Instituto Politécnico Nacional
Centro de investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

Diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la Transformación Lineal en R^2

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Héctor Hernández Guzmán

Director de Tesis:
MC. Juan Gabriel Molina Zavaleta

Co-Director de Tesis:
Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

México, D. F., Octubre de 2013

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F siendo las 11:00 horas del día 26 del mes de Septiembre del 2012 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-Legaria para examinar la tesis titulada:

"Diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la transformación lineal en R^2"

Presentada por el alumno:

Hernández	Guzmán
Apellido paterno	Apellido materno

Nombre(s) Héctor

Con registro:

B	0	7	1	7	3	9

aspirante de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

M en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dra. Gabriela Buendía Abalos

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Calderón Arenas

CICATA - I.P.N. U. LEGARIA
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 29 del mes de diciembre del año 2012, el que suscribe Héctor Hernández Guzmán alumno del Programa de Maestría en Matemática Educativa, con número de registro B071739, adscrito al Centro de Investigación en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta ser el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta y del Dr. Alejandro Rosas Mendoza, cede los derechos del trabajo titulado "Diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la transformación lineal en R^2", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección hector_h.g@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Héctor Hernández Guzmán

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa

Por su apoyo siempre incondicional

ÍNDICE

GLOSARIO DE TÉRMINOS

A

Actividad: Conjunto de tareas matemáticas relativas a la transformación lineal.

C

Cambio de forma: Transformación de objetos del plano a consecuencia de rotar los ejes x e y del plano R^2.

H

Hipótesis: Suposición de algo posible o imposible para sacar de ello una consecuencia.

I

Intuición: Cognición que crea una apariencia de certeza sobre las interpretaciones o representaciones matemáticas que hace una persona.

M

Manipular: Operar con las manos o con cualquier instrumento, en este trabajo se aplica a imaginar que se pueden mover los ejes de un plano.

Modelo: Dados dos sistemas A y B, B podría ser considerado un modelo de A, si con base en un determinado isomorfismo, entre A y B, una descripción o solución producida en términos de A, puede ser reflejada, consistentemente, en términos de B y viceversa. Es una representación de algo.

Modelos analógicos: Son aquellas representaciones que están en correspondencia con otra identidad, por lo que existen analogías entre ambas, dada la similitud entre ellas.

Modelos explícitos: Representaciones que se construyen conscientemente con la intención de mostrar alguna idea concreta.

Modelos implícitos: (o tácitos): Representaciones inconscientes de una persona.
Modelos intuitivos: Representaciones de nociones de conceptos matemáticos en personas, que sin ser evidentes, pueden percibir o manipular.

Modelo mental: En el contexto de este trabajo, es una representación mental de un concepto matemático o idea.

P

Primera intuición: Información que aporta un modelo explícito que proponemos para que el estudiante advierta y manipule.

T

Tarea matemática: Problema matemático que involucra figuras geométricas en R^2, asignado a un estudiante para que lo resuelva.

.

TABLAS Y FIGURAS

RESUMEN

En este trabajo se plantea el diseño de una secuencia didáctica que contribuya al estudio, en alumnos de nivel superior, del concepto de *transformación lineal* en R^2, concepto que se estudia en la materia de Álgebra Lineal. La idea nace ante la dificultad que se presenta en estudiantes para aceptar la existencia de ciertas transformaciones lineales en contexto geométrico.

Entendemos como un modelo explícito a una representación observable de algo, por ejemplo, el dibujo en papel de una flecha podemos usarla para representar un vector concreto; nuestro interés es usar modelos explícitos para analizar si el uso de estos modelos en determinadas tareas matemáticas, en contexto geométrico, ayuda a los alumnos a adquirir conocimiento matemático relativo a las transformaciones lineales en R^2; para ello se diseñó una secuencia didáctica fundamentada en la teoría de los modelos intuitivos de Fischbein (1989) y así dar cuenta de cómo los estudiantes construyen un modelo intuitivo tácito de la transformación lineal vista como un "cambio de forma" de figuras representadas en el plano.

El resultado que se obtiene muestra la dificultad que tienen los estudiantes seleccionados para manipular los modelos explícitos planteados en la secuencia.

ABSTRACT

This work presents the design of a didactic sequence that promotes the study of linear transformation in R^2, this concept is taught to Lineal Algebra students in college. The idea originates with the problematic presented on students in order to accept certain linear transformations in a geometric context.

We define an explicit model as an observable representation of something, for example: the drawing of an arrow may be used to represent a vector. Our interest is to use these explicit models to analyze if their usage in determined mathematics tasks, in a geometrical context, helps the students to assimilate the linear transformations in R^2 knowledge in determined mathematic tasks and a geometrical context. A didactic sequence based on the Fischbein's intuitive models theory was designed in order to account for how students build a tacit intuitive model of the lineal transformation seen as a "shape change" of figures represented in the plane.

The results show how hard is for the selected students to manipulate the explicit models presented on the sequence.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En la materia de Álgebra Lineal que se imparte en las carreras de ingeniería y otras áreas, los estudiantes se enfrentan a obstáculos durante el desarrollo de los procesos cognitivos que implican su estudio, situación que se puede deber al elevado grado de abstracción de sus temas, siendo uno de ellos el de la Transformación Lineal (TL). Creemos que algunas de las dificultades que los estudiantes enfrentan en ciencia y matemáticas se deben a la influencia de modelos tácitos intuitivos actuando descontroladamente durante su proceso de razonamiento, dado que los modelos intuitivos manipulan el significado, el uso y las propiedades del concepto en estudio.

Consideramos que algunas dificultades en el proceso de razonamiento en estudiantes, tienen sus orígenes en los modelos tácitos intuitivos presentes en ellos. Al respecto Fischbein (1989) menciona "Varias de las dificultades que los estudiantes enfrentan en ciencia y matemáticas se deben a la influencia de modelos tácitos intuitivos actuando descontroladamente en el proceso de razonamiento" (Fischbein, 1989, p.9).

Por lo anterior, nuestra pregunta de investigación es: ¿En una secuencia didáctica, el planteamiento de modelos intuitivos explícitos en relación con la transformación lineal en contexto geométrico, puede ayudar a los alumnos a adquirir un conocimiento sobre la TL?

Para poder dar respuesta a la pregunta se diseñó una secuencia didáctica para el estudio de la Transformación Lineal en R^2, siendo el marco teórico el trabajo de Fischbein (1989) bajo un enfoque cognitivo.

De acuerdo con esta teoría, los modelos que crean los estudiantes son, en la mayoría de los casos, representaciones imperfectas de los conceptos modelados, llevándolos a interpretaciones erróneas o impidiéndoles aceptar como ciertas algunas relaciones o ideas matemáticas.

Este trabajo de investigación se desarrolló en ocho capítulos bajo la siguiente secuencia.

En el capítulo **1** *Introducción*, que es el presente, mencionamos que tienen los estudiantes algunas dificultades en el proceso de razonamiento, que pueden originarse en los modelos tácitos intuitivos presentes en ellos.

En el capítulo **2** *Objetivo de la investigación*, donde describimos cuál es el interés de esta investigación y lo justificamos.

En el capítulo **3** *Consideraciones teóricas*, describimos la teoría en la que se basa este trabajo, los modelos tácitos y el razonamiento matemático de Fischbein (1989).

En el capítulo **4** *Antecedentes*, hacemos alusión a algunos trabajos de investigación relacionados con el aprendizaje de estudiantes del Álgebra Lineal y particularmente sobre el tema de la Transformación Lineal, centrando nuestra atención en los obstáculos que los alumnos del estudio manifestaron, las concepciones que desarrollaron y los resultados que se obtuvieron, para tratar de identificar las dificultades presentes en los estudiantes en relación al concepto de Transformación Lineal.

En el capítulo **5** *Aplicación de la secuencia*, planteamos la metodología empleada durante la puesta en escena de la secuencia didáctica.

En el capítulo **6** *Secuencia didáctica. Análisis a priori*, mostramos cómo se diseñó la secuencia didáctica, el análisis de cada una de las tareas propuestas y la forma cómo se esperaba que fuera realizada por los estudiantes.

En el capítulo **7** *Análisis a posteriori*, analizamos la respuesta que dio cada uno de los estudiantes a cada tarea de la secuencia.

En el capítulo **8** *Conclusiones*, explicamos lo ocurrido con cada una de las tareas de la secuencia, si cumplió o no con lo esperado en el análisis a priori, y qué se puede inferir sobre dichos resultados.

CAPÍTULO 2

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En la materia de Álgebra Lineal que se imparte en el nivel superior, se estudia el tema Transformación Lineal (TL), esta es una clase especial de función, misma que cumple con dos propiedades, en Lay (2001) la definen como sigue:

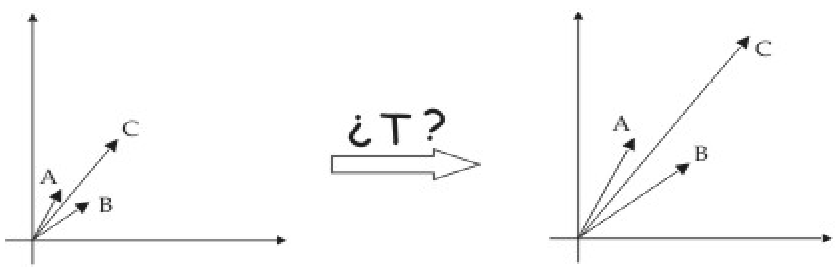
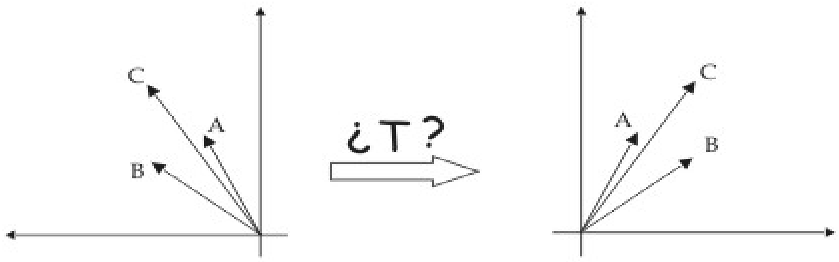
> Una transformación (o mapeo) T es **lineal** si:
>
> i. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para toda u y v en el dominio de T y
>
> ii. $T(cu) = cT(u)$, para toda u y todos los escalares c.
>
> (Lay, 2001, p.70)

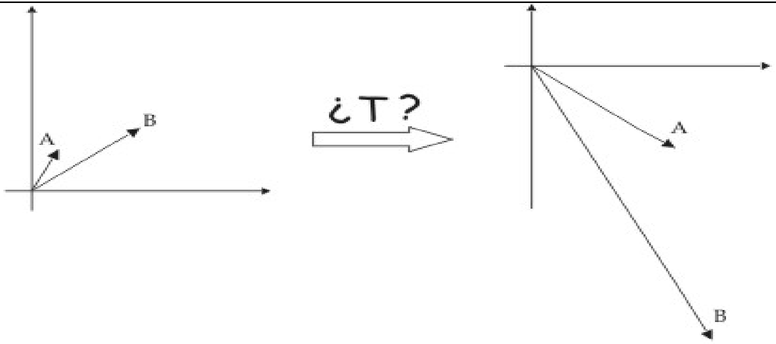
Como sucede comúnmente en la enseñanza de las distintas ramas de la matemática, durante el estudio de la TL, estudiantes manifiestan tener dificultad en su aprendizaje. En Molina (2004) se menciona que un rasgo característico del Álgebra Lineal es el alto nivel de abstracción que se presenta en los conceptos que la componen. Lo anterior se traduce en un problema para los estudiantes (por lo menos los considerados en la investigación), ellos tienden a olvidar dichos conceptos vistos desde un enfoque formal, como es el caso de las propiedades de la TL ya mencionadas. La explicación al respecto que da el autor se basa en las ideas de Fischbein quien dice que "El estudiante simplemente olvida las propiedades formales y tiende a recordar las impuestas por un modelo" (Fischbein, 1989, p.10), modelo que generalmente ignoran que poseen y que caracteriza lo que ellos entienden por transformación lineal. El término modelo se entiende como una representación de algo:

> Dados dos sistemas A y B, B podría ser considerado un modelo de A, si con base en un determinado isomorfismo, entre A y B, una descripción o solución producida en términos de A, puede ser reflejada, consistentemente, en términos de B y viceversa. (Fischbein, 1989, p.9).

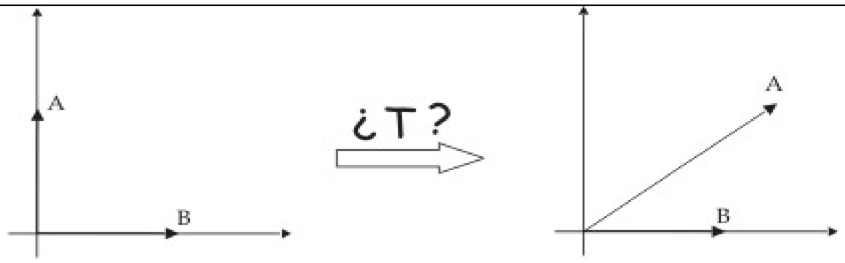
Es decir, estos modelos son construcciones que hacen los estudiantes en forma inconsciente de los conceptos formales estudiados en la clase de algebra lineal. Una discusión amplia acerca de los modelos y la influencia "oculta" de algunos de éstos para el entendimiento de la TL en los estudiantes la realizamos en el apartado de las consideraciones teóricas. Desde nuestro punto de vista, el tema en cuestión es importante porque según la teoría considerada, estos modelos que crean los estudiantes son en la mayoría de los casos representaciones imperfectas de los conceptos modelados, llevándolos a interpretaciones erróneas o impidiéndoles aceptar como ciertas algunas relaciones o ideas. Un ejemplo, en el trabajo de Molina (2004) se analizaron las respuestas dadas por un grupo de estudiantes a una serie de preguntas sobre la existencia de la TL en contexto geométrico, pues fue diseñada con la intención de identificar modelos intuitivos que ellos pudieran tener. A partir del análisis de las respuestas se detectó en los estudiantes ciertos modelos que explicaban algunas de las dificultades que manifestaron al responder las preguntas, dentro de las dificultades detectadas están las siguientes:

1. Prototipos. Los entrevistados mostraron contar con un universo geométrico de transformaciones lineales con base en las cuales determinaban cuándo existía o cuándo no existía la TL en las situaciones que se les planteaban. Si las preguntas de la entrevista incluían ejemplos que no se ajustaban a sus prototipos, a las transformaciones involucradas no las consideraban lineales. Por ejemplo, en los casos a-c que se muestran en la tabla 1, cuando a los estudiantes entrevistados se les preguntó por la existencia de una TL que mapeara los vectores de la figura 1 en los vectores de la figura 2 (ver tabla 1), no tuvieron dificultad en responder correctamente, pues este tipo de transformaciones son parte de los prototipos que ellos asocian a la TL.

<table>
<tr><th>Figura 1</th><th>Figura 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">a) 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) 
</td></tr>
</table>



c)



d)

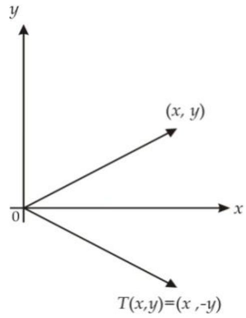
Tabla 1.

Sin embargo, cuando se les mostró el caso del inciso d, todos los entrevistados negaron la existencia de la TL, incluso aquellos que habían argumentado correctamente cada respuesta, y que mostraban soltura para moverse de representaciones algebraicas a geométricas.

2. Linealidad. Otra situación detectada fue que las propiedades que determinan si la transformación es lineal o no, eran pasadas por alto en la mayoría de los casos. El término *lineal* lo relacionaban con rectas, o con ecuaciones lineales.

3. Transformaciones no-lineales. En varios casos a los estudiantes les causó dificultad proponer un ejemplo de transformaciones no lineales, vacilaron, y el ejemplo que propusieron fue la función cuadrática, posiblemente por la forma curva de la gráfica que la representa, la cual no es recta. Tal vez porque en los cursos de álgebra lineal se pone énfasis en las transformaciones lineales y no en las no-lineales.

4. Varios estudiantes consideraban la TL como la transformación de un vector en particular, y no como una función que transforma todo el plano. Según el investigador, la utilización en clase o en libros de texto de figuras geométricas que involucren sólo un vector y su imagen bajo cierta transformación lineal con el objeto de ejemplificarla puede ser la causa (ver figura 1), situación que puede



(Tomado de Grossman, 1996, p. 465)

Figura 1.

sugerir al estudiante que la imagen de un vector (x, y) bajo cierta transformación se puede determinar multiplicando las componentes del vector (x, y) por escalares. Es decir, la noción geométrica del movimiento de un vector se lleva al contexto aritmético, dejando en el estudiante la idea de que cualquier TL se puede explicar multiplicando por escalares las componentes de los vectores. Este procedimiento es válido cuando se tiene un vector y la imagen de éste bajo cierta TL, sin embargo oculta algunos detalles, como el hecho de que hay infinitas combinaciones de escalares multiplicando vectores que producirían el mismo efecto. Por ejemplo, existen infinitas transformaciones lineales que mapean el vector de la figura 2 en el vector de la figura 3, por lo siguiente:

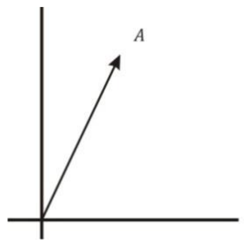


Figura 2.

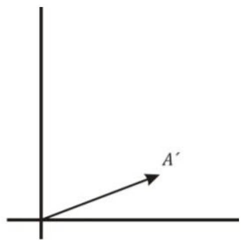


Figura 3.

Dados los vectores $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Donde v_1, v_2, v_3, v_4, a, b, c, y d, son escalares con $v_1 \wedge v_2 \neq 0$ y T la transformación lineal.

Entonces, se sabe que $T(A) = A'$, es decir:

$$\begin{aligned} av_1 + bv_2 &= v_3 \\ cv_1 + dv_2 &= v_4 \end{aligned}$$

De donde se deduce que $a = \frac{v_3 - bv_2}{v_1}$ y $c = \frac{v_4 - dv_2}{v_1}$

Entonces cada escalar b y d producirán escalares a y c, por tanto hay infinitas transformaciones lineales $T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que cumplen la condición. Otro argumento para justificar esta situación es que en R^2 se requieren de dos vectores linealmente independientes para determinar una única TL. Cuando a los estudiantes del estudio se les presentaba una que involucraba más de un vector como en la figura 4 y sus respectivas imágenes bajo la TL, y se les preguntaba por la existencia de una TL que los mapeara a la figura 5, afirmaban que sí existía la TL, pero daban una fórmula para cada par de vectores.

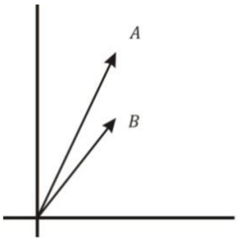


Figura 4.

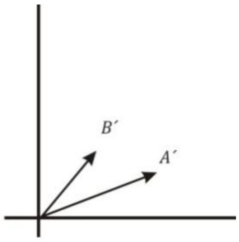


Figura 5.

Es decir, daban una fórmula para convertir el vector A en el A' y otra para convertir el vector B en el B', cuando se les señalaba que se pedía una TL entraban en conflicto y en la mayoría de los casos no podían encontrarla.

Coincidimos con Fischbein (1989) cuando menciona que los modelos tácitos no son inalterables, que pueden ser modificados una vez que se han identificado. Estas consideraciones nos llevaron a plantear como objetivo de investigación el diseño de una secuencia didáctica fundamentada en la teoría de los modelos intuitivos y que utilice las dificultades mencionadas dentro de sus tareas para favorecer el aprendizaje de la TL.

CAPÍTULO 3

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

A continuación explicaremos algunas consideraciones teóricas en que fundamentaremos nuestro trabajo, nos referimos a la intuición y los modelos intuitivos tácitos, en el sentido de Fischbein (1989).

En el trabajo de Fischbein se discute principalmente que el conocimiento tácito debe ser considerado como un factor fundamental para el desarrollo del razonamiento científico. Aquí se centra la atención en aspectos tácitos del conocimiento, los que llama modelos tácitos, y discute cómo éstos influyen en el entendimiento de los conceptos y operaciones matemáticas de los estudiantes, confiriéndoles un significado práctico, aún cuando éstos no estén apoyados por alguna evidencia empírica.

Fischbein menciona que tácito significa que el individuo no está consciente de su influencia, pero ésta, permite incrementar la productividad del proceso intelectual, por lo que la tarea básica de un modelo mental es hacer representaciones de ciertas nociones matemáticas que son más fáciles de entender por el propio estudiante al momento de solucionar un problema. A continuación explicaremos estas ideas.

3.1 La intuición.

Fischbein señala que el papel de la intuición es el de crear una apariencia de certeza sobre las interpretaciones o representaciones, y considera que la intuición o conocimiento intuitivo es un tipo de cognición el cual se acepta de forma inmediata por ser evidente, por lo que no necesita de ninguna prueba formal o empírica, confiriéndole un carácter de certeza intrínseca.

> Debido a la urgente necesidad por certeza implícita como un componente absoluto de una actividad y debido a que la evidencia es el criterio para la certeza, continuamos y continuaremos haciendo representaciones e interpretaciones evidentes. Esta es la función e la intuición (Fischbein, 1987, p. 12)

3.2 Rasgos característicos de las nociones intuitivas. Fischbein (1987).

Evidentes.

> Esta característica se refiere a la forma como son aceptadas las nociones por los individuos de manera intuitiva, considerándolas verdaderas sin que sea necesaria

una demostración de su validez. Por ejemplo, uno puede decir que el camino más corto entre dos puntos es la línea recata, situación que no es necesario demostrar dado lo evidente del planteamiento.

Certeza intrínseca.

Esta característica implica la aceptación de una noción que se considera cierta sin que medie ningún argumento para considerarla como tal, y sin que esto signifique que sea necesariamente evidente. Por ejemplo, en un sistema de ecuaciones lineales homogéneo si hay mas incógnitas que ecuaciones, la solución siempre será infinita, como se puede ver el planteamiento no es evidente, sin embargo después de su demostración se tendrá la certeza sobre el tipo de solución.

Perseverancia.

Esta característica otorga a las nociones un carácter de permanencia, pues su influencia persiste a lo largo de la vida de un individuo aún cuando alcance un grado avanzado de educación formal. Esta característica se presenta en los modelos tácitos mencionados en Fischbein, 1989, y se puede ejemplificar como sigue.

Ginsburg (1977), señalo que los alumnos de primaria interpretan los signos (+) e (=) en términos de acciones a realizar. Como consecuencia de ello no aceptarían un enunciado como $\square = 3+4$ y dirían que está escrito al revés. Ginsburg también encontró que los niños rechazarían un enunciado como $3=3$ pues contradice la idea de que el signo de igualdad expresa un proceso en el que cambiando ciertos ingredientes se produce un resultado.

La conclusión es que los estudiantes tienden a interpretar los signos de igual, no como equivalencia, si no como un modelo intuitivo tácito “input-output” (Fischbein, 1989), donde la propiedad de simetría está ausente.

Lesly Bouth (1988), refiriéndose a los estudiantes intentó simplificar expresiones tales como $2a+5b$ y escribió “en aritmética, símbolos tales como (+) e (=) son interpretados en términos de acciones a realizar, así que (+) significa realizar una operación e (=) significa escribir el resultado”. Consecuentemente, uno puede encontrar estudiantes que escriben $2a + 5b = 7ab$ o $a + b = ab$, pero nadie escribiría $ab = a + ab$ o $7ab = 2a + 5b$.

Resultados similares se encuentran en estudiantes de doce y catorce años (Kieran, 1981) y aún en estudiantes de diecisiete años (Wagner, 1977).

Coercitivo.

Este rasgo considera a un conocimiento como único y verdadero rechazando cualquier otra noción o representación que resulte ser contrario a él. Por lo que la naturaleza coercitiva de la intuición contribuye a interpretaciones incorrectas incluso después de que han sido lógicamente probadas. Por ejemplo en cursos de álgebra vectorial, los alumnos rechazan la idea de que la norma de los vectores $u+v$ y $u-v$ son iguales, cuando ambos vectores u y v son perpendiculares, pues intuitivamente consideran que la suma de dos vectores es más grande que su diferencia.

Estado de la teoría.

El rasgo que caracteriza esta noción es que no es una simple percepción de un hecho dado, sino que la intuición generalmente acepta la universalidad a partir de un hecho específico. Si afirmamos que “dos líneas que se intersecan determinan dos pares de ángulos opuestos iguales” la certeza de este hecho es evidente por sí mismo, pues al ver la imagen percibimos la igualdad de los ángulos. Sin embargo lo que se intuye realmente es la universalidad de esta propiedad. Lo anterior implica que una intuición es una teoría que se manifiesta a través de una representación en particular, usando un modelo, un paradigma, una analogía, un diagrama, un comportamiento constructivo, etc.

Extrapolación.

Este rasgo permite a un individuo alcanzar una conclusión basándose en una información limitada para llegar a una conclusión. El aspecto de extra polaridad no es siempre evidente dada la aparente obviedad de la intuición. Por ejemplo, David Tall ha mostrado que muchos de sus estudiantes, cuando se les preguntó acerca del significado de 0.999999…, no aceptan que $0.999... = 1$. Uno puede concebir la secuencia ilimitada 0.9, 0.99, 0.999, etc., pero existe una dificultad para ver que $0.9 = 1$, dado que la sucesión infinita no ha sido realizada. De hecho, aunque la sucesión numérica es evidente, no extrapola la experiencia del infinito.

Globalidad.

Esta característica de las nociones intuitivas permite analizar una situación o concepto de manera unitaria y global de un determinado problema, por lo que toda idea es única y se corresponde con la solución de un problema dado, pues no considera resultados o interpretaciones parciales. Por ejemplo, si por primera vez un estudiante enfrenta el problema de encontrar la fórmula del volumen de un prisma, esta fórmula puede ser inspirada, por analogía, por la fórmula para calcular el área de un rectángulo.

Implícitas.

En esta característica se presenta el hecho de que las nociones intuitivas, frecuentemente se presentan en forma inconsciente, por lo que el individuo no está consciente de ellas. Por ejemplo, una persona manifiesta que después de obtener un águila, muchas veces sucesivamente “la oportunidad de obtener un sol es muy alta”. Aquí la persona no está consciente del mecanismo de su errónea (intuitiva) predicción. La oportunidad de obtener la secuencia AAAA es exactamente la misma que la de obtener la secuencia AAAS en el orden antes mencionado. Pero la oportunidad de obtener A tres veces y una S, es más alta que la de obtener A cuatro veces (sin importar el orden). Los dos problemas se confunden a un nivel inconsciente en la mente del individuo.

3.3 Modelo.

Un modelo como lo menciona Fischbein (1989), es la representación de ciertas nociones matemáticas (intuitivamente más accesibles, que sustituyen a nociones abstractas que son intuitivamente inaceptables) que se desarrollan ellas mismas en un estado inicial del proceso de aprendizaje, y que continúan influenciando inconscientemente las decisiones del sujeto en la solución de un problema durante el proceso de aprendizaje operacional.

3.4 Clasificación de los modelos

Modelos abstractos e intuitivos

Una primera dicotomía que plantea Fischbein es sobre los modelos abstractos e intuitivos. Los modelos abstractos usualmente son relaciones tales como fórmulas, funciones, etc., que representan a ciertas realidades concretas. La función lineal $v = s/t$, es un modelo abstracto de la velocidad de un móvil, aquí, uno puede determinar la velocidad de un móvil conociendo la distancia recorrida s durante un tiempo t. La solución obtenida en el sistema abstracto, es válida para el fenómeno concreto correspondiente y representa una herramienta esencial para predecir eventos con respecto a ese fenómeno concreto.

Los modelos intuitivos, son por naturaleza del tipo sensorial, y por tanto se pueden percibir, representar o manipular como cualquier otra realidad concreta. Por ejemplo, para poder representar magnitudes vectoriales (como fuerzas), segmentos de líneas dirigidas son empleadas. Para poder representar números directamente usamos la imagen del número en una recta con un origen convencional sobre ella. Un modelo intuitivo no es necesariamente una reflexión directa de una cierta realidad. La gráfica de una función es un modelo intuitivo de una función, y la función en turno, es el modelo abstracto de un fenómeno real. Por ejemplo, el fenómeno de un objeto cayendo → la función cuadrática que lo representa → la gráfica (una representación visual del comportamiento de la relación dinámica entre las variables involucradas.)

Modelos explícitos e implícitos (o tácitos)

En esta clasificación, los modelos explícitos son aquellos que se escogen con la intención de facilitar el llegar a una solución, dada alguna información que conduzca a ella.

Los modelos implícitos (o tácitos) dan cuenta que el individuo no está al tanto de su influencia, es decir, el sujeto no identifica explícitamente el concepto matemático. Por ejemplo, en la figura 6 se muestra una transformación lineal que rota y expande un vector:

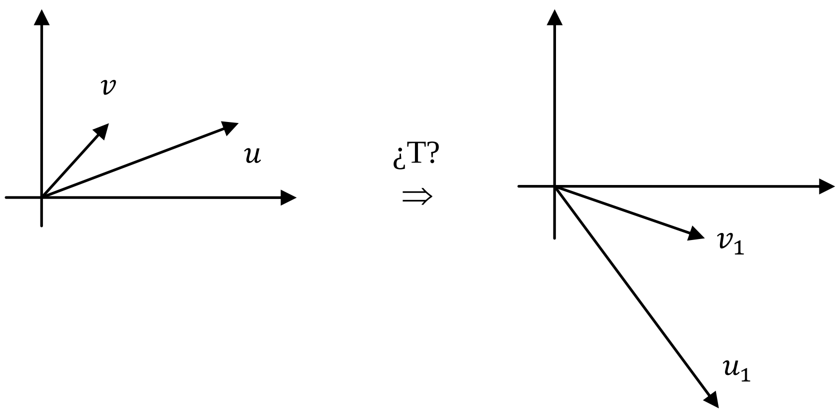


Figura 6.

En Fischbein (1989) se considera que los modelos mentales implícitos son representaciones de ciertas nociones matemáticas abstractas, que se desarrollan en un estado inicial del proceso de aprendizaje y que continúa influenciando tácitamente las interpretaciones y las decisiones de solución en el aprendizaje, y resume las características comunes de los modelos mentales intuitivos, primarios e implícitos como sigue:

a) Una característica fundamental es que el modelo mental es una "entidad estructural", pues al igual que una teoría, el modelo tiene sus propias reglas y restricciones que se manifiestan durante el proceso de razonamiento siendo responsables de las decisiones que se tomen. Por ejemplo, en el trabajo de

Molina (2004) se describe cómo un estudiante piensa que la transformación lineal afecta en forma semejante a todos los vectores del plano, de tal manera que si se le mostraba una figura como la siguiente (ver figura 7):

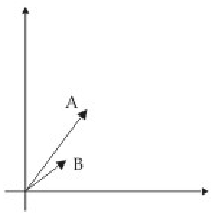


Figura 7.

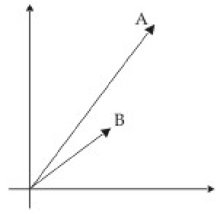
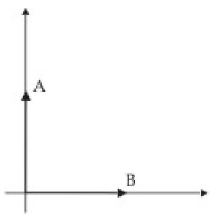


Figura 8.

El estudiante al aplicarle alguna transformación lineal, digamos una expansión, consideraba que ambos vectores aumentarían de tamaño, como se muestra en la figura 8. Esta idea es compatible con este tipo de transformaciones lineales, sin embargo, cuando se le preguntaba si podría existir una transformación lineal que mapeara los vectores de la figura 9 en los vectores de la figura 10, el estudiante respondió inmediatamente que no, pues había un vector que no se movía (el vector B) y que la transformación debería afectar a los vectores en la misma forma.



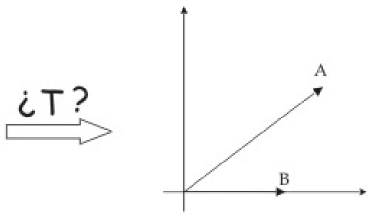


Figura 9. *Figura 10.*

Esta idea del estudiante, que la transformación lineal afecta en forma semejante a todos los vectores del plano es una de esas reglas de su modelo intuitivo, y fue la responsable de que el estudiante negara la existencia de la transformación lineal.

b) La naturaleza de un modelo implícito es “concreta y práctica”, pues aún cuando el modelo tenga una construcción abstracta, éste se manifiesta en hechos concretos para identificar un problema convirtiéndose en un genuino sustituto del original, por ejemplo cuando se considera a un conjunto como una colección de objetos, la multiplicación como sumas repetidas, etc.

Se considera el siguiente ejemplo (Fischbein 1989). La división de un segmento y una línea donde se hicieron las siguientes preguntas:

Sea el problema, dividir un segmento AB en dos partes iguales, luego dividir cada parte igual en otras dos iguales y así sucesivamente. ¿El proceso de división terminará?”

Y sea el problema, dado un tramo de cable de cobre, dividir el cable en dos partes iguales…, continuando con la pregunta de la misma manera que la anterior.

En realidad, los dos problemas son fundamentalmente diferentes. En el primer problema, uno considera un segmento geométrico, no material, y el proceso de división puede continuar, en principio indefinidamente. En el segundo problema, uno considera un cable, por decir cobre. En este caso, uno supone que el proceso de división llegará a su fin, el final de la división sería representado por los átomos de cobre.

Ciertamente, los dos problemas pueden ser interpretados de diferente forma. El segmento AB puede ser considerado como un dibujo, como una línea fina de tinta. Los átomos de cobre pueden no ser considerados como el final del proceso de división. Los átomos están compuestos de más partículas elementales (electrones, protones, otros). Mentalmente, uno puede pensar en la posibilidad de que estos elementos también son divisibles.

Las reacciones predichas a los dos problemas son: en el caso del segmento AB el proceso de división es infinito. En el caso del cable de cobre el proceso de división se termina al llegar al nivel atómico (después del cual las propiedades elementales pierden su propiedad).

La hipótesis fue que los estudiantes escogerán una solución que después se convertirá en un modelo para ambos problemas.

A pesar de que los conceptos de un segmento geométrico y uno de un material determinado (cobre) hayan sido enfrentados por los estudiantes en dos diferentes contextos la similitud externa y la aparente identidad del proceso (división) tiende a producir un modelo único mental adaptable para ambas situaciones.

Lo que es particularmente interesante en el presente ejemplo es que el infinitamente divisible segmento juega un papel del modelo tácito y no de la realidad concreta como uno usualmente supone. De hecho, el segmento geométrico representa lo que hemos llamado una figura conceptual, una entidad que parece subjetivamente tan abstracta, pura e ideal como cualquier concepto y que al mismo tiempo parece intuitivamente representable y manipulable como si fuese un objeto real.

El segmento puede ser divido porque es subjetivamente real y puede ser dividido porque tiene a pesar de todo una naturaleza ideal. Esta doble naturaleza de conceptos geométricos explica su papel fundamental modelando situaciones matemáticamente reales. El cable deja de ser un conglomerado de átomos, el fin de la división y se convierte en un segmento infinitamente divisible.

El modelo mental adoptado tácitamente se convierte en un genuino sustituto del original, elimina las propiedades que podrían ser inconvenientes para él y expone sus propias propiedades al análisis mental. Algo semejante ocurrió en la entrevista con el estudiante que mencionamos en el inciso a, la noción intuitiva del estudiante se modificó al responder si podría existir la transformación lineal que convirtiera los vectores de la figura 11 en los vectores de la figura 12.

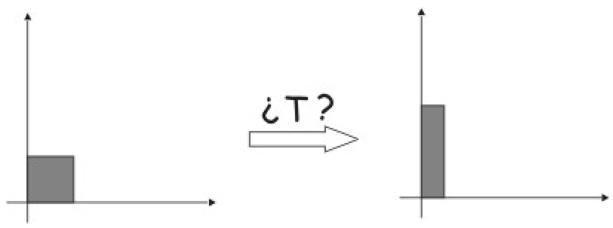


Figura 11. *Figura 12.*

Con este modelo, el estudiante percibió que sí podría existir tal transformación lineal, y visualizó que una transformación lineal puede afectar en forma diferente a los vectores, lo cual lo condujo inmediatamente a retomar el caso de las figuras 3 y 4 y a cambiar su opinión.

c) La "simplicidad" es otra característica, pues los elementos que emplea en los procesos de razonamiento como sustitutos implícitos (tácitos) son simples y elementales, más aún, de carácter trivial, por lo que son económicos y representables en términos de acciones. En el trabajo de Molina 2004 por ejemplo se reporta que los estudiantes involucrados en el estudio piensan a la transformación lineal en términos de movimientos simples, vectores que se mueven para girar, que se alargan y que se contraen, y combinaciones de éstos.

d) Estos modelos a pesar de ser sencillos, son capaces de imponer "restricciones". Por ejemplo, la operación de división se caracteriza, primeramente, por la acción de dividir una colección de objetos en cierto número de sub colecciones. Esto es una simple operación elemental, concreta, pero se imponen algunas restricciones. El divisor debe ser un número entero, más pequeño que el dividendo, y el cociente debe ser más pequeño que el dividendo también. Un problema que no cumpla con las reglas del modelo anterior, no tiene solución intuitiva directa. Un ejemplo de ello se refleja en el trabajo de Molina 2004, una transformación lineal que no pueda expresarse en forma simple por combinaciones de rotaciones y expansiones les causó a los estudiantes dificultades al responder, un efecto semejante tuvo el utilizar un número distinto de vectores al que está acostumbrado el alumno.

e) Al igual que un modelo real, un modelo mental es una entidad "autónoma" con sus propias reglas y no una entidad cuyo comportamiento dependa de algunas restricciones externas.

f) La sexta característica fundamental es su "robustez", es decir, su capacidad de sobrevivir mucho tiempo después a pesar de que no corresponda al conocimiento formal adquirido por el individuo. Como se ha mostrado, los estudiantes de niveles de secundaria y preparatoria cometen el mismo tipo de errores y manifiestan la misma concepción errónea como lo hacen los jóvenes, lo cual puede ser explicado por el uso de de los mismos modelos.

Modelos analógicos y paradigmáticos.

En esta tercera clasificación un modelo analógico es aquél que está en correspondencia con otra entidad, es decir, existen analogías entre ambas, dado que hay similitudes sistémicas entre ellas. En los modelos analógicos, el modelo y el original pertenecen a dos sistemas conceptuales distintos.

> Uno puede establecer una analogía entre una corriente eléctrica y un flujo de líquido a través de un tubo fino. Los dos fenómenos pertenecen a dos clases conceptuales diferentes, (Fischbein, 1987, p.122).

En los modelos paradigmáticos el original es una entidad que consiste de una cierta clase, mientras que el modelo proporciona un ejemplo de una subclase de la categoría considerada.

A un niño se le pidió que identificara el estado de la materia de un polvo, él se sorprendería al saber que el polvo es un sólido. Para él un sólido debe tener todas las propiedades de un objeto compacto incluyendo esa compacidad, (Fischbein, 1987, p.122).

CAPÍTULO 4

ANTECEDENTES

En este capítulo se hace mención de algunas investigaciones donde se reporta la presencia de ciertos obstáculos que estudiantes tienen durante el estudio de la Transformación Lineal.

Uicab y Oktaç (2006) realizaron una investigación sobre la transformación lineal en un ambiente de geometría dinámica, donde se plantearon como objetivo analizar, a través del problema de *extensión lineal* (consiste en determinar una TL por medio de las imágenes de los vectores de una base), las dificultades que los estudiantes manifestaron al no poder hacer conexiones adecuadas entre los conceptos involucrados cuando se enfrentan a este problema y donde "Este fenómeno puede estudiarse desde el punto de vista de la aproximación teórica *el pensamiento teórico versus el pensamiento práctico* (Sierpinska, 2000)" (Uicab y Oktaç, 2006 p. 459).

La metodología empleada partió de un curso aplicado a ocho estudiantes donde los módulos 5 y 6 abordaron a las Transformaciones Lineales. Las actividades realizadas en el primero de éstos, fue generar la transformación lineal $T(v)$ a partir de un vector dado v, empleando el software Cabri-geomètre II, como ayuda pedagógica.

En el módulo 6, previo a una entrevista se aplicó un cuestionario diagnóstico partiendo de las preguntas ¿Cómo defines una transformación? y ¿Qué significa para ti una Transformación Lineal? Luego se les presentó dos figuras para que identificaran si la segunda se podía obtener como resultado da aplicar una TL a la primera figura. Finalmente la tercera actividad consistió en el problema de extensión lineal, donde se les pedía a los estudiantes considerar a un vector *v* como una combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 (que por ser linealmente independientes determinaban una base del plano) y construir la imagen de *v* como resultado de una transformación lineal, siendo la intención observar la manera como vinculaban ellos estos conceptos.

La conclusión a la que se llegó fue la necesidad de ayudar a los estudiantes a hacer conexiones con otros conceptos del Álgebra Lineal, a partir de la inclusión de problemas tipo extensión lineal, particularmente en el aprendizaje de las transformaciones lineales, haciendo hincapié en el aspecto intuitivo en relación con sus propiedades geométricas, así como al aspecto formal de éstas.

Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1999) partiendo del análisis de las dificultades que estudiantes presentan durante el estudio de álgebra lineal como resultado del uso de diferentes lenguajes, como lo son el geométrico, el aritmético y teórico algebraico, para el estudio de transformaciones lineales, eigenvalores y eigenvectores proponen partir de un enfoque geométrico.

Dada la importancia de fuentes geométricas para muchos conceptos algebraicos (Dorier, 1997), y contraria a la aproximación analítico-aritmética (Sierpinska, 1996), el acercamiento geométrico permite considerar ejemplos y contra ejemplos de transformaciones no lineales y podría ayudar a estudiantes a desarrollar un pensamiento analítico sobre conceptos de algebra lineal, por lo que se trató de analizar el uso de una aproximación geométrica en el estudio de los conceptos de vector, transformación lineal y vectores propios en dos dimensiones por estudiantes.

Considerando a la geometría como una fuente para el desarrollo de las *intuiciones* relacionadas a los conceptos de álgebra lineal, se eligió usar el software geométrico dinámico Cabri II, para poder facilitar este enfoque y para ofrecer a los estudiantes un ambiente exploratorio.

Este trabajo consta de una componente teórica y una experimental. La primera, trata sobre el análisis del contenido epistemológico como fue presentado en Dreyfus, Hillel & Sierpinska (1997), la segunda fue realizada por dos estudiantes quienes tomaron parte en una secuencia de 6, de dos-horas por sesión con un tutor y donde el *modelo* empleado era una *flecha* representando un *vector*, diseño presentado en Sierpinska, Hillel & Dreyfus (1998). Aquí el modelo o flecha representa a un vector que puede ser movido al arrastrar su punto final, lo que representa a un *vector variable* (aquel vector **v** que puede tomar *cualquier* dirección y longitud).

En la segunda sesión, antes de introducir la noción de transformación lineal, los estudiantes se familiarizaron con el lenguaje y la representación de transformaciones en general, aún las no lineales, posteriormente el tutor mostro un vector **v** (azul) y una trasformación de rotación de 60º alrededor de O, y así aplicar la transformación al vector **v** obteniendo su imagen, $T(\mathbf{v})$ (vector en rojo) al arrastrar el punto final de la flecha. Esta acción fue para atraer la atención de los estudiantes en relación a **v** y $T(\mathbf{v})$ pues se pensaba comunicar la idea que la transformación está definida por un vector en el plano, y la existencia de alguna relación constante entre **v** y $T(\mathbf{v})$.

En la tercera y cuarta sesión, los estudiantes realizaron actividades sobre la transformación donde, por ejemplo, se les pidió revisar transformaciones si eran lineales o no lineales, una vez analizados estos conceptos, y después de elegir ellos un vector **v** y un número k, comprobarían si el vector $T(k\mathbf{v})$ coincidía con el vector $kT(\mathbf{v})$ para todos los vectores **v** y para todos los escalares k.

Los estudiantes mostraron entender el término “transformación” en relación al vector etiquetado $T(\mathbf{v})$ donde **v** es el vector variable. Sin embargo, la transformación para ellos no la referían a una relación o dependencia entre **v** y $T(\mathbf{v})$, sino más bien, a un objeto $T(v)$ cuya posición depende de la posición de otro objeto (el vector **v**) y no como consecuencia de aplicar una transformación al vector **v**.

Las inadecuadas concepciones de los estudiantes que se reportaron en este trabajo pudieron ser causadas por varios factores, como puede ser la naturaleza de los objetos empleados en geometría dinámica, pues un vector en Cabri representaba a cualquier vector, y en consecuencia si dos vectores son iguales sus transformaciones también lo son, por lo que si otro vector es arrastrado a un lugar diferente éste podría ser también el mismo vector.

Se considera que el vector variable tiene una existencia inestable, pues solo cuando se está trazando existe como tal, dado que en el momento en que se detiene el arrastre solamente queda un registro muy parcial (una flecha con longitud y dirección variable) en la pantalla, por lo que el estudiante solo las mantiene en el ojo (o mente), y el vector variable deja de existir como tal. En consecuencia una transformación solo puede ser descrita en términos de lo que está siendo transformando, y como lo que se transforma es un vector, que en este trabajo fue un vector variable, la transformación desaparece a lo largo del proceso.

En este trabajo se concluye que las nociones de vector y transformación son fuertemente dependientes de la herramienta tecnológica, lo que implica que las argumentaciones de los estudiantes y su noción a prueba sean influenciadas por dicha herramienta.

Sierpinska, Dreyfus y Hillel, (1999) reportan algunas experiencias didácticas al abordar conceptos de Álgebra Lineal como lo son los Espacios vectoriales, Eigen valores y Transformaciones Lineales dentro del ambiente geométrico de Cabri II, donde el objetivo fue crear condiciones en las cuales los estudiantes pudieran evadir el conocido obstáculo del *formalismo* (es aquél cuando los estudiantes reproducen secuencias y símbolos de manera semejante al discurso usado por los profesores o el del libro de texto) y donde el software fue utilizado como un material pedagógico y no como una herramienta pata resolver problemas.

La metodología empleada en este trabajo fue la Ingeniería Didáctica, basada en la teoría de Brousseau acerca de situaciones didácticas, es decir acción, formulación y validación, planteadas como un proceso iterativo de aproximaciones consecutivas y convergentes para lograr un alto grado de predicción tomando en cuenta las variadas respuestas de los estudiantes al interpretar ellos, las representaciones geométricas de las TL.

En el diseño de las tareas planteadas en este trabajo se trató de crear algunas situaciones donde el movimiento entre las diferentes representaciones obedecía a una necesidad conceptual implícita para resolver un problema y no como un requerimiento para resolver la tarea, por lo que no se hizo explícito a los estudiantes como construir un vector $T(\mathbf{v})$ mismo que representaría cualquier transformación.

En una secuencia didáctica planteada se introdujo el concepto general de una TL en la que se preservan las operaciones de suma vectorial y multiplicación por un escalar, y donde se quería transmitir la idea de que una transformación T está dada si se sabe, qué le está haciendo a un vector arbitrario, por lo que para cada vector v (o flecha), su imagen T **(**v) (o flecha) está definida, lo que llevó al profesor a la institucionalización de que si T(v) es la transformación de **v**, entonces T(kv) es una dilatación de v por el factor k, así como T(v + u) = T(v) + T(u).

En las conclusiones de este trabajo se comenta que los estudiantes trataron de darle sentido a las formas mostradas en los ejercicios computacionales, sin embargo la teoría raramente es empleada para dar una respuesta a la pregunta de un profesor. En tales situaciones, los estudiantes están propensos a imitar el comportamiento del profesor, lo que da origen al obstáculo del formalismo.

Una de las fallas del diseño fue que las representaciones de Cabri dadas en las tareas pudieron ser parcialmente responsables de las dificultades que tuvieron los estudiantes, aunque también se pueden considerar factores epistemológicos en relación al concepto de función y al empleo de definiciones axiomáticas.

En el trabajo de Ramírez (2008) y basado en el marco teórico de Fischbein (1987) se pretende identificar las dificultades que presentan algunos estudiantes para reconocer transformaciones lineales, y particularmente identificar los modelos intuitivos que tienen algunos estudiantes de nivel superior.

Partiendo de la investigación de Molina (2004) donde se identificó la tendencia de algunos estudiantes de asociar geométricamente las transformaciones lineales con transformaciones prototipo como lo son las expansiones, contracciones, rotaciones, reflexiones y combinaciones de ellas, se procedió en primer lugar a seleccionar algunas situaciones del trabajo de Molina, modificar algunas y agregar otras para averiguar la hipótesis de que el universo de las transformaciones lineales que tienen los estudiantes se reduce a movimientos rígidos del plano geométricamente. Para lograr el segundo objetivo se diseñaron situaciones que se corresponden a cada situación geométrica confrontando al estudiante con sus respuestas, en caso de haber diferencias, identificando los modelos intuitivos que conservan algunos estudiantes (en el sentido de Fischbein, 1987).

La metodología empleada fue una entrevista a 5 estudiantes que habían cubierto una licenciatura en matemáticas de forma individual en diferentes fechas en un periodo de una semana, donde en el momento previo a la entrevista se les informó que se abordaría el tema de la Transformación Lineal, únicamente.

En base a las consideraciones teóricas y los objetivos se realizó una secuencia de preguntas en cuatro bloques. El primero para situar en contexto el concepto de transformación lineal, el segundo sobre situaciones particulares de transformaciones en ambiente geométrico, el tercero es sobre el mismo tema pero en un ambiente algebraico para confrontar estos dos últimos y el cuarto que plantea la transformación de figuras geométricas regulares bajo un operador lineal.

En este trabajo se reporta que los estudiantes entrevistados pudieron proporcionar definiciones del concepto de transformación lineal como se presentan en los libros de texto o en los cursos de álgebra lineal. Así también se observó que los estudiantes identificaron las transformaciones lineales prototipo, gráfica y algebraicamente. Sin embargo, ellos no lograron identificar a la transformación lineal geométricamente cuando la figura mostraba un vector fijo contrastando con el análisis algebraico, situación que pude deberse a que las figuras geométricas las analizaron en función de los modelos intuitivos presentes en ellos.

Por lo anterior el autor sugiere realizar actividades que involucren transformaciones no clásicas, como las rígidas para analizar este concepto, así como su aplicación en otros espacios vectoriales.

CAPÍTULO 5

APLICACIÓN DE LA SECUENCIA

En este apartado se explican las consideraciones hechas para la aplicación de la secuencia didáctica.

5.1 En relación a los estudiantes

Se seleccionaron cinco alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial en el Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli (TESCI), siendo las transformaciones lineales un tema que forma parte de su plan de estudios. Los alumnos que la resolvieron, se seleccionaron porque ya habían estudiado los temas de trigonometría en el bachillerato y cálculo diferencial e integral en los primeros semestres de la carrea, por lo que consideramos que tendrían conocimiento sobre las funciones trigonométricas y el plano cartesiano, pues esto se requería en la solución de la secuencia. Al momento de la entrevista los estudiantes cursaban el cuarto semestre de la carrera donde se estudia el tema de espacios vectoriales y de la transformación lineal.

5.2 En relación al espacio físico

La realización de la puesta en escena de la secuencia didáctica se hizo en las instalaciones del tecnológico antes mencionado.

5.3 En relación a los materiales empleados

Los estudiantes contaron para la solución de la secuencia con hojas blancas y bolígrafos. El propósito de no darles lápices a los estudiantes es para que quede evidencia de los intentos en la solución a las tareas.

5.4 Consideraciones previas

El trabajo realizado en la secuencia se planteó como sigue:

Para trabajar, cada uno de los estudiantes ocupó una mesa donde se dispuso para su uso de hojas blancas y bolígrafos.

Cada mesa contó con una grabadora de audio, también se hizo una grabación de video de la aplicación de la secuencia.

El profesor proporcionó a cada estudiante en una hoja la primera tarea que deben resolver, y posteriormente les explica en qué consiste la tarea.

Inmediatamente después, el profesor indicó a los estudiantes que en caso de que se equivoquen no borren. Que encierren en un círculo aquello que no desean que se considere como su respuesta y que expliquen en otra parte de la hoja, o en otra hoja el planteamiento que consideren correcto.

Luego, el profesor les indica que procedan a resolverla y les da tiempo de 20 minutos como máximo (en lo particular se estimaba que la resolverían en 12 minutos).

Conforme surgen las preguntas en los estudiantes, el profesor les respondió cuidando de no darles la solución. Si la pregunta correspondía con alguna de las que se anticiparon en el análisis a priori, el profesor intervenía de la manera planeada. Esta parte es delicada, pues la idea fue, dejar que los estudiantes lleguen hasta donde les sea posible en la solución. No es forzoso que respondieran correctamente la actividad, pues el objetivo era mirar cómo respondían los estudiantes la secuencia.

Una vez que los estudiantes terminaron la tarea 1, se les asignó la tarea 2 y así sucesivamente, a los estudiantes se les dijo que al finalizar la secuencia se discutirían las soluciones.

CAPÍTULO 6

SECUENCIA DIDÁCTICA. ANÁLISIS A PRIORI

6.1 Objetivo de la secuencia didáctica

Como se ha discutido anteriormente en esta investigación se retomó un resultado del trabajo de Molina (2004) para proponer un diseño didáctico. El resultado que deseamos utilizar, consiste en que los alumnos que participaron en el estudio manifestaron tener un conjunto de modelos intuitivos de lo que son las Transformaciones Lineales (TLS) en R^2. Estos modelos en la escuela se conocen como: expansiones, contracciones, rotaciones y combinaciones de ellos.

El problema que tuvieron los estudiantes con estos prototipos es que desde el punto de vista de la teoría de Fischbein se pueden catalogar como modelos paradigmáticos[1] porque son modeladores incompletos de la Transformación Lineal (TL) en R^2 y como consecuencia produjeron en los estudiantes no reconocer ciertas TLS, como la TL de *corte*. Por esta situación, nos planteamos la tarea de diseñar una secuencia didáctica cuyo propósito didáctico es que el estudiante construya un modelo que incluya más características de la transformación lineal en R^2. Es decir, que no sólo considere expansiones, contracciones, rotaciones y las combinaciones de éstas. Este modelo lo concebimos bajo dos formas explícitas:

1. La transformación en R^2 como el "cambio de forma[2]" de objetos representados en el plano, generado como consecuencia de mover los ejes x e y del plano cartesiano, más adelante se explica este punto.
2. La transformación en R^2 como un modelo algebraico que representa el cambio de forma de los objetos en R^2 debido al movimiento de los ejes. El modelo algebraico es el siguiente:

   $$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

   Donde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector en R^2, el objeto que "cambia de forma". Y a, b, c y d son números reales. Por otra parte $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ es el vector transformado, la imagen del vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bajo la transformación T.

[1] Ver Fischbein (1987, p.122).
[2] Este término es otra metáfora, un objeto que se convierte en otro, es parte del lenguaje escolar, por ello suele usarse en libros de texto de álgebra lineal, ver por ejemplo Lay (2001, p.67).

6.2 Análisis a priori Actividad 1

6.2.1 Objetivo de la Actividad 1:

Que el estudiante construya un modelo de la transformación lineal en R^2 como el "cambio de forma" de objetos del plano, generado como consecuencia de mover los ejes *x* e *y* del plano cartesiano.

6.2.2 Fundamento de la Actividad 1

Para que el estudiante construya tal conocimiento proponemos involucrarlo en la realización de cuatro tareas[3], éstas son problemas matemáticos que involucran figuras geométricas en R^2. Las tareas están pensadas desde la teoría de la intuición de Fischbein (1987, 1989), por lo siguiente:

Consideramos como intuición a la percepción interna e instantánea de una idea o una verdad que aparece como evidente a quien la tiene. Asumimos que algunas representaciones observables que se pueden manipular, favorecen la percepción de ideas intuitivas[4]. Un modelo explícito como la representación de la figura 1, es un objeto concreto, es observable y partimos del supuesto de que puede ser manipulado mentalmente:

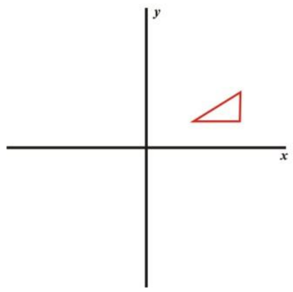


Figura 1

El término *manipular* o *manipularlo* mentalmente, lo utilizamos para referirnos a que se le puede realizar alguna acción la cual puede ser imaginada. Esta acción en concreto es *movimiento*[5], imaginar que se mueve, que cambia de lugar, la idea de *movimiento* también la consideramos intuitiva debido a que es algo que percibimos a nuestro

[3] Las tareas son entendidas en el sentido escolar, como problemas o ejercicios que se asignan a los estudiantes para que los realicen.

[4] Esto desde un enfoque teórico, por supuesto se puede utilizar otro marco, como las ideas de la visualización, sin embargo se elige este marco en parte para darle seguimiento al trabajo previo que lo motivó.

[5] Con ello sólo nos estamos refiriendo a la acción de mover objetos, pues la cuantificación del movimiento es una situación compleja, no es de nuestro interés discutir si es algo intuitivo o no.

alrededor, es parte de las experiencias[6]. Se pretende que el estudiante imagine el giro de los ejes x e y del plano cartesiano y la consecuente deformación de los objetos representados en él.

En la secuencia didáctica la *manipulación* es planteada en los enunciados de las tareas que se asignan al estudiante, están acompañadas de otro modelo explícito (figura 2) y de una explicación del profesor, por ejemplo:

Tarea 1. Observe el triángulo de la figura 1:

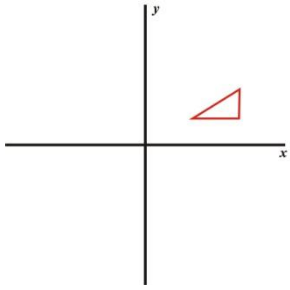


Figura 1

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 2, ¿cómo queda dibujado el triángulo? Elabore una respuesta y explique detalladamente.

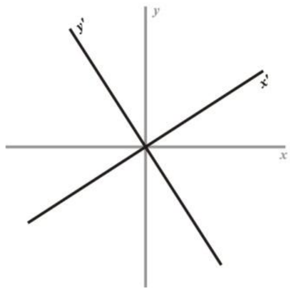


Figura 2

Aquí tal enunciado es la expresión "Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 2" y el modelo explícito es el dibujo etiquetado como figura 2. La explicación del profesor es "imaginen que el plano cartesiano en color gris es donde estaba inicialmente y el plano en color negro es donde quedó después de rotar, y llamaremos a este eje de las x, x-primo (representado por x') y al de las y, y-primo (y')".

[6] Según Fischbein la experiencia no sólo puede generar intuiciones, sino que organiza sistemas de creencias aparentemente autónomos. Ver Fischbein (1987, p.88).

En esta actividad 1, usamos en las primeras cuatro tareas de la secuencia didáctica un modelo explícito, la representación de un triángulo, el cual se pretende que los estudiantes manipulen. Como ya se mencionó en el objetivo de la secuencia, se desea que el estudiante entienda a la transformación en R^2 como aquello que produce el "cambio de forma" de objetos representados en el plano, generado como consecuencia de mover los ejes x e y del plano cartesiano.
La cuestión que se presenta es, cómo podemos esperar que los estudiantes manipulen cualquier otro objeto, si solo estamos usando un modelo (un triángulo). Lo que nos hace suponer que ocurra tal situación se basa en una característica de los modelos intuitivos, la extrapolación, en consecuencia los estudiantes podrían extrapolar la técnica de la solución de las tareas planteadas, a otras, empleando figuras geométricas diferentes. Esta característica es útil, pues no es posible ver todas las figuras en una clase, en nuestro caso esta situación se puede verificar al pasar los estudiantes a la tarea 5, en la que el modelo explícito cambia su forma a la de un vector. Por lo anterior en esta tarea el estudiante requiere de la misma técnica empleada en la solución de las tareas 1-4, y para poder entender la variante planteada en la tarea 5 consideramos harán previamente una exploración.

6.2.3 La hipótesis de la Actividad 1

Con la Actividad 1 se desea verificar si:

El estudiante al resolver las tareas de la Actividad 1 construye la forma 1 del modelo de TL en R^2 planteado anteriormente.

Acerca de la verificación de la hipótesis

Se consideró que se verifica la hipótesis si los estudiantes responden las tareas como se espera, pues de acuerdo con la teoría es en los argumentos de los estudiantes al resolver determinado problema matemático donde se manifiestan los modelos que podrían estar influyendo implícitamente su respuesta[7]. Las respuestas reflejarían su capacidad de manipular mentalmente los modelos explícitos sugeridos para contestar correctamente.

Tarea 1[8].

Primera intuición

Le llamaremos "primera intuición" a la información que aporta el modelo explícito que proponemos para que el estudiante manipule, y que esperamos que el estudiante advierta.

[7] Ver Fischbein (1989, p.10).
[8] Dado que es el ejemplo con que introducimos la actividad, no lo presentamos para no repetir.

Con el modelo de la figura 1, se espera que el estudiante observe que se trata de mover a un triángulo rectángulo, con base paralela al eje x y dibujado en el primer cuadrante. Posiblemente la familiaridad del estudiante con esta figura (es un modelo que se suele estudiar a nivel secundaria y preparatoria) facilitaría ubicar al triángulo cuando se mueven los ejes y lo llevaría a una respuesta correcta.

En la figura, los ejes no tienen la flecha que indica la relación de orden o el sentido positivo o negativo de los ejes, sin embargo esta información podría ser implícita para los estudiantes, pues es posible que dada su experiencia escolar, posean un modelo semejante. Haciendo una extrapolación de su modelo a éste, ellos podrían asumir dónde van las cantidades negativas y dónde las positivas.

Con el modelo de la figura 2, esperamos que los estudiantes perciban que el sistema de ejes $x' - y'$ gira 30º respecto del sistema de ejes $x - y$, manteniendo la perpendicularidad correspondiente. Es factible que los alumnos consideren el movimiento como un giro hacia la derecha o hacia la izquierda, ello se refuerza con el hecho de que las etiquetas x e y en los ejes primos van rotadas en forma semejante a los ejes.

Los ejes en negro pretenden comunicar su nueva posición (ver secuencia didáctica) con respecto a la anterior mostrada con los ejes opacos, situación que se confirma con las nuevas etiquetas. Se consideró factible que estudiantes que hayan trabajado con el plano cartesiano perciban tal información.

La solución

La solución esperada a la tarea1, es la siguiente:

1. Que los estudiantes ubiquen en los ejes x e y, a las unidades de los puntos que definen al triángulo, figura T1-1.

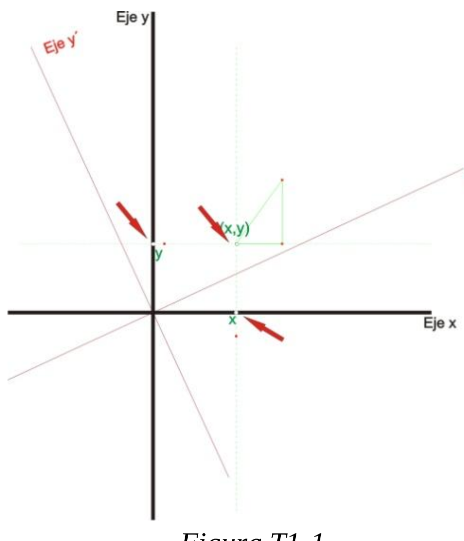


Figura T1-1

En la figura T1-1 se utilizan rectas paralelas a los ejes para ubicar las unidades x e y en sus respectivos ejes.

2. Posteriormente deberán ubicar estas unidades en los ejes primos y determinar la posición de cada punto.

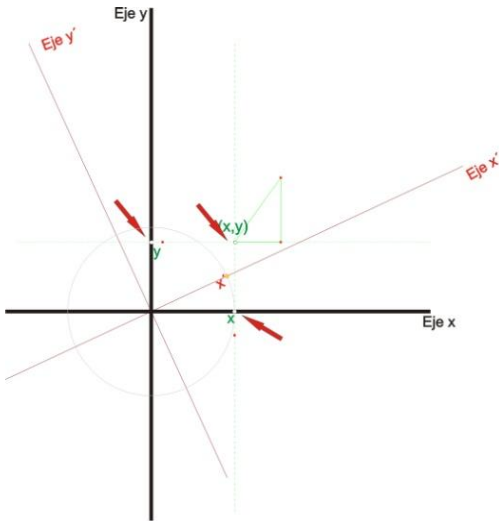
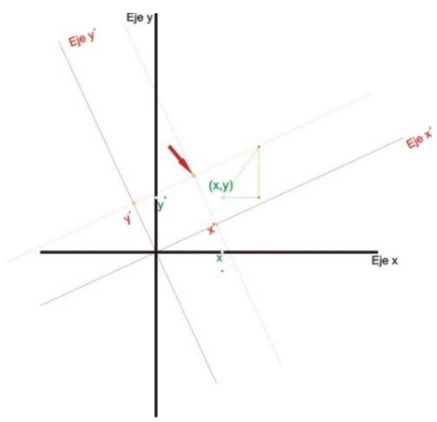


Figura T1-2

En la figura T1-2 se muestra que se emplea un círculo con centro en el origen para determinar la posición de x en el eje primo, es decir, x'. Los estudiantes podrán utilizar cualquier objeto que les permita hacer tal tarea, puede ser una regla, un pedazo de papel, etc. Posteriormente con rectas paralelas a los ejes primos deberán determinar la posición de cada punto del triángulo y trazarlo, figuras T1-3 y T1-4.



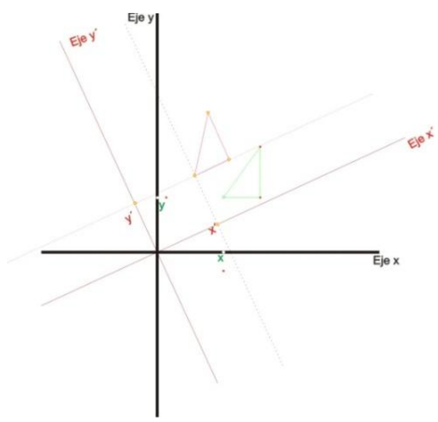


Figura T1-3 *Figura T1-4*

En la aplicación de la secuencia didáctica, las respuestas que aporten los estudiantes y que se apeguen al razonamiento expuesto en la solución presentada, es la solución que institucionalizará[9] el profesor que aplica la secuencia, para posteriormente pasar a la siguiente tarea.

Posibles características en las soluciones de los estudiantes

Algunas características que podrían surgir en las respuestas de los estudiantes son las siguientes:

a) Podrían dar valores de coordenadas concretas a los puntos del triángulo de la figura 1 para determinar la nueva posición del triángulo.

b) Podrían usar cálculos aritméticos.

c) Es posible que utilicen ángulos concretos.

d) El triángulo podría no conservar su forma, dependiendo de la técnica que ellos empleen para determinar su nueva posición.

e) Formarían una retícula la que emplearían para ubicar los vértices y luego dibujar el triángulo.

f) Los estudiantes podrían ignorar que las posiciones de las etiquetas (x', y') dan información sobre el sentido en que gira cada eje.

Tarea 2

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 3, ¿cómo queda dibujado el triángulo de la figura 1? Elabore una respuesta y explique detalladamente.

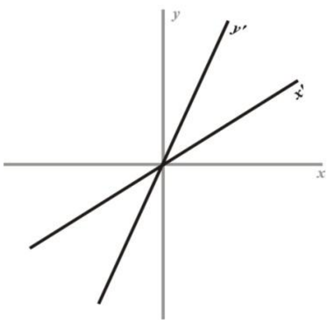


Figura 3

[9] En la sección sobre la aplicación de la secuencia didáctica se detalla el uso de este término.

Primera intuición

Con el modelo mostrado en la figura 3, se espera que los estudiantes observen que los ejes “se movieron” de tal forma que dejaron de ser ortogonales para pasar a tener un ángulo agudo. Una pregunta que el modelo podría propiciar en el estudiante es ¿cómo dibujar el triángulo?

Posiblemente los estudiantes extrapolarán la técnica de solución de la tarea 1, pues esta es una de las características que en la teoría de Fischbein se asocia a los modelos intuitivos. Analizando, el estudiante podría observar que el cateto paralelo al eje *x* permanece paralelo al eje *x*’, y el cateto que es paralelo el eje *y* también permanece paralelo el eje *y*’ y podría repetir la técnica que empleó al resolver la tarea 1. Una respuesta de los estudiantes siguiendo esta idea será considerada como la manifestación del modelo intuitivo que van construyendo. Se espera que los estudiantes puedan dibujar el triángulo, si no de manera exacta, sí aproximada a lo correcto.

Solución

Con la técnica explicada en la solución de la tarea 1, se realiza la tarea 2, quedando como se muestra en la figura T2-1.

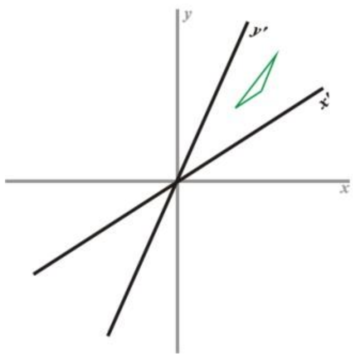


Figura T2-1

Posibles características en la solución de los estudiantes

a) Los rasgos considerados para la tarea 1 podrían surgir en la solución de esta tarea.

b) Los estudiantes podrían hacer una extrapolación incorrecta de la técnica que aplicaron para resolver la tarea 1, y obtener una respuesta errónea, o posiblemente correcta (sin sustento correcto). Por ejemplo, enfocarse en el paralelismo de uno de los catetos del triángulo y no considerar el otro, y obtener con ello un triángulo deformado.

Tarea 3

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 4, ¿cómo queda dibujado el triángulo de la figura 1 (nota: el eje x'queda en el mismo lugar que el eje x)? Elabore una respuesta y explique detalladamente.

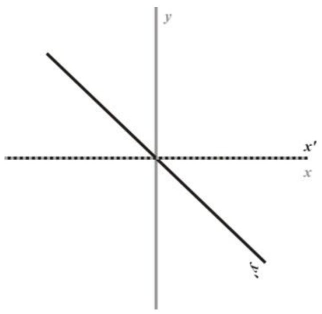


Figura 4

Primera intuición

Con el modelo empleado se espera que el estudiante advierta que el *eje* x conservó su posición y que únicamente el *eje* y cambió la suya. Se espera que el estudiante determine que la parte positiva del eje y pasó al cuarto cuadrante, y la negativa al segundo.

La transformación lineal implicada aquí es un *corte*, esta transformación causó dificultades o dudas a los estudiantes en el trabajo de Molina 2004. Fue la transformación que los estudiantes no consideraron lineal e hizo notar que ésta no estaba en el conjunto de prototipos que poseían los estudiantes[10]. Se espera que la mayoría de los estudiantes extrapolen la técnica que emplearon al resolver la tarea 1 o 2.

Solución

Aplicando la técnica antes mencionada, la solución es la siguiente:

[10] La discusión al respecto se puede consultar en Molina (2004, p.193).

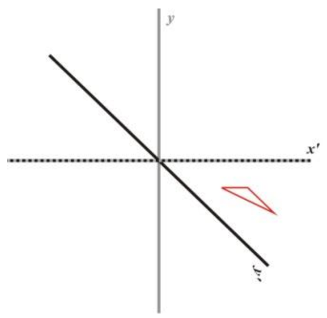


Figura T3-1

Posibles características en la solución de los estudiantes

a) Los rasgos considerados para las tareas 1 y 2 podrían surgir en la solución de esta tarea.

b) El estudiante podría dibujar el triángulo en el primer cuadrante, si no nota que la etiqueta y' le indica el sentido del giro del eje y.

Tarea 4

Observen el vector de la figura 5:

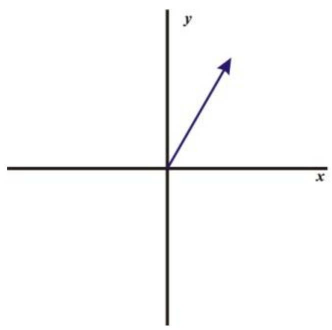


Figura 5

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 6, ¿cómo queda dibujado el vector? Elabore una respuesta y explique detalladamente.

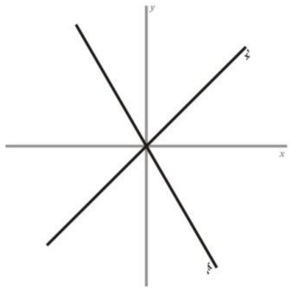


Figura 6

Primeras intuiciones

En relación a la figura 5, es probable que el estudiante al observar el modelo evoque a otros prototipos que pueda tener del vector, y que dé características de éste, originadas por la forma en cómo lo estudió en su formación previa. Por ejemplo, podría pensarlo en el contexto de la física, esto lo manifestaría dando un ejemplo o refiriendo algo, hablar de él como un objeto que representa fuerzas o velocidades. Es factible que utilizar esta representación sea un obstáculo para algunos estudiantes, pues tal vez tratarían de recordar los tipos de operaciones que consideran son aplicables a los vectores (operaciones que están en términos de los modelos que tengan de ellos) y esta situación cambiaría la dirección esperada de la secuencia. En caso de que hubiera esa complicación, el profesor debe intervenir comentando lo siguiente:

“Imaginen que el vector es la hipotenusa del siguiente triángulo (y traza una recta)”, figura T4-1.

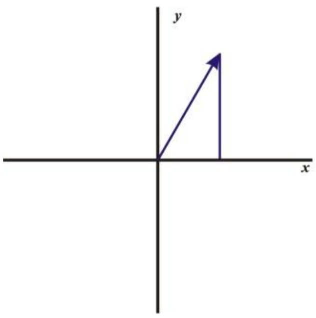


Figura T4-1

Con lo cual se espera dar continuidad a la secuencia, conservando el sentido. Esta actividad es importante, pues es “un puente” que se utilizará para pasar a la actividad 2.

Solución

En esa ocasión la solución esperada es la siguiente:

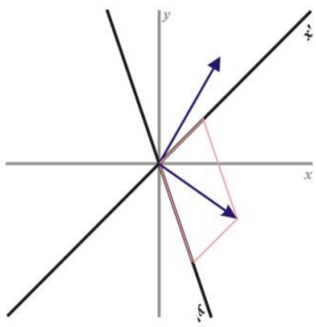


Figura T4-2

Posibles características en la solución de los estudiantes.

a) En la solución de esta tarea podrían aparecer algunas de las características señaladas en los análisis de las tareas previas.

b) Podrían surgir argumentos relacionados con los vectores como representaciones de fuerzas o velocidades, como suele trabajarse en clases de física.

c) También podrían dar argumentos en términos del método del paralelogramo, o incluso aplicarlo para resolver.

6.3 Análisis a priori Actividad 2

6.3.1 Objetivo de la Actividad 2:

Que el estudiante construya un modelo algebraico de la Transformación Lineal (TL) en R^2 que represente el cambio de forma de los objetos en R^2 debido a la rotación de los ejes. Tal modelo es:

$$T\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Donde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector en R^2, el objeto que "cambia de forma". Y a, b, c y d son números reales. Por otra arte $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ es el vector transformado, la imagen del vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bajo la transformación T.

6.3.2 Fundamento de la Actividad 2

Para que el estudiante construya dicho modelo algebraico proponemos involucrarlo en la realización de tres tareas. Las tareas están íntimamente relacionadas porque cada solución de ellas es una de las etapas para determinar el modelo en cuestión. Además estas tareas pretenden vincular el contexto geométrico con el numérico y algebraico de la secuencia. El modelo que el estudiante elabora al concluir las tareas es:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esta es la TL a la que se llega completando las tareas (puede ser una aproximación, si se usa notación decimal y se redondea). Aparenta complejidad, podría decirse que es "poco intuitiva" por las fracciones empleadas, sin embargo el formato geométrico de las tareas oculta esta complejidad, esto se podrá observar en la discusión posterior de cada una de las tareas.

En esta actividad estamos considerando que el alumno ya ha construido un modelo mental sobre la TL, el cual se generó durante el desarrollo de la actividad 1. Particularmente con la solución de la tarea 4 de la actividad 1 se "prepara el terreno" para establecer un vínculo entre el modelo geométrico y el algebraico. Se espera que con esta actividad, cuando el estudiante observe el modelo algebraico, él tenga conocimiento que en tal modelo están implícitas las transformaciones geométricas estudiadas.

6.3.3 La hipótesis de la Actividad 2

Con la Actividad 2 se desea verificar si:

El estudiante al resolver las tareas de la Actividad 2 construye el modelo algebraico de la TL en R^2 planteado anteriormente, relacionando la forma matricial con la representación geométrica de una TL.

Acerca de la verificación de la hipótesis

Se consideró que se verifica la hipótesis si los estudiantes responden las tareas como se espera, de igual forma, de acuerdo con la teoría, el planteamiento que hagan los estudiantes para llegar a la solución de cada tarea nos mostrará si cuentan con modelos que estén influyendo en sus soluciones.

Tarea 5

Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector $(4{,}7)$ se ha dibujado como el vector **C,** ver la figura 7. ¿Cuál es la coordenada del punto (x_1', y_1') en el plano $x - y$? Elaboren una respuesta y explíquenla **detalladamente**.

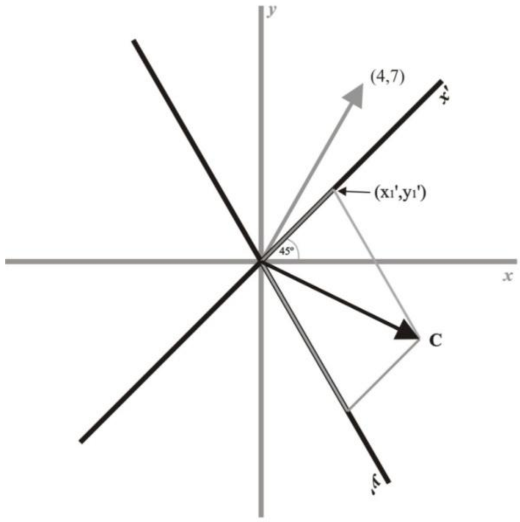


Figura 7

Primera intuición

En esta tarea, el modelo empleado aporta la siguiente información:

En primer lugar, el estudiante podría observar que los ejes se han movido y suponer que el vector (4,7) se ha transformado en el vector **C** durante este proceso. El eje x rotó 45º en sentido anti horario. En esta tarea no se especifica cuánto rotó el eje y. Esto podría ser una distracción para el estudiante, si trata de determinarlo.

Puede observarse un cambio en la longitud del vector (4,7) al ser transformado en el vector **C**. También se advierte que los nuevos ejes no están a 90º. El color gris del sistema de ejes $x - y$ pretende mostrar la posición del plano $x - y$, antes de que se "movieran" los ejes, el color negro representa la nueva posición. Al igual que en la actividad 1, las etiquetas x' e y' rotadas comunican el sentido del giro de los respectivos ejes.

En uno de los vértices del paralelogramo mostrado en la figura 7, se encuentra en el punto (x_1', y_1') que corresponde al punto de intersección de la proyección del punto final del vector (4,7) con el eje x original**,** después de mover este eje a su nueva posición x'. Por lo cual se conoce la longitud del lado del paralelogramo paralelo al eje x', que es de 4 unidades, este dato es importante que lo advierta el estudiante.

Solución

La solución esperada a la tarea 5 puede ser semejante a la siguiente:

1. Los estudiantes deben determinar que el valor de la componente x del vector (4,7), que es 4, es el mismo para la arista del paralelogramo que está sobre el eje x'. Sin embargo, puede suceder que esta situación no se presente de inmediato, dado que no es evidente que se puede imaginar un triángulo isósceles, la recta que lo define y que va de (x_1', y_1') a (4,0) no está explícita en el modelo. Si se presentara esta situación el profesor podría intervenir y preguntar ¿cuánto debe medir la arista? Para responder, se procede como en la tarea 1, en la que se emplea una circunferencia para ubicar el valor de x en el eje x'. Ver la figura T5-1.
2.

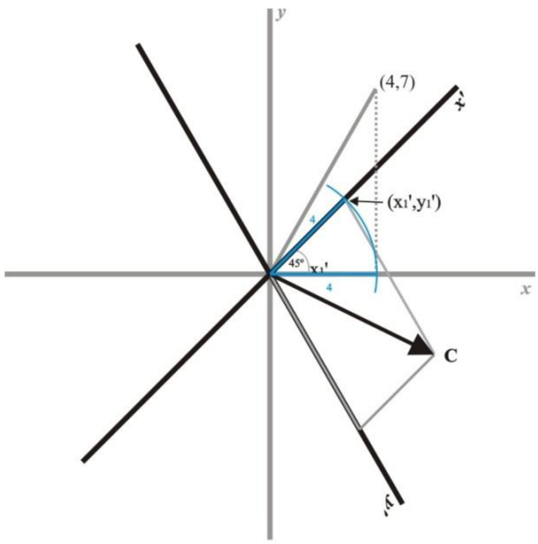


Figura T5-1

3. Luego, los estudiantes deberán ubicar al punto (x_1', y_1') en R^2 , para ello podrían construir un triángulo rectángulo como se muestra en la figura T5-2

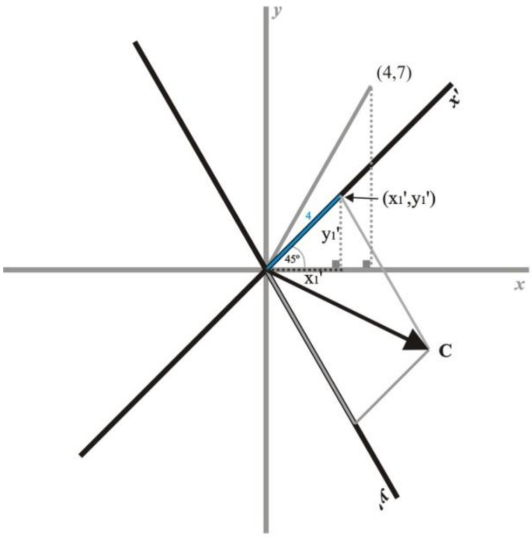


Figura T5-2

4. Finalmente en la solución numérica del problema el estudiante puede aplicar la ley de los senos basándose en el triángulo de la figura T5-2, como se muestra.

   Planteando la ley de senos se tiene, si en un triángulo *ABC*, las medidas de los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C* son respectivamente a, b y c , entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

   Aplicándola, se tiene:

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 90º} = \frac{y'}{\operatorname{sen} 45º} \rightarrow \quad y' = 4 \operatorname{sen} 45º$$

   Por otra parte:

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 90º} = \frac{x'}{\operatorname{sen}(180º - 90º - 45º)} = \frac{x'}{\operatorname{sen}(90º - 45º)} = \frac{x'}{\cos 45º} \quad \rightarrow \quad x' = 4 \cos 45\,º$$

   Entonces:

$$(x_1', y_1') = (4\cos 45º, 4\mathrm{sen}45º) = \left(4 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, 4 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \left(2\sqrt{2}\,, 2\sqrt{2}\right) \approx (2.82\,, 2.82)$$

Ec. 1

Esta manera de presentar la ecuación 1 (*Ec.1*) es intencional, pues en la etapa de institucionalización de la secuencia, de estas expresiones se extraerá el modelo algebraico de la transformación lineal implicada en la tarea 7.

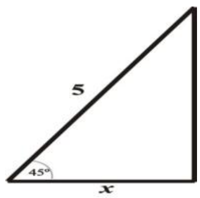
Por otra parte, otra opción de solución es que el estudiante utilice la definición de seno y la del coseno:

$$\sin 45^{\circ} = \frac{y_1{}'}{4} \quad \rightarrow \quad y_1' = 4\sin 45^{\circ}$$

$$\cos 45^{\circ} = \frac{x_1'}{4} \quad \rightarrow \quad x_1' = 4\cos 45^{\circ}$$

Esta etapa de la secuencia es importante para la solución, porque es la clave de la solución de la tarea. Si los estudiantes tuvieran dificultades para superarla, el profesor puede intervenir planteando la siguiente tarea:

Dado el siguiente triángulo:



¿Cómo encontrar el valor de *x*?

Esperamos que no haya complicaciones fuertes, pues esta tarea se ha realizado en cursos previos de matemáticas.

Tarea 6

Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector (4,7) se ha dibujado como el vector **C**, ver la figura 8. ¿Cuál es la coordenada del punto (x_2', y_2') en el plano $\mathrm{x} - \mathrm{y}$? Elaboren una respuesta y explíquenla **detalladamente**.

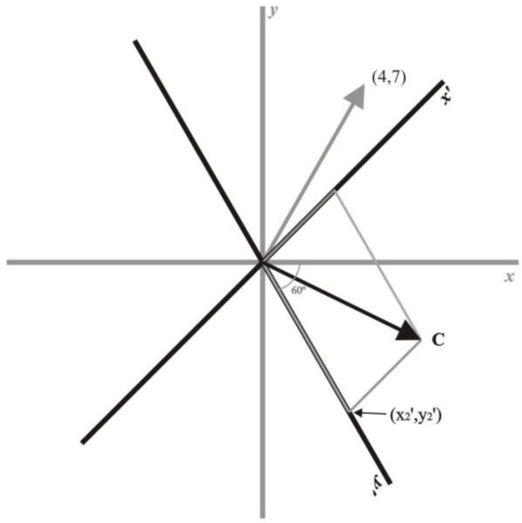


Figura 8

Primera intuición

Con el modelo de la figura 8 se espera en primer lugar, que los estudiantes perciban que las condiciones son las mismas que en la tarea 5: el mismo plano, el mismo vector y el mismo movimiento del sistema de ejes. Que en esta situación lo nuevo es el dato del ángulo de 60º que guarda el eje y' con el eje x. Que identifiquen que la tarea es semejante a la tarea 5, por tanto la técnica de solución también lo es. Se espera que extrapolen la técnica de solución de la tarea 5 para resolver esta tarea.

Solución

Con un procedimiento semejante al de la tarea 5, el estudiante puede establecer que:

$$(x_2', y_2') = (7\cos 60°, -7\,\mathrm{sen}60°) = \left(7 \times \frac{1}{2}, 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right) \approx (3.5, -6.06)$$

Ec.2

Tarea 7

Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector (4,7) se ha dibujado como el vector **C**, ver la figura 9. ¿Cuál es la coordenada (x', y') del vector **C** en el plano $x - y$? Elaboren una respuesta y explíquenla **detalladamente**.

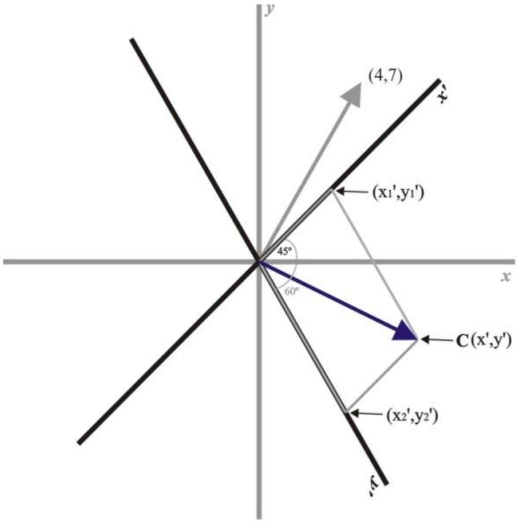


Figura 9

Primera intuición

La ubicación de los ángulos de 45º y 60º darían cuenta en los estudiantes que los puntos (x_1', y_1') y (x_2', y_2') se corresponden con los puntos $\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$ y $\left(\frac{7}{2}\ , -\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$ respectivamente. Con el modelo de la figura 9 se espera en primer lugar, que los estudiantes perciban que las condiciones son las mismas que en la tarea 5 y 6. Ahora se conocen los puntos (x_1', y_1') y (x_2', y_2') , sin embargo la tarea es diferente.

Solución

Existen varias formas de resolver la tarea, a continuación presentamos dos de ellas:

Opción 1:

- Los estudiantes podrían reconocer un modelo explícito en la figura 9, la representación del paralelogramo, lo que los llevaría a argumentar la solución en términos del método del paralelogramo.

- $\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right) \approx (2.82\ , 2.82)$ y $\left(\frac{7}{2}\ , -\frac{7}{2}\sqrt{3}\right) \approx (3.5\ , -6.06)$ determinados en las tareas 5 y 6.

- Finalmente al aplicar la suma vectorial, considerando los lados del paralelogramo como vectores, concluirían que el punto **C** tiene coordenadas:

$$\left(2\sqrt{2} + \frac{7}{2}\ ,\ 2\sqrt{2} - \frac{7}{2}\sqrt{3}\right) \quad \approx (6.32\ , -3.23)$$

Opción 2:

- Los estudiantes podrían determinar que los lados del paralelogramo que están sobre los ejes girados son vectores, de manera que pueden obtener las pendientes correspondientes.

- La recta que pasa por el punto (x_1', y_1') tiene pendiente $\frac{\mathrm{y}_1'}{\mathrm{x}_1'} = 1$, y considerando al punto (x_2', y_2') la recta que pasa por **C** tiene ecuación: $y = x - \frac{7(1+\sqrt{3})}{2}$

- La recta que pasa por el punto (x_2', y_2') tiene pendiente $\frac{\mathrm{y}_2'}{\mathrm{x}_2'} = -\sqrt{3}$, y considerando al punto (x_1', y_1') la recta que pasa por **C** tiene ecuación: $y = -\sqrt{3}\, x + 2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

- Y finalmente resolverían simultáneamente las ecuaciones.

6.4 Secuencia Didáctica

Tarea 1. Observe el triángulo de la figura 1:

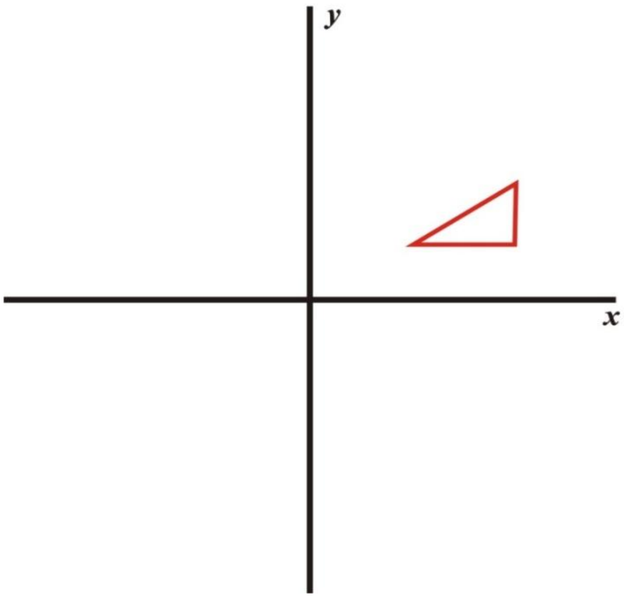


Figura 1

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 2, ¿cómo queda dibujado el triángulo?
Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

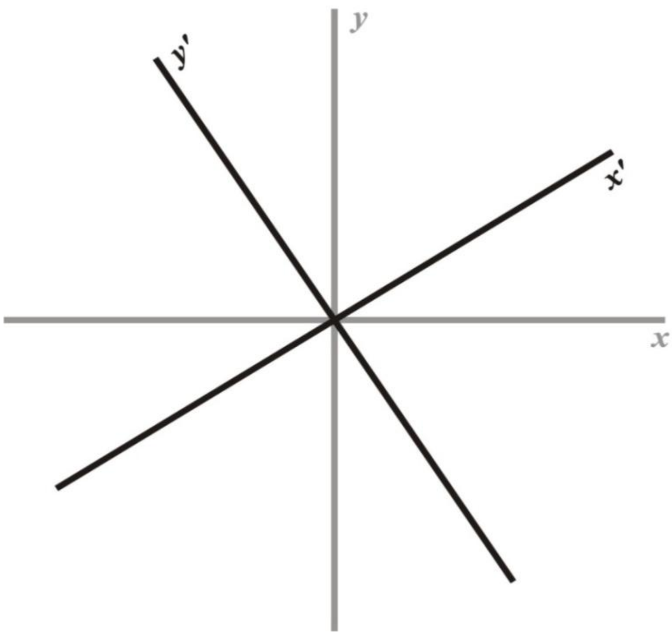


Figura 2

Tarea 2. Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 3, ¿cómo queda dibujado el triángulo de la figura 1? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

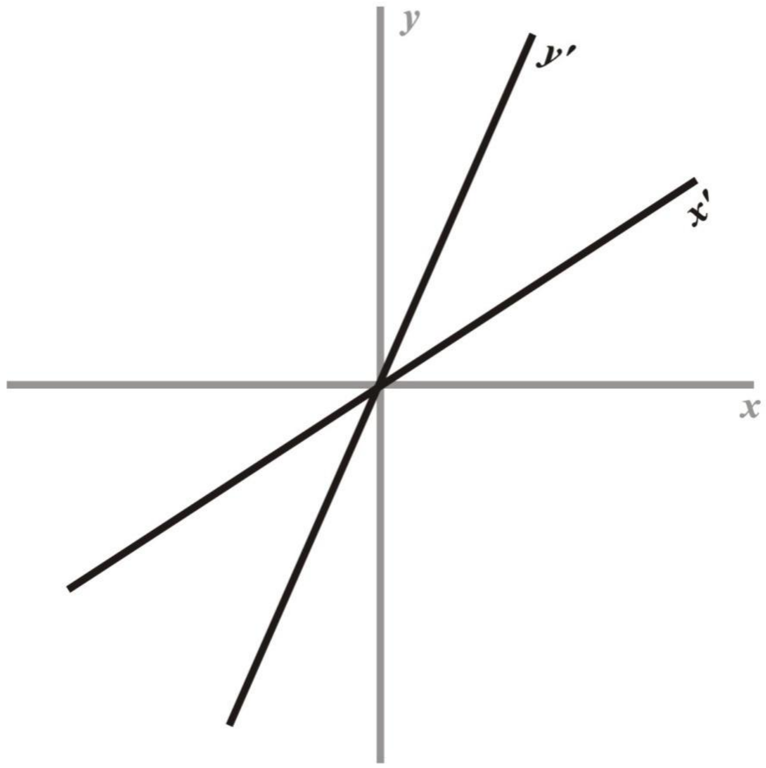


Figura 3

Tarea 3. Si se mueve el eje y como en la figura 4, ¿cómo quedaría dibujado el triángulo de la figura 1 (nota: el eje x' queda en el mismo lugar que el eje x)? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

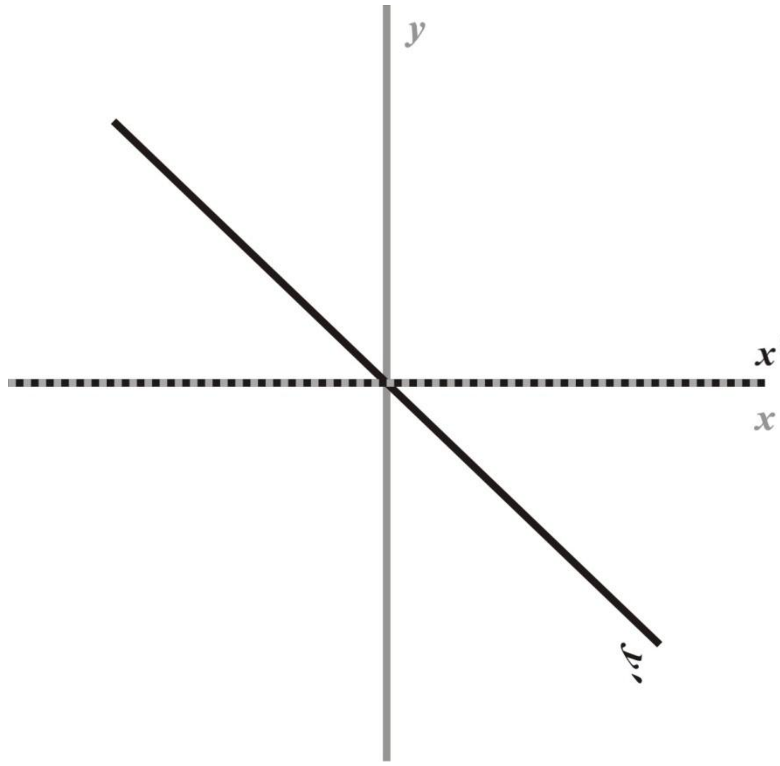


Figura 4

Tarea 4. Observe el vector de la figura 5:

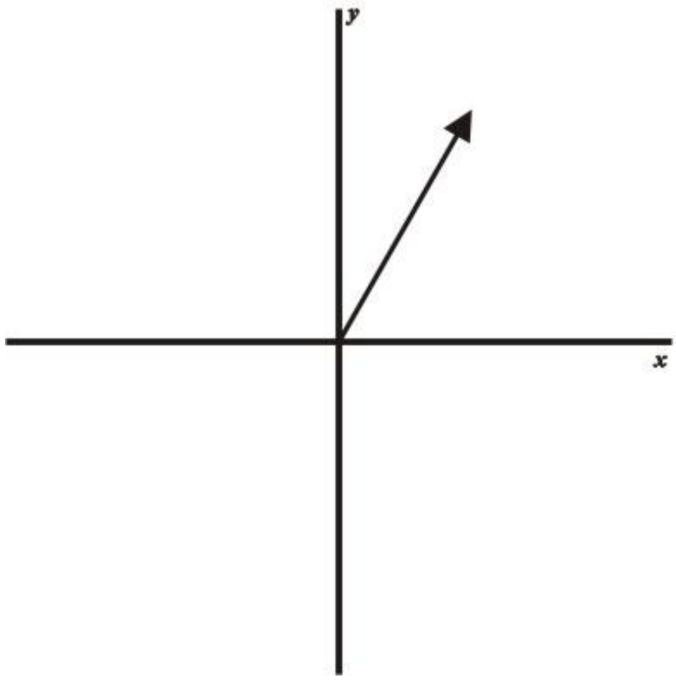


Figura 5

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 6, ¿cómo queda dibujado el vector?
Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

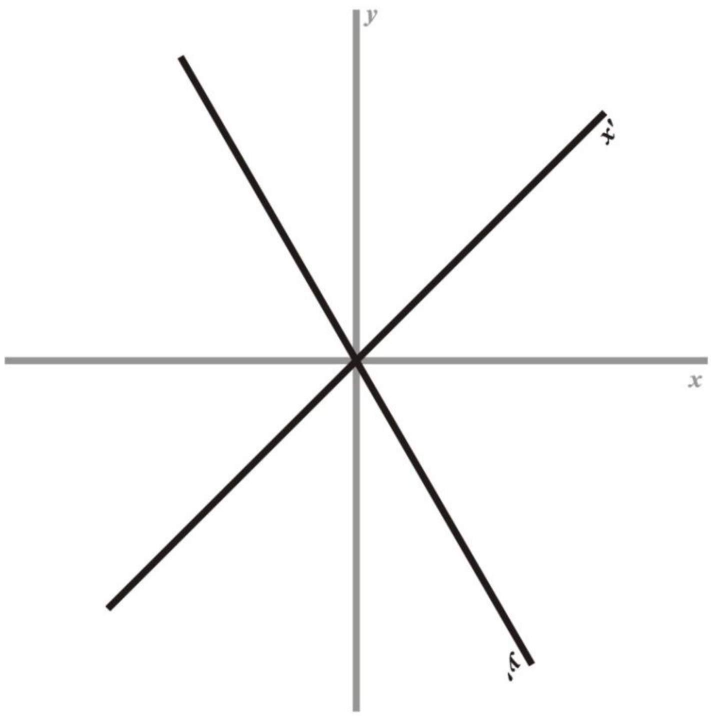


Figura 6

Tarea 5. Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector $(4{,}7)$ se ha dibujado como el vector **C,** ver la figura 7. ¿Cuál es la coordenada del punto (x_1', y_1') en el plano $x - y$? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

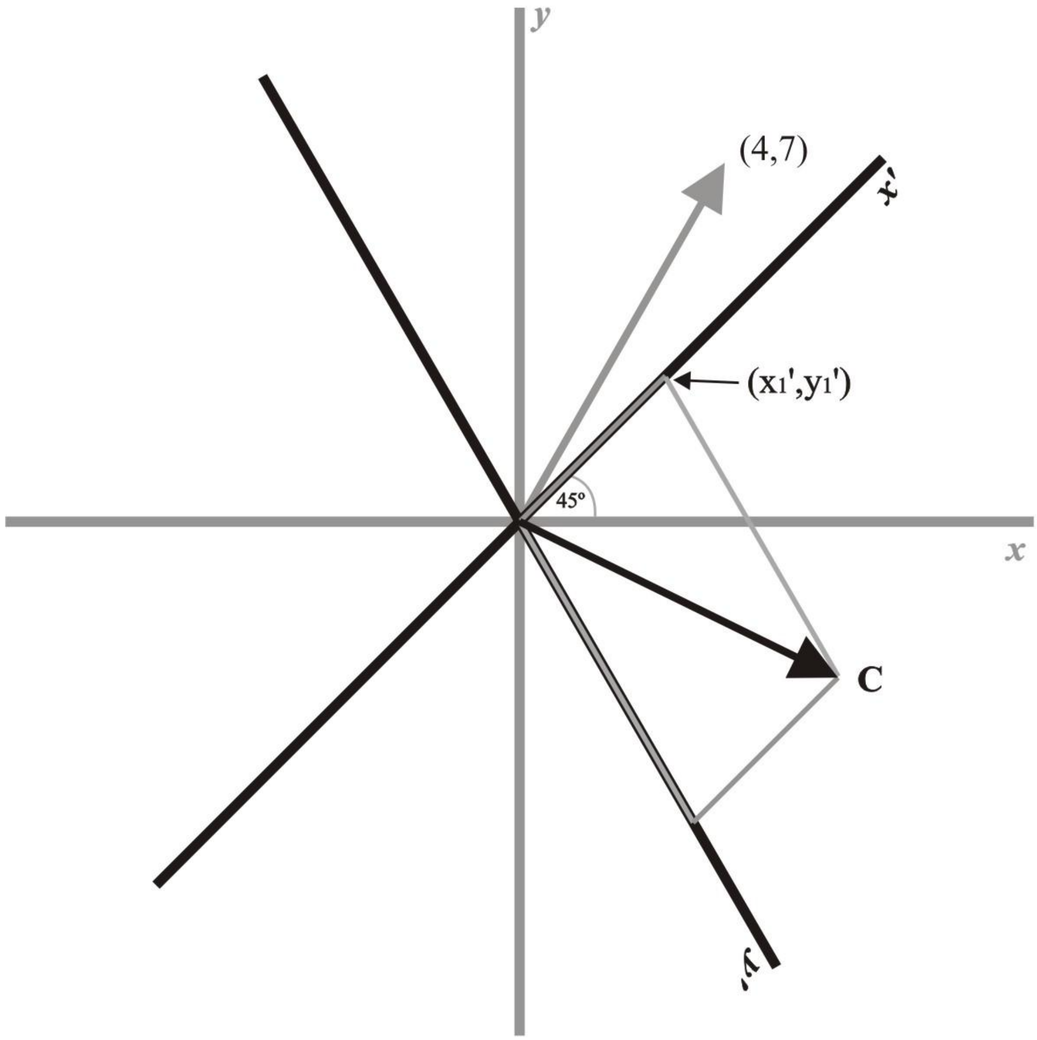


Figura 7

Tarea 6. Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector (4,7) se ha dibujado como el vector **C**, ver la figura 8. ¿Cuál es la coordenada del punto (x_2', y_2') en el plano $x - y$? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

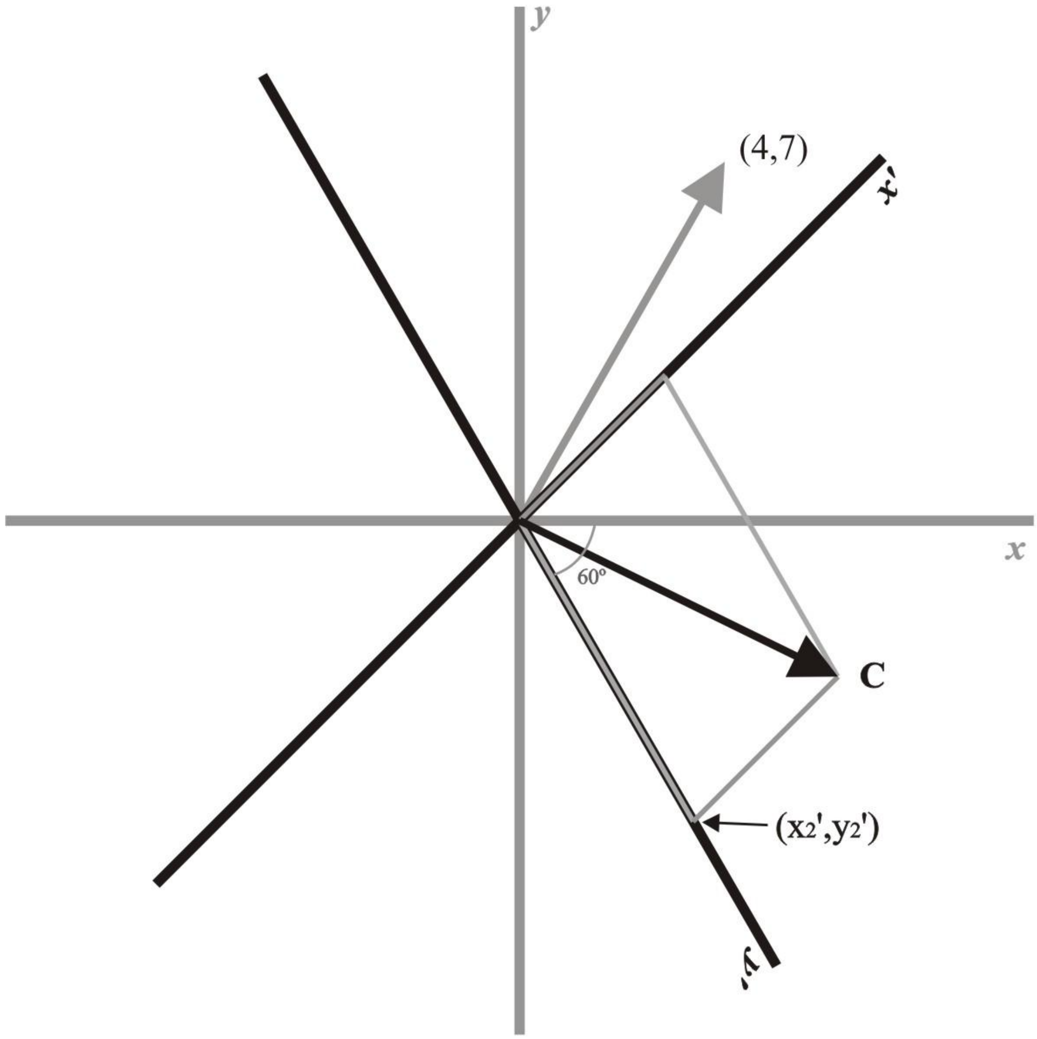


Figura 8

Tarea 7. Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector $(4{,}7)$ se ha dibujado como el vector **C**, ver la figura 9. ¿Cuál es la coordenada (x', y') del vector **C** en el plano $x - y$? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

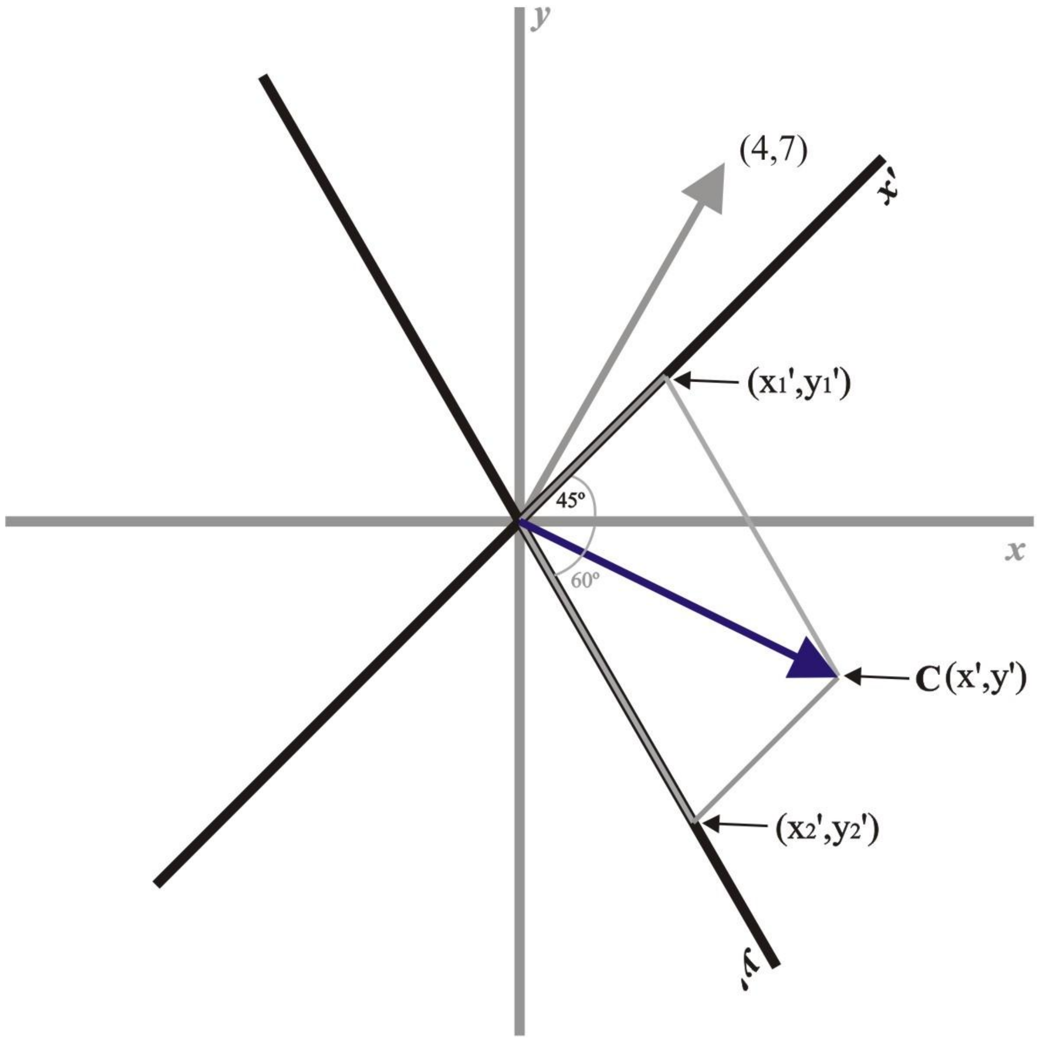


Figura 9

CAPÍTULO 7

ANALISIS A POSTERIORI

En este apartado se presenta un análisis de la puesta en escena de la secuencia didáctica.

Tarea 1. Observe el triángulo de la figura 1:

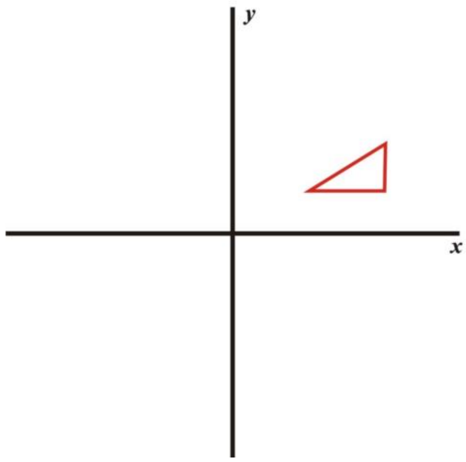


Figura 1

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 2, ¿cómo queda dibujado el triángulo?
Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

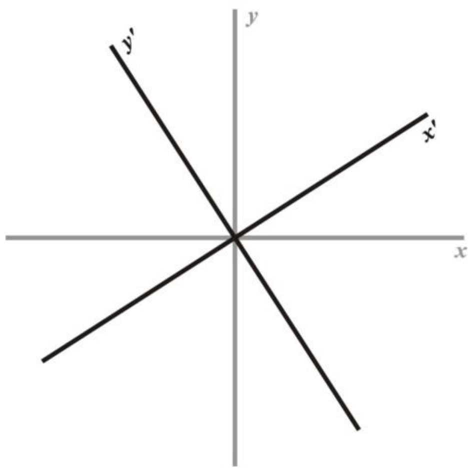


Figura 2

Análisis de las respuestas de **Rosario** (R)

Ante esta tarea la estudiante realizó la siguiente construcción:

Rosario identificó al sistema coordenado $x - y$ así como al triángulo (aunque no lo llama por su nombre – rectángulo-). Aquí se ve que los dos modelos explícitos mostrados en la figura 1 están presentes en ella, pues intuitivamente identifica que ambos modelos contienen al ángulo recto y que los catetos del triángulo son paralelos a los ejes coordenados. Consideramos lo anterior pues Rosario identifica el movimiento de los ejes $x - y$ de la figura 2 junto con el triángulo como un *giro*, así como la condición de perpendicularidad que se mantiene en R^2 situación que la lleva a la respuesta correcta como se ve en la figura R1. La respuesta de la estudiante es evidencia de que la tarea 1 funcionó como se estimó en el análisis a priori.

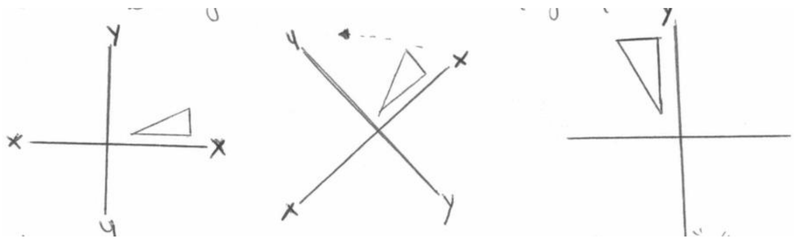


Figura R1

Se observa que Rosario ha construido un modelo mental intuitivo que le es útil para resolver la tarea, y lo aplica de inmediato (extrapolando dicha cognición). Tal prototipo lo manifiesta cuando dibuja el modelo explícito mostrado en la figura R1 a la derecha. En esta construcción, aunque identifica el movimiento y el sentido del giro implicado en la solución, el modelo intuitivo primitivo que tiene de R^2 hace que etiquete al eje vertical como y y no como y', y escribe "*Ya que el triángulo esta sobre el eje "x" y ya que ha girado pasa a formar parte del eje "y", que como se muestra en las figura 2 está en el eje x'*" ver IE 1[11].

La situación anterior pudo deberse a que en la instrucción se indicó que los ejes x e y son los que se mueven, por lo que el estudiante no consideró necesario ponerle otro nombre, sin embargo en posteriores tareas si hace referencia al eje y'. En consecuencia, tal vez sea necesario establecer en la clase una convención para utilizar las etiquetas.

Análisis de las respuestas de **Guillermo** (G)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

[11] Ver imagen digitalizada (IE 1) en Anexos.

En esta tarea se observa que Guillermo identifica al sistema coordenado $x - y$ al igual que al triángulo (aunque tampoco lo llama por su nombre – rectángulo-).

Se ve que está familiarizado con la representación de los dos modelos explícitos mostrados en la figura 1, pues intuitivamente identifica que ambos modelos contienen al ángulo recto y anota su valor en el plano cartesiano. Se aprecia que identifica que los catetos del triángulo son paralelos a los ejes coordenados en la figura 1. Intuye el movimiento de ambos ejes basándose en el movimiento del eje x el cual lo define "…*hacia arriba…*" representándolo como se ve en la figura G1*a*, y considera un giro de 45º para dichos ejes manteniendo la condición de perpendicularidad del sistema y escribe, "*Si el eje x se mueve hacia arriba, entonces el triangulo queda de la siguiente forma*" ver IE 13, por lo que llaga a la respuesta correcta como se ve en la figura G1*b*, siendo esta una evidencia que la tarea cumplió con su propósito.

Se ve que ha construido un modelo mental intuitivo del movimiento planteado, y lo aplica de inmediato**,** (extrapolando dicha cognición) dando un ejemplo como se muestra en la figura G1*c*. En la solución y en el ejemplo que da se aprecia que el modelo explícito que representa al plano cartesiano, en él, se presenta como un modelo implícito tácito pues en todos los casos etiqueta a los ejes movidos como $x - y$ y no como $x' - y'$.

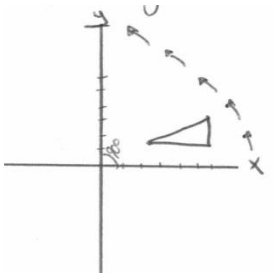
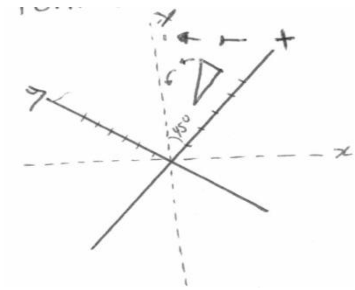
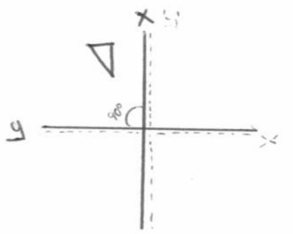




Figura G1a *Figura G1b* *Figura G1c*

En esta tarea Guillermo hace otro planteamiento donde considera que solamente los ejes se mueven y no el triángulo, por lo que dibuja a los ejes girados y al triángulo en todos los casos en la misma posición mostrada en la figura 1. Pensamos que lo anterior lo hace con la intención de establecer el comportamiento del movimiento de los ejes.

Análisis de las respuestas de **Andrés** (A)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Por la construcción realizada suponemos que Andrés identificó tanto al plano cartesiano como al triángulo rectángulo, aunque no hay evidencia escrita de eso, pero lo pensamos porque sí identifica que el triángulo *rectángulo* se encuentra en el primer cuadrante lo que nos indica que intuye que el triángulo gira junto con los ejes coordenados como se ve en la figura A1.

Se puede ver que Andrés considera primero que el eje x' gira 45º y lo hace coincidir con la línea que representa a la hipotenusa en el triángulo, Parece que pasa por alto que los ejes primos ya habían sido girados, por lo que Andrés gira nuevamente al eje x' otros 45º para poder dibujar la nueva posición del triángulo como se ve en la figura A1.

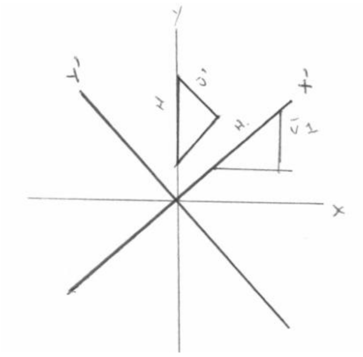


Figura A1

Se puede ver que Andrés considera primero que el eje x' gira 45º y lo hace coincidir con la línea que representa a la hipotenusa en el triángulo, parece que pasa por alto que los ejes primos ya habían sido girados, por lo que Andrés gira nuevamente al eje x' *otros* 45º para poder dibujar la nueva posición del triángulo como se ve en la figura A1. También en la misma figura se observa que él identifica que el cateto paralelo al eje *y*, que etiqueta como $\bar{v}1$, es también paralelo al eje y' después de girar el triángulo, y lo etiqueta como $\bar{v}\,'$, situación que se había previsto podría suceder.

En este caso pensamos que el modelo mental que tiene el estudiante del triángulo rectángulo parte de estudios previos, donde al considerar dos puntos de una recta, y después de trazar proyecciones que parten de estos, se genera un triángulo rectángulo por lo que así lo dibujó.

Como se puede ver, el estudiante también intuyó el movimiento de los ejes pues agrega otros elementos para indicar el paralelismo existente entre uno de los catetos y el eje *y*, mismo que se conserva

Análisis de las respuestas de **Diego** (D).

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Como se esperaba, en esta primera tarea Diego identificó los dos modelos explícitos mostrados en la figura1. En el caso del plano cartesiano identificó que ambos ejes siguen siendo perpendiculares después de girarlos y cuantificó el giro considerándolo de 35º. En el caso del triangulo rectángulo su modelo mental intuitivo estaba claro pues se aprecia que determina su ubicación en el primer cuadrante, el ángulo recto de dicho triángulo y la posición que guardan los catetos respecto a los eje coordenados. Por lo anterior, pensamos que logró manipular ambos modelos situación que lo llevó a completar la tarea correctamente como se ve en la figura D1.

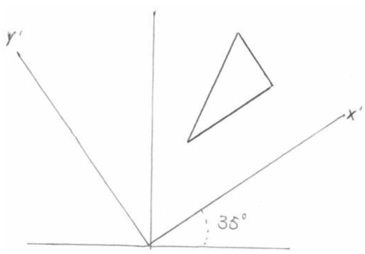


Figura D1

Para poder entender el movimiento consideró que los ejes $x - y$ se movieron 35º así como el triángulo, situación que se contempló en las posibles características en las soluciones de los estudiantes del análisis a priori. Como intuye el movimiento escribe "*solamente se movió el plano 35º hacia la izquierda…el triángulo al igual que el plano gira 35º hacia el oeste*..."

En este caso pensamos que Diego cuenta con otro modelo mental intuitivo, el *vector*, el cual lo asocia con los catetos del triángulo y escribe "…*la posición del triángulo sería la misma ya que los vectores que lo conforman fueron trasladados al mover el plano*.", ver IE 25

Análisis de las respuestas de Á**ngel** (An).

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Ángel identifica, consideramos que tácitamente, la condición existente de perpendicularidad entre los dos modelos explícitos mostrados en la figura 1, así como el hecho que los catetos del triángulo siguen alineados a los nuevos ejes por lo que su respuesta es correcta, como se ve en la figura An1.

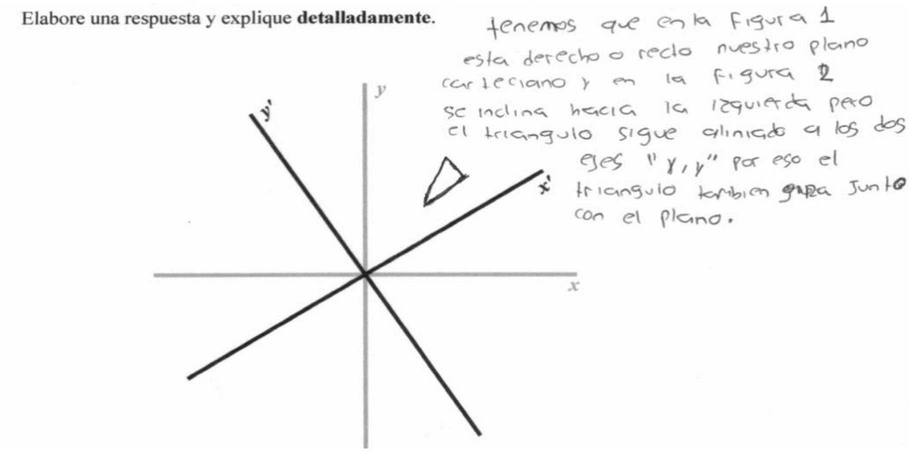


Figura An1

Tarea 2. Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 3, ¿Cómo queda dibujado el triángulo de la figura 1? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

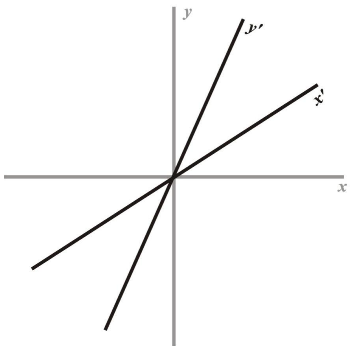


Figura 3

Análisis de las respuestas de **Rosario** (R)

Ante esta tarea la estudiante realizó la siguiente construcción:

Rosario identifica la posición de los nuevos ejes coordenados como resultado del movimiento de éstos, ver figura R2, pero no logra identificar el sentido de giro de los ejes y en consecuencia tampoco logra predecir la posición del triángulo por lo que no lo dibuja. Intuye que los ejes se mueven y los etiquetas por ambos extremos para hacer evidente la nueva posición de x' e y', y escribe "*En este caso el eje x' y el eje y' se encuentran dentro del mismo lugar por lo que el triángulo queda de la siguiente forma*", luego señalando al triángulo rectángulo que construyó en otro dibujó escribe "*En la figura 1 se encontraba en el eje x, pero ahora los ejes x' y y' están juntos, es decir, el lugar en donde queda el triángulo es diferente*", ver IE 2.

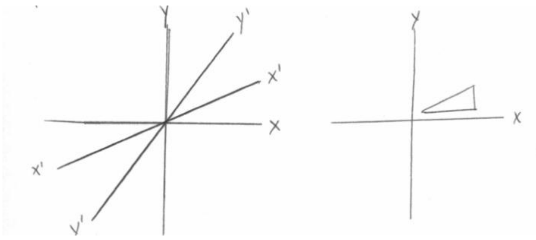


Figura R2

Se aprecia que Rosario extrapola la técnica de solución que empleó para resolver la tarea 1, así como el hecho de que el triángulo rectángulo no cambia de forma, lo que origina que no pueda analizar que, así como se modificó el ángulo de 90º en el plano, también se modifico el mismo ángulo para el triángulo, por lo que no hay nada que le haga suponer que el triángulo cambia de forma. En consecuencia no logra dibujar a dicho triángulo como se ve en la figura R3, y solo escribe "*Si el triángulo se encontraba en el eje x en la primara figura y ahora "x" y "y" están en el mismo cuadro* **(**consideramos que se refiere al primer cuadrante**)** *entonces el triángulo tiene que estar entre los ejes x' y y', queda en medio de ellos*", ver IE 3.

Esta tarea no cumplió su objetivo pero en este caso, la dificultad fue prevista en el análisis a priori (ver inciso f de la sección posibles características en las soluciones de los estudiantes).

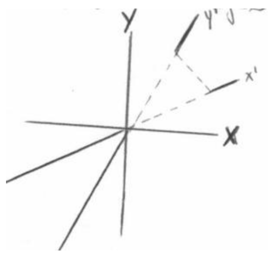


Figura R3

Otra razón que tenemos por la que Rosario no pudo dibujar al triángulo, es que un rasgo del modelo mental que tiene del triángulo no le permite deformarlo y en consecuencia no lo logra dibujar deformado. Una dificultad, como la que se le presentó a Rosario, pude superarse a partir de la discusión en clase de cada una de las respuestas de los estudiantes.

Análisis de las respuestas de **Guillermo** (G)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Guillermo identifica el movimiento el cual deja a los ejes x' y y' en el primer cuadrante y escribe "*Si la figura se mueve en el mismo cuadrante plasmado* *entonces quedaría de la siguiente manera*", ver IE 14. Procede a dibujar los dos modelos de la figura 1 y extrapola la idea de que la base del triángulo es paralela al eje x y en consecuencia lo es paralela al eje x', ver diagrama derecho de la figura G2, sin embargo no intuye que todo el triángulo cambia de forma posiblemente porque el modelo implícito tácito que tiene del triángulo, hace que lo considere rígido y no le permite deformarlo haciendo que dibuje al triángulo tal cual. Es posible que el modelo intuitivo que generó en la tarea 1 este coaccionando su respuesta, pues el otro cateto del triángulo lo dibuja paralelo al eje y' como fue mostrado en la figura 2.

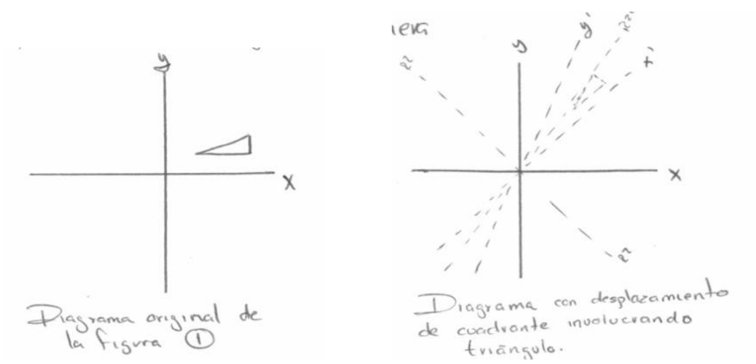


Figura G2

Por lo anterior consideramos que no se realizo la tarea como se esperaba.

Análisis de las respuestas de **Andrés** (A)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Se aprecia que Andrés intuye el movimiento de los ejes como un giro, aunque no lo menciona como lo muestra en la figura A2, pero se confunde aparentemente al no poder entender el cambio de forma del plano cartesiano y escribe "*se toma por cada eje un plano cartesiano, por* y' *y* x' *se tomara cada plano, se toma el eje* y y x y *se termina la figura*", ver IE 20. Luego procede a dibujar el triángulo y se ve que en su construcción extrapola el modelo explícito que generó en la solución de la tarea 1.

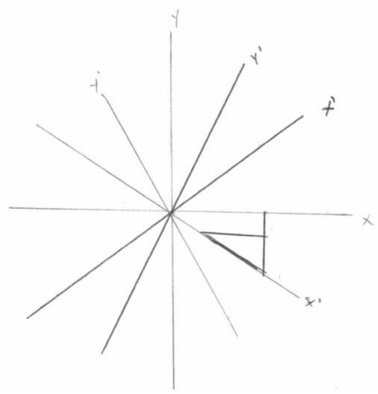


Figura A2

Se observa que el estudiante no advierte que el primer cuadrante del plano cartesiano cambia de forma como se le mostro en la figura 3, por lo que consideramos que el modelo mental que tiene de los cuatro cuadrantes, los asociado a la figura geométrica de un cuadrado que no se deforma. Al igual que el triángulo, el modelo del plano cartesiano ejerce en él una acción coercitiva pues se ve que asocia a cada *eje primo* con un sistema rectangular constituido por dos ejes *ortogonales*.

Como resultado de lo anterior su análisis ya no se basa en el movimiento de los ejes, si no en la posición que guardan entre sí los ejes, nótese que tiene ante él tres sistemas cartesianos el $x - y$, el $x' - y'$ y el $y' - x'$. Luego extrapola el modelo explícito que estableció en la tarea 1, donde ahora la hipotenusa del triángulo queda sobre el eje x' del sistema que identificamos como $y' - x'$.

Análisis de las respuestas de **Diego** (D).

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Diego advierte que el plano cartesiano cambió de forma y ubica la posición del sistema coordenado $x' - y'$ con respecto al original $x - y$ a través de dos ángulos que cuantifica como de 34º, como se muestra en la figura D2”

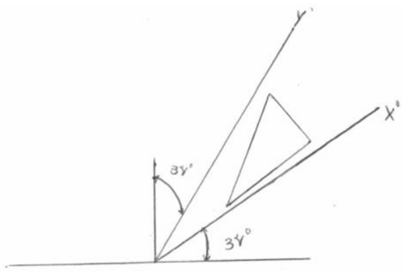


Figura D2

Luego dibuja en el lugar correcto al triángulo, sin embargo extrapola el modelo de la tarea anterior sin cambio alguno.

Aunque identifica el giro de los ejes, no identifica que estos movimientos son contrarios y escribe "*Tanto el eje "x" como el eje "y" se movieron 34º aproximadamente en dirección NorOeste*…". La doble flecha con la que identifica los Ángulos de 34º nos hace pensar que el sentido de movimiento o giro de los ejes coordenados los identificó separadamente, dado que el modelo explícito mostrado en esta tarea no le indicó cómo se debe considerar el movimiento de los ejes.

Al posicionar al triángulo, el modelo mental intuitivo que ya ha generado del triángulo rectángulo lo lleva a dibujarlo tal cual se muestra en la figura 1 de la secuencia, y no intuye que éste se deforma junto con el plano cartesiano, ver figura D2, y continúa escribiendo "…*el triángulo queda al centro de ambos ejes cabe mencionar que los ejes se movieron 34º de la posición del plano inicial*.", ver IE 26. Por lo anterior es necesaria la interacción del profesor, para que las tareas sean interpretadas de acuerdo a lo deseado en el diseño para llegar a la solución esperada.

Análisis de las respuestas de Á**ngel** (An).

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

En esta tarea Ángel aunque no identifica el movimiento, si intuye que el primer cuadrante cambia su forma, de tal manera que se reduce, sin embargo el modelo mental intuitivo que tiene del triángulo le impide ver que éste también se deforma con el movimiento del eje y al quedar en la posición y', por lo que dibuja al triángulo sin deformarlo como se aprecia en la figura An2.

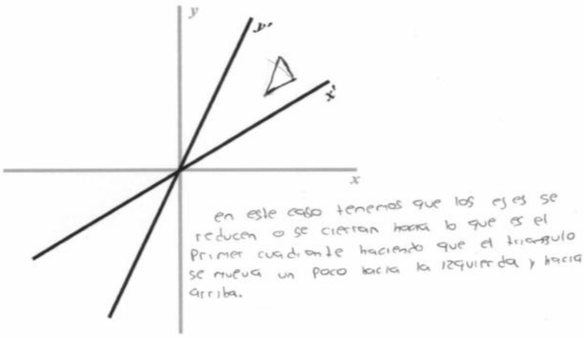


Figura An2

Pensamos que aunque si considera que la base del triángulo se mantiene paralela el eje x', pero como el modelo explícito no le da información de que éste se deforma, y dibuja al triángulo sin cambiar su forma como en la tarea 1.

Tarea 3. Si se mueve el eje y como en la figura 4, ¿cómo quedaría dibujado el triángulo de la figura 1 (nota: el eje $x^{'}$ queda en el mismo lugar que el eje x)? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

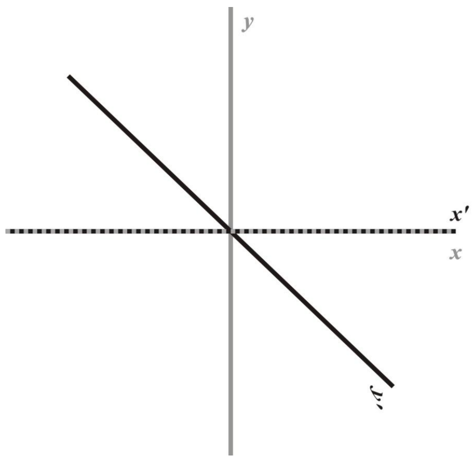


Figura 4

Análisis de las respuestas de **Rosario** (R)

Ante esta tarea la estudiante realizó la siguiente construcción:

Rosario advierte que el eje x no cambia de posición y escribe *"el eje x' queda en el mismo lugar de partida, nos indica que dio un giro completo,…"*, y también advierte que el eje y cambia de posición y escribe "…*el eje "y" ha quedado en un lugar diferente, este eje y' dio más de media vuelta*", ver IE 4, luego procede a hacer una comparación del modelo explícito de la figura 1 con el de la figura 4, como se muestra en la figura R4.

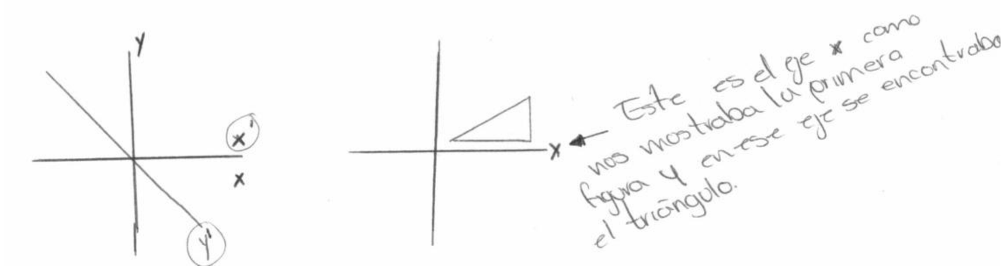


Figura R4

En seguida traza al triángulo en el dibujo que hizo de la figura 3, ubicándolo en el cuarto cuadrante, pero sin modificar su forma como se ve en la figura R5*a*.

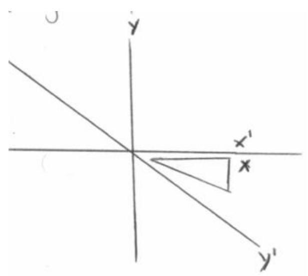


Figura R5a

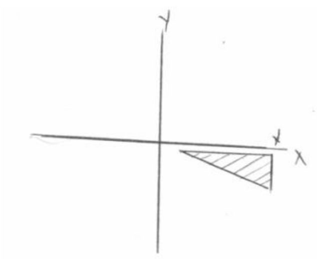


Figura R5b

Finalmente hace otro dibujo, ver figura R5*b* donde ya no considera al eje y', y justifica su respuesta anotando: "*Si el triángulo se encuentra sobre el eje "x" y el eje x' ha dado una vuelta completa, esto nos indica que quedaría en ese mismo eje x' pero como llegó a su mismo lugar, este triángulo quedaría abajo del eje "x", de cabeza, como se muestra en la siguiente figura*", ver IE 5

En esta tarea se aprecia que Rosario intuye el movimiento de los ejes así como la posición final del triángulo, pero lo dibuja tal cual, sin modificar su forma. Pensamos que su modelo intuitivo del triángulo es la de una figura que no se deforma, por lo que coacciona su respuesta implícitamente. Una situación como la anterior podría generar un buen debate en clase, al contrastar respuestas de otros estudiantes.

El modelo explícito que genera Rosario (mostrado en las figuras R5) podemos considerarlo como significativo, en el sentido de que si ella no intuye como se mueven los ejes, es muy probable que tampoco intuirá que cambia de forma el triángulo, situación que nos recuerda las dificultades que tuvieron los estudiantes en el trabajo de Molina (2004) donde no podían reconocer ciertas TLS, como la TL de *corte*, nótese que en esta transformación un vector de la base canónica no se modifica bajo la TL.

Análisis de las respuestas de **Guillermo** (G)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

En esta tarea Guillermo parte de la representación de los modelos de la figura 1 ver figura G3*a,* y ahora trata de analizar el movimiento de los ejes y extrapola el modelo de la figura G1*b*, pero considera que el movimiento es en sentido horario, o hacia el "*sur*" como él escribe, partiendo de x' y de y', ver figura G3b.

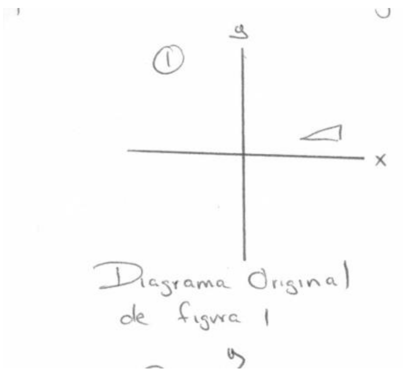
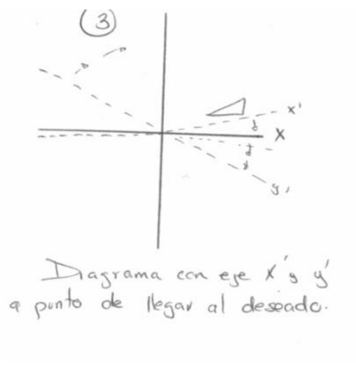


Figura G3a

Figura G3b

Se observa que una de las características del modelo intuitivo que tiene del plano, es que requiere de coordenada para poder ubicar, en este caso, al triángulo por lo que escribe "*Los ejes x' y y' se desplazan en diferentes sentidos, sin importar cual sea. No se tienen coordenadas exactas a respetar por lo tanto la figura no corresponde a ningún cuadrante, de tal manera que la figura plasmada no rota en ningún sentido*", ver IE 15. Parece que el modelo que tiene del triángulo le impide modifica su forma y en consecuencia no cambia su posición por lo que da una solución incorrecta, ver figura G4b,



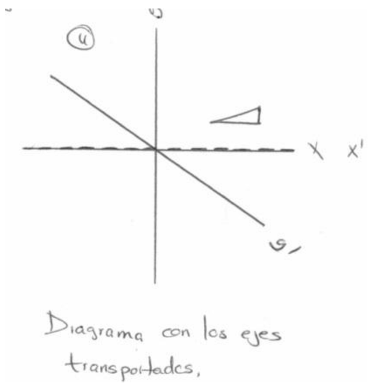


Figura G4a *Figura G4b*

Consideramos que escribe "*en ningún sentido*" porque las etiquetas del modelo explícito de esta tarea no le proporcionan esa información, luego al extrapolar la idea de la solución de la tarea 1 ver figuras G1*a* y G1*b* para aplicarla a la solución de la tarea 3 ver figura G3*b*, él considera ahora que el giro de los ejes es en sentido horario.

Pensamos que Guillermo tiene dos modelos presentes en esta actividad, los que representa en el dibujo de la figura G3*b* al que llama "*diagrama con desplazamiento de ejes*". El primer modelo que traza es el plano cartesiano $x - y$. Luego dibuja el plano $x' - y'$ y se aprecia que lo considera ortogonal debido a un rasgo característico que tiene su modelo del plano y partiendo de éste último trata de dar la solución de la tarea 3.

Partiendo del eje x' en sentido horario lo gira 45º hasta su posición final que es el eje x original. Luego parte del eje y', también en sentido horario 180º, aunque no lo indica en la figura, en este punto el tercer modelo que considera es el modelo explícito de la figura 4 de esta tarea 3 en donde la nueva posición del eje y' es un poco más hacia el "*sur*" como él dice, y considera que esta 10º más al sur, por lo que el giro total que considera es de 190º como se ve en la figura G3*b*. Como se había previsto él asigna valores específicos para definir una posición y poder ubicarse.

Al continuar analizando el movimiento de los ejes dibuja nuevamente al triángulo y como no intuye que se mueve ver figura G4*a* en una nota escribe "*los ejes pueden cambiar de sentido pero como no hay unas coordenadas que estipulen que el triángulo pertenece a el primer cuadrante, entonces el triángulo no se mueve.*", ver IE 16, por lo que su respuesta es incorrecta.

Guillermo hace otro intento y en una segunda solución dibuja la posición de los ejes mostrada en la tarea 3, donde trata de identificar la forma y el sentido de movimiento de los éstos hasta su posición final considerada como se muestra en la figura G5. Pensamos que no dibuja al triángulo pues el modelo que tiene de éste al no considerar que se deforma no le crea confusión alguna, por lo que el triángulo en este caso no es parte de su análisis.

Figura G5

Análisis de las respuestas de **Andrés** (A)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

En esta tarea también se observa que Andrés utiliza el modelo mental intuitivo que ha generado, a partir de las soluciones anteriores, como se ve en la figura A3 donde extrapola la idea de que el eje x' se encuentra a 45º, y en consecuencia la hipotenusa del triángulo la hace coincidir nuevamente con el eje x'. También extrapola la idea del la posición que tiene el eje y de la tarea anterior por lo que a partir de ésta considera que gira hasta la posición y' como se indica en esta tarea. Un rasgo de su modelo intuitivo del plano hace que considera un giro de 90º, y nuevamente la idea de que la hipotenusa del triángulo está sobre un eje la tiene presente y la plasma en la figura A3, y no llega a la solución.

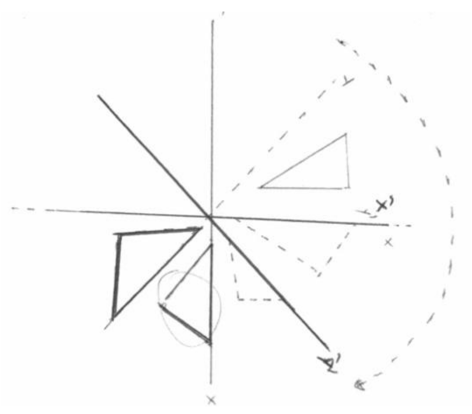


Figura A3

Análisis de las respuestas de **Diego** (D).

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

En esta tarea 3 Diego advierte que el eje y' gira y escribe "*Nuevamente el eje y' es el que se nota que se mueve 40º en dirección sureste con respecto del eje x', el triángulo quedará en medio de estas nuevas posiciones de los ejes.*", ver IE 27 y procede a dibujar el triángulo, aunque lo dibuja en el lugar correcto considera que este no se deforma. Se aprecia que el modelo mental que tiene del triángulo y de la posición que guarda éste con respecto al eje x, que parte de las tareas anteriores hace que él no advierta que el triángulo se deforma.

Pensamos que Diego a partir de lo que escribe considera que el eje y' se mueve con relación al eje x', y luego extrapola el modelo que tiene del triángulo el cual considera que no se deforma y que el cateto que es paralelo al eje x' también lo es a y', en consecuencia su respuesta es incorrecta como se ve en las figura D3.

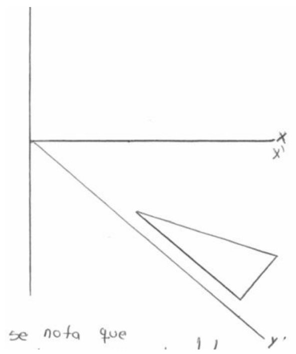


Figura D3

Análisis de las respuestas de **Ángel** (An).

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Ángel intuye que se ha movido el eje y una posición y' pero no puede determinar cómo es el movimiento, y lo único que puede analizar es que la base del triangulo sigue estando paralela al nuevo eje x' y escribe "*Tenemos que el eje 'x' en este caso no se ha movido por lo que el triángulo gira de cabeza conservando sus coordenadas de "x", pero como "y" gira y queda de cabeza por esos las coordenadas en "y" cambian con respecto a su eje*", ver IE 31, y luego dibuja el triángulo como se muestra en la figura An3

Se observa que el modelo mental del triángulo que tiene le impide dibujar al triángulo deformado, sin embargo considera que el triángulo sí giro de tal forma que ahora la base es la parte superior de éste, pensamos que la etiqueta x' influyo para intuir el cambio, sin embargo su solución fue incorrecta.

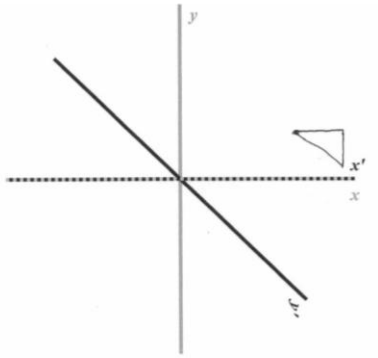


Figura An3

Tarea 4. Observe el vector de la figura 5:

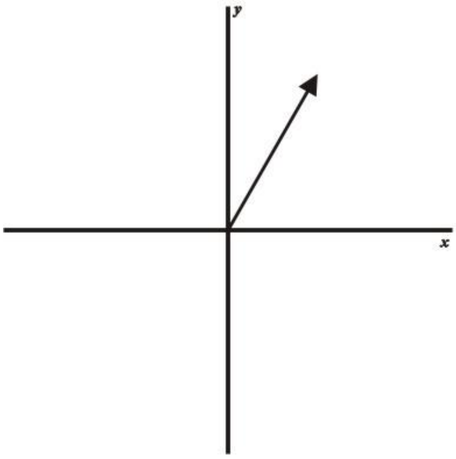


Figura 5

Si se mueve el eje x y el eje y como en la figura 6, ¿cómo queda dibujado el vector?
Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

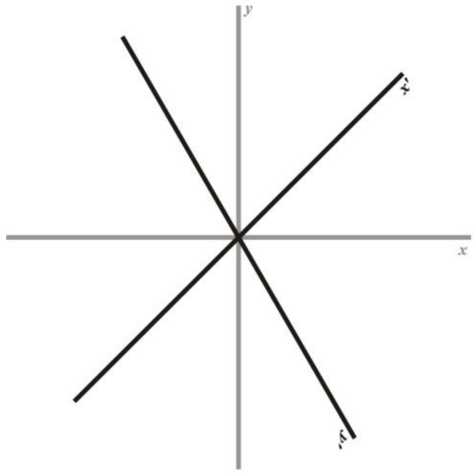


Figura 6

Análisis de las respuestas de **Rosario** (R)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Rosario en esta tarea dibuja nuevamente la figura 5 de la secuencia y aunque no se refiere al vector ni lo que representa, como se había pensado que hiciera, trata de ubicarlo en el plano. Aquí podemos identificar un modelo intuitivo generado a partir de la dificultad que se le presentó al realizar la tarea 2 donde tratar de ubicar al triángulo en el primer cuadrante, y lo extrapola para poder ubicar, en este caso, al vector en el primer cuadrante y escribe "*esta figura nos muestra que el vector está entre el eje "x" y el eje "y", pero este, está más cercano del eje "y"*", ver IE 6.

Pensamos que Rosario ha construido un modelo mental que parte de la tarea 1, siendo uno de sus rasgos hacerla considerar que durante el movimiento ambos ejes permanecen ortogonales por lo que escribe "*Si el vector x' y y' giraron la misma cantidad, entonces el vector, como en la figura 5, queda más cercano de y'*", ver IE 7, situación que ilustra, como se ve en la figura R6.

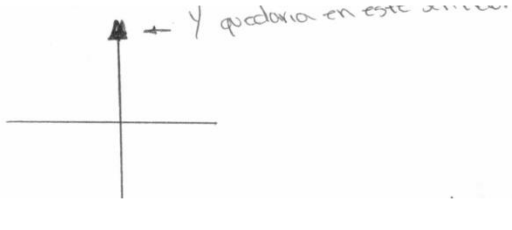


Figura R6

Finalmente Rosario completa la tarea 4 moviendo al vector de acuerdo como piensa que se movió el eje y, aquí se puede ver otra manifestación de su modelo que parte de la tarea 1 "*a girado*" que extrapola a la tarea 3 por lo que escribe "*Pero si el eje "y" dio una vuelta completa entonces el vector queda así:*", ver IE 8, pero lo dibuja erróneamente, dado que ubica al vector sobre el eje x', consideramos que ella intuye tácitamente que al dar una vuelta completa el eje y, el vector se mueve entonces siguiendo el movimiento del eje x' y no el del eje y', como se muestra en la figura R7.

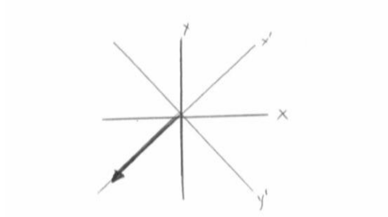


Figura R7

El resultado anterior puede deberse a que Rosario no logra generar un modelo mental que le permita manipular el movimiento de los ejes junto con el vector, situación que se pudo generar a partir de la primera tarea por ser muy simple o intuitiva, misma que podría hacer que los estudiantes tengan tendencia a extrapolar esa técnica de solución en la solución de las otras tareas, llevándolos a respuestas no correctas matemáticamente y por tanto a que la secuencia no cumpla su propósito. Sin embargo, la discusión grupal de estas soluciones podría ayudar a que la secuencia didáctica cumpla sus propósitos didácticos.

Análisis de las respuestas de **Guillermo** (G)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

En esta tarea Guillermo dibuja e identifica al nuevo modelo explícito (vector) e inclusive en una nota escribe "*Un vector tiene una posición, un sentido y una magnitud, el vector tiene una dirección y si cambiamos su sentido, entonces el vector rotará en el nuevo sentido indicado. Vector que parte del origen es llamado Vector de Posición*", ver IE 17.

Aunque aparentemente se ve que tiene un modelo intuitivo del movimiento de los ejes pues identifica el lado negativo de x' y y', al igual que en la tarea 3 solamente identifica el giro de los ejes en un sentido, siendo en este caso el sentido anti horario y termina considerando que el vector sólo se mueve con respecto al eje x, como se ve en la figura G6. No puede identificar el movimiento del vector con respecto al eje y, luego anota “*Se mueve con respecto al eje* x”.

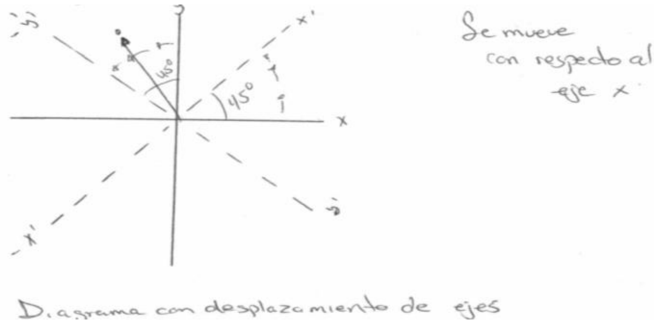


Figura G6

Aquí se aprecia que aunque Guillermo etiqueta correctamente el lado negativo del eje y', su modelo intuitivo del vector le indica que éste parte del origen con una trayectoria (positiva) sobre el eje x', seguida de otra trayectoria (positiva) perpendicular al eje ya mencionado hasta llegar al punto final del vector, por lo que no considera la nueva posición del lado positivo del eje y', posiblemente esto se deba a que su modelo refleja la forma en que normalmente se dibuja un vector en clase y es la misma forma en que se representan en los libros de texto.

Análisis de las respuestas de **Andrés** (A)

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Andrés identifica al nuevo modelo explícito (vector) mostrado en la figura 5 y escribe “*el vector es la fuerza que representa la trayectoria entre dos puntos* (α, β)*”* esta situación se predijo en el análisis a priori. Supone que los valores de las componentes del vector con respecto a los ejes no cambian y continúa escribiendo “*Si el eje “x" y el eje “ y” se mueven los valores no cambian*”, ver IE 21. Luego dibuja una escala sobre los ejes para signar valores específicos a las componentes (α, β) tratando de conservar los mismos valores tano para x como para y siendo aproximadamente (4,8), y grafica al vector pero incorrectamente como se ve en la figura A4.

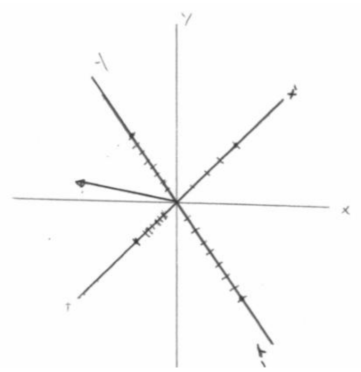


Figura A4

En esta tarea Andrés, como se había señalado en el análisis a priori analizó al vector tanto en el contexto físico considerándolo como una fuerza ubicándolo en R^2, así como en el algebraico considerando al par ordenado de números reales (α, β).

Se aprecia en la figura A4 que Andrés no colocó en la posición esperada al vector, dado que el modelo mental que tiene del plano cartesiano hizo que durante el proceso etiquetara la parte negativa del eje y' como y, por lo que extrapola la idea de que el valor de β es positivo, y aunque supone que el vector cambia de posición el modelo presentado al estudiante en la tarea no cumple su propósito de informar que la posición de las etiquetas x' e y' indican el sentido del giro. Aquí una intervención sería necesaria, para que el estudiante interprete el problema de la forma planeada.

Análisis de las respuestas de **Diego (D).**

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Diego consideró que el vector de la figura 5 forma un ángulo de 60º con respecto al eje x, situación que extrapoló al analizar la figura 6 de esta tarea, y considera que este mismo ángulo es el que debe de tener el vector con respecto al eje x', como se ve en la figura D4.

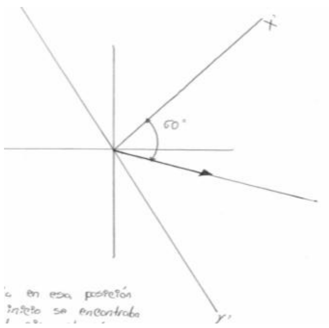


Figura D4

Aparentemente él no ha podido generar ningún modelo mental durante el desarrollo de la secuencia con el cual pueda analizar el movimiento del eje y hasta su nueva posición y', sin embargo parece ser que ha construido un modelo a partir de las tareas anteriores que le permite determinar la posición del lado positivo de los nuevos ejes primo, situación que extrapola pues etiqueta correctamente a los nuevos ejes y dibuja al vector correctamente en el primer "*cuadrante*". En consecuencia la solución que dio Diego resulto ser intuitivamente correcta en cuanto a su ubicación aunque no respecto a su posición en relación a $R^{2'}$.

Análisis de las respuestas de **Ángel** (An).

Ante esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

En esta tarea Ángel después de analizar el nuevo modelo explícito (vector) que se muestra en la figura 5, parece ser que si lo puede manipular, pues intuitivamente lo ubica en la posición que se esperaba, como se ve en la figura An3, y en relación a esto escribe junto a esta figura "*considerando que el vector se ubica o tiene menos alejamiento a "y" este al momento de gira junto con el vector y nos queda de cabeza ya que en la figura uno el vector sale hacia arriba y equis casi no tiene desplazamiento*"

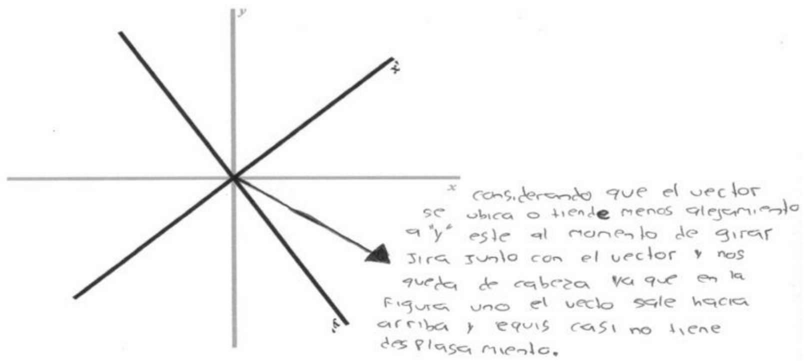


Figura An3

En esta tarea pensamos que Ángel aplica una técnica misma que parte de un modelo mental que ha construido con las tareas anteriores, es decir, su modelo mental intuye que los ejes giran por lo que considera que el *vector gira con el eje "y".* Otra intuición que ha desarrollado es el poder relacionar la posición de la figura ya sea el triángulo o el vector con el *eje* x' pues después de percatarse de que el vector tiende hacia el *eje* y y después del movimiento hacia el *eje* y', identifica que la trayectoria horizontal del vector es pequeña y extrapola esta idea, considera ahora que la trayectoria del vector sobre el eje x' también lo es, por lo que termina escribió "… *y equis casi no tiene desplazamiento*" siendo correcta su respuesta. Dada la forma en que dio la solución una discusión con sus compañeros es necesaria para confrontar sus ideas.

Tarea 5. Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector $(4{,}7)$ se ha dibujado como el vector **C**, ver la figura 7. ¿Cuál es la coordenada del punto (x_1', y_1') en el plano $x - y$? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

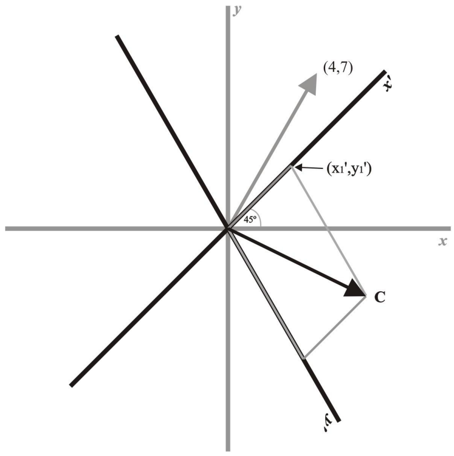


Figura 7

Análisis de las respuestas de **Rosario** (R)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Rosario procede a dibujar el vector $(4{,}7)$ como se muestra en la figura R8, trazando sobre los ejes coordenados originales la escala que define la trayectoria de éste.

Aquí, pensamos que aunque ve que el eje *x* se ha movido a 45º, e inclusive lo dibuja, el modelo algebraico que tiene del par ordenado (x, y) se impone en ella, pues la escala que trazó particularmente sobre el eje *x*, le impide analizar la trayectoria del vector sobre el eje x'

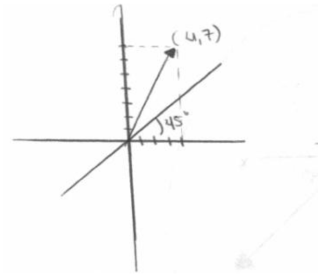


Figura R8

En el segundo dibujo que hace, ver figura R9, ha notado que el eje y cambió de posición pues lo dibuja sin etiquetarlo como se ve en la figura 7, sin embargo aunque aparentemente intuye que el vector cambia de posición con respecto al eje y', extrapola la idea de trazar sobre los ejes coordenados originales la escala que define la trayectoria de éste y supone que lo que cambia son las componentes (x, y), por lo que considera que éstas toman la forma (y, x), es decir las cambia (invierte), y piensa que ahora el vector **C** tiene las coordenadas $(7{,}4)$.

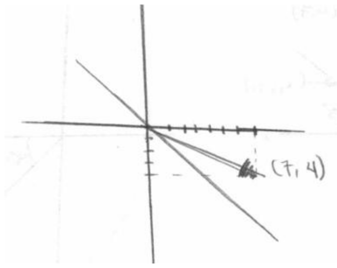


Figura R9

Continúa, y dibuja al vector que determina las coordenadas del punto (x_1', y_1') (omitiendo los subíndices), ver figura R10, y finalmente extrapola la solución que previamente aplicó para determinar a **C** como se ve en la figura R11.

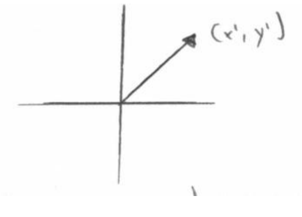


Figura R10

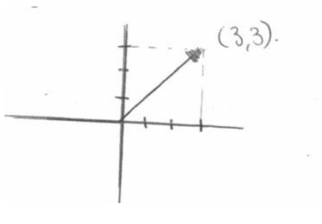


Figura R11

Como se ve, la solución gráfica que da aparentemente es correcta, sin embargo como la escala que emplea no es exacta su respuesta (3,3) es aproximada, siendo la correcta (2.82,2.82). Consideramos que su respuesta se basa en el modelo explícito que ubica al eje x' a 45º por lo que escribe "*Si el eje que deseamos buscar* (x_1', y_1') *esta entre el aje "x", "y", entonces, nos indica que es la mitad, yo deduzco que el eje es* (3,3), *porque también nos indica que tienen 45º y está entre los ejes*", ver IE 9.

Como en la figura R8 solamente dibuja al eje x' y en la figura R9 solamente dibuja el eje y', su modelo mental de R^2 hace que considere que y' también se movió a 45º, y a partir de este hecho construye su solución por lo que anota "*Si en la figura 5 nos muestra que el eje (4,7) se movió, y el eje ahora pasa a ser "C", siempre se va a tener 45º, ya que son la mitad de 90º. Ahora nos pide encontrar las coordenadas de* (x_1', y_1')", ver IE 10.

En esta tarea pensamos que el modelo explícito de la tarea anterior, figura 5 y particularmente el vector, la hacen intuir que el problema a resolver en esta tarea 7 es, determinar las coordenadas del vector **C** a partir del vector (4,7), y como una segunda tarea determinar las coordenadas del punto (x_1', y_1').

Análisis de las respuestas de **Guillermo** (G)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Guillermo identifica al vector (4,7) y dibuja coordenadas sobre los ejes x e y para ubicarlo en el plano cartesiano, como se ve en la figura G7.

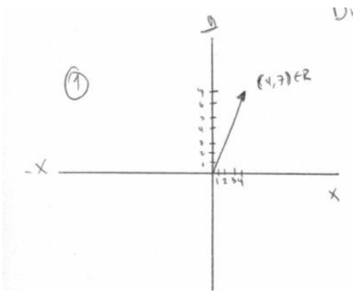


Figura G7

Procede a dibujar la nueva posición de los ejes coordenados analizando cada uno de ellos por separado. Empieza con el eje y' mismo que dibuja correctamente como se ve en la figura G8*a*, se aprecia que intuye que también el eje x se mueve por lo que dibuja al eje x' perpendicular a y'. Continúa con el eje x' y lo sitúa a

45º como lo indica la tarea, se aprecia que vuelve a intuir que al moverse un eje, el otro también lo hace, por lo que dibuja a los ejes x' e y' perpendiculares como se ve en la figura G8*b*.

Se aprecia que durante el proceso, el modelo mental intuitivo que tiene del plano cartesiano se manifiesta tácitamente en él, pues aparentemente no importa qué eje se mueva primero o como lo haga, él tiene siempre presente un sistema de coordenadas ortogonales que determinan cuatro cuadrantes, en consecuencia como la solución que se pide es con respecto al plano $x - y$, éste implícitamente está ejerciendo su influencia, pues además considera que la parte del eje y' que esta en el cuarto cuadrante es la negativa y la etiqueta - y' como se muestra en la figura G8*b*.

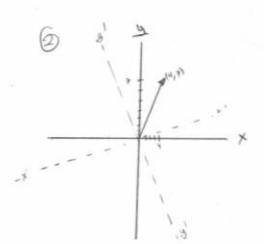


Figura G8a

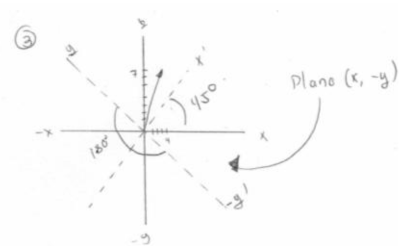


Figura G8b

Continúa Guillermo, y en el último planteamiento que hace considera que las 7 unidades medidas sobre el eje *y* que determinan la posición vertical del vector (4,7), se corresponden con las 7 unidades que grafica sobre el eje *x* que a su vez determinan la posición horizontal del vector **C**, como se muestra en la figura G9. Consideramos que el modelo explícito de esta tarea influye en el estudiante haciendo que dé una respuesta intuitiva por lo que rectifica y escribe "*Queda* $(7, -4)$".

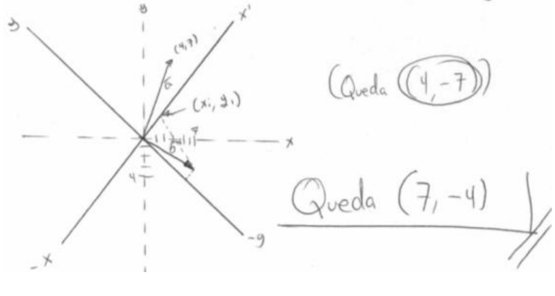


Figura G9

En esta tarea 5, Guillermo aunque lee las indicaciones se pierde pues de hecho no resuelve la tarea, es decir no obtiene las coordenadas del punto (x_1', y_1'), y consideramos que eso sucede porque aunque intuye que los ejes se mueven, no solo porque lee la palabra sino porque gráficamente lo ha visto en las tareas anteriores, no ha logrado construir un modelo de cómo se mueven los ejes exactamente, esta situación lo orilló a concentrarse únicamente en el vector (4,7) (vector que puede dimensionar y ubicarse en el plano) y el vector transformado **C**, y en consecuencia olvida la tarea que es calcular las coordenadas del punto (x_1', y_1').

Hay que hacer notar que el estudiante ya construyó un modelo, que, aunque imperfecto está influyendo en sus decisiones pues tácitamente acepta que el vector **C** cambia de dirección, posición y sentido por lo que escribe "*Los vectores dibujados son de la forma (4,7) y (7,-4) respectivamente, de tal forma que si movemos los ejes las coordenadas deben ser también transpuestas y cambiar la dirección, posición y sentido del vector C*", ver IE 18.

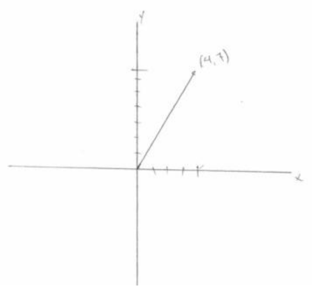
Análisis de las respuestas de **Andrés** (A)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

La primera intuición que tiene Andrés en esta tarea, es la de ubicar en el plano cartesiano al vector (4,7) por lo que dibuja una escala sobre los ejes *x* e *y*, y lo traza como se ve en la figura A5*a*.

Luego, en otro dibujo ubica al eje x' a 45º del eje *x*, véase la figura A5*b*, y procede a determinar la posición del eje y'. Aunque intuye que el eje y' gira alrededor del origen no logra determinar su posición a demás que el modelo explicito dado no proporciona ningún dato que lo ubique. Es aquí donde su modelo del plano cartesiano guía su respuesta y termina dibujando al eje y' a 90º respecto al eje x' como se ve en la figura A5*b*.

Continúa, dibuja al vector **C** y escribe, "*se determina por el eje de las "x" ya que sólo se mueve 45º y el eje* "*y"* ", ver IE 22. Por lo anterior pensamos que Andrés considera que la posición que guarda el vector **C** con respecto al eje x' y al eje y', es la misma que con respecto al eje *x* y al eje *y*, en este razonamiento también pensamos que Andrés acepta intuitivamente que el vector **C** se encuentra en el cuarto cuadrante.



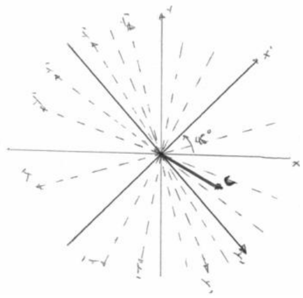


Figura A5a *Figura A5b*

En esta tarea parece ser que no identifica claramente la pregunta, la cual consiste en encontrar las coordenadas (x_1', y_1'), por lo que solamente trata de ubicar al vector (4,7) y al vector **C**. Lo anterior pudo haberse debido a que, el modelo explícito de esta tarea no muestra otros datos que le permitan al estudiante obtener las coordenadas (x_1', y_1'), situación que pudo haberse superado con la intervención del profesor.

Análisis de las respuestas de **Diego (D).**

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Diego no hace ningún dibujo, pero escribe "*La coordenada sería (4,-7) ya que el vector quedó en el cuarto cuadrante del plano (x, y) y a dicho cuadrante le corresponden a las x un signo positivo y a las y un signo negativo…*", ver IE 28

Como se puede ver, parece que a Diego no le quedó claro cuál era exactamente la pregunta que debía contestar. Sin embargo, pensamos que el estudiante al ver por primera vez el par de números reales "(4,7)", genera una respuesta intuitiva para determinar las coordenadas del vector **C,** olvidándose del punto (x_1', y_1').

Aunque no se verifica la hipótesis de la actividad 2 como fue planteada, se aprecia que estudiante cuenta con modelos que están influyendo en su solución, que en este caso es el plano cartesiano y los signos que le corresponden al cuarto cuadrante, así como la ubicación de un vector en función de su ángulo de dirección, pues con respecto a esto continúa escribiendo "*También se podría decir que tiene el vector **C** una dirección de 335º, SE con respecto al eje plano (x, y)*".

Aunque existe otro dato numérico, el ángulo de 45º, no lo emplea para dar la solución, pues ésta la da con respecto al plano $x - y$, siendo su respuesta intuitiva incorrecta, tal parece que las coordenadas que consideró como (4,-7) ejercen una acción coercitiva en él, consideramos que tácitamente el está aceptando la implicación $x - y$ es a $(4, -7)$. Es posible también que él haya interpretado *"$x - y$"* como "*x* menos *y*", hecho que también pudo haber influenciado su respuesta.

Con la solución intuitiva que dio, pensamos que Diego da por concluida la tarea por lo que no calcula las coordenadas (x_1', y_1') que se piden, situación que pudo haberse corregido con la intervención del profesor.

Análisis de las respuestas de **Ángel** (An).

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

A partir de la figura 7, Ángel construye la solución de la tarea. De inmediato se ve que no le quedo claro cuál es la pregunta que debe contestar pues nunca menciona a las coordenadas (x_1', y_1'). Aunque no lo menciona, su solución fue determinar las coordenadas del vector **C** y escribe "*tenemos que las coordenadas del plano "x,-y" son = (4,-7) ya que el vector tiene una dirección hacia abajo por eso se dice que tiende a menos "y" (-y) y por eso "x" conserva signo positivo "+" ya que respeta la misma posición*", ver IE 32.

Aparentemente determina las coordenadas de **C**, siendo su estrategia el emplear los valores 4 y 7 del vector dado y con base en el modelo mental que tiene de R^2, por lo que considera que en el cuarto cuadrante *x* es positiva y *y* es negativa. En consecuencia, su razonamiento intuitivo no le permite ver que las coordenadas que considera no se corresponden con la posición de **C** mostrada en la figura 7.

Como Ángel pierde de vista al punto (x_1', y_1'), el valor que define la posición del eje x', que es de 45º no influyo para que esta tarea se realizara como se esperaba, también podemos pensar que las coordenadas de dicho punto, se les pidió con respecto al plano $x - y$, y él también lo haya interpretado como *x* menos *y*, lo que influyó su respuesta, situación que pudo corregirse si hubiera intervenido el profesor.

Tarea 6. Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector (4,7) se ha dibujado como el vector **C**, ver la figura 8. ¿Cuál es la coordenada del punto (x_2', y_2') en el plano $x - y$? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

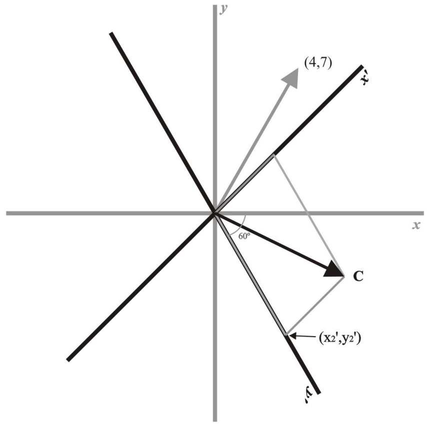
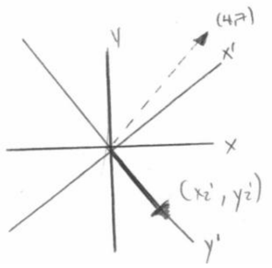


Figura 8

Análisis de las respuestas de **Rosario** (R)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

> Rosario dibuja al vector (4,7) así como al nuevo sistema coordenado $x' - y'$, luego dibuja un vector etiquetándolo como (x_2', y_2') sobre el nuevo eje y' como se muestra en la figura R12*a*



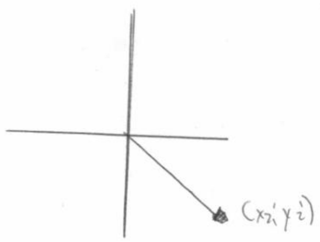


Figura R12a *Figura R12b*

> Se puede observar que aunque ella considera que el eje y' cambió de posición, no aprecia que se debió a una rotación de dicho eje, pues en ningún momento hace mención del ángulo de 60º que posiciona al eje y', ni lo dibuja. En consecuencia, el análisis que hace es en función de la posición que guarda y' con respecto al nuevo sistema $x' - y'$ sin considerar como fue el movimiento y escribe "*Como se movieron los ejes y ahora el eje "y" está de cabeza y sobre su mismo eje esta el vector que se encuentra, que nos pide encontrar* (x_2', y_2'), *entonces sí dio una vuelta casi completa y nos indica que hay 60º",* ver IE 11. Se

aprecia que intuitivamente considera que las coordenadas también cambiaron de posición y continúa escribiendo "*entonces las coordenadas se invierten y "y" es 7 y "x" es igual a 4"* y dibuja al vector (x_2', y_2') como se ve en la figura R12*b*.

La solución que elabora Rosario es gráfica y la extrapola de la tarea anterior como se observa en la figura R13, por lo que dibuja una escala sobre los ejes *x* e *y* para ubicar al vector (x_2', y_2') (hecho que extrapola de la tarea 5), sin embargo como las únicas coordenadas que tiene en su mente son las del vector $(4,7)$, éstas las considera para la solución del problema.

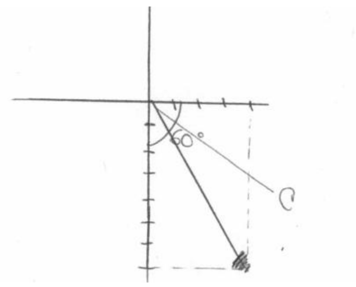


Figura R13

En esta tarea consideramos que Rosario identifica que la tarea es calcular las coordenadas del punto (x_2', y_2'), pero al no realizar la tarea anterior como se pedía, lo que implica que no calculó las coordenadas del punto (x_1', y_1'), sugiere que ella no ha construido ningún modelo mental intuitivo que la permita plantear una estrategia para resolver la tarea. Se aprecia, sin embargo que Rosario extrapola la solución que aplicó en la tarea anterior donde equivocadamente calcula **C,** lo que sugiere que construyó un modelo mental de dicha situación.

Análisis de las respuestas de **Guillermo** (G)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

En el primer planteamiento gráfico ubica al eje y' a 60º como lo indica la tarea, y extrapola la idea de la tarea anterior, donde la parte de este eje que se encuentra en el cuarto cuadrante es negativa por lo que escribe "*La posición del vector queda en las coordenadas* $(x, -y)$", sin embargo se confunde al asignar el valor numérico a las correspondientes componentes, como se ve en la figura G10

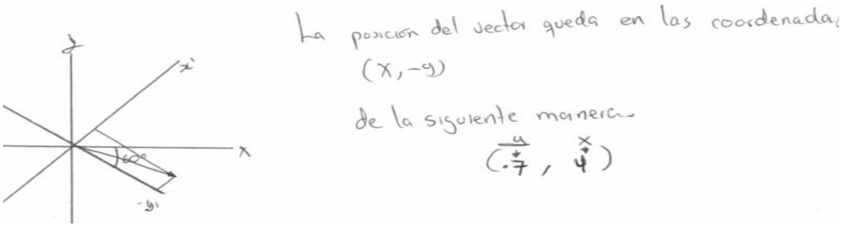
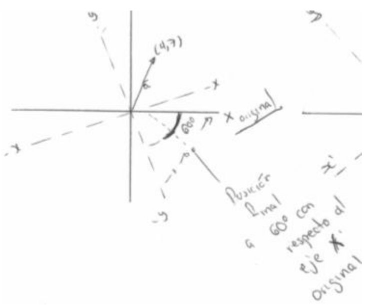


Figura G10

En esta actividad intercambia las coordenadas como lo hizo en la tarea 5 donde escribió "*…las coordenadas también deben ser transpuestas y cambiar de dirección…*", pero en este caso justifica su respuesta escribiendo *"Cambia de posición las coordenadas (4,7) del vector $\vec{A}$, en función del movimiento a $(x, -y)$ por lo tanto el vector $\vec{C}$ tiene la posición* $(4, -7)$ *o* $(-7,4)$*"*, ver IE 19. Es muy probable que en Guillermo estén actuando otros modelos tácitos intuitivos que estén coaccionando su respuesta.

Guillermo continúa su análisis y dibuja al nuevo eje y' a 60º como lo indica esta tarea, extrapolando la idea que la parte de este eje ubicado en el cuarto cuadrante del plano cartesiano es negativo, y que el nuevo sistema $x' - y'$ es ortogonal, como se muestra en la figura G11*a*. En otro dibujo trata de ubicar al punto (x_2', y_2') así como al vector **C** extrapolando los valores que le asigno a este último en la tarea anterior aunque en este caso no considera el signo negativo de la componente en *y*, como se muestra en la figura G11*b*.



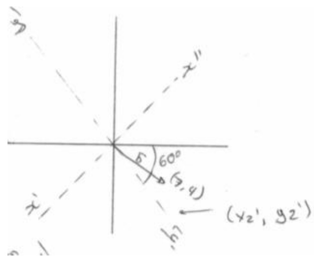


Figura G11a *Figura G11b*

Al igual que en la tarea anterior se confunde Guillermo y piensa que el determinar las coordenadas al vector **C** significa solucionar la tarea por lo que no calcula las coordenadas del punto (x_2', y_2') que se piden.

Análisis de las respuestas de **Andrés** (A)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Aquí se aprecia que Andrés considera que la posición que guarda el eje x' respecto al eje x es la misma que en la tarea anterior, por lo que lo dibuja a 45º como se ve en la figura A6, y como en el modelo explícito de esta tarea muestra claramente la posición del eje y', a 60º del eje x, el estudiante puede determinar la posición que guarde el eje y' con respecto al eje y, que es de 210º.

Parece ser que el razonamiento anterior lo lleva a intuir que, después de *girar* el eje y' 210º, el lado positivo de este eje queda en el cuarto cuadrante. Nótese que la distancia de 7 unidades, del origen al punto (x_2', y_2') que dibuja sobre el eje y' las considera positiva.

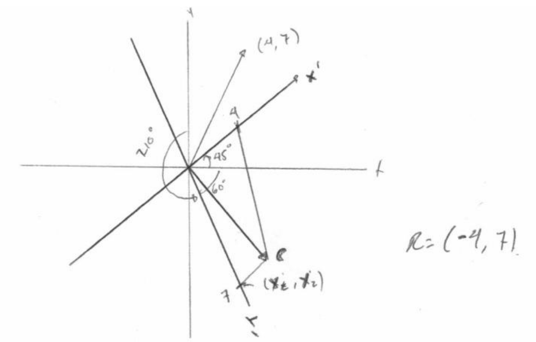


Figura A6

Después de dibujar al vector **C** trata de posicionarlo en el plano, aparentemente aplicando la regla del paralelogramo, y cree ahora que la distancia de 4 unidades se encuentran sobre x'. Luego, considerando que la solución al problema es determinar las coordenadas de **C,** luego escribe "*se toman sus valores originales* $x = 4$, *y* $y = 7$. *Se grafica cada valor en su respectivo eje pero con signo contrario en este caso* x'**.** *R*= $(-4{,}7)$", ver IE 23.

Partiendo de su dibujo mostrado en la figura A6 se puede pensar que las coordenadas de **C** son (4,7) con respecto al sistema coordenado $x' - y'$, situación que no aclara, sin embargo intuye un cambio o transformación debido al movimiento de los ejes por lo que piensa que la distancia x cambia de signo y da la respuesta R = (-4,7).

Al igual que en la tarea anterior no identifica claramente la pregunta por lo que considera que la solución al problema es encontrar las coordenadas de **C**, y aunque indica en su dibujo las coordenadas de punto (x_2', y_2') no las calcula.

Análisis de las respuestas de **Diego** (D).

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Diego no hace ningún dibujo, pero ahora sí entiende que debe de obtener las coordenadas del punto (x_2', y_2'). En este caso la estrategia que aplica es la de usar los únicos datos numéricos, con los que cuenta, para determinas las coordenadas de dicho punto y escribe "*La coordenada del punto* (x_2', y_2') *es (2,-7) ya que el punto para las x se encuentra aproximadamente a la mitad del paralelogramo formado por el plano y tiene una dirección de 330º SE*", ver IE 29.

Se ve que la solución que da la extrapola de la tarea anterior, por lo que confunde el ángulo en posición normal que guarda el eje y' con respecto al eje *x*, que es de 300º, y el ángulo correspondiente para C, mismo que él lo consideró de 330º, en consecuencia también esta respuesta es incorrecta.

Análisis de las respuestas de **Ángel** (An).

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Haciendo trazos sobre la figura 8 de esta tarea, Ángel trata de ubicar al punto final del vector (4,7), del vector **C** y al propio punto (x_2', y_2'). Sin embargo, no identifica ninguna escala que pueda emplearse como referencia para este fin, como se muestra en la figura An4.

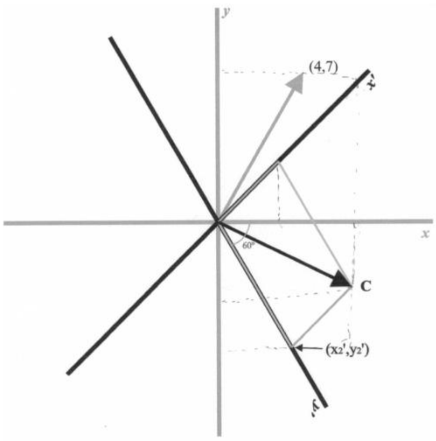


Figura An4

Se aprecia que tampoco le quedo clara cuál es la tarea a realizar, y solamente escribe *“tenemos que sus coordenadas son (8,-5) ya que el vector gira 90º* ”, ver IE 33.

Consideramos que Ángel al no haber realizado ningún dibujo para solucionar la tarea anterior, no puede extrapolar ninguna idea o estrategia que lo guie, por lo que no puede intuir ninguna solución y en consecuencia los datos numéricos que escribe no los pude justificar. Situación que con la intervención del profesor se hubiera superado.

Tarea 7. Se ha movido el eje x y el eje y de tal manera que el vector $(4,7)$ se ha dibujado como el vector **C**, ver la figura 9. ¿Cuál es la coordenada (x', y') del vector **C** en el plano $x - y$? Elabore una respuesta y explique **detalladamente**.

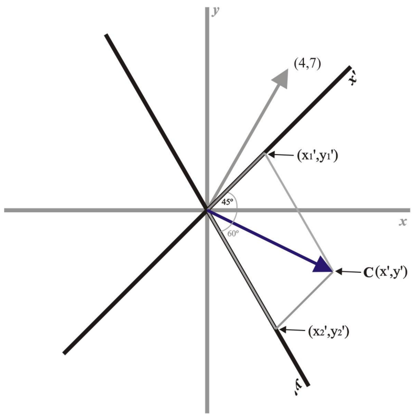


Figura 9

Análisis de las respuestas de **Rosario** (R)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Rosario dibuja al plano cartesiano y ubica al nuevo eje x' a 45º respecto al eje x como se muestra en la figura R14, como primera estrategia para su análisis así como lo hizo en la Tera 5. Dibuja también al vector **C** colocándolo como se muestra en el modelo explícito de esta tarea. Rosario no dibuja al eje y', pues aparentemente no requiere de este eje para determinar las coordenadas (x', y') de **C**, es decir, este eje no está presente en su modelo mental.

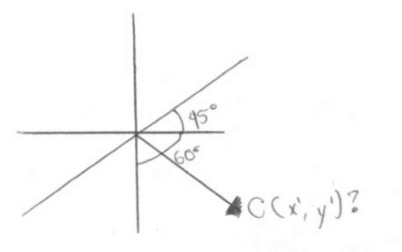


Figura R14

Continúa con la tarea y escribe "Si el vector (4,7) se ha movido y ahora forma parte del vector "C"…", ver IE 12, aquí pensamos que ella considera que después de moverse el vector (4,7) éste se convierte en el vector **C**, por lo que no modifica sus valores, solamente la posición. Pensamos que aquí Rosario intuye tácitamente que el vector **C** se encuentra en el cuarto cuadrante respecto al sistema original $x - y$ y no con respecto al sistema $x' - y'$, por lo que continúa escribiendo "*…C* (x', y') *debería tener las mismas coordenadas, ya que solo ha cambiado de lugar. Entonces las coordenadas son* $x' = 7$ *y* $y'=4$*"* y da la solución en forma gráfica, ver figura R15, misma que extrapola tal cual de la tarea 5 Figura R9 como se muestra:

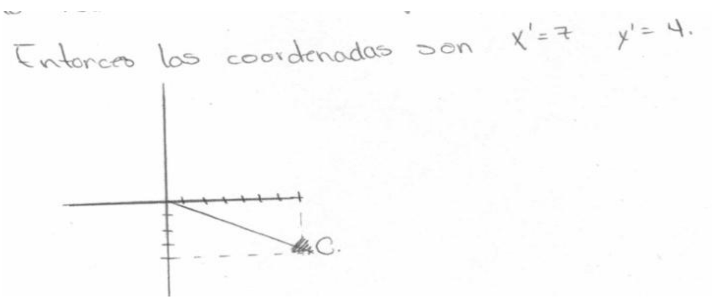


Figura R15

Consideramos que Rosario ha construido un modelo intuitivo que extrapola a esta tarea con el cual pretende dar la solución. Sin embargo el modelo intuitivo primitivo que tiene de R^2 hace que en la solución gráfica ubique al par de números reales (4,7) con respecto al sistema original $x - y$, a demás hace que ignore los signos correspondientes al IV cuadrante y en consecuencia la solución es incorrecta

Análisis de las respuestas de **Guillermo** (G)

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Dibuja al plano cartesiano y de manera intuitiva ubica al vector (4,7) a 45º con respecto al eje x, y al vector **C** a 60º con respecto al mismo eje, como se muestra en la figura G12a. Aunque esta situación no es correcta, pensamos que al no tener ningún modelos que pudiera extrapolar de las tareas 5 y 6, asigna ángulos de referencia para poder ubicar a los vectores, es probable que la estrategia que toma Guillermo es la de considerar aquellos elementos definidos cuantitativamente para posicionar a los vectores y solucionar el problema. En consecuencia le asigna a **C** las coordenadas (-7,4) considerando a $y = -7$ y a $x = 4$, situación que extrapola de la tarea 6.

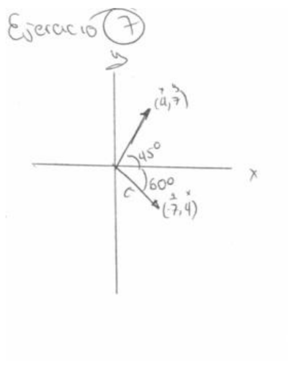


Figura G12a

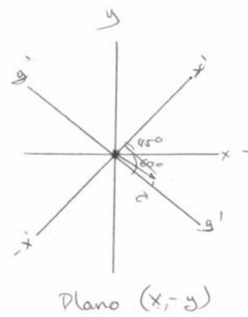


Figura G12b

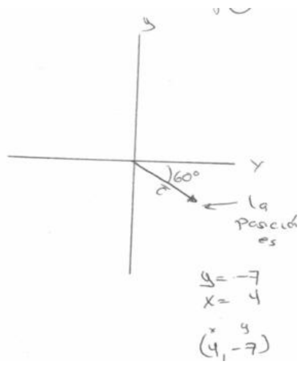


Figura G12c

En otro dibujo y sobre el plano cartesiano traza al nuevo sistema de coordenadas $x' - y'$ y dibuja al vector **C** como se muestra en esta tarea. Se aprecia que ha identificado el lado negativo del eje x, pero no el lado negativo del eje y, por lo que se confunde y el modelo que tiene del plano cartesiano hace que considera a la componente en y negativa, por lo que anota "*Plano* $(x, -y)$", ver figura G12b.

Continúa su análisis, y en otro dibujo que hace se aprecia la acción coercitiva que tiene su modelo mental del plano cartesiano, formado por los ejes x e y así como los signos que identifican a las coordenadas en el cuarto cuadrante, pues es en R^2 donde dibuja al vector **C** asignándole las coordenadas (-7,4), ver figura G12c.

Finalmente hace un dibujo donde se aprecia el razonamiento que empleó para obtener las coordenadas del punto (x', y'), ver figura G13.

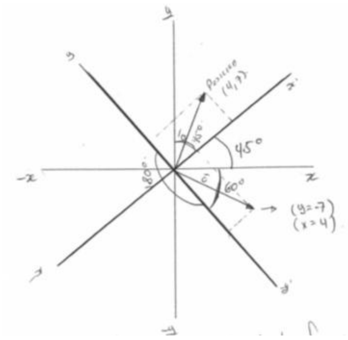


Figura G13

En esta última figura se aprecia que Guillermo extrapola la idea de ubicar a los nuevos ejes coordenados en función de los ángulos de 45º y 60º como lo muestra el modelo explícito de esta tarea, pero el hecho de saber que giran, no significa que intuya cómo lo hacen y en consecuencia el modelo tácito primitivo que tiene de R^2 se vuelve a imponer coaccionando su razonamiento, pues además de dibujarlo como un sistema ortogonal posiciona al vector (4,7) en el que el considero como primer cuadrante del nuevo sistema por lo que su respuesta no fue la correcta.

Análisis de las respuestas de **Andrés** (A)

En esta última tarea Andrés extrapola la solución de la tarea anterior y de hecho construye el mismo dibujo como se aprecia en la figura A7.

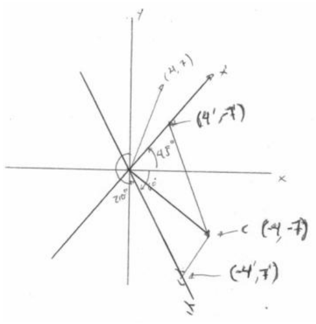


Figura A7

En dicha figura se aprecia que él está considerando como solución de la tarea 7 obtener las coordenadas de los puntos (x_1', y_1'), (x_2', y_2') y **C**. También se aprecia que él intuye que cada uno de estos puntos es a su vez una transformación del punto (4,7), y escribe:

"(x_1', y_1') *se toma desde el punto o eje de origen como positivo, en este caso "x" siendo el eje "y" la posición negativa*", ver IE 24, y asigna a este punto las coordenadas $(4', -7')$.

"(x', y') *Se toman los valores de los puntos del vector como al movimiento de sus ejes quedando los dos en negativo*", ver IE 24, y asigna a este punto las coordenadas $(-4, -7)$.

"(x_2', y_2') *Se toma desde el punto o eje de origen como positivo o punto de referencia, en este caso "y", siendo el eje "x" la posición negativa*", ver IE 24, y asigna a este punto las coordenadas $(-4', 7')$.

Se ve que Andrés no puede extrapolar ninguna técnica o planteamiento para determinar las coordenadas de los puntos, dado que en ninguna de las dos tareas anteriores lo hizo. Sin embargo, la estrategia que emplea es la de asignar un valor a partir del origen al punto considerado sobre los ejes x' e y', siendo 4 y 7 respectivamente. En consecuencia el único cambio posible para cada coordenada es el signo. Sin embargo esta solución intuitiva es errónea pues al estar los puntos situados sobre los ejes x' e y' las coordenadas para el punto (x_1', y_1') serían $(4', 0')$, y para el punto (x_2', y_2') serían $(0', 7')$.

Consideramos que Andrés tiene un modelo de referencia, siendo este el sistema $x' - y'$, pues agrega comillas a los números que definen a las coordenadas sobre los eje primos, sin embargo su modelo de R^2 y los modelos explícitos de esta tarea se confunden y las coordenadas que asigna a **C** son incorrectas, ver figura A7.

Análisis de las respuestas de **Diego** (D).

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Diego en esta tarea tampoco hace ningún dibujo, y al igual que en las dos tareas anteriores da una solución de manera intuitiva en función de sus modelos, el plano cartesiano y de un vector, visto este último como una flecha que cambia de posición, y como un par de números reales (4,7) los cuales le permiten definen la trayectoria de dicho vector en R^2.

En función de lo anterior escribe "*La coordenada del vector sería (4,7) ya que el vector **C** tiene las coordenadas (4.-7)…*", ver IE 30. Como se ve, Diego extrapola la solución que dio de **C**, de la tarea 5, y continúa escribiendo "…*y al pasarlo al plano (x, -y) quedaría 4-(-7) entonces sería (4,7) quedando en el mismo lugar del inicio.*".

Nótese que de hecho él no calcula las coordenadas de ningún punto, solamente asigna valores sobre los ejes a partir del origen, es decir solamente define trayectorias para poder así ubicarse y poder dar una respuesta.

Consideramos que Diego en esta tarea se confunde pues da la solución de **C,** en base a la solución que previamente le había asignado también a **C**, pero ahora considerando que la parte inferior del eje *y* es negativa, y en consecuencia su respuesta no es correcta.

Análisis de las respuestas **de Ángel** (An).

En esta tarea el estudiante realizó la siguiente construcción:

Haciendo trazos sobre la figura 9 de esta tarea, Ángel extrapola la idea de ubicar al punto final del vector (4,7), del vector **C** y al punto (x_2', y_2'), pero en este caso sí identifica una escala, como se muestra en la figura An5.

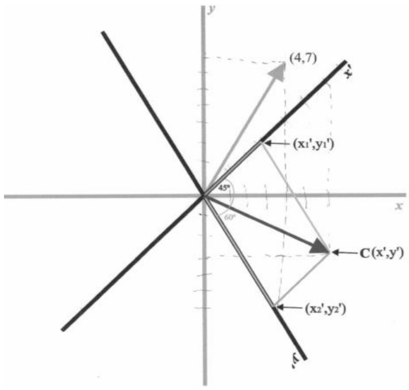


Figura An5

Se aprecia que le quedo clara la tarea de obtener las coordenadas de **C**, y escribe "*Las coordenadas correspondientes (6,-3) ya que el vector al girar se acerca o inclina 15° con respecto a "y" y ese acercamiento hace que se modifique un poco las coordenadas de los ejes o del vector*", ver IE 34

Aunque esta tarea no se solucionó como se esperaba, se puede ver que Ángel pudo construir un modelo gráfico el cual extrapolo de la tarea anterior, y así tratar de generar una solución.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

En este capítulo se concentran los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los estudiantes al resolver la secuencia; como resultados, también se plantean algunas sugerencias para su aplicación de ésta. Cada una de las tareas tuvo dos propósitos, uno era que los estudiantes realizaran la tarea correctamente y el otro, que su respuesta mostrara las ideas puestas en juego y cómo afectó su solución a cada tarea.

La **tarea 1** cumplió sus objetivos, pues los estudiantes la resolvieron como se estimó en el análisis a priori.

Los estudiantes en esta tarea intuyeron tácitamente que después del giro que mueve a los ejes coordenados, los catetos del triángulo rectángulo permanecen paralelos a los nuevos ejes primos, siendo éste un argumento que los cinco estudiantes construyeron y que influyó en la solución de las demás tareas. Lo anterior pudo deberse a que los modelos explícitos mostrados en esta tarea hicieron que se manifestaran los correspondientes modelos intuitivos presentes en ellos, los cuales contemplan también la condición de perpendicularidad existente entre dichos modelos.

La **tarea 2** no cumplió totalmente con su propósito didáctico, dado que no fue resuelta por los estudiantes en forma correcta pero sí aportó información para el diseño.

En esta tarea los estudiantes no percibieron que el triángulo se deforma conforme los ejes, al girar, van cambiando de posición. Se aprecia que no hay un conocimiento previo en ellos que haga que perciban que se debe deformar el triángulo. Por lo anterior proponemos que debe haber una discusión grupal de este argumento entre los estudiantes y el profesor, sobre las respuestas que se dan a esta tarea, con la intención de que ellos puedan manipular (deformar) al triángulo, situación que implicaría que así como se modifica el ángulo recto del plano, también se modifica el ángulo recto del triángulo. Los estudiantes *extrapolan* la idea de paralelismo entre los ejes y los catetos. Aunque lo anterior pone de manifiesto una de las características de las nociones intuitivas planteada por Fischbein, la extrapolación; es complejo tratar de determinar cómo se manifestarán las ideas intuitivas en los estudiantes y cuando se les deja solos que resuelvan las tareas se corre el riesgo de que se equivoquen y resuelvan toda la secuencia en función intuiciones incorrectas (en términos matemáticos). Nuevamente, se manifiesta la necesidad de una interacción entre profesores y estudiantes para que la secuencia tome el curso planeado. Lo realizado por los estudiantes en su solución a la tarea pudo estar influido por el rasgo el *coercitivo* de las nociones intuitivas, pues el modelo mental intuitivo que ellos tienen del triángulo *rectángulo* no les permitió deformarlo.

Lo sucedido con los estudiantes en esta tarea lo consideramos normal, porque se les dejo solos para que trabajaran la secuencia y había muchas direcciones que podían tomar. Entonces es necesario dar ciertos lineamientos para aplicar la secuencia y que los alumnos no pierdan la dirección deseada.

La **tarea 3** no cumplió totalmente con su propósito, esto se debió a que los estudiantes no la hicieron como se esperaba.

En esta tarea los estudiantes no pudieron intuir cómo dibujar el triangulo con respecto al eje x', ni con respecto al eje y', y se aprecia que ambos ejes los analizaron independientemente. Consideramos que los estudiantes aunque intuyen que los ejes son los que se han girado, no cuentan con un modelo mental que les permita deducir que el triángulo también se mueve en función del movimiento de los ejes.

Los estudiantes extrapolan la idea de paralelismo entre los ejes y los catetos, sin embargo, al no poder determinar el movimiento de los ejes de manera conjunta, tampoco pueden relacionar a los catetos del triángulo con la posición de los nuevos ejes primos. Como ya se mencionó, los alumnos resolvieron la secuencia solos, por lo que trataron equivocadamente de intuir la solución sin llegar a ella. Aquí, para que resuelvan la tarea adecuadamente, el intercambio de ideas entre los estudiantes y el profesor es conveniente. Lo que sucedido con los estudiantes en esta tarea fue confusión, que se manifestó en ellos al tratar de analizar el movimiento de los ejes, ocasionando que la acción coercitiva del modelo intuitivo del triangulo, que tienen, se hizo más evidente pues todos ellos lo dibujaron sin deformarlo.

La **tarea 4** no cumplió totalmente con su propósito, dado que no fue resuelta por los estudiantes como se esperaba.

En esta tarea los estudiantes no intuyeron que un vector se puede descomponer en dos trayectorias, horizontal y vertical, por lo que al no tener presente este modelo no pudieron determinar que el punto final del vector al proyectarse sobre el eje *x*, genera un triángulo rectángulo. Lo realizado por los estudiantes pudo ser consecuencia de no haber logrado construir un modelo intuitivo que les permitiera determinar el movimiento de los ejes correctamente por lo que no pudieron, en consecuencia, entender cómo se movía el vector junto con éstos.

Lo sucedido con los estudiantes en esta tarea, considerando que la realizaron solos, fue normal, cada uno de ellos tomó una dirección diferente y también por la aparición de otro modelo explícito, el vector, el cual posiblemente hizo que el modelo mental que tenían del triángulo, sus catetos y la relación de estos con los ejes coordenados no lo pudieran aplicar en la solución de esta tarea. Es importante hacer notar que los estudiantes se confundieron ante la aparición de un nuevo modelo que en nuestro caso fue el vector, ellos trataron de analizarlo en función de otros modelos presentes en ellos como en el caso de Diego quien definió la dirección del vector como "*NE*" (Noreste) y "*SE*" (Sureste). La intervención del profesor en esta tarea debe hacerse presente para eliminar las complicaciones que pudieran surgir en los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia.

La **tarea 5** no cumplió con su primer propósito, considerando que no fue resuelta por los estudiantes como se esperaba.

En esta tarea los estudiantes aparentemente pudieron identificar todos los modelos explícitos mostrados en las tareas anteriores, el plano $x - y$, el plano $x' - y'$, las etiquetas de los ejes de los planos anteriores, dos vectores, un paralelogramo, dos triángulos, un ángulo de referencia de 45º, las coordenadas (x_1', y_1') y un par ordenado de números reales (4,7). Sin embargo, en esta tarea todos los estudiantes olvidaron el propósito de la misma, es decir, calcular las coordenadas del punto(x_1', y_1'). Aunque los estudiantes *extrapolan* la idea que tienen del movimiento de los ejes, esta intuición no tuvo ningún efecto en la solución que dan, y es aquí donde notamos una gran confusión en ellos. La estrategia que los estudiantes tomaron para dar *su* solución fue analizar las coordenadas (4,7) que determinan la trayectoria de un vector, y mover estas (transformarlas), obteniendo en el caso de Guillermo, Diego y Ángel como resultado las coordenadas $(4, -7)$. Lo realizado por los estudiantes pudo ser consecuencia de no poder manipular los diferentes modelos mentales intuitivos presentes en ellos. El haber dibujado al vector **C** de manera realzada en la hoja que se le dio al estudiante (e igual que el vector (4,7)) provocó que los estudiantes intuyeran que la solución era determinar las coordenadas del vector C, no prestando atención a la tarea que debían atender, encontrar las coordenadas de (x_1', y_1'). Muestra cómo los modelos explícitos usados para representar cierta situación, puede comunicar tácitamente información diferente a la que pueda tener en mente quien diseña el modelo. Otra situación relacionada con el mismo fenómeno fue en la explicación de la tarea se menciona al plano con la etiqueta "$x - y$", planteamiento que unos estudiantes lo interpretaron como $x\ menos\ y$, nótese que esto último concuerda con las coordenadas del cuarto cuadrante que son $(x, -y)$, situación que los llevó a intuir la solución $(4, -7)$. Nuevamente al trabajar esta tarea con estudiantes, es necesaria la participación del profesor y cambiar la notación y énfasis, en el modelo que se use, ara que sea claro cuál es la tarea.

La **tarea 6** tampoco cumplió con su propósito, considerando que no fue resuelta por los estudiantes como se esperaba.

En esta tarea, como fue previsto en el análisis a priori, los estudiantes intuyen que las condiciones son las mismas que en la tare 5, por lo que el dibujar la posición de los nuevos ejes y al vector (4,7) no representa mayor problema, y parecía ser que superan la confusión de la tarea anterior pues todos ellos consideran que la tarea aquí es obtener las coordenadas (x_2', y_2'), pero finalmente extrapolan la solución de la tarea anterior y su análisis parte de las coordenadas (4,7) para generar la solución, sin embargo se confundieron y consideraron que la solución nuevamente era determinar las componentes de vector **C.** En el modelo explícito mostrado al estudiante, la flecha que muestra al punto (x_2', y_2') es menos enfatizada que la de los vectores (4,7) y C, a demás que no hay ninguna etiqueta que identifique a este punto; este hecho dio otra información al estudiante. Aquí también la intervención del profesor y la confrontación de ideas entre los alumnos es necesaria para realizar esta tarea.

La **tarea 7** no cumplió con su propósito didáctico, considerando que no fue resuelta por los estudiantes como se esperaba.

En esta tarea los estudiantes intuyen que los ejes cambian de posición así como el vector (4,7), luego extrapolan la idea que han desarrollado en las tareas 5 y 6, pues excepto por el ángulo de 45º y la etiqueta (x_1', y_1') se utiliza el mismo modelo que en las tares ya mencionadas. En la solución de esta tarea nuevamente se aprecia que el identificar al plano cartesiano como "plano $x - y$", en la descripción dada, hace que esto capture la atención de los estudiantes y la solución que dan es tratando de manipular los signos de las coordenadas *x* e *y* que se piden, en términos de las coordenadas (4,7) mostradas.

Consideramos importante mencionar que en este trabajo los estudiantes no contaron con ejemplos o prototipos que pudieran llevarlos al análisis o planteamiento de la TL; fueron sus modelos intuitivos los que se manifestaron a través de los modelos explícitos que se les mostraron, como se pretendía que ocurriera.

Es importante hacer notar que ningún estudiante durante el resolución de la secuencia didáctica, hizo alguna pregunta, situación que si bien, no provocó la participación del profesor en su realización (con las consecuencias indicadas en el análisis a posteriori), si nos indicó que los cinco estudiantes contaban con los modelos mentales intuitivos primitivos mismos que los identificaron con los modelos explícitos mostrados en cada tarea.

BIBLIOGRAFÍA

Dreyfus, T., Hillel, Joel. y Sierpinska, A. (1999). Cabri based linear algebra: Transformations. En I. Schwank (Ed.). *Proceedings of the First Conference of the European Research Mathematics Education I*. (pp. 209-221). Osnabrueck: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik. Recuperado de http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Holland: Reidel Publishing.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For Learning of Mathematics, 9*(2), 9-14.

Lay, D. (2001). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. México: Printece Hall.

Molina, J. G. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Molina, J. G. y Ocktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(2), 241-273.

Ramírez, O. (2008). *Modelos intuitivos que tienen algunos estudiantes de matemáticas sobre el concepto de Transformación Lineal*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Sierpinska, A. (1986, septiembre). *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra.* Ponencia presentada en la Research Conference in Collegiate Mathematics education, Central Michigan University.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillerl, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 7-40.

Soto, J. L. (s. f.). *Explorando transformaciones lineales en el plano con cabri*. Recuperado de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte14.pdf

Uicab, G. R. (2004). *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Uicab, G. R. (2006). *Transformaciones lineales con apoyo de software cabri.* Recuperado de http://www.uady.mx/~matemati/dme/docs/Iberocabri_III.pdf

Uicab, G. R. y Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9*(3), 459-490.

ANEXOS

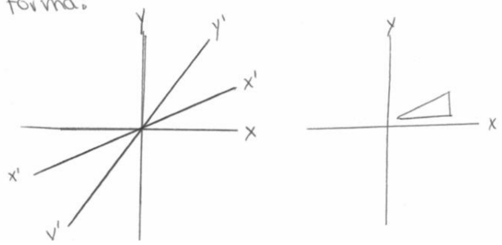
Imágenes digitalizadas

Rosario (R)

Ya que el triangulo que estaba sobre el eje 'X' y ya ha girado pasa a formar parte del eje "Y", que como se muestra en la figura 2, esta en el eje X'.

IE 1

En este caso el eje x y el eje y' se encuentran dentro del mismo lugar por lo que el triángulo quedaría de la siguiente forma: 2.



←2 En la figura 1 se encontraba en el eje x, pero ahora los ejes x' y y' estan juntos, es decir, el lugar en donde queda el triángulo es diferente.

IE 2

Si el triángulo se encontraba en el eje x en la primera figura y ahora "x'" y "y'" estan en el mismo cuadro, entonces el triángulo tiene que estar entre los ejes x' y y', queda en medio de ellos.

IE 3

Ahora, si el eje x' queda en el mismo lugar que de donde partio, nos indica que dió ~~un~~ giro completo, mas sin embargo el eje "y" ha quedado en un lugar diferente, este eje y' dio mas de media vuelta.

IE 4

Si el triángulo se encontraba sobre el eje "x" y el eje "x" ha dado una vuelta completa, esto nos indica que quedaria en ese mismo eje x' pero como llego a su mismo lugar, este triangulo quedaria abajo del eje "x", de cabeza, como se muestra en la siguiente figura:

y y

IE 5

Esta figura nos muestra que el vector esta entre el eje "x" y el eje "y", pero este, esta màs cercano del eje "y".

IE 6

Si el vector x' y y' giraron la misma cantidad, entonces el vector, como en la figura 5., queda màs cercano de y'

IE 7

Pero si el eje "y" dió una vuelta completa, entonces el vector queda así:

IE 8

Si el eje que deseamos buscar (x_1', y_1') esta entre el eje "x", "y", entonces, nos indica que es la mitad, yo deduzco que el eje es (3,3), por que tambien nos indica que se tienen 45° y esta entre los ejes.

IE 9

Si en la figura 5. nos muestra que el eje (4,7) se movio, y el eje ahora ~~fem~~ pasa a ser "C", siempre se va a tener 45°, ya que son la mitad de 90°. Ahora nos pide encontra las coordenadas de (x_1', y_1')

IE 10

Como se movieron los ejes y el eje "y" ahora esta de cabeza y sobre su mismo eje esta el vector que se encuentra, que nos pide encontrar (x_2', y_2'), entonces si dio una vuelta casi completa y nos indica que hay 60° entonces las coordenadas se invierten y "y" es 7 y "x" es igual a 4.

IE 11

Si el vector (4,7) se ha movido y ahora forma parte del vector "c" $C(x', y')$, deberia tener las mismas coordenadas, ya que solo han cambiado de lugar.

Entonces las coordenadas son $x' = 7$ $y' = 4$.

IE 12

Guillermo (G)

-Si el eje x se mueve hacia arriba, entonces el triángulo queda de la siguiente forma.

IE 13

—Si la figura se mueve en el mismo cuadrante plazmado entonces quedaría de la siguente manera

IE 14

—Los ejes x y y se desplacan en diferentes sentidos, sin importar cual sea. No se tienen coordenadas exactas a respetar por lo tanto la figura no corresponde a ningún cuadrante, de tal manera que la figura plazmada no rota en ningun sentido.

IE 15

Nota: los ejes pueden cambiar de sentido pero como no hay unas coordenadas que estipulen que el triángulo pertenece a el primer cuadrante, entonces el triángulo no se mueve.

IE 16

Nota. Un vector tiene una posición, un sentido, y una magnitud, el vector tiene una dirección y si cambiamos su sentido, entonces el vector rotará en el nuevo sentido indicado. "Vector que parte del origen es llamado Vector de Posición"

IE 17

los vectores dibujados son de la forma (4,7) y (7,-4) respectivamente, de tal forma que si movemos los ejes las coordenadas deben ser tambien transpuestas y cambiar la dirección, posición y sentido del vector $\vec{c}$.

IE 18

—Cambia de posición las coordenadas (4, 7) del vector $\vec{A}$, en función del movimiento a (x, −y) por lo tanto el vector $\vec{C}$ tiene la posición $(\overset{x}{4}, \overset{-y}{-7})$ ó / $(\overset{-y}{-7}, \overset{x}{4})$

IE 19

Andrés (A)

SE TOMA POR CADA EJE UN PLANO CARTECIANO, POR Y' Y X' SE TOMARA CADA PLANO, SE TOMA EL EJE Y Y X Y SE TERMINA LA FIGURA.

IE 20

EL VECTOR ES LA FUERZA QUE REPESENTA LA TRAYECTORIA ENTRE DOS PUNTOS (α, β). SI EL EJE "X" Y EJE "Y" SE MUEVEN LOS VALORES NO CAMBIAN.

IE 21

SE DETERMINA POR EL EJE DE LA "X" YA QUE SOLO SE MUEVE 45° Y EL EJE "Y"

IE 22

SE TOMAN SUS VALORES ORIGINALES X=4; Y=7. SE GRAFICA CADA VALOR EN SU RESPECTIVO EJE PERO CON SIGNO CONTRARIO EN ESTE CASO "X". R=(−4, 7).

IE 23

(x_1', y_1') SE TOMA DESDE EL PUNTO O EJE DE ORIGEN COMO POSITIVO,
EN ESTE CASO "X" SIENDO EL EJE "Y" LA POSICION NEGATIVA.

(x', y') SE TOMAN LOS VALORES DE LOS PUNTOS DEL VECTOR COMO
AL MOVIMIENTO DE SUS EJES QUEDANDO LOS DOS EN NEGATIVO.

(x_2', y_2') SE TOMA DESDE EL PUNTO O EJE DE ORIGEN COMO POSITIVO O
PUNTO DE REFERENCIA, EN ESTE CASO "Y", SIENDO EL EJE "X"
LA POSICION NEGATIVA.

IE 24

Diego (D)

Solamente se movio el plano 35° hacia la izquierda
y observando la figura inicial el triángulo al igual que
el plano gira 35° hacia el oeste, la posición del triángulo
sería la misma ya que los vectores que lo conforman
fueron trasladados al mover el plano.

IE 25

Tanto el eje "x" como el eje "y" se movieron 34° aproximada-
mente en dirección NorOeste el triangulo queda al centro
de ambos ejes cabe mencionar que los ejes se movieron
34° de la posición del plano inicial.

IE 26

Nuevamente el eje y' es el que se nota que
se mueve 40° en dirección sureste con respecto del
eje x que sería el mismo que el eje X'
el triángulo quedará enmedio de estas nuevas
posiciones de los ejes

IE 27

) La coordenada sería (4, −7) ya que el vector quedó en el 4° cuadrante del plano (x, y) y a dicho cuadrante le corresponden a las X un signo positivo y a las y un signo negativo. También se podría decir que tiene el vector C una dirección de 335°, SE con respecto al eje plano (x, y)

IE 28

La coordenada del punto (x2', y2') es (2, −7) ya que el punto para las X se encuentra aproximadamente a la mitad del paralelogramo formado por el plano y tiene una dirección de 330° SE

IE 29

La coordenada del vector sería (4, 4) ya que el vector C tiene las coordenadas (4, −7) y al pasarlo al plano (X, −Y) quedaría 4, −(−7) entonces sería (4, 7) quedando en el mismo lugar del inicio.

IE 30

Ángel (An)

Figura 4 Tenemos que el eje "x" en este caso no se a movido por lo que el triangulo gira de cabeza conservando sus cordenadas de "x", pero como "y" gira y queda de cabeza por eso las cordenadas en "y" cambian con respecto a su eje

IE 31

Figura 7

tenemos que las coordenadas del plano "x, -y" son = (4, -3) ya que el vector tiene una direccion hacia abajo tenemos pa eso se dice que tiende a menos "y" (-y) y por eso "x" conserva signo positivo "+" ya que respeta su misma posición

IE 32

tenemos que sus coordenas son (8, -5) ya que el vector gira 50°

IE 33

Las coordenadas correspondientes (6, -3) ya que el vector al girar se hacerca o inclina 15° con respecto a "y" y ese acercamiento hace que se modifique un poco las coordenadas de los dos ejes o del vector"

IE 34