones impares, que quedarían todas vacías. Y si el dueño del hotel decidiera clausurar la mitad de las habitaciones, no por eso la cantidad de cuartos cambiaría. Sería la misma, y tan infinita como antes.

El particular comportamiento del hotel de Hilbert es apenas una pequeña anomalía que se presenta al operar con el infinito. Hay más.

Fue el matemático Georg Cantor (1845-1918) quien consiguió domesticar al infinito y descubrió una manera rigurosa y precisa de tratarlo. Cantor introdujo los números tranfinitos (que se designan con la letra hebrea Aleph) y que son capaces de medir conjuntos infinitos. Así, Aleph cero mide el infinito de los números naturales (1, 2, 3, 4, 5..., etc.). Pero lo interesante es que, cuando quiere medir la cantidad de números pares se encuentra con que también es Aleph cero. ¿Y si agregamos los números negativos? ¡Aleph cero otra vez! ¿Y las fracciones? Pues señor, hay también Aleph cero fracciones. O sea que hay tantos números naturales como números pares, como fracciones (y como habitaciones en el hotel de Hilbert). La misma cantidad. Todos ellos son conjuntos numerables, como se llaman aquellos medidos con Aleph cero, el menor y más hogareño de los infinitos.

Porque los infinitos no son todos iguales. Probablemente sea ésta la más estrepitosa sorpresa de las muchas y muy razonables que salieron de la galera de Georg Cantor. La cantidad de puntos de una recta es mayor que la cantidad de números naturales o fracciones, y el número transfinito que los mide es más grande que Aleph cero: familiarmente se lo llama "c", la potencia del continuo. Los puntos de una recta, las rectas de un plano, los números irracionales, tienen la potencia del continuo. Si al hotel de Hilbert, que tiene Aleph cero habitaciones, llegaran "c" viajeros, no habría manera de ubicarlos; aunque el hotel estuviera vacío las habitaciones no alcanzarían. Esta distribución jerárquica de los infinitos, que tanto (y tan comprensiblemente) sorprendió a los colegas de Cantor, no termina con Aleph cero o "c". Existen más infinitos, cada vez más grandes, que excitan la fantasía y el misterio. En "El libro de arena", Jorge Luis Borges imaginó un libro de infinitas páginas infinitamente delgadas. "El manejo de este vademécum sedoso no sería cómodo: cada hoja aparente se desdoblaría en otras análogas; la inconcebible hoja central no tendría revés.”

¿ASÍ QUE INFINITO ES ∞?
AHA
¿Y QUÉ SON 9, 15, 246 Y, ENTONCES?
NÚMEROS
¡PERO SON MÁS QUE 8!
SÍ, PERO NO MÁS QUE UN 8 ACOSTADO
EL 8 ACOSTADO ESTÁ SOÑANDO, Y LOS SUEÑOS NO TIENEN LÍMITES, NENA
NO SÓLO EN LA LITERATURA, EN LA MATEMÁTICA TAMBIÉN SE PUEDE HACER UN VERSO

ESO DE QUE UN 8 ACOSTADO ES INFINITO ES VERSO
NO, NENA. TODOS SOÑAMOS QUE SOMOS MÁS. LOS NÚMEROS TAMBIÉN
¿Y CÓMO SABÉS SI, EN VEZ DE TENER SUEÑOS DE GRANDEZA, ESE 8 NO ESTÁ TENIENDO UNA PESADIYA?
TODOS NOS VAMOS A MORIR
CAPAZ QUE ÉL ESTÁ SOÑANDO QUE ES UN CERO

Imagen 4

Índice de cuadros, diagramas e imágenes

Imágenes

Figuras

Cuadros

Tablas

Gráficos