Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada
y Tecnología Avanzada
Unidad Legaria

Estudiando la composición de funciones de la forma *f o g(x)* con estudiantes de bachillerato usando diversas representaciones

Tesis para obtener el grado de
Maestra en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta
Lucía Doval Montes

Directores de tesis
Dr. Apolo Castañeda Alonso
M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

México D.F., Diciembre de 2014

Autorización de uso de obra

Instituto Politécnico Nacional
P r e s e n t e

Bajo protesta de decir verdad la que suscribe Lucía Doval Montes, manifiesta ser autora y titular de los derechos morales y patrimoniales de la obra titulada: Estudiando la composición de funciones de la forma *f o g(x)* con estudiantes de bachillerato usando diversas representaciones, en adelante "La Tesis" y de la cual se adjunta copia, por lo que por medio del presente y con fundamento en el artículo 27 fracción II, inciso b) de la Ley Federal del Derecho de Autor, otorgo a el Instituto Politécnico Nacional, en adelante El IPN, autorización no exclusiva para comunicar y exhibir públicamente total o parcialmente en medios digitales (***formato electrónico en formato PDF***) "La Tesis" por un periodo de (10 años) contado a partir de la fecha de la presente autorización, dicho periodo se renovará automáticamente en caso de no dar aviso a "El IPN" de su terminación.

En virtud de lo anterior, "El IPN" deberá reconocer en todo momento mi calidad de autor de "La Tesis".

Adicionalmente, y en mi calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales de "La Tesis", manifiesto que la misma es original y que la presente autorización no contraviene ninguna otorgada por la suscrita respecto de "La Tesis", por lo que deslindo de toda responsabilidad a El IPN en caso de que el contenido de "La Tesis" o la autorización concedida afecte o viole derechos autorales, industriales, secretos industriales, convenios o contratos de confidencialidad o en general cualquier derecho de propiedad intelectual de terceros y asumo las consecuencias legales y económicas de cualquier demanda o reclamación que puedan derivarse del caso.

México, D.F., a 10 de diciembre de 2014

Atentamente

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

NVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 28 del mes de Octubre del 2014 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA-Legaria para examinar la tesis titulada:

Estudiando la composición de funciones de la forma *f o g(x)* con estudiantes de bachillerato usando diversas representaciones

Presentada por el alumno:

Doval	Montes	Lucía
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | B | 1 | 2 | 0 | 3 | 6 | 3 |

aspirante de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

Dr. Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Dra. Avenilde Romo Vázquez

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Calderón Arenas

Dedicatoria

Dedico este trabajo de tesis a mi esposo Jorge L. Ortega Arjona y a mi hijo Jorge L. Ortega Doval, quienes son para mí lo más importante, los amo…

Agradecimientos

A a mis directores de tesis el Dr. Apolo Castañeda Alonso y M. C. Juan Gabriel Molina Zavaleta, por toda la dedicación, guía y apoyo que tuvieron para conmigo.

A mis sinodales la Dra. Avenilde Romo Vázquez y el Dr. Mario Sánchez Aguilar, por sus comentarios y observaciones para mejorar este trabajo de tesis.

A los distintos profesores que me enseñaron durante este proceso de estudio que fue la maestría. A todos gracias por la oportunidad de reflexionar de manera conjunta sobre la enseñanza de las matemáticas.

A mis estudiantes quienes son la razón de que yo estudiara este maestría y los participes y autores de las respuestas que aquí se dan.

A todo el personal que forma parte de la Maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada por hacer posible una maestría como esta de alto nivel académico.

Índice de contenido

Índice de tablas y figuras

Glosario

Álgebra, parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos; cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita. El término tiene su origen en el latín *algebra*, el cual, a su vez, proviene de un vocablo árabe que se traduce al español como "reducción" o "restauración".

Aprender, adquirir el conocimiento de alguna cosa por medio del estudio, el ejercicio o de la experiencia.// Tomar o retener algo en la memoria. //Es un término que se halla en estrecha relación con la adquisición de conocimientos y la fijación de datos y de informaciones en nuestro cerebro. Generalmente, lo empleamos en dos sentidos, por un lado, para dar cuenta de la obtención del conocimiento de algo, un tema, una cuestión, entre otros. Y por otra parte, lo usamos para expresar la fijación de algo, normalmente un dato, una información específica, una parte de un texto, entre otros, en nuestra memoria. // Enseñar transmitir unos conocimientos.

Aprendizaje, adquisición del conocimiento de algo por medio del estudio, el ejercicio o la experiencia, en especial de los conocimientos necesarios para aprender algún arte u oficio.// Tiempo que en ello se emplea.// Es el proceso de adquisición de conocimientos, habilidades, valores y actitudes, posibilitado mediante el estudio, la enseñanza o la experiencia.

Aritmética, parte de las matemáticas que estudia los números y las operaciones hechas con ellos.

Cadena Alimentaria, describe el proceso de transferencia de sustancias nutritivas a través de las diferentes especies de una comunidad biológica, en la que cada uno se alimenta del precedente y es alimento del siguiente. También conocida como cadena alimenticia, es la corriente de energía y nutrientes que se establece entre distintas especies de un ecosistema en relación con su nutrición.

Composición de Funciones, operación entre dos funciones, *f* y *g*, que consiste en hacer actuar una de ellas sobre la variable independiente *x* de la otra. Se representa como $f \circ g$ o *f(g(x))* y se lee *g* compuesta con *f.*

Diagrama Sagital, consta de dos conjuntos entre los cuales se marca la correspondencia por medio de flechas.

Didáctica, perteneciente o relativo a la enseñanza; propio, adecuado para enseñar o instruir. Es la rama de la pedagogía que permite abordar, analizar y diseñar los esquemas y planes destinados a plasmar las bases de cada teoría pedagógica.// Parte de la pedagogía que estudia las técnicas y métodos de enseñanza.

Dominio de una función, conjunto de valores que adopta la variable independiente *x* para los que la función *f(x)* existe; se representa de varias maneras como: *Dom(f),* Dom_f , D_f , y también se denomina campo de existencia.

Enseñanza, transmisión de conocimientos, ideas, experiencias, habilidades o hábitos a una persona que no los tiene.// Sistema y método de dar instrucción. //Ejemplo, acción o suceso que sirve de experiencia, enseñando o advirtiendo cómo se debe de obrar en casos análogos.

Función, una función *f* es una regla que asigna a cada elemento *x* de un conjunto *A* exactamente un elemento, llamado *f(x),* de un conjunto *B*.//Aplicación entre dos conjuntos *D* e *I* donde cada valor del conjunto *D* le corresponde un único elemento del conjunto *I*. El conjunto *D* recibe el nombre de dominio de la función o campo de existencia. Cualquiera de los elementos del conjunto *D* se denominan variable independiente. El conjunto final *I* se denomina conjunto imagen de *D* o recorrido de la función. Cada uno de los elementos del conjunto *I* se conoce como variable dependiente.

Geometría, es una parte de la matemática que se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o en un espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, y otros elementos conceptuales derivados de ellos como polígonos y poliedros.

Gráfica de una función, es la visualización de la correspondencia entre los elementos del conjunto dominio y los del conjunto imagen mediante su representación iconográfica. También puede definirse como el conjunto formado por todos los pares ordenados (x, f(x)) de la función f; es decir, como un subconjunto del producto cartesiano X×Y.// Es la representación en unos ejes de coordenadas de los pares ordenados de una tabla. Las gráficas describen relaciones entre dos variables. La variable que se representa en el eje horizontal se llama variable independiente. La que se representa en el eje vertical se llama variable dependiente. La variable dependiente está en función de la variable independiente. Una vez realizada la gráfica podemos estudiarla, analizarla y extraer información de ella.

Imagen o rango, conjunto de valores que adopta la variable dependiente *y*. Se representa como: *Im(f)*, Im_f, I_f. También se denomina imagen o rango. Se denomina rango o recorrido de una función al conjunto de los valores reales que toma la variable *y* o *f(x)*.

Plano cartesiano, está formado por dos rectas numéricas perpendiculares u ortogonales entre sí, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto que recibe el nombre de origen. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas , y la vertical, eje de las ordenadas. El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. Las coordenadas cartesianas se definen así como la distancia al origen de las proyecciones ortogonales de un punto dado sobre cada uno de los ejes. La denominación de "cartesiano" se introdujo en honor de René Descartes, quien lo utilizó de manera formal por primera vez. Al cortarse las dos rectas en forma ortogonal dividen al plano en cuatro regiones.

Relación matemática, regla de asociación o correspondencia entre dos conjuntos, a cada elemento del primer conjunto le corresponde al menos un elemento del segundo conjunto.

Variable dependiente, Es aquella cuyos valores dependen de los que tomen otra variable. La variable dependiente en una función es la variable de salida, generalmente se denota por la letra *"y"*. Se representa en el eje de las ordenadas (eje vertical en un plano cartesiano).

Variable independiente, Es aquella variable cuyo valor no depende del de otra variable. La variable independiente en una función es la variable de entrada, generalmente se denota por el símbolo "*x"*. Se representa en el eje de las abscisas (eje horizontal en un plano cartesiano).

Resumen

El estudio de la enseñanza de las matemáticas a nivel bachillerato, en temas que suelen representar una dificultad cognitiva para los estudiantes; como lo es la composición de funciones, nos da la pauta para investigar, estudiar, analizar y reflexionar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje que se genera dentro y fuera del salón de clases. Considerando para ello las principales fuentes de referencia de consulta para los estudiantes y los métodos de enseñanza que se encuentran en dichas fuentes.

Apoyados en la investigación en matemática educativa de autores como (Duval, 1993; 1998) sobre los contextos de representación matemática y la integración de contextos de (Castañeda, González y Molina, 2013), entre otros. Así como la observación y análisis metodológico de fuentes de consulta como libros a nivel bachillerato y de referencias de búsqueda actuales para los jóvenes como el internet, y videos educativos que sobre el tema se muestran en Youtube; tanto en el idioma español como en el idioma inglés. Nos dimos a la tarea de revisar dicha información, analizar cuál es su forma preponderante de enseñar el tema, sus ejemplos, qué ejercicios proponen, herramientas matemáticas principales que usan o la ausencia de ciertas áreas matemáticas para enseñar este tema.

Bajo este esquema de información que sobre la enseñanza de las matemáticas realizan distintos investigadores, la información encontrada tanto en libros como en internet, nos dimos a la tarea de diseñar una serie de actividades didácticas que involucrará la construcción paulatina principalmente por parte del estudiante tanto del concepto de composición de funciones como de su proceso algorítmico. Para ello diseñamos actividades de lectura y asociación del tema con temas no matemáticos, como la cadena alimentaria, para que el estudiante fuera desarrollando las conexiones principales que se van dando entre los primeros tres organismos involucrados y la relación de dependencia que se puede ver en matemáticas como relación-dominio-rango.

Las siguientes actividades continúan en un proceso de construcción cada vez menos

intuitiva del concepto de composición de funciones, bajo el esquema de trabajo colaborativo, salvo la última actividad que se realiza en forma individual.

Las actividades didácticas de las que está formada nuestra secuencia son cuatro:

- Primera actividad; *Funciones-relaciones y la cadena alimentaria*. Dado que el esquema utilizado de manera escolar para representar cómo se da la cadena alimentaria corresponde a una secuencia lineal; que se puede adaptar a una composición matemática de orden lineal entre los organismos involucrados.

- Segunda actividad; *La composición de funciones y la aritmética*. En ella se trabaja con conjuntos sagitales, de tal manera que el estudiante encuentre la forma para llegar de dos pares de conjuntos con dominio y rango respectivo a el tercer par de conjuntos con dominio y rango que representa la composición.

- Tercera actividad; *Las funciones y sus gráficas*. En esta se trabaja las gráficas de la composición de funciones y como se ven modificadas al intercambiar el orden de la composición; junto con el manejo aritmético de tablas y lectura de gráficas.

- Cuarta actividad; *La composición de funciones* $f \circ g(x)$ *y el Álgebra*. Esta es la única actividad que los estudiantes desarrollan de manera individual y corresponde al manejo algebraico-algorítmico del tema.

Por último se revisa la información generada para las cuatro secuencias de todos los equipos y estudiantes, observando regularidades, diferencias, aciertos, errores y comentarios generales de los equipos, para poder al final concluir sobre las representaciones escolares que sobre el tema de composición de funciones se llevan a cabo en diversas fuentes, así como analizar el nivel de comprensión mostrado por los estudiantes a través de la guía de las distintas actividades diseñadas.

Abstract

The study of mathematics education at school level on issues that often represent a cognitive difficulty for students; such as the composition of functions, gives us the guidelines for research, study, analyze and reflect on the process of teaching and learning that is generated inside and outside the classroom. Whereas the main sources for this query reference for students and teaching methods found in these sources.

Supported by research in mathematics education from authors like (Duval, 1993; 1998) on the contexts of mathematical representation and integration of contexts (Castañeda, Gonzalez and Molina, 2013), among others. As well as observation and methodological analysis of reference sources like books and school level reference current search for the young and the internet, and educational videos on the subject are shown in Youtube; both in Spanish and English. We took on the task of reviewing this information, analyze what your predominant way of teaching the subject, his examples, exercises proposed, main mathematical tools used or absence of certain mathematical areas to teach the subject.

Under this scheme information on the teaching of mathematics perform different researchers, the information found in books and on the internet, we took on the task of designing a series of educational activities that will involve the gradual construction primarily by the student both concept of composition of functions and its algorithmic process. We designed reading activities and association of the theme with no mathematical topics such as the food chain, so that students develop outside the main connections that are taking the top three agencies involved and the dependence that can be seen in mathematics as relationship-domain-range.

The following activities are still in a process of becoming less intuitive construction of the concept of composition of functions, under the scheme of collaborative work, but the last activity performed individually.

The teaching activities that our sequence is formed are four:

- First activity; *Functions-relations and the food chain*. Because the schema used to represent school way how the food chain is given corresponds to a linear sequence; that can be adapted to a mathematical composition of linear order among the agencies involved.

- Second activity; *The composition of functions and arithmetic*. It is working with sagittal joint, so that the student finds a way to get two pairs of sets with the respective domain and range to the third pair of sets with domain and range which represents the composition

- Third activity; *Functions and their graphs.* In this work the graphs of the composition of functions and how they are modified by exchanging the order of the composition; together with the simple handling of tables and reading graphs.

- Fourth activity; *The composition of functions* $f \circ g(x)$ *and algebra*. This is the only activity that students develop individually and corresponds to the subject-algorithmic algebraic operation.

Finally the information generated for the four sequences of all teams and students is reviewed, noting regularities, differences, successes, failures and general comments of the teams, to conclude at the end of school representations on the issue of composition of functions are held in various sources and analyze the level of understanding shown by the students through the guidance of the various activities designed.

Introducción

Nuestro interés en este trabajo de investigación se centra en la enseñanza de la composición de funciones a nivel bachillerato y a la parte *didáctica*[1] de las matemáticas como la búsqueda de técnicas y métodos para mejorar la enseñanza definiendo las pautas para conseguir que los conocimientos lleguen de una forma más eficaz a los educados.

Partiendo de la lectura de investigadores en Matemática Educativa como (Duval, 1993; 1999; 2006) sobre los contextos de representación matemática y la integración de contextos de (Castañeda, González y Molina, 2013), así como el estudio sobre funciones de García y Serrano (2000), Castañeda, González y Molina (2013), y Guzmán (1998). Nos dimos a la tarea de diseñar una secuencia didáctica que aportará variedad en la forma de representación de la composición de funciones, considerando varios elementos matemáticos para cada una de las actividades.

El desarrollo de nuestro trabajo se basa en cinco capítulos.

En el capítulo uno se menciona la problemática observada en los estudiantes de nivel bachillerato para la comprensión del concepto de composición de funciones, así como la dificultad en el manejo algorítmico de este tema. El marco conceptual basado en los principales autores como (Duval, 1993; 1999; 2006), (Castañeda, González y Molina, 2013), García y Serrano (2000), Castañeda, González y Molina (2013), y Guzmán (1998). Y los propósitos generales de este trabajo de investigación.

El capítulo dos abarca una recopilación y análisis de información sobre la enseñanza de la composición de funciones en medios escritos y de internet. El hecho de haber incluido referencias encontradas en internet y en videos educativos de YouTube, se debe al hecho de estudiar los medios a los que comúnmente acceden los jóvenes alumnos de bachillerato para poder resolver sus dudas escolares, fuera del ambiente escolar. Para esta revisión consideramos libros y enciclopedias de nivel bachillerato. Las cuatro primeras ligas mostradas por el buscador *Google*, para la composición de funciones tanto en el idioma

[1] http://definicion.de/didactica/

español, como en el idioma inglés. Por último revisamos los primeros cuatro videos mostrados para la enseñanza de la composición de funciones en *YouTube* tanto en español como en inglés. Todas éstas referencias son revisadas bajo una metodología que consta de cinco ejes principales de análisis.

El capítulo tres corresponde a nuestra secuencia didáctica. La muestra de cada una de las cuatro actividades didácticas trabajadas, junto con un análisis de la intencionalidad académica de cada ejercicio.

La primera actividad trabaja bajo el esquema de una lectura sobre un tema biológico (la cadena alimentaria), de tal manera que se intenta que el estudiante construya de manera preliminar o intuitiva las relaciones implícitas que hay en la composición de funciones a partir de un problema de contexto real no estándar.

La segunda actividad corresponde al trabajo de la aritmética y los conjuntos. A través de cuatro ejercicios con conjuntos sagitales se intenta que los estudiantes encuentren la relación que existe entre ellos; de tal manera que dos pares de conjuntos generan el dominio y la imagen del tercer conjunto que es la composición. Para ello no se hace uso de recursos como las fórmulas o ecuaciones, si no sólo de flechas entre los elementos de los conjuntos para indicar que elemento del dominio va a dar a que elemento de la imagen.

La tercera actividad está formada por tres ejercicios base; en el primer ejercicio se intenta que los estudiantes logren generar analogías para determinar ¿cuál es la gráfica composición $f(g(x))$ y cuál de la composición $g(f(x))$? a partir de sólo conocer las gráficas $f(x)$ y $g(x)$; el segundo ejercicio corresponde al manejo de tablas para generar la composición de funciones al conocer sólo los valores numéricos de $f(x)$ y $g(x)$; el tercer ejercicio trabaja con las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, para que el estudiante a través de la lectura gráfica de las coordenadas puedan formar las gráficas composición $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

La cuarta actividad corresponde a dos ejercicios básicos. El primer ejercicio es encontrar dos funciones que den origen a la función compuesta mostrada. Mientras que la segunda actividad corresponde a resolver ejercicios algebraicos de composición de funciones.

El capítulo cuatro es la recopilación de la información de un grupo de Matemáticas IV de bachillerato en la resolución de la secuencia didáctica. Junto con un análisis de la información vertida por los estudiantes en sus respuestas. Para cada actividad las regularidades y diferencias en las respuestas, las estrategias de solución y las respuestas correctas o incorrectas dependen de la actividad misma que se está analizando.

El quinto capítulo corresponde a las conclusiones surgidas de este trabajo.

Capítulo 1. La problematización

En el presente capítulo, se plantea las consideraciones generales que dieron origen a una serie de actividades didácticas para que los estudiantes de nivel bachillerato desarrollen la comprensión del concepto de composición de funciones, así como un dominio algorítmico. Se plantea en forma general las actividades a resolver por parte del estudiante, su contexto y las dificultades que este tema representa para los estudiantes. Se describe el diseño de las actividades, las cuales están fundamentadas en los contextos de representación matemática (Duval, 1993; 1998) y la integración de contextos (Castañeda, González y Molina, 2013). A partir de estos referentes se diseñó una actividad introductora sobre el tema de *la cadena alimentaria,* el cual es utilizada como la estrategia inicial para presentar el tema de composición de funciones.

Antecedentes

El contexto donde se desarrolla esta investigación en la *didáctica de las matemáticas*, entendida como *la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio –o procesos didácticos- de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.) que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar matemáticas* (Chevallard, Bosh y Gascón, 1997). Esta área de conocimiento se propone analizar, tanto los procesos didácticos que se producen en una clase de matemáticas, como los que se producen fuera de ella; esto implica reconocer la complejidad del proceso educativo asumiendo los procesos de los estudiantes tanto de manera individual como colectiva. Consideremos que cuando los alumnos estudian fuera de clase suelen tener un referente (padres, amigos, internet) que oriente dicho estudio. En una clase de matemáticas se presenta un proceso didáctico donde participan los alumnos y el profesor atendiendo un esquema de enseñanza-aprendizaje. Cuando el alumno estudia fuera de clase, no habrá clase, ni profesor, pero si proceso didáctico. Por ejemplo cuando consulta referencias en internet. Así entonces, los procesos didácticos que desarrollan los alumnos fuera de clase son subprocesos del proceso enseñanza-aprendizaje que conduce el profesor en el contexto escolar. Siendo estos subprocesos un apoyo de gran valor para hacer avanzar el proceso didáctico que dirige el profesor.

Descripción de una problemática

El estudio de Guzmán (1998) reporta la fragilidad en el manejo conceptual que logran los alumnos en relación al concepto de función, particularmente a la falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; consecuencia de la enseñanza recibida por los estudiantes, y menciona que los estudiantes están poco familiarizados en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico.

Al respecto, García y Serrano (2000) señalan que no existe coherencia entre la definición formal y la definición informal que proponen los profesores; muestran una fijación frecuente cuando interpretan funciones; identifican la funcionalidad en ejemplos estándares, pero en situaciones funcionales complejas no pueden identificarla; presentan serias dificultades para construir e identificar funciones en situaciones del mundo real.

En este mismo sentido De la Rosa, (2001) menciona que el paso de la representación algebraica a la gráfica es básicamente una codificación de información, los estudiantes localizan coordenadas resultado de la evaluación de la función, los puntos se unen para formar un segmento, esto produce dificultades y errores al considerar una representación incompleta de la función a través del uso del punteo, que además tiene implícito el problema del paso de lo discreto a lo continuo (Duval, 1988).

La gráfica de las funciones es parte de la currículo en los niveles medio básico y medio superior, pero el uso e interpretación que los estudiantes hacen de la gráfica en sí misma enfrenta problemas que se observan incluso en los niveles universitarios (Schoenfeld, 1989), esto muestra la fragilidad con la que se estudia el concepto de función, y las problemáticas que enfrentan los estudiantes con el actual enfoque de enseñanza.

De acuerdo con Castañeda, González y Molina (2013), la gráfica contiene mucha información de la función, es un objeto que se mira en forma completa, que posee simultáneamente la medida del cambio y el comportamiento de la medida, lo que ofrece un escenario propicio para el análisis de los comportamientos local y global que incluso se pueden llevar hasta profundas relaciones analíticas. Las situaciones de estudio que se desprenden en esta perspectiva destacan las capacidades para anticipar efectos gráficos, comparación de gráficas y relaciones de rapidez, la simulación de comportamientos gráficos, operaciones con funciones en un contexto gráfico.

De acuerdo con Azcárate y Deulofe (1990) la gráfica es una representación que se enlaza con otras representaciones (que aparecen de forma secuencial) de dependencia entre variables, estos autores destacan que el manejo de las gráficas antecede al de fórmulas o ecuaciones, aunque se argumenta que ambos tipos de representación tienen alto grado de abstracción y por tanto más difíciles de interpretar. Por lo anterior es indispensable desarrollar en los estudiantes la habilidad para observar con detalle los fenómenos que le rodean. De acuerdo con Duval (1998) se aprende en la medida que se abstrae el objeto en este caso (el concepto de función) de sus representaciones, proceso mediante el cual es importante la adquisición de representaciones semióticas y el libre tránsito entre ellas.

Para afrontar esta problemática, los diversos autores proponen:

a. Guzmán revela que para favorecer el aprendizaje de las funciones es fundamental que los estudiantes lleguen a articular diferentes representaciones; por lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes.

b. Actualmente se considera importante, en la enseñanza de las matemáticas, no sólo conocer los distintos representantes del objeto matemático sino también la posibilidad de establecer relaciones entre ellos, considerándose, en el presente caso, las representaciones gráficas y algebraicas involucradas en el proceso de graficación. (Acuña, 2001)

c. El lenguaje natural tendría que tener una mayor presencia en las clases de matemáticas, tanto de parte del profesor como de los alumnos, para lo cuál debería estar garantizado el espacio para que los alumnos puedan expresarse. Además está a la vista que en matemáticas es necesario utilizar con frecuencia otras formas de expresión: figuras geométricas o no, tablas, grafos, diagramas, gráficos cartesianos, fórmulas y otras escrituras simbólicas. (Guzmán, 1998)

d. Para que el aprendizaje de un concepto matemático sea efectivo, se debe propiciar en el estudiante la creación de registros de representación, el tratamiento de conceptos en un registro y la conversión entre diferentes registros de representación semiótica; la aprehensión de un concepto se dará cuando el estudiante pueda tratarlo en al menos dos registros diferentes y pueda convertirlo de un registro a otro (Flores, 2001)

Marco Conceptual

La resolución de problemas se concibe como un eje en el desarrollo de las matemáticas, ya que los conocimientos matemáticos han surgido de la necesidad de resolver diversos problemas reales (Lasalle, 2005). Si asumimos que las matemáticas deben ser útiles para las personas y que su estudio debe basarse en responder a situaciones y problemas interesantes, significativas debemos proponer un cambio en la actual forma y estructura didáctica, por lo que la resolución de problemas debe ser un punto de arranque y elemento base que caracterice a todo el proceso de enseñanza de la matemática.

El enfoque de resolución de problemas no sólo es un modelo de enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. En este sentido la clase de matemáticas debe proporcionar a los estudiantes frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas. De acuerdo a Godino (2003) en la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes pueden adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que serán útiles fuera de la clase de matemáticas.

La resolución de problemas es una parte fundamental de cualquier aprendizaje matemático, por lo que no debe ser considerado como una actividad aislada del currículo matemático y en la clase de matemáticas. Así, la resolución de problemas debe articularse en el proceso de estudio de todos los temas del currículo matemático, para permitir la integración tanto de experiencias familiares de los estudiantes así como aplicaciones y problemáticas a otras áreas. De esta forma, los problemas aparecen primero para favorecer la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos y situaciones.

En este sentido Freudenthal (1983) sostiene que las matemáticas no han de ser un privilegio de los científicos y matemáticos y no deberían ser inhibidas en la educación, ya que los alumnos deben aprender a matematizar. De Lange, (1987) complementa esta idea, mencionando que la matematización es una actividad organizativa y estructurada mediante la cual los estudiantes utilizan conocimientos adquiridos para descubrir y formular regularidades, relaciones y estructuras desconocidas.

De acuerdo a este autor, en los procesos de matematización y modelización destacan diversos componentes, pero se pueden establecer los siguientes momentos:

1. Identificar matemáticas en un contexto determinado.
2. Esquematizar.
3. Formular y visualizar un problema de distintas maneras.
4. Descubrir relaciones involucradas.
5. Reconocer aspectos comunes en distintas situaciones.
6. Transferir un modelo del mundo real hacia un problema matemático.
7. Transferir un problema del mundo real hacia un modelo matemático.

Estos momentos anteriores se denominan *actividades horizontales* de la matematización, siendo *actividades verticales* las siguientes:

1. Representar una relación mediante una fórmula.
2. Refinar y ajustar modelos.
3. Usar diferentes modelos.
4. Combinar e integrar modelos.
5. Formular un nuevo concepto matemático.

6. Generalizar.

La actividad de matematización está estrechamente ligada con la reflexión y sólo puede ser eficiente si va acompañada de una enseñanza interactiva, es decir: con la oportunidad de discutir, consultar y cooperar en un ambiente de trabajo colaborativo. En este contexto podemos afirmar que es más importante el proceso mental seguido que los modelos obtenidos. De Lange (1987) destaca que en muchos problemas realistas el refinamiento y la prueba son cruciales en el proceso de formulación del problema, por tanto se deben tomar decisiones no-matemáticas, comparaciones o evaluaciones, priorizando herramientas matemáticas antes que la producción de una respuesta numérica.

Así, dos características importantes de este modelo de aprendizaje son:

1. Enfatizar en la experiencia concreta para validar y probar conceptos abstractos a tratar.

2. El principio de retroalimentación del proceso.

En este enfoque no se tiene que presentar las matemáticas como un producto preparado. Los estudiantes tienen que *reinventar* las matemáticas a través de conjeturas, hipótesis y modelos. Entonces, los puntos para una matemática realista orientada son:

1. Recrear, reinventar conceptos matemáticos basándose en nociones intuitivas.

2. Continuar el proceso a través de diversos niveles de concreción y abstracción

3. Guiar el programa educativo según la historia de las matemáticas.

4. Estar enmarcadas en contextos de la realidad.

Por esta razón, en este modelo es preciso reconocer el carácter funcional de las matemáticas aplicadas, donde es preciso ofrecer respuestas y definir metas sobre la actividad matemática, en este sentido es congruente la perspectiva de Pollak (1976) que define las matemáticas aplicadas como:

1. Matemáticas aplicadas significa matemáticas clásicas aplicadas.

2. Matemáticas aplicadas son las que tienen una aplicación significativa.

3. Matemáticas aplicadas significa tomar como punto de partida el mundo real u otros campos de la ciencia, realizar un modelo matemático y hacer matemáticas en el sí del propio modelo y finalmente aplicar e interpretar el resultado.

4. Matemáticas aplicadas es lo que hacen las personas que saben aplicar las matemáticas.

Las aplicaciones en el contexto educativo no deberían reservarse para después de la enseñanza de las matemáticas, como evaluación descontextualizada fuera del proceso de construcción de conocimiento, sino que tendrían que utilizarse como contexto natural para aprender las ideas matemáticas.

Un enfoque sobre esta perspectiva didáctica es a través de la modelización matemática. Tal como lo señala Niss (1989); la modelización matemática es el arte de aplicar las matemáticas a situaciones de la vida real. Al respecto observamos que esta definición incorpora de forma implícita el carácter heurístico de la de modelización, el cual es reconocido como la propuesta de De Lange (1987) quien señala que la reflexión es una componente fundamental al proceso heurístico que se desarrolla en un contexto de reflexión-interacción sobre el modelo-situación.

Asumiremos la definición establecida por Niss, (1989) que señala que un modelo es una terna (A,M,f) donde A representa una situación del mundo real que se desea analizar y estudiar, M un conjunto de objetos y relaciones matemáticas y f una correspondencia que permite relacionar elementos de A con elementos de M, así la modelización es el conjunto de habilidades y técnicas para plasmar la matematización y trabajar sobre el modelo para establecer resultados sobre la situación estudiada, y por matematización la transformación en términos matemáticos de la realidad; es decir: la matematización es la primera fase del ciclo de la modelización.

La intuición

Fischbein (1982) afirma que en la matemática existen dos tipos de conocimientos, aquellos que son autoevidentes y los que están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. A los primeros se les denomina intuitivos; y a los segundos, lógicos o lógicamente basados. Fischbein, señala que el término *intuición* resulta muy ambiguo y muy abierto, incluso cuando es utilizado en investigaciones psicológicas por considerarlo un término primitivo, indefinible y autoevidente, de hecho, como señala Fischbein el término intuición se maneja comúnmente como sinónimo de sentido común.

De acuerdo con Fishbein (1982) la intuición es traducible en una acción significativa desde el punto de vista del comportamiento, esto quiere decir que la intuición de un concepto lleva al individuo a asociarla con una acción. Uno de los ejemplos que da es la operación de la división, que intuitivamente lleva al estudiante a subdividir un conjunto (continuo, como un segmento, o discreto, como una colección) en subconjuntos. Por tanto se considera que la intuición es un elemento importante en el pensamiento matemático del individuo y propone la siguiente hipótesis, las estructuras intuitivas son componentes esenciales de cada forma de comprensión activa y del pensamiento productivo.

Desarrollo de una propuesta

De acuerdo a la experiencia personal como docente de matemáticas, el tema de funciones en el nivel bachillerato presenta dificultades para su comprensión y manejo, uno de los principales es referido a la notación, en particular la expresión $f(x)$, ya que el estudiante suele considerar que la letra f y la x como un producto y no como una relación de variables. Se ha observado también la dificultad para determinación del dominio de una función; ya que esta consigna implica el dominio de los números reales, manejo algebraico y operatorio, así como otros conceptos como intervalo, infinito, imagen. También existen dificultades en la transferencia de información matemática entre la forma verbal y escrita, pues implica reconocer y asignar símbolos a variables involucradas.

Pero los problemas con la notación y relación entre variables es mayor cuando se trata de la composición de funciones; pues la notación $f \circ g(x) = f(g(x))$, en donde ahora una función depende de otra función, requiere integrar un operación con funciones, lo que supone un manejo de objetos que tienen una carga importante de información, propiedades, restricciones de dominio etcétera.

En la experiencia personal como profesora en la Preparatoria Melchor Ocampo, se ha observado de forma reiterada este tipo de dificultades; no sólo conceptual sino también operativa, pero a su vez, estos problemas se siguen presentando en cursos mas avanzados, como por ejemplo en el estudio de la regla de la cadena y el método de integración por sustitución dentro de los cursos de cálculo diferencial y cálculo integral respectivamente. Las dificultades para operar y para reconocer un proceso recursivo generan nuevas problemáticas, particularmente en los intervalos de dominio e imagen y en el cálculo de la derivada.

Por esta razón, se platea este trabajo de investigación que propone distintas actividades de aprendizaje para favorecer un ambiente didáctico en el que los estudiantes reconozcan las variables involucradas en una composición de funciones, fortalecer la idea de recursividad, así como el manejo de dominios e imagen, fortaleciendo aspectos de compresión y operatividad .

Supuestos en la investigación

Para realizar las actividades se partió de ciertos supuestos tanto para formular las actividades como para el desarrollo de las mismos

- La enseñanza basada en diversidad de representaciones sobre un tópico matemático, conlleva a una mejor comprensión del tema. (Duval, 1998).
- El trabajo entre pares apoya la habilidad de comunicación, así como el trabajo colaborativo, en donde ambas partes se apoyan y se ven beneficiadas entre sí. Incluso para algunos estudiantes el trabajar de ésta manera implica el sentir menos estrés, que sí tiene el estudiante que resolver ejercicios de manera individual.

Propósito de la investigación

Formular una actividad matemática experimental sobre composición de funciones, dirigida a estudiantes de cuarto semestre de bachillerato, basado en la integración del múltiples representaciones y a través del trabajo colaborativo entre pares, con el propósito de darle sentido y significado al concepto de composición de funciones.

Propósitos particulares de la investigación

- Diseñar una actividad didáctica que involucre contextos reales sobre el tema de composición de funciones.
- Diversificar la forma en cómo se enseña usualmente la composición de funciones, con el objetivo de lograr en los estudiantes un mejor aprendizaje del tema.
- Mostrar a los estudiantes una analogía para el estudio del tema de composición de funciones $f \circ g(x)$

Capítulo 2: La composición de funciones $f \circ g(x)$ y su enseñanza

En este capítulo presentamos un análisis de la forma en que se presenta la composición de funciones en diferentes fuentes de información: libros de consulta, enciclopedias, internet y Youtube. El propósito de esta revisión es observar cómo se presenta, justifica y explica la composición de funciones, reconociendo en ello técnicas, recursos empleados, tipos de ejercicios, los enfoques conceptual y algorítmico, así como sus aplicaciones.

La metodología de análisis consistió en dos fases, la primera fue identificar la fuente, identificar la sección que desarrolla el tema de composición de funciones y finalmente se extrajo la información de las distintas fuentes; libros, enciclopedias, internet o videos. En la segunda fase se realizó un análisis sobre su estructura en donde incluimos 5 ejes temáticos principales:

1. Definición de la composición de funciones y/o sus propiedades.
2. Tipo de ejemplos o ejercicios que se utilizan para introducir el tema de composición de funciones, considerando la siguiente clasificación: aritméticos, geométricos, algebraicos, o aplicaciones en contextos reales.
3. Ejercicios propuestos.
4. Orientaciones, guías y hojas de respuestas.
5. Descripción del enfoque preponderante de su enseñanza: algorítmica, conceptual o ambas.

2.1. Definiciones y propiedades sobre la composición de funciones en libros y enciclopedias

Definición[2] # 1

Componer dos funciones es hacer actuar una de ellas sobre el resultado de la otra:
$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$ o bien $x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$
Se las designa, respectivamente, por $g \circ f$ y $f \circ g$ y se lee *"f* compuesta con *g*" y "*g* compuesta con *f"*, respectivamente. Es decir:
$(g \circ f)(x)=g(f(x))$ $(f \circ g)(x)=f(g(x))$

Definición[3] # 2

La siguiente definición fue obtenida de la enciclopedia Nova, antes de mencionar la definición, trabaja el tema con un ejemplo sobre el proceso de alimentación-masticación, como se muestra en la siguiente sección (2.2) y después escribe en un recuadro lo que sería la conclusión o definición de la composición de funciones, que escribimos a continuación:

Una función *f* es compuesta si la forman dos o más funciones.
La notación $g(h(x))$ indica la función compuesta formada por las funciones ***h*** y ***g***, tales que ***g*** actúa después de ***h***. También se usa la notación $g \circ h$ y se lee ***h*** compuesta de ***g***.

[2] Galdós, L. (s.f.). *Consultor Matemático, Introducción al Cálculo IV* (1ra. ed., Vols. 1-4). Madrid: Cultura, S. A.1071.
[3] Ardila, V. H. (Ed.). (1998). *Enciclopedia Nova Matemática, tomo 6* (1era. ed., Vols. 1-6). Bogotá: Voluntad S.A. 72-75.

Definición[4] # 3

En el libro de Stewart, el tema anterior a la composición de funciones es la combinación entre dos funciones por medio de la suma, resta, multiplicación, y división o cociente. Antes de presentar la definición (que a continuación se transcribirá); comienza el tema señalando que hay otras maneras de combinar dos funciones para obtener una nueva. A continuación se transcribe la explicación para fines ilustrativos.

Suponga que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Como *y* es una función de *u* y, a su vez, *u* es una función de *x*, se concluye que, finalmente, *y* es una función de *x*.

Calculamos esto por sustitución:

$$y = f(u) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

El procedimiento se llama *composición* porque la nueva función se *compone* de las dos funciones dadas, *f* y *g*.

En general, dadas dos funciones cualesquiera *f* y *g*, partimos de un número *x* en el dominio de *g* y encontramos su imagen *g*(*x*). Si este número *g*(*x*) está en el dominio de *f*, entonces podemos calcular el valor de *f* (*g*(*x*)). El resultado es una nueva función *h*(*x*)=*f* (*g* (*x*)) obtenida al sustituir *g* en *f*. Ésta se conoce como la *composición* (o la *compuesta*) de *f* y *g* y se denota con $f \circ g$ (*"f círculo g"*).

> **Definición** Dadas dos funciones *f* y *g*, la función **compuesta** $f \circ g$ (también llamada la **composición** de *f* y *g*) está definida por
>
> $$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los *x* en el dominio de *g* tales que *g*(*x*) esté en el dominio de *f*. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que *g* (*x*) y *f* (*g*(*x*)) lo están. La mejor manera de representar $f \circ g$ es con un diagrama de máquinas o un

[4] Stewart, J. (1999). *Cálculo diferencial e integral*. México: International Thomson Editores, 36-41.

diagrama de flechas. Se muestran en el libro ambos esquemas y se continúa resolviendo ejercicio. La descripción de los ejemplos mostrados en el libro se realizan en la sección siguiente (2.2).

Definición[5] # 4

Si f y g son funciones reales cuyo dominio es el conjunto Dom_f y Dom_g respectivamente, entonces $f \circ g$ (también conocida como composición de funciones) es una función cuyo dominio es el conjunto que tiene todos los elementos de Dom_g tal que *g(x)* está en el Dom_f , y con la siguiente regla de correspondencia:

$$[f \circ g](x) = f\big(g(x)\big)$$

Y el libro continúa con un ejemplo de coordenadas para *f(x)* y *g(x),* descritas en la siguiente sección (2.2).

Propiedades de la composición de funciones:

1. Asociativa: Dadas 3 funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ se cumple que: $f \circ \big(g \circ h(x)\big) = (f \circ g) \circ h(x)$
2. No es conmutativa: $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$
3. El elemento neutro es la función identidad *i(x)=x:* $f \circ i(x) = i \circ f(x) = f(x)$
4. Elemento inverso: Si *f(x),* tiene su función inversa $f(x)^{-1}$, se cumple que: $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$, en palabras, la composición de una función con su propia inversa, en caso de que ésta exista, da como resultado la función identidad o la variable independiente con la que se esté trabajando.

[5] Ibáñez, P. García, G. (2012). *Matemáticas IV, con enfoque en competencias* (2da. ed). México: CENGAGE Learning, 42-49.

5. Si f(x) y g(x) es biyectiva y tienen inversa cumplen con la propiedad $\left(f \circ g(x)\right)^{-1} = g(x)^{-1} \circ f(x)^{-1}$

2.2. La enseñanza de la composición de funciones $\boldsymbol{f \circ g(x)}$ en libros y enciclopedias a nivel Bachillerato

Consultor Matemático, Introducción al Cálculo

Después de la definición de composición de funciones, presenta un ejemplo y después continúa con la inversa de una función. El ejemplo es el siguiente:

Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 + 1$ y $g(x) = sen(x)$

$$(f \circ g)(x)\textit{=f(g(x))=f(senx)=}3sen^2x + 1$$

$$(g \circ f)(x)\textit{=g(f(x))=g(}3x^2 + 1) = sen(3x^2 + 1)$$

Observa que, en general, $g \circ f$ y $f \circ g$ son funciones diferentes.

Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 + 1$ y $g(x) = sen(x)$

$$(f \circ g)(x)\textit{=f(g(x))=f(senx)=}3sen^2x + 1$$

$$(g \circ f)(x)\textit{=g(f(x))=g(}3x^2 + 1) = sen(3x^2 + 1)$$

Observa que, en general, $g \circ f$ y $f \circ g$ son funciones dierentes.

La enciclopedia muestra de manera gráfica ejemplos de la simetría con respecto a la recta *y=x* de una función con su inversa.

Algunos de los ejercicios propuestos para que resuelva el lector son los siguientes (todos ellos incluyen respuestas) :

(2) Consideremos las funciones polinómicas f y g dadas por $f(x) = x^2 + 1$, *y* $g(x) = x^3$ *, se pide:*

d) $f \circ g$ e) $g \circ f$

(3) Estudiar los dominios de las funciones del ejercicio anterior.

(4) Se consideran las funciones f y g definidas por $f(x) = x^2$, *y* $g(x) = \frac{1}{x}$ *, se pide:*

a) $f \circ f$ b) $g \circ g$ c) $f \circ g$ d) $g \circ f$

(5) Estudia los dominios del ejercicio 4.

(9) Dadas las funciones f(x)=x+1, y g(x)=2x+1, se pide:

a) $(f \circ g)(1)$; $(g \circ f)(-1)$; $(f \circ g)(2)$; $(g \circ f)(-2)$

b) $(f \circ g)(x)$

c) Dominio de g ∘ f

El tema de composición de funciones corresponde al *capítulo XI "Funciones reales*", *sección 52 "Funciones Reales de variable real"* y le anteceden al tema: Definición y ejemplos de función real de variable real, dominio de una función con ejemplos, operaciones con funciones con un ejemplo, funciones crecientes y decrecientes con ejemplos. Los ejemplos son preponderantemente algebraicos y muestran las gráficas correspondientes, sin realizar las tablas respectivas. Salvo cuando se define qué es una función real, en donde sí se escriben funciones con valores numéricos; por ejemplo *f(-1)=4,* para la expresión $f(x) = x^2 - 3x$, y otro ejemplo más; para los demás temas se maneja sólo en forma algebraica y muestran posteriormente la gráfica del ejemplo.

Enciclopedia Nova Matemática (tomo 6)

De la definición # 2 (*Enciclopedia Nova*), se reproduce el texto y los ejemplos para fines ilustrativos de cómo se presenta la composición de funciones en la enciclopedia didáctica.

Las diferentes funciones que se cumplen en la nutrición pueden ser ilustradas matemáticamente por medio de un esquema. La ingestión lleva el **alimento** a la boca. Éste se transforma en **bolo alimenticio** por medio de la salivación y de la masticación. Al pasar el bolo por el esófago y llegar al estómago se convierte por acción del jugo gástrico en **quimo**. Esta sustancia o quimo sufre la acción de los jugos pancreáticos, intestinal y la bilis que lo convierte en una sustancia casi líquida, llamada **quilo**. En el intestino se produce la función de absorción y las materias que no son absorbidas constituyen la **materia fecal.**

La función de la digestión es el resultado de la composición de varias funciones tales que una actúa después de la otra. Observa el esquema de la parte izquierda:

1. La composición de funciones de la nutrición, ¿es conmutativa? ¿Es posible que primeo se produzca la deglución y luego la masticación?.

2. Si ***m*** representa la función masticación y ***m(a)*** es la imagen del alimento, luego de aplicársele la función ***m,*** ¿ a qué es igual ***m(a)***? ¿Qué es $d_1(b)$?

3. Si $\boldsymbol{f}$ o $\boldsymbol{g}$ $(\boldsymbol{x})$ significa que la función $\boldsymbol{f}$ actúa después de la función $\boldsymbol{g}$, es decir primero $\boldsymbol{g}$ se transforma a $\boldsymbol{x}$ y luego $\boldsymbol{f}$ actúa sobre la imagen de $\boldsymbol{x}$ producida por $\boldsymbol{g}$, transformándola. Representa las funciones digestivas que componen la nutrición.

Consideremos la función $f(x) = (3x + 5)^3$ y determinemos la imagen de la función en x=-1.

A la abscisa -1 se le asigna 2, mediante la función lineal 3x+5, y a 2 se le asigna 8 por la función de grado 3 $(3x + 5)^3$.

Por lo tanto, a -1 se le asigna 8 mediante la función f(x) compuesta por una función lineal y una cúbica.

Observa el esquema:

$x \rightarrow 3x+5 \rightarrow (3x+5)^3$

$-1 \rightarrow 3(-1)+5 \rightarrow (3(-1)+5)^3$

$-1 \rightarrow 2 \rightarrow 8$

Por consiguiente, a cualquier abscisa x, se le asigna su ordenada por las dos funciones mencionadas:

$x \rightarrow h(x) \rightarrow g(h(x))$

Si la función lineal la notamos por ***h*** y la función cúbica por *g*, a cualquier par de abscisas x le corresponde la ordenada g (h (x)).

Así que: g (h (-1)) = + 8

$-1 \rightarrow 2 \rightarrow 8$

La función $f(x) = (3x+5)^3$ es la compuesta de las funciones: ***h*** y ***g***.

Se da el resumen o definición de la sección 1.1 (Definición 2) y el siguiente ejemplo

Ejemplo

Calcular f(3) en la función $f(x) = 2^{x^2-x}$

Solución

Remplazamos a x por 3

$f(3) = 2^{9-3} = 2^6 = 64$, entonces la imagen de 3 es 64. Observa el proceso que hemos empleado para obtener 64.

$3 \rightarrow 3^2 - 3 \rightarrow 2^{3^2-3} = 64$

$3 \rightarrow 6 \rightarrow 2^6 = 64$

Por la función de segundo grado cuyo polinomio es $x^2 - x$ el valor 3, se transforma en el valor 6 y por la función exponencial, 3 se transforma en $2^6 = 64$.

A cualquier par de la función $f(x) = 2^{x^2-x}$, de abscisa x, se le asigna su respectiva ordenada mediante la función compuesta por las funciones de segundo grado ***h*** y exponencial ***g***, y que notamos g (h (x)) o $g \circ h$

Observemos el esquema

$x \rightarrow \; x^2 - x \; \rightarrow \; 2^{x^2-x}$

$x \rightarrow \; h(x) \; \rightarrow g\,(h\,(x))$

Por consiguiente *g (h (3))*= 64

La función $f(x) = 2^{x^2-x}$ es compuesta por las funciones:

$$h(x) = x^2 - x \quad \text{y} \quad g(x) = 2^{h(x)}$$

La presentación del tema se hace primero a través de un ejemplo de la vida real, el caso del la ingesta de alimentos en nuestro organismo y después por medio de una descripción detallada de cómo se resuelve un ejemplo de tipo exponencial. Se transcriben sólo algunos ejercicios propuestos, con el objetivo de mostrar la línea de enseñanza de ésta enciclopedia con enfoque didáctico-pedagógico.

4. Con base en las funciones ***h*** y ***g*** del ejemplo, calcula:

a. $g \circ h\ (1)$ **d.** $g \circ h$ **g.** $h\ (h(4))$ **h.** $g\ \left(h\left(\sqrt{2}\right)\right)$ **i.** $g \circ h\left(-\frac{1}{3}\right)$

5. Identifica las funciones que forman la función compuesta según el esquema correspondiente:

a. $x \xrightarrow{f} 2x \xrightarrow{g} 4x^2$ **f.** $x \xrightarrow{f} 3^x \xrightarrow{g} log_3 x$ **i.** $x \xrightarrow{f} sen\, x \xrightarrow{g} sen^2\, x$

6. Haz un esquema que muestre el orden en que las funciones asignan el elemento correspondiente:

b. $f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2$ **g.** $f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ **h.** $f(x) = log\left(sen\ \frac{x}{4}\right)$

7. Dadas las funciones:

$g(x) = x^2$ $\quad h(x) = \sqrt{x}$ $\quad i(x) = sen\, x$ $\quad j(x) = \log x$ $\quad s(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Determina:

b. $g \circ j\ (x)$ **c.** $h \circ s\ (x)$ **i.** $i \circ g\ (x)$

Como se puede observar el texto asume un enfoque pedagógico, incorpora ejemplos de la vida cotidiana para que los conceptos sean más significativos para quien los estudia, así como maneja colores en sus ilustraciones y tipografía, lo que la hace una enciclopedia atractiva visualmente.

El tema de composición de funciones está en el *Tomo 6, Proyecto 1: La función de las funciones, la Jornada 13: Funciones compuestas.* Antes de la jornada 13, la enciclopedia trabaja con una serie de funciones como: lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, y trigonométricas.

Cálculo diferencial e integral (James Stewart)

Después de definir el concepto de composición de funciones e ilustrarlo con dos diagramas, uno de máquinas, y el otro de flechas, el libro continúa dando un ejemplo numerado éste como el *ejemplo 7;* pues el tema de composición de funciones está inmerso en la *sección 1.2* que corresponde a *Funciones nuevas a partir de funciones antiguas* y después de describir varios tipos de funciones da 5 ejemplos previos sobre transformaciones de funciones (desplazamientos verticales y horizontales, alargamientos y reflexiones verticales y horizontales).

Se transcribe los ejemplos, para fines ilustrativos

Ejemplo 7 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$

Solución Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-3) = (x-3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Nota con base en el ejemplo 7 puede ver que, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, **la notación $\boldsymbol{f \circ g}$ significa que primero se aplica la función *g* y luego *f***. En el ejemplo 7, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y *a continuación* eleva al cuadrado; $g \circ f$ en la función que *en primero* eleva al cuadrado y *luego* resta 3.

Ejemplo 8 Si $f(x) = \sqrt{2-x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre $f \circ g$ y su dominio.

Solución $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}\,) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debemos tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ esté definida, debemos tener $2-\sqrt{x} \geq 0$; es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o bien, $x \leq 4$. Por lo tanto, tenemos $0 \leq x \leq 4$, de modo que el dominio $f \circ g$ es el intervalo cerrado [0, 4].

Ejemplo 9 Las gráficas *f* y *g* son las que se ilustran en la figura 27 y $h = f \circ g$. Estime el valor de *h(0.5)*; luego grafique *h*.

Solución A partir de la gráfica de *g*, estimamos que $g(0.5) \approx 0.8$. Entonces, de la gráfica de *f*, vemos que $f(0.8) \approx -1.7$. De este modo,

$$h(0.5) = f(g(0.5)) \approx f(0.8) \approx -1.7$$

De manera semejante, estimamos los valores de *h* en la tabla siguiente:

X	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
g(x)	-1.5	-1.6	-1.3	-0.8	0.0	0.8	1.3	1.6	1.5
h(x)=f(g(x))	1.0	0.7	1.5	1.7	0.0	-1.7	-1.5	-0.7	-1.0

Usamos estos valores para trazar la gráfica de la función compuesta *h* (y muestran la gráfica). Si deseamos una gráfica más exacta, podríamos aplicar este procedimiento a más valores de *x*.

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar primero *h*, a continuación *g* y, luego, *f*, como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f\left(g\big(h(x)\big)\right)$$

Ejemplo 10 Encuentre $f \circ g \circ h$, si $f(x) = x/(x+1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$

Solución

$$(f \circ g \circ h)(x) = f\left(g\big(h(x)\big)\right) = f\big(g(x+3)\big)$$

$$= f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

Hasta ahora hemos usado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en cálculo resulta útil descomponer una función complicada en otras más sencillas, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 11 Dada $F(x) = cos^2(x+9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

Solución como $F(x) = [cos(x+9)]^2$, la fórmula dada para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, por último eleve al cuadrado. De modo que hacemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = cosx \qquad f(x) = x^2$$

Entonces

$$(f \circ g \circ h)(x) = f\left(g\big(h(x)\big)\right) = f\big(g(x+9)\big) = f(\cos(x+9)) = [\cos(x+9)]^2 = F(x)$$

Después de haber resuelto los ejercicios anteriores el libro propone una serie de ejercicios. Sólo se seleccionaron algunos para mostrar tanto la complejidad de las actividades, como su diversidad matemática.

(33-36) Encuentre las funciones $f \circ g, g \circ f, f \circ f$ y $g \circ g$, así como sus dominios

a) (33) $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$

b) (35) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

c) (36) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

(37-38) Encuentre $f \circ g \circ h$

a) (38) $f(x) = \sqrt{x},$ $g(x) = \frac{x}{x-1},$ $h(x) = \sqrt[3]{x}$

(45) Use las gráficas dadas de f y g para evaluar cada expresión, o bien, expliqué porqué no está definida.

(Se muestra en un recuadro cuadriculado , la gráfica de dos funciones distintas) y se pide ejercicios del estilo:

a) $f(g(2))$ c) $(f \circ g)(0)$ f) $(f \circ f)(4)$

El ejercicio siguiente es similar al 45, con otras dos gráficas distintas al ejercicio anterior y se solicita al lector que con los valores numéricos que se le pidieron encontrar, trace una gráfica aproximada de $f \circ g$

(47) Se deja caer una piedra en un lago, que crea una ola circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.

a) Exprese el radio *r* de este círculo como función del tiempo t (en segundos),

b) Si *A* es el área de este círculo como función del radio, encuentre $A \circ r$

Este libro propone una amplia variedad en los ejercicios que incluyen ejercicios algebraicos, gráficos, y en contextos reales. Resuelve de manera previa varios ejemplos, que son guías para conocer el procedimiento. En el Apéndice I presenta las respuestas de los ejercicios impares. Lo que ayuda al lector a verificar si la solución que encontró es la correcta o requiere trabajar más en el tema.

Matemáticas IV, con enfoque en competencias

Definen la composición de funciones como se mencionó en la sección anterior *(2.1)*, para posteriormente resolver como ejemplos los siguientes dos ejercicios:

1. Por ejemplo si tienes las funciones:

$$f(x) = \{(2,4), (3,7), (4,0), (1,5), (6,2)\}$$

$$g(x) = \{(-4,0), (6,8), (4,1), (-7,8), (3,3)\}$$

Calculemos $f \circ g$

Solución:

Observemos que el dominio $f \circ g$ es el siguiente:

A través de un diagrama sagital representan de manera esquemática cómo está *x, g(x)* y el dominio de *f* en 3 conjuntos; el primero es *x* (dados en las coordenadas de *g(x)*), el segundo es *g(x)* (en donde se encuentran las coordenadas de las imágenes de *g(x)*) y por último está el tercer conjunto que es Dom_f, (en donde se encuentran las coordenadas del dominio de *f(x)*).

Para el primer conjunto *"x"*, circulan los valores de 4 y 3, para mostrar su imagen en el segundo conjunto *g(x)* con una flecha que son 1 y 3 respectivamente. Por último las imágenes 1 y 3 de *g(x)* van a dar a 3 y 1 respectivamente en el tercer conjunto Dom_f. Para concluir que $Dom_{f \circ g} = \{3,4\}$.

Si x=3, f(g(3))=f(3)=7

Si x=4, f(g(4))=f(1)=5

Entonces:

$$f \circ g = \{(3,7), (4,5)\}$$

2. Si tenemos las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x + 1$. Halla la composición de las funciones f(x) y g(x).

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 1$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 + 1$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 4$$

En ésta explicación no se hace patente la falta de conmutatividad de la operación de composición de funciones.

La presentación de la composición de funciones, se presenta después de trabajar funciones, dominios, distintas representaciones de éstas y las operaciones aritméticas básicas con funciones (suma, resta, multiplicación y división), el cual se encuentra en el *Bloque I Reconoces y realizas operaciones con distintos tipos de funciones.*

Algunos de los ejercicios propuestos para la composición de funciones son:

En la sección ***"Desarrolla tu competencia"***

(13-21) Dadas las siguientes funciones, realiza las composiciones:

$$f(x) = 2 - x^2 \qquad g(x) = x + 4 \qquad h(x) = \sqrt{x}$$

a) (13) $f \circ g$ b) (14) $g \circ$ □ c) (16) $g \circ g)$ d) (17) $f \circ g \circ h$

e) (18) $2g \circ h$ f) (20) $h \circ f \circ 3g$

(22-24) Expresa las siguientes funciones compuestas como las funciones que la originaron, o sea exprésalas como $\boldsymbol{f \circ g}$

a) (22) $h(x) = \sqrt{x^3}$

(25-27) Expresa las siguientes funciones compuestas como $\boldsymbol{f \circ g \circ h}$

a) (26) $h(x) = x^{x^2}$

(29) si un pájaro vuela a una velocidad de 150 km/h, a una altura de 10 km y pasa directamente sobre una fuente en el instante t = 0

a) Expresa la distancia horizontal *d* que el pájaro ha volado como función de *t*.

b) Expresa la distancia *s* entre el pájaro y la fuente como función de *d*.

c) Aplica la composición de funciones para expresar *s* en función de *t*.

Resumen

La siguiente tabla resume las características de enseñanza mostradas en los libros y enciclopedias seleccionados para el tema de composición de funciones $f \circ g(x)$, considerando los cinco ejes de análisis propuestos al principio del capítulo.

Tabla # 1

Resumen de contenidos mostradas en libros y enciclopedias

Fuente	*Tipos de definiciones o propiedades*	*Tipos de ejemplos*	*Contiene ejercicios a resolver por el lector*	*Presenta respuestas a los ejercicios propuestos*	*Tipo de enfoque (algorítmica o conceptual)*
Consultor Matemático	*Definición, sin énfasis en los dominios respectivos de las funciones. *Si expone las propiedades de: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ (no conmutativa) $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$	Algebraicos. Utiliza algunas gráficas para mostrar la simetría con respecto a la recta *y=x* de las funciones inversas	Sí	Si a todos sus ejercicios propuestos	Algorítmica.
Enciclopedia Nova	*Definición, sin énfasis en los dominios respectivos de las funciones. * Se invita a la reflexión, bajo una pregunta directa sobre la propiedad no conmutativa de la composición de funciones	*Por problemas de aplicación en contextos reales (proceso de ingestión del alimento) * En forma numérica o aritmética	Sí	No	Conceptual
Cálculo diferencial e integral (Stewart, J.)	*Definición * Menciona la propiedad de no conmutativa de composición de funciones	*Algebraicos *Geométricos o gráficos, con ellos incluye los numéricos al manejar tablas y evaluar funciones.	Sí	Sí para los ejercicios impares que propone resuelva el lector.	Conceptual y algorítmica.
Matemáticas IV con enfoque en competencias (Ibáñez, P. Y García, G.)	*Definición *No hace énfasis en las propiedades de la composición de funciones.	*Numéricos o aritméticos, considerando pares de coordenadas con su diagrama sagital. *Algebraicos	Sí	Sólo da la respuesta y el cómo se resuelve el ejercicio a los llamados por el libro “problemas integradores”	Conceptual y algorítmica.

2.3. La enseñanza de la composición de funciones $f \circ g(x)$ en internet en el idioma español

Desde hace varias décadas una de las formas más frecuentes de búsqueda de información por los estudiantes y profesores es internet. Cuando los estudiantes no entienden un tema, buscan ayuda; una de éstas ayudas la encuentran a través de la consulta de páginas de internet, por esta razón fue necesario analizar algunas páginas de internet para observar la forma en que se aborda el tema de composición de funciones, el tipo de ejercicios que enseñan para mostrar la composición de funciones, la forma en cómo se resuelven los ejercicios, qué recursos matemáticos o didácticos son los más utilizados para enseñar o exponer este tema, así como las actividades en general que se proponen. Por esta razón consideramos incluir esta fuente de información, dentro de la revisión de cómo se muestra, explica o enseña el tema de composición de funciones $f \circ g(x)$.

La metodología que se utilizó para esta búsqueda fue a través del buscador *Google*, por lo que será nuestro buscador oficial para el trabajo de investigación de ésta tesis. Dentro de la búsqueda se dividirá esta en dos, las citas en español y las citas en inglés.

Como la información que se encuentra por internet es tan basta, sería imposible por razones de tiempo y espacio que se incluyera toda; por lo que nos abocaremos tan sólo a las cuatro primeras ligas mostradas, considerando que éstas representan la información más vista sobre el tema en el momento en que se buscó, pues la velocidad con la que aumenta la información por internet varía de un día para otro.

Al finalizar la muestra de la información encontrada, se analizará la forma en cómo se enseñanza en cada página el tema de composición de funciones. Para ello utilizaremos los 5 ejes principales trabajados en la sección anterior.

1. Definición de la composición de funciones y/o sus propiedades.

2. Tipo de ejemplos o ejercicios se utilizan para introducir el tema de composición de funciones. Al referirnos a qué tipo de ejercicios se presentan, consideramos la siguiente clasificación: aritméticos, geométricos, algebraicos, o aplicaciones en contextos reales.

3. Ejercicios para realizar

4. Orientaciones, guías y hojas de respuestas.

5. Descripción del enfoque preponderante de su enseñanza: algorítmica, conceptual o ambas

Al realizar la búsqueda en *Google* “composición de funciones” las cuatro primeras respuestas fueron las siguientes:

Considerando la primera respuesta de búsqueda en *Google*, el resultado de la página

http://www.vitutor.com/fun/2/a_4.html es la siguiente:

VITUTOR Inicio

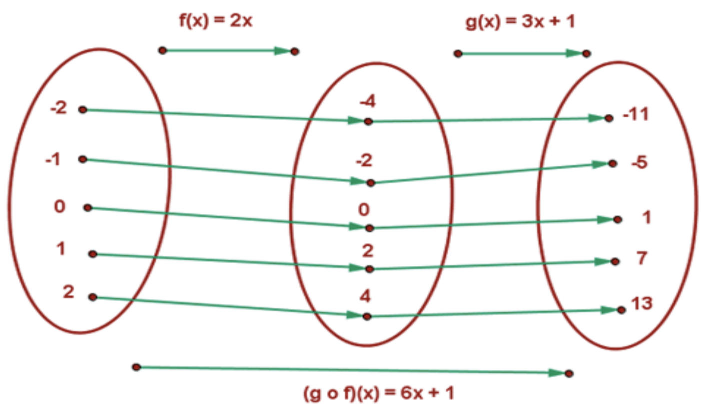
Anuncios Google ▶ Ejercicios ▶ Composicion ▶ Operaciones ▶ Dominio

Composición de funciones

Teoría | Ejercicios

Si tenemos dos funciones: f(x) y g(x), de modo que el dominio de la 2ª esté incluido en el recorrido de la 1ª, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de f(x) el valor de **g[f(x)]**.

Veamos un ejemplo con las funciones f(x) = 2x y g(x) = 3x + 1.



- **(g ∘ f) (x) = g [f(x)] = g (2x) = 3 (2x) +1 = 6x + 1**
- (g ∘ f) (1) = 6 · 1 + 1 = 7

Ejemplos

1 Sean las funciones:

$$f(x)=3x+2 \qquad g(x)=\frac{x+3}{2x+1}$$

1 Calcular (f ∘ g) (x)

$$g\circ f=g[f(x)]=g(3x+2)=$$

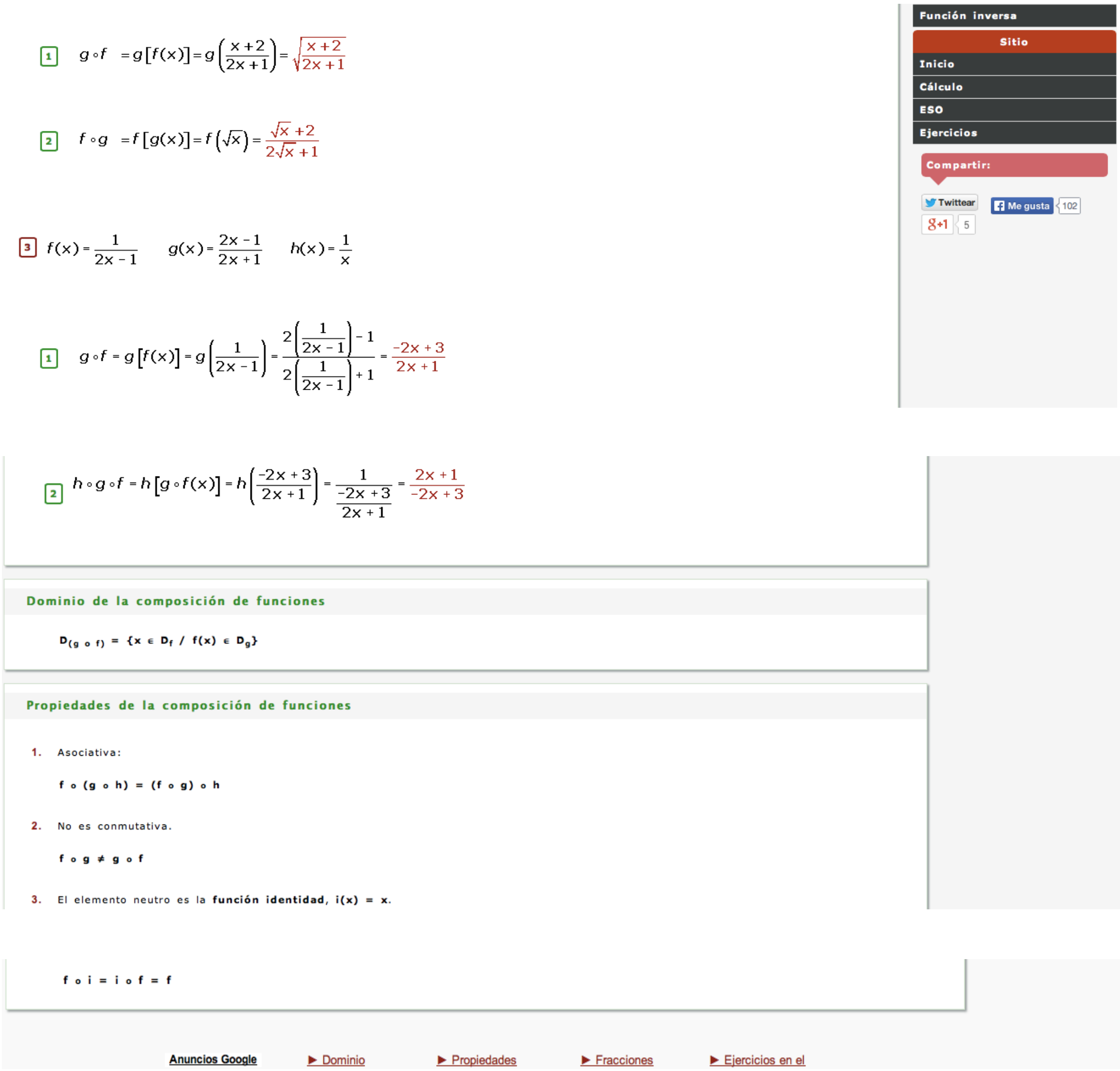
$$=\frac{3x+2+3}{2(3x+2)+1}=\frac{3x+5}{6x+5}$$

2 Calcular (g ∘ f) (x)

$$f\circ g=f[g(x)]=f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)=$$

$$=3\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)+2=\frac{7x+11}{2x+1}$$

2 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1} \qquad g(x)=\sqrt{x}$



Función inversa

Sitio

Inicio

Cálculo

ESO

Ejercicios

Compartir:

Twittear · Me gusta 102 · 8+1 5

1 $g \circ f = g[f(x)] = g\left(\frac{x+2}{2x+1}\right) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$

2 $f \circ g = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$

3 $f(x) = \frac{1}{2x-1} \qquad g(x) = \frac{2x-1}{2x+1} \qquad h(x) = \frac{1}{x}$

1 $g \circ f = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)+1} = \frac{-2x+3}{2x+1}$

2 $h \circ g \circ f = h[g \circ f(x)] = h\left(\frac{-2x+3}{2x+1}\right) = \frac{1}{\frac{-2x+3}{2x+1}} = \frac{2x+1}{-2x+3}$

Dominio de la composición de funciones

$D_{(g \circ f)} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_g\}$

Propiedades de la composición de funciones

1. Asociativa:

   f o (g o h) = (f o g) o h

2. No es conmutativa.

   f o g ≠ g o f

3. El elemento neutro es la **función identidad, i(x) = x**.

   f o i = i o f = f

Anuncios Google · ▶ Dominio · ▶ Propiedades · ▶ Fracciones · ▶ Ejercicios en el

Como se observa la página ofrece una definición de la composición de funciones, enuncia las propiedades de la composición y realiza ejemplos para que el lector comprenda la operatividad de esta operación con funciones. Los ejercicios son exclusivamente algebraicos, salvo el primero en donde muestra la relación de la composición de funciones a través de un diagrama sagital cuyos elementos son numéricos.

Dentro de la página está la sección *otros ejercicios* están: Ejercicios I, Ejercicios II, Dominios, Composición y Función inversa.

Las secciones *Ejercicios I* y *Ejercicios II*, contienen una variedad de ejercicios correspondientes a todos los temas enseñados sobre ***funciones***. Por ejemplo solicitan encontrar el dominio de una diversidad de funciones (polinomiales, racionales, radicales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas), encontrar la simetría de unas funciones dadas, encontrar el crecimiento o decrecimiento de unas funciones en un punto dado, encontrar la inversa de unas funciones dadas y algunas composiciones. Por lo que los *Ejercicios I* y *Ejercicios II* son más generales de los temas sobre funciones que se trabajaron y la sección de *Composición* es particular del tema. En ésta última se incluye los ejercicios sobre composición de funciones que están en *Ejercicios I* y *Ejercicios II,* además de contener más ejercicios sobre la composición.

Los ejercicios sugeridos para la composición de funciones en la pestaña *Composición*, son los siguientes:

$\boxed{1}$ Sean las funciones:

$$f(x)=3x+2 \qquad g(x)=\frac{x+3}{2x+1}$$

Calcular:

$\boxed{1}$ $g \circ f$

$\boxed{2}$ $f \circ g$

$\boxed{2}$ Dadas las funciones:

$$f(x)=\frac{1}{2x-1} \qquad g(x)=\frac{2x-1}{2x+1} \qquad h(x)=\frac{1}{x}$$

Calcular:

$\boxed{1}$ $g \circ f$

2. $f \circ g$

3. $h \circ g \circ f$

4. $h \circ f \circ g$

5. f^{-1}

6. Probar que: $f^{-1} \circ f = i$

7. Probar que: $f \circ f^{-1} = i$

3 Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x+2}{2x+1} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Calcular:

1. $g \circ f$

2. $f \circ g$

3. f^{-1}

4. Probar que: $f^{-1} \circ f = i$

4 Dadas las funciones:

$$f(x) = sen^2\, x \qquad\qquad g(x) = \cot g^2\, 5x$$

Calcular:

1. $g \circ f$

2. $f \circ g$

La página incluye:

1. Una definición sobre composición de funciones a través de sus dominios e imágenes, así como propiedades de la composición de funciones y maneja dominios.

2. Ejemplifica el concepto de composición de funciones de manera visual a través de un ejemplo con conjuntos, y de manera algebraica.

3. Incluye ejercicios para resolver por el lector

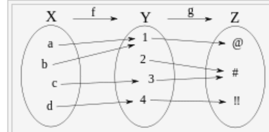
4. Incluye respuestas a los ejercicios

5. Su enfoque es preponderantemente algorítmica-algebraica.

Se puede observar que los ejercicios son muy variados, con distintos niveles de complejidad de acuerdo a las funciones presentadas, y conjuntan la inversa de una función con la composición; esto con el objetivo de que el estudiante pueda observar que la inversa de una función compuesta por su función original da la función identidad $f^{-1}of = I$. Sin embargo la manera de abordar el tema de composición de funciones es muy algebraica y algorítmica; se hace énfasis más en el método de solución que en el significado matemático de la composición de funciones. No hay ejercicios gráficos, ni tablas, ni por problemas. El tipo de ejercicio es preponderantemente de solución algebraica.

La segunda que mostró el buscador *Google* fue Wikipedia (página http://es.wikipedia.org/wiki/Función_compuesta), en donde la presentación de la composición de funciones y ejercicios se muestran a continuación:

Función compuesta



g · *f*, es la aplicación resultante de la aplicación sucesiva de *f* y de *g*. En el ejemplo, (*g* · *f*)(a)=@.

En álgebra abstracta, una **función compuesta** es una función formada por la composición o aplicación sucesiva de otras dos funciones. Para ello, se aplica sobre el argumento la función más próxima al mismo, y al resultado del cálculo anterior se le aplica finalmente la función restante.

Usando la notación matemática, la función compuesta $g \cdot f\colon X \to Z$ expresa que $(g \cdot f)(x) = g(f(x))$ para todo x perteneciente X.

A $g \cdot f$ se le llama *composición de f y g*. Nótese que se nombra no siguiendo el orden de escritura, sino el orden en que se aplican las funciones a su argumento.

Índice [ocultar]

Definición [editar]

De manera formal, dadas dos funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$, donde la imagen de f está contenida en el dominio de g, se define la función composición $(g \cdot f)\colon X \to Z$ como $(g \cdot f)(x) = g\,(f(x))$, para todos los elementos de X.

$$X \;\rightarrow\; Y \;\rightarrow\; Z$$

También se puede representar de manera gráfica usando la categoría de conjuntos, mediante un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Propiedades [editar]

- La composición de funciones es *asociativa*, es decir:

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- La composición de funciones en general *no es conmutativa*, es decir:

  $$(g \circ f) \neq (f \circ g)$$

  Por ejemplo, dadas las funciones numéricas $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2$, entonces $f(g(x))=x^2+1$, en tanto que $g(f(x))=(x+1)^2$.

- La composición de una función y su reciproco es:

  $$f \circ f^{-1} = identidad$$

Por ejemplo dadas las funciones: f(x)=2x+3 y su reciproco f^{-1}(x) = (x-3)/2 tenemos

$$f(x) \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = 2((x-3)/2) + 3 = x$$

donde tenemos que x= id(x)

Ejemplo [editar]

Sean las funciones:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sin(x)$$

La **función compuesta** de g y de f que expresamos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x)$$

La interpretación de $(f \cdot g)$ aplicada a la variable x significa que primero tenemos que aplicar g a x, con lo que obtendríamos un valor de paso

$$z = g(x) = \sin(x)$$

y después aplicamos f a z para obtener

$$y = f(z) = z^2 = \sin^2(x)$$

Función bien definida [editar]

La función compuesta está bien definida porque cumple con las dos condiciones de existencia y unicidad, propias de toda función:dxf

1. **Condición de existencia:** dado x, conocemos $(x, f(x))$, puesto que conocemos la función f, y dado cualquier elemento y de B conocemos también $(y, g(y))$, puesto que conocemos la función g. Por tanto, $(x, g(\,f(x))\,)$ está definido para todo x, y así $(g \cdot f)$ cumple la condición de existencia.
2. **Condición de unicidad:** como f y g son funciones bien definidas, para cada x el valor de $f(x)$ es único, y para cada $f(x)$ también lo es el de $g(\,f(x))$.

Enlaces externos [editar]

- Composición de funciones (ampliación).
- Weisstein, Eric W. «Composition» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.
- "Composition of Functions" by Bruce Atwood, the Wolfram Demonstrations Project, 2007.
- Composition en PlanetMath

En ésta página se puede observar la definición de la composición de funciones, un ejemplo algebraico de cómo se realiza la composición de funciones y la enunciación de propiedades de la composición. Sin embargo al ser una página de consulta básica no contiene más que un caso, no contiene ejercicios a resolver, ni explicaciones de cómo se realiza la composición de funciones, no hay bosquejos con ejemplos gráficos, contextos de problemas de aplicación, etc. Aunque contiene enlaces externos en donde sí se cuenta con una variedad mayor de ejemplos e información, pero ésta página en sí misma muestra información. Esta página web presenta:

1. Una definición y propiedades.
2. La explicación del tema en forma algebraica, incluye diagramas de conjuntos para la explicación de lo qué es la composición de funciones.
3. Al ser una página más de consulta, no incluye ejercicios sugeridos para realizar.
4. No incluye ejercicios para resolver por el lector, por lo que no contiene respuestas a éstos.
5. Su explicación es algorítmica algebraica, aunque más de información que de enseñanza.

La tercera página de internet mostrada por el buscador *Google* es http://www.sectormatematica.cl/contenidos/funcomp.htm, podemos observar al igual que en la primera página mostrada en este trabajo de tesis, una secuencia de ejemplos preliminares, seguidos de ejercicios algebraicos para resolver.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, se llama *composición de las funciones f* y *g,* y se escribe $g \circ f$, a la función definida de **R** en **R**, por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

La función $(g \circ f)(x)$ se lee « *f* compuesto con *g* aplicado a *x* ».

$$\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g[f(x)]$$

Primero actúa la función *f* y después actúa la función *g*, sobre *f*(*x*).

Cálculo de la imagen de un elemento mediante una función compuesta

Para obtener la imagen de la función compuesta aplicada a un número *x*, se siguen estos pasos:

1. Se calcula la imagen de *x* mediante la función *f*, *f*(*x*).

2. Se calcula la imagen mediante la función *g*, de *f*(*x*). Es decir, se aplica la función *g* al resultado obtenido anteriormente.

Ejercicio:

Sean las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$.

Calcular $g \circ f$ y la imagen mediante esta función de 1, 0 y -3.

Resolución:

• $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(x+3)] = (x+3)^2$

$$\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$$
$$x \to f(x) = x+3 \to g[f(x)] = g(x+3) = (x+3)^2$$

· La imagen de dos números 1, 0, -3, mediante la función $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(1+3) = g(4) = 4^2 = 16$$
$$(g \circ f)(0) = g[f(0)] = g(0+3) = g(3) = 3^2 = 9$$
$$(g \circ f)(-3) = g[f(-3)] = g[(-3)+3] = g(0) = 0^2 = 0$$

, Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$, y $g(x) = 3x - 2$, calcular:
a) $(g \circ f)(x)$
b) $(f \circ g)(x)$
c) $(g \circ f)(1)$ y $(f \circ g)(-1)$
d) El original de 49 para la función $g \circ f$.

Resolución:

a) La función $g \circ f$ está definida por:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2+1 \longrightarrow g[f(x)] = g(x^2+1) = 3(x^2+1) - 2 =$$
$$= 3x^2 + 3 - 2 = 3x^2 + 1$$

b) La función $f \circ g$ está definida por:

$\mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$

$x \longrightarrow g(x) = 3x - 2 \longrightarrow f[g(x)] = (3x-2)^2 + 1 =$

$= 9x^2 + 4 - 12x + 1 = 9x^2 - 12x + 5$

Obsérvese que $g \circ f \neq f \circ g$.

c) Aplicando los resultados de los apartados anteriores:

$(g \circ f)(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$

$(f \circ g)(-1) = 9 \cdot (-1)^2 - 12(-1) + 5 = 26$

d) El original de 49 para la función $g \circ f$ será un número x, tal que $(g \circ f)(x) = 49$.

$(g \circ f)(x) = 3x^2 + 1 = 49$. Basta con resolver esta ecuación.

$3x^2 + 1 = 49 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Aspectos observados:

1. En esta página se presenta la definición de la composición de funciones, así como un ejemplo en la que muestra que la composición de funciones no es conmutativa.
2. Los ejemplos utilizados para explicar son numéricos y algebraicos con ecuaciones lineales y cuadráticas. Propiamente no maneja ilustraciones para explicar el tema, salvo la resolución de un ejercicio a través de flechas. La página no cuenta con ejemplos gráficos, ni en contexto.
3. No propone ejercicios para resolver.
4. No hay respuestas a ejercicios
5. Presentación del tema: algorítmica-algebraica.

La cuarta página mostrada en internet en español tiene la siguiente dirección electrónica http://www.vadenumeros.es/primero/composicion-de-funciones.htm , en ella se usan colores y figuras para que el estudiante siga paso a paso el proceso de solución de una composición de funciones.

4.2 Composición de funciones. Función inversa

*En este tema veremos la **composición de funciones**, cálculo de una función compuesta de otra. Ejemplos de cálculo de funciones recíprocas (inversas). Comprobar que dos funciones son inversas.*

Composición de funciones

La composición de una función f con otra g es una nueva función que representamos por $(g \circ f)$, definida del siguiente modo: $\boxed{(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)]}$ se lee f compuesta con g.

Lo mismo para $(f \circ g)_{(x)} = f[g(x)]$ se lee g compuesta con f.

Ejemplos

1-Dadas las funciones f y g defininidas por $f(x) = 2x + 1$, y $g(x) = x^3$ halla las funciones $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$.

Para no liarnos: la función que me encuentro 1º hace de "esqueleto" y donde tenga x colocamos la otra, respetando el exponente que lleve la x.

$(g \circ f)$

Me encuentro 1º con g(x) la escribo así $\boxed{\text{aqui colocamos la función f(x)}}^3$

el resultado sería este: $(g \circ f) = \boxed{2x+1}^3 \Rightarrow$ $(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = (2x+1)^3$

$(f \circ g)$

Me encuentro 1º con f(x) la escribo así $2\,\boxed{g(x)} + 1 \Rightarrow 2(x^3) + 1$

el resultado sería: $(f \circ g)_{(x)} = f[g(x)] = 2x^3 + 1$

2 -Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, hallar $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

$f[g(x)]$

$(f \circ g)_{(x)} = f[g(x)] = \boxed{g(x)}^2 - 5\,\boxed{g(x)} + 3 \Rightarrow$

$f[g(x)] = \boxed{x^2}^2 - 5\,\boxed{x^2} + 3 \Rightarrow f[g(x)] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)]$

$(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = \boxed{f(x)}^2 \Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = (x^2 - 5x + 3)^2$

3 -Dadas las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = x^2 + 5$, hallar $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$.

$(g \circ f)$

$(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = \boxed{f(x)}^2 + 5 \Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = (\text{sen } x)^2 + 5 \Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = \text{sen}^2 x + 5$

$(f \circ g)$

$(f \circ g)_{(x)} = f[g(x)] = \text{sen}\,\boxed{g(x)} \Rightarrow (f \circ g)_{(x)} = \text{sen}\,(x^2 + 5)$

En esta página se incluye:

1. Una breve descripción de la composición de funciones, su notación y cómo se lee, pero no menciona los dominios e imágenes de las funciones a componer, y aunque se hace implícito en los ejercicios que la composición de funciones no es conmutativa, no se hace explícita esa propiedad.

2. La explicación es algebraica, no incluye ejemplos aritméticos, gráficos o en contextos reales. Para explicar el tema, hace uso del recurso de los colores y encerrar en rectángulos las ecuaciones o funciones, para ir guiando paso a paso al lector.

3. La página no contiene propiamente ejercicios para resolver por parte del estudiante.

4. No contiene ejercicios a resolver por parte del lector, por lo que no incluye soluciones.

5. El enfoque es operativo-algebraico.

Resumen

Las cuatro páginas cuentan con una definición de la composición de funciones, se explica con ejemplos numéricos y/o algebraicos. En algunas se muestran propiedades de la composición de funciones, tales como que la composición de funciones no es conmutativa, e incluso en la primera página se trabaja con los dominios de las funciones. Sin embargo podemos observar que en las cuatro páginas hay un predominio de la explicación algebraica, en ninguna de las cuatro páginas se incluyo gráficas, ni ejercicios que mostrarán a la composición de funciones en un problema con contexto real. Los recursos con los que se enseña en éstas páginas se limitan a la aritmética y al álgebra. Su enfoque está direccionada hacia la operatividad o resolución de ejercicios algebraicos.

Como se puede observar sólo en la primera página hay sugerencias de ejercicios para que resuelva el lector o estudiante.

En ninguno de los cuatro casos hay relaciones de las ecuaciones con sus gráficas, ejercicios de aplicación en donde el lector o estudiante pueda relacionar la composición de funciones en contextos reales, por lo que no enfatizan la parte conceptual de la composición de funciones, sólo la enseñanza operativa y/o algorítmica.

Tabla # 2

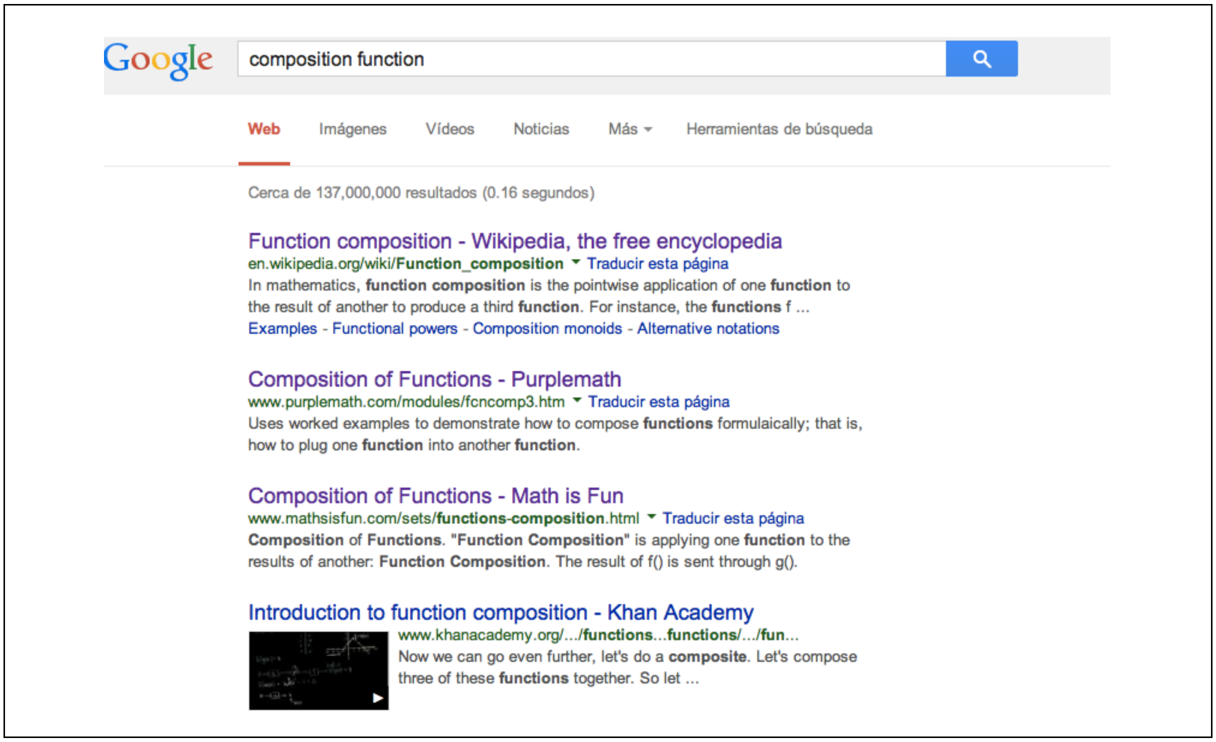
Resumen de la enseñanza de composición de funciones en páginas de internet en español

Página de internet	*Incluye definiciones o propiedades*	*Tipos de ejemplos*	*Contiene ejercicios a resolver por el lector*	*Presenta respuestas a los ejercicios propuesto*	*Tipo de enfoque (algorítmica o conceptual)*
Vitutor http://www.vitutor.com/fun/2/a_4.html	Si	*Algebraicos y uno por conjuntos	Si	Si	Operativa-algorítmica
Wikipedia http://es.wikipedia.org/wiki/Función_compuesta	Si	*Algebraicos	No	No	Informativa-operativa
Sectormatematica http://www.sectormatematica.cl/contenidos/funcomp.htm	Si	*Algebraicos *numéricos	No	No	Operativa-algorítmica
Vadenumeros http://www.vadenumeros.es/primero/composicion-de-funciones.htm	Si	*Algebraicos	No	No	Operativa-algorítmica

2.3. La enseñanza de la composición de funciones $f \circ g(x)$ en internet en el idioma inglés

La razón de hacer una búsqueda por internet en inglés, se debe a que actualmente representa la forma de comunicación a nivel internacional, por lo que al poder acceder a páginas en inglés se puede observar las aportaciones de distintas personas de diferentes partes del mundo, ya que para mostrar su trabajo de manera global se utiliza este idioma.

Los primeros resultados de *Google* en inglés fueron:


Google composition function

Web Imágenes Vídeos Noticias Más Herramientas de búsqueda

Cerca de 137,000,000 resultados (0.16 segundos)

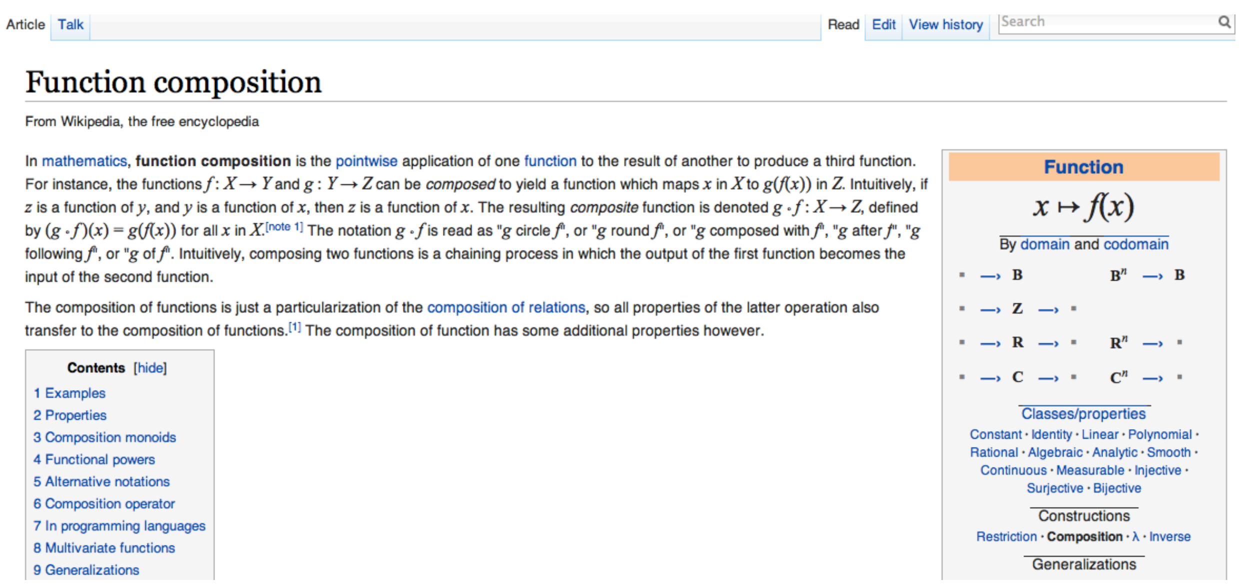
Function composition - Wikipedia, the free encyclopedia
en.wikipedia.org/wiki/**Function_composition** Traducir esta página
In mathematics, **function composition** is the pointwise application of one **function** to the result of another to produce a third **function**. For instance, the **functions** f ...
Examples - Functional powers - Composition monoids - Alternative notations

Composition of Functions - Purplemath
www.purplemath.com/modules/fcncomp3.htm Traducir esta página
Uses worked examples to demonstrate how to compose **functions** formulaically; that is, how to plug one **function** into another **function**.

Composition of Functions - Math is Fun
www.mathsisfun.com/sets/**functions-composition**.html Traducir esta página
Composition of **Functions**. "**Function Composition**" is applying one **function** to the results of another: **Function Composition**. The result of f() is sent through g().

Introduction to function composition - Khan Academy
www.khanacademy.org/.../**functions**...**functions**/.../**fun**...
Now we can go even further, let's do a **composite**. Let's compose three of these **functions** together. So let ...

En la página de Wikipedia en su versión en idioma inglés la explicación fue la siguiente (http://en.wikipedia.org/wiki/Function_composition)


Article Talk Read Edit View history Search

Function composition

From Wikipedia, the free encyclopedia

In mathematics, **function composition** is the pointwise application of one function to the result of another to produce a third function. For instance, the functions $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$ can be *composed* to yield a function which maps x in X to $g(f(x))$ in Z. Intuitively, if z is a function of y, and y is a function of x, then z is a function of x. The resulting *composite* function is denoted $g \circ f : X \to Z$, defined by $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ for all x in X.[note 1] The notation $g \circ f$ is read as "g circle f", or "g round f", or "g composed with f", "g after f", "g following f", or "g of f". Intuitively, composing two functions is a chaining process in which the output of the first function becomes the input of the second function.

The composition of functions is just a particularization of the composition of relations, so all properties of the latter operation also transfer to the composition of functions.[1] The composition of function has some additional properties however.

Contents [hide]

Function

$x \mapsto f(x)$

By domain and codomain

■ ⟶ B B^n ⟶ B
■ ⟶ Z ⟶ ■
■ ⟶ R ⟶ ■ R^n ⟶ ■
■ ⟶ C ⟶ ■ C^n ⟶ ■

Classes/properties

Constant · Identity · Linear · Polynomial · Rational · Algebraic · Analytic · Smooth · Continuous · Measurable · Injective · Surjective · Bijective

Constructions

Restriction · **Composition** · λ · Inverse

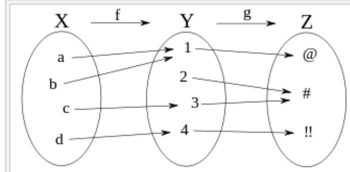
Generalizations

Partial · Multivalued · Implicit

V · T · E

Examples [edit]

- Composition of functions on a finite set: If $f = \{(1,3), (2,1), (3,4), (4,6)\}$, and $g = \{(1,5), (2,3), (3,4), (4,1), (5,3), (6,2)\}$, then $g \circ f = \{(1,4), (2,5), (3,1), (4,2)\}$.
- Composition of functions on an infinite set: If f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is given by $f(x) = 2x + 4$ and g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is given by $g(x) = x^3$, then:
  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3 + 4$, and
  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 4) = (2x + 4)^3$.
- If an airplane's elevation at time t is given by the function $h(t)$, and the oxygen concentration at elevation x is given by the function $c(x)$, then $(c \circ h)(t)$ describes the oxygen concentration around the plane at time t.



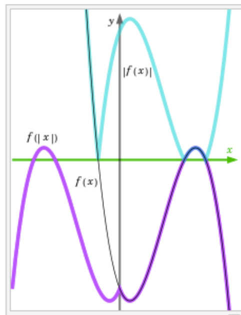
$g \circ f$, the **composition** of f and g. For example, $(g \circ f)(c) = \#$.

Properties [edit]

The composition of functions is always associative—a property inherited from the composition of relations.[1] That is, if f, g, and h are three functions with suitably chosen domains and codomains, then $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, where the parentheses serve to indicate that composition is to be performed first for the parenthesized functions. Since there is no distinction between the choices of placement of parentheses, they may be left off without causing any ambiguity.

In a strict sense, the composition $g \circ f$ can be built only if f's codomain equals g's domain; in a wider sense it is sufficient that the former is a subset of the latter.[note 2] Moreover, it is often convenient to tacitly restrict f's domain such that f produces only values in g's domain; for example, the composition $g \circ f$ of the functions f: $\mathbb{R} \to (-\infty,+9]$ defined by $f(x) = 9 - x^2$ and g : $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ defined by $g(x) = \sqrt{x}$ can be defined on the interval $[-3,+3]$.

The functions g and f are said to commute with each other if $g \circ f = f \circ g$. In general, composition of functions will not be commutative. Commutativity is a special property, attained only by particular functions, and often in special circumstances. For example, $|x| + 3 = |x + 3|$ only when $x \geq 0$. The picture shows another example.



Compositions of two real functions, absolute value and a cubic function, in different orders show a non-commutativity of the composition.

The composition of one-to-one functions is always one-to-one. Similarly, the composition of two onto functions is always onto. It follows that composition of two bijections is also a bijection. The inverse function of a composition (assumed invertible) has the property that $(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$.[2]

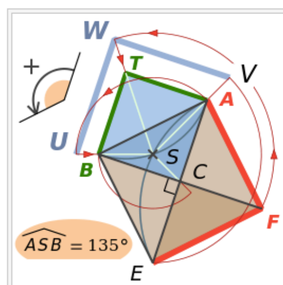
Derivatives of compositions involving differentiable functions can be found using the chain rule. Higher derivatives of such functions are given by Faà di Bruno's formula.

Composition monoids [edit]

Main article: Transformation monoid

Suppose one has two (or more) functions f: $X \to X$, g: $X \to X$ having the same domain and codomain; these are often called *transformations*. Then one can form chains of transformations composed together, such as $f \circ f \circ g \circ f$. Such chains have the algebraic structure of a monoid, called a transformation monoid or (much more seldom) *composition monoid*. In general, transformation monoids can have remarkably complicated structure. One particular notable example is the de Rham curve. The set of *all* functions f: $X \to X$ is called the full transformation semigroup[3] or *symmetric semigroup*[4] on X. (One can actually define two semigroups depending how one defines the semigroup operation as the left or right composition of functions.[5])

If the transformation are bijective (and thus invertible), then the set of all possible combinations of these functions forms a transformation group; and one says that the group is generated by these functions. A fundamental result in group theory, Cayley's theorem, essentially says that any group is in fact just a group of permutations (up to isomorphism).[6]



The similarity that transforms triangle EFA into triangle ATB is the composition of a homothety H and a rotation R, of which the common centre is S. For example, the image of A under the rotation R is U, which may be written $R(A) = U$. And $H(U) = B$ means that the mapping H transforms U into B. Thus $H(R(A)) = (H \circ R)(A) = B$.

The set of all bijective functions f: $X \to X$ (called permutations) forms a group with respect to the composition operator. This is the symmetric group, also sometimes called the *composition group*.

In the symmetric semigroup (of all transformations) one also finds a weaker, non-unique notion of inverse (called a pseudoinverse) because the symmetric semigroup is a regular semigroup.[7]

Functional powers [edit]

Main article: Iterated function

If $Y \subseteq X$, then f: $X \to Y$ may compose with itself; this is sometimes denoted as f^2. That is:

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f^2(x)$

$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f^3(x)$

More generally, for any natural number $n \geq 2$, the nth **functional power** can be defined inductively by $f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$. Repeated composition of such a function with itself is called **iterated function**.

- By convention, f^0 is defined as the identity map on f's domain, id_X.
- If even $Y = X$ and f: $X \to X$ admits an inverse function f^{-1}, negative functional powers f^{-n} are defined for $n > 0$ as the opposite power of the inverse function: $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Note: If f takes its values in a ring (in particular for real or complex-valued f), there is a risk of confusion, as f^n could also stand for the n-fold product of f, e.g. $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$. For trigonometric functions, usually the latter is meant, at least for positive exponents. For example, in trigonometry, this superscript notation represents standard exponentiation when used with trigonometric functions: $\sin^2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$. However, for negative exponents (especially −1), it nevertheless usually refers to the inverse function, e.g., $\tan^{-1} = \arctan$ $(\neq 1/\tan)$.

In some cases, when for a given function f the equation $g \circ g = f$ has a unique solution g, that function can be defined as the functional square root of f, then written as $g = f^{1/2}$. More generally, when $g^n = f$ has a unique solution for some natural number $n > 0$, then $f^{m/n}$ can be defined as g^m. Under additional restrictions, this idea can be generalized so that the iteration count becomes a continuous parameter; in this case, such a system is called a flow, specified through solutions of Schröder's equation. Iterated functions and flow occur naturally in the study of fractals and dynamical systems.

Alternative notations [edit]

Many mathematicians, particularly in group theory, omit the composition symbol, writing gf for $g \circ f$.[8]

In the mid-20th century, some mathematicians decided that writing "$g \circ f$" to mean "first apply f, then apply g" was too confusing and decided to change notations. They write "xf" for "$f(x)$" and "$(xf)g$" for "$g(f(x))$".[9] This can be more natural and seem simpler than writing functions on the left in some areas – in linear algebra, for instance, when x is a row vector and f and g denote matrices and the composition is by matrix multiplication. This alternative notation is called postfix notation. The order is important because matrix multiplication is non-commutative. Successive transformations applying and composing to the right agrees with the left-to-right reading sequence.

Mathematicians who use postfix notation may write "fg", meaning first apply f and then apply g, in keeping with the order the symbols occur in postfix notation, thus making the notation "fg" ambiguous. Computer scientists may write "$f ; g$" for this,[10] thereby disambiguating the order of composition. To distinguish the left composition operator from a text semicolon, in the Z notation the U+2A3E ⨾ FAT SEMICOLON character is used for left relation composition.[11] Since all functions are binary relations, it is correct to use the [fat] semicolon for function composition as well (see the article on composition of relations for further details on this notation).

Composition operator [edit]

Main article: Composition operator

Given a function g, the **composition operator** C_g is defined as that operator which maps functions to functions as

$$C_g f = f \circ g.$$

Composition operators are studied in the field of operator theory.

In programming languages [edit]

Main article: Function composition (computer science)

Function composition appears in one form or another in numerous programming languages.

Multivariate functions [edit]

Partial composition is possible for multivariate functions. The function resulting when some argument x_i of the function f is replaced by the function g is called a composition of f and g in some computer engineering contexts, and is denoted $f|_{x_i=g}$

$$f|_{x_i=g} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

When g is a simple constant b, composition degenerates into a (partial) valuation, whose result is also known as restriction or *co-factor*.[12]

$$f|_{x_i=b} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

In general, the composition of multivariate functions may involve several other functions as arguments, as in the definition of primitive recursive function. Given f, a n-ary function, and n m-ary functions $g_1, \ldots, g_n$, the composition of f with $g_1, \ldots, g_n$, is the m-ary function

$$h(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

This is sometimes called the **generalized composite** of f with $g_1, \ldots, g_n$.[13] The partial composition in only one argument mentioned previously can be instantiated from this more general scheme by setting all argument functions except one to be suitably chosen projection functions. Note also that $g_1, \ldots, g_n$ can be seen as a single vector/tuple-valued function in this generalized scheme, in which case this is precisely the standard definition of function composition.[14]

A set of finitary operations on some base set X is called a clone if it contains all projections and is closed under generalized composition. Note that a clone generally contains operations of various arities.[13] The notion of commutation also finds an interesting generalization in the multivariate case; a function f of arity n is said to commute with a function g of arity m if f is a homomorphism preserving g, and vice-versa i.e.:[15]

$$f(g(a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, g(a_{n1}, \ldots, a_{nm})) = g(f(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, g(a_{1m}, \ldots, a_{mn})).$$

A unary operation always commutes with itself, but this is not necessarily the case for a binary (or higher arity) operation. A binary (or higher arity) operation that commutes with itself is called medial or entropic.[15]

Generalizations [edit]

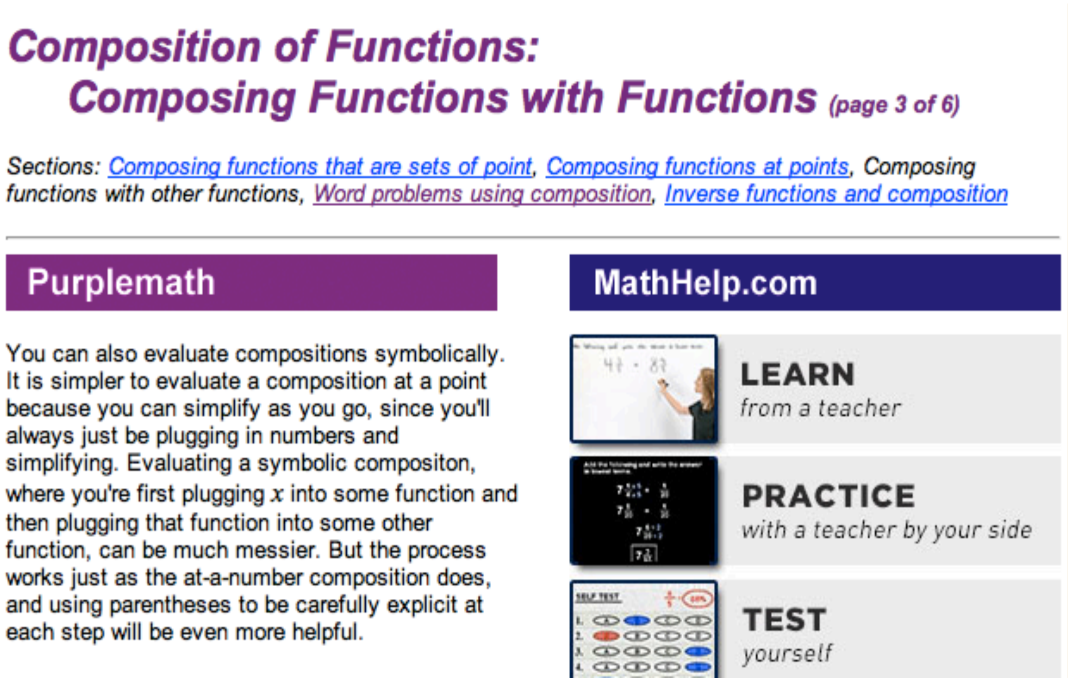
Composition can be generalized to arbitrary binary relations. If $R \subseteq X \times Y$ and $S \subseteq Y \times Z$ are two binary relations, then their composition $S \circ R$ is the relation defined as $\{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y. (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$. Considering a function as a special case of a binary relation (namely functional relations), function composition satisfies the definition for relation composition.

The composition is defined in the same way for partial functions and Cayley's theorem has its analogue called Wagner-Preston theorem.[16]

The category of sets with functions as morphisms is the prototypical category. The axioms of a category are in fact inspired from the properties (and also the definition) of function composition.[17] The structures given by composition are axiomatized and generalized in category theory with the concept of morphism as the category-theoretical replacement of functions. The order inversion in the formula $(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$ applies for groups in general and for the inverse relation; each of these is a dagger category.

Se observa que contiene una definición de la composición de funciones, enuncia sus propiedades, explica la composición de tres maneras diferentes: en forma aritmética (manejo de coordenadas), en forma algebraica y en el contexto de un problema, además de utilizar diagramas y conjuntos para su explicación. Sin embargo al ser sólo informativa y no presenta ejercicios o aplicaciones.

La segunda página de internet en idioma ingles que mostró el motor de búsqueda *Google* fue http://www.purplemath.com/modules/fcncomp3.htm donde observamos:



- **Given $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = -x^2 + 5$, find $(f \circ g)(x)$.**

  In this case, I am not trying to find a certain numerical value. Instead, I am trying to find the formula that results from plugging the formula for $g(x)$ into the formula for $f(x)$. I will write the formulas at each step, using parentheses to indicate where the inputs should go:

  $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(-x^2 + 5)\\ &= 2(\qquad) + 3 \quad \text{... setting up to insert the input formula}\\ &= 2(-x^2 + 5) + 3\\ &= -2x^2 + 10 + 3\\ &= \mathbf{-2x^2 + 13}\end{aligned}$$

If you plug in "1" for the x in the above, you will get $(f \circ g)(1) = -2(1)^2 + 13 = -2 + 13 = 11$, which is the same answer we got before. Previously, we'd plugged a number into $g(x)$, found a new value, plugged that value into $f(x)$, and simplified the result. This time, we plugged a formula into $f(x)$, simplified the formula, plugged the same number in as before, and simplified the result. The final numerical answers were the same. If you've done the symbolic composition (the composition with the formulas) correctly, you'll get the same values either way, regardless of the value you pick for x. This can be a handy way of checking your work.

Here's another symbolic example:

- **Given $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = -x^2 + 5$, find $(g \circ f)(x)$.**

  $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(2x + 3)\\ &= -(\qquad)^2 + 5 \quad \text{... setting up to insert the input}\\ &= -(2x + 3)^2 + 5\\ &= -(4x^2 + 12x + 9) + 5\\ &= -4x^2 - 12x - 9 + 5\\ &= \mathbf{-4x^2 - 12x - 4}\end{aligned}$$

There is something you should note from these two symbolic examples. Look at the results I got:

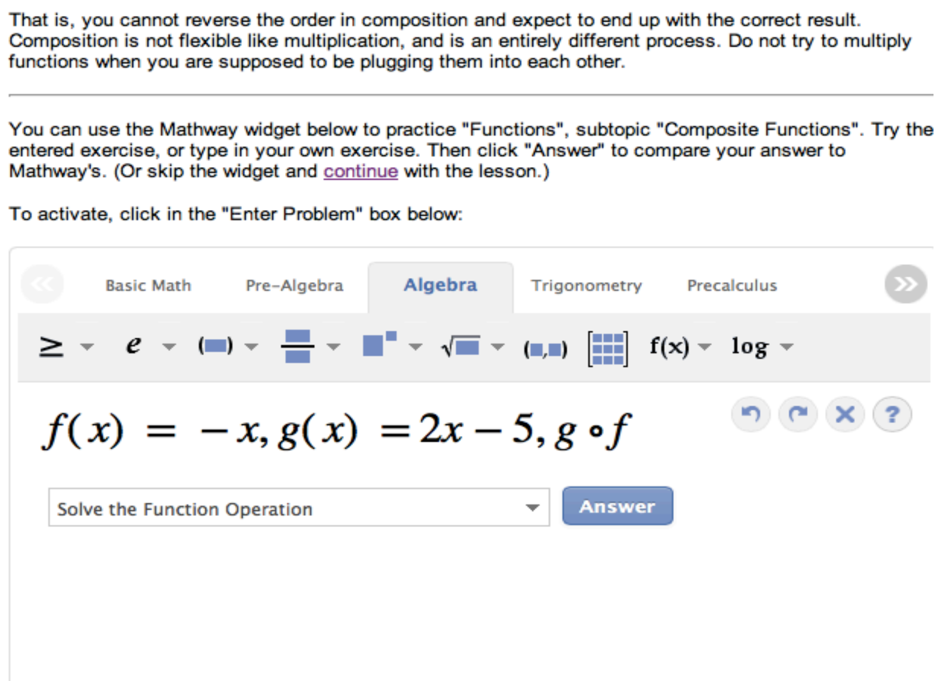
$$(f \circ g)(x) = -2x^2 + 13$$
$$(g \circ f)(x) = -4x^2 - 12x - 4$$

That is, $(f \circ g)(x)$ is not the same as $(g \circ f)(x)$. This is true in general; you should assume that the compositions $(f \circ g)(x)$ and $(g \circ f)(x)$ are going to be different. In particular, composition is not the same thing as multiplication. The open dot "∘" is not the same as a multiplication dot "•", nor does it mean the same thing. While the following is true:

$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$ *[always true for multiplication]*

...you cannot say that:

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ *[generally false for composition]*



That is, you cannot reverse the order in composition and expect to end up with the correct result. Composition is not flexible like multiplication, and is an entirely different process. Do not try to multiply functions when you are supposed to be plugging them into each other.

You can use the Mathway widget below to practice "Functions", subtopic "Composite Functions". Try the entered exercise, or type in your own exercise. Then click "Answer" to compare your answer to Mathway's. (Or skip the widget and continue with the lesson.)

To activate, click in the "Enter Problem" box below:

Esta página consta de 6 secciones, en las primeras se proporcionan ejemplos numéricos a través de coordenadas, así como ejemplos gráficos. Mientras que en las últimas páginas se presentan ejemplos de aplicación como el caso del salario base más comisiones. En la página no hay una definición como tal, si bien se describe cómo se realiza la composición de funciones y se habla sobre la notación, no hay una definición propiamente. En relación a las propiedades de la composición hacen énfasis en la no conmutatividad de la composición de funciones. La página permite realizar los cálculos con las funciones que el visitante escriba. Esta página se concentra en la aplicación y solución de ejercicios a través de diferentes vías matemáticas.

La tercera liga de internet es la siguiente http://www.mathsisfun.com/sets/functions-composition.html

Composition of Functions

"Function Composition" is applying one function to the results of another:

The result of f( ) is sent through g( )

It is written: $(g \circ f)(x)$

Which means: $g(f(x))$

Example: $f(x) = 2x+3$ and $g(x) = x^2$

"x" is just a placeholder, and to avoid confusion let's just call it "input":

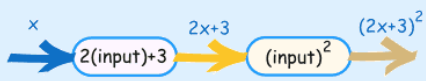
$$f(\text{input}) = 2(\text{input})+3$$

$$g(\text{input}) = (\text{input})^2$$

So, let's start:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

First we apply f, then apply g to that result:



$$(g \circ f)(x) = (2x+3)^2$$

Symbol

The symbol for composition is a small circle:

$$(g \circ f)(x)$$

It is **not** a filled in dot: $(g \cdot f)(x)$, as that means **multiply**.

Composed With Itself

You can even compose a function with itself!

Example: $f(x) = 2x+3$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

First we apply f, then apply f to that result:

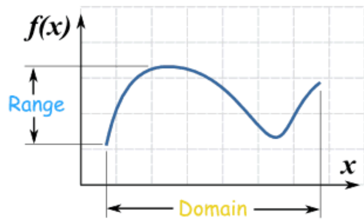
$$(f \circ f)(x) = 2(2x+3)+3 = 4x + 9$$

You should be able to do this without the pretty diagram:

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(2x+3) \\ &= 2(2x+3)+3 \\ &= 4x + 9\end{aligned}$$

Domains

It has been easy so far, but now you must consider the **Domains** of the functions.



The domain is **the set of all the values** that go into a function.

The function must work for all values you give it, so it is **up to you** to make sure you get the domain correct!

Example: the domain for √x (the square root of x)

You cannot have the square root of a negative number (unless you use imaginary numbers, but we aren't), so we must **exclude** negative numbers:

The Domain of √x is all non-negative Real Numbers

On the Number Line it looks like:

Using set-builder notation it is written:

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$$

Or using interval notation it is:

$$[0,+\infty)$$

It is important to get the Domain right, or you will get bad results!

Domain of Composite Function

You must get **both Domains** right (the composed function **and** the first function used).

When doing, for example, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$:

- Make sure you get the Domain for **f(x)** right,
- Then also make sure that **g(x)** gets the correct Domain

Example: $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = x^2$

The Domain of $f(x) = \sqrt{x}$ is all non-negative Real Numbers

The Domain of $g(x) = x^2$ is all the Real Numbers

The composed function is:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (\sqrt{x})^2 \\ &= x\end{aligned}$$

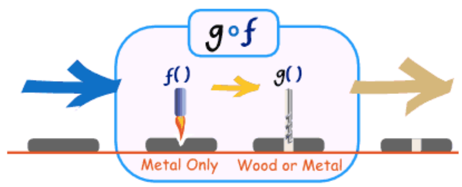
Now, "x" normally has the Domain of all Real Numbers ...

... but because it is a **composed function** you must **also consider f(x)**,

So the Domain is all non-negative Real Numbers

Why Both Domains?

Well, imagine the functions were machines ... the first one melts a hole with a flame (only for metal), the second one drills the hole a little bigger (works on wood or metal):



What you see at the end is a drilled hole, and you may think "that should work for wood **or** metal".

But if you put wood into $g \circ f$ then the first function f would make a fire and burn everything down!

So what happens "inside the machine" is important.

De-Composing Function

You can go the other way and **break up a function** into a composition of other functions.

Example: $(x+1/x)^2$

That function could have been made from these two functions:

$$f(x) = x + 1/x$$

$$g(x) = x^2$$

And we get:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x + 1/x) \\ &= (x + 1/x)^2\end{aligned}$$

This can be useful if the original function is too complicated to work on.

Summary

- "Function Composition" is applying one function to the results of another.
- **$(g \circ f)(x) = g(f(x))$**, first apply f(), then apply g()
- You must also respect the domain of the first function
- Some functions can be de-composed into two (or more) simpler functions.

Your turn: Question 1 Question 2 Question 3 Question 4 Question 5
Question 6 Question 7 Question 8 Question 9 Question 10

Sólo para dar una muestra seleccionaré el primero, el sexto y el décimo ejercicio.

Mathopolis

Home Games Questions Login: Pass: Login Join!

Quiz Overview **Question 1** Next Question

Functions (Algebra 2, General)

Help

If f(x) = 3x - 1 and g(x) = x^2, then what is (f ° g)(x)?

A $x^2(3x - 1)$	B $3x^2 - 1$
C $9x^2 - 1$	D $9x^2 - 6x + 1$

Use pen and paper to work out the answer

Quiz Overview **Question 6** Next Question

Functions (Algebra 2, Hard)

Help

If $f(x) = x^2 + 3$ and $g(x) = \sqrt{x-3}$, what is the domain of $(f \circ g)(x)$?

A R	B {x ∈R | x > 3}
C {x ∈R | x ≥ 3}	D {x ∈R | x ≤ 3}

Don't waste this chance to learn

Quiz Overview **Question 10** Next Question

Functions (Algebra 2, General)

Help

$f(x) = x^3$ and $g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

The domain for f = R and the domain for g = {x ∈R | x ≠ 0}

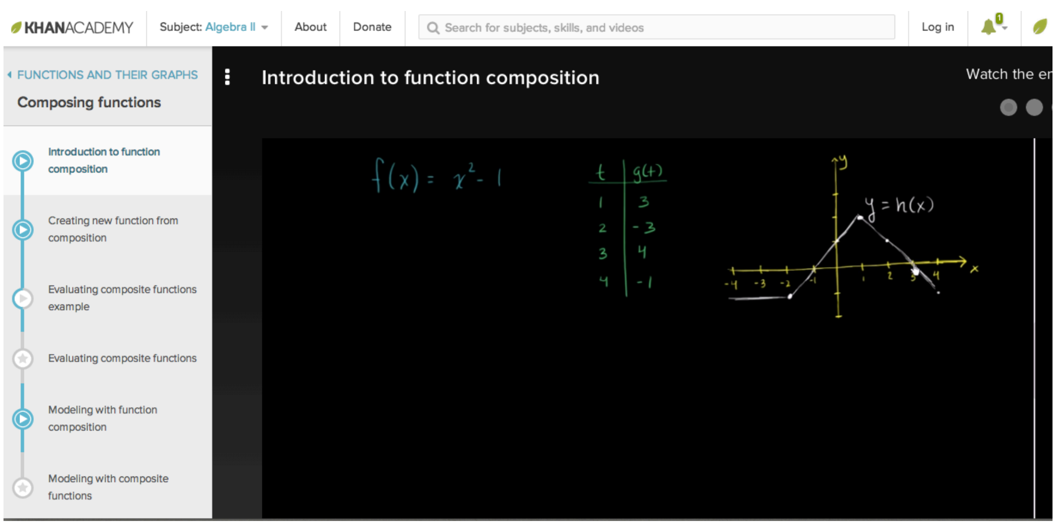
For what value of x does (f ° g)(x) = (g ° f)(x)?

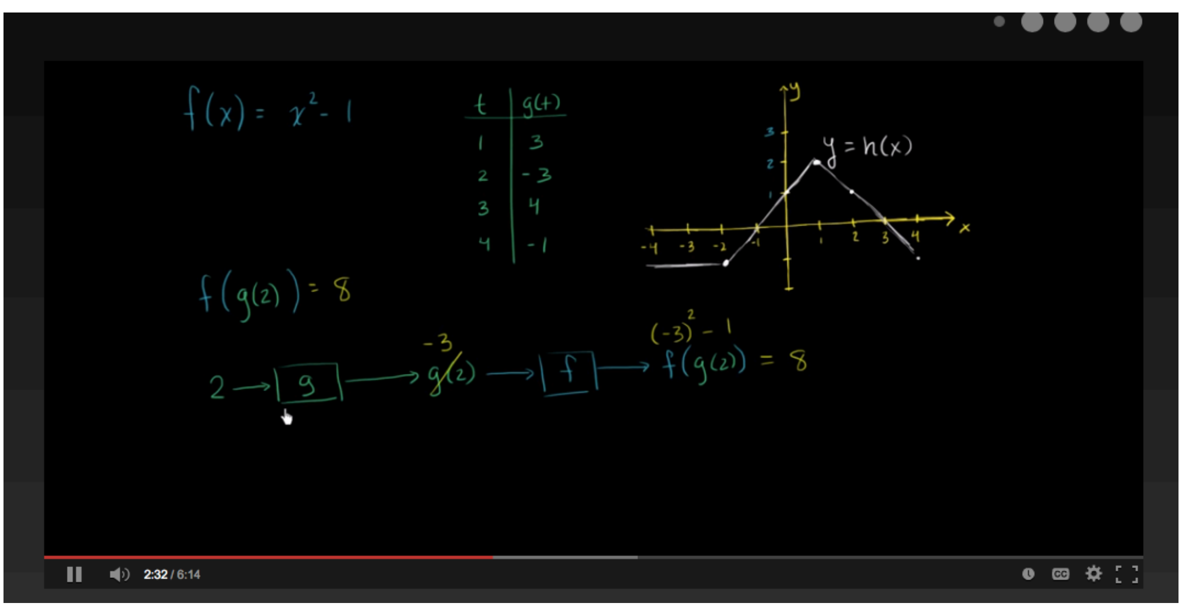
A x = -3	B x = -1
C x = 0	D x = 1

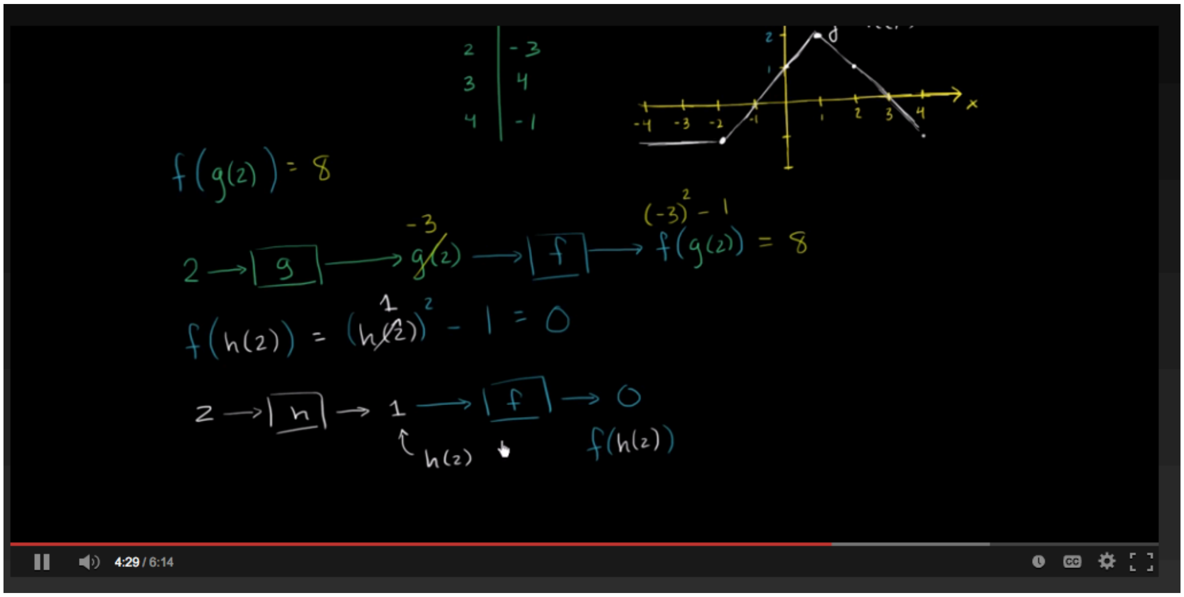
Take your time, this isn't a race

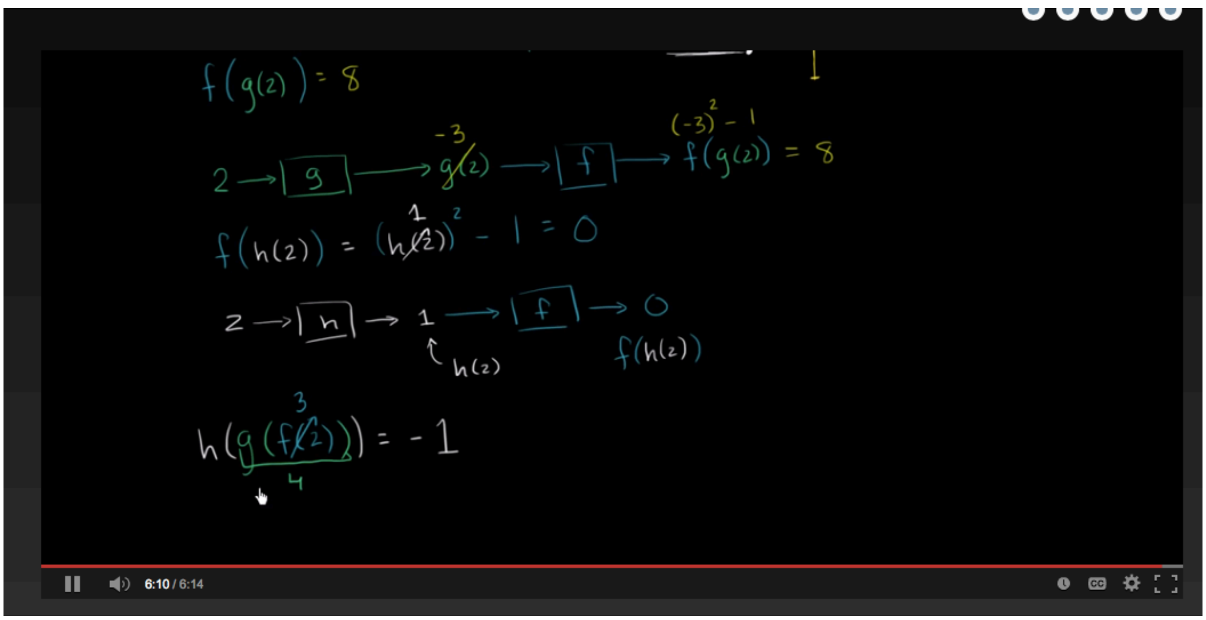
En esta página se enfoca en la operación algorítmica de la composición de funciones así como la determinación de sus dominios. Hacen énfasis en la no conmutatividad de la composición de manera algebraica. En la página aparecen una definición y posteriormente se presentan ejercicios para resolver enfatizando la forma algebraica y el uso de diagramas. En la sección de ejercicios se tiene una serie de 10 con 4 respuestas a elegir, y al seleccionar una respuesta se puede verificar si la respuesta es correcta o incorrecta, a fin de el estudiante pueda evaluarse a si mismo en el dominio del tema.

La cuarta página de internet mostrada es del sitio web KhanAcademy en la que observamos: (http://www.khanacademy.org/math/algebra2/functions_and_graphs/composing-functions/v/function-composition)









En esta página de internet un profesor, a través de un video, presenta la composición de funciones a través del manejo de fórmulas, tablas y gráficas. Utiliza animaciones, colores y diagramas en su explicación sobre como el resultado de una función evaluada se sustituye en la otra, para nuevamente evaluar el valor obtenido, pero ahora en la segunda función. Incluso al final del ejercicio realiza la evaluación numérica de la composición de funciones de tres funciones.

Este video se enfoca en aspectos prácticos en cómo realizar la composición de funciones, y sólo al principio del video se menciona brevemente lo que significa la composición de funciones, la cual podemos asumir como una breve definición. En la página se presentan 5 vínculos asociados al tema. En el segundo vínculo *creating new function for composition*, muestra un ejemplo de la composición de funciones en forma algebraica, y compone ambas funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$, para al final comentar que no es el mismo resultado (propiedad no conmutativa). En la tercera liga *Evaluating composite functions example*, muestra la evaluación numérica de la composición de dos funciones. La cuarta liga corresponde a un ejercicio para resolver donde se puede verificar si el resultado es correcto o no. Esta sección es interactiva que el lector puede ir pidiendo pistas para resolver el ejercicio de composición. La penúltima liga corresponde a un ejemplo practico de composición de funciones (problemas en contextos reales) sobre volumen $V(d)$ y profundidad $d(t)$. La última liga corresponde a un ejercicio a resolver por el lector sobre un ejercicio en contexto real.

Resumen

Las cuatro páginas cuentan con una definición de la composición de funciones. Muestran propiedades de la composición de funciones, tales como que la composición de funciones no es conmutativa, salvo en la página de *Purplemath*. Se observa que en tres de las cuatro páginas hay una tendencia a trabajar tanto con el concepto de composición de funciones, como con su operatividad; salvo la página de Wikipedia que es más de corte informativo, aunque incluye para su explicación varios ejemplos. En comparación de las páginas encontradas en español, sí se incluyen en estas páginas en inglés gráficas, y problemas con contexto real que involucren la composición de funciones, aunque se observa que todavía es limitada la explicación geométrica de la composición de funciones. Sin embargo los recursos con los que se enseña en éstas páginas son variados: aritmética, álgebra, geometría y aplicaciones del concepto en contextos reales, por lo que muestran un enfoque conceptual y operativo.

Tabla # 3

Resumen de la enseñanza de composición de funciones en páginas de internet en inglés

Página de internet	*Incluye definiciones o propiedades*	*Tipos de ejemplos*	*Contiene ejercicios a resolver por el lector*	*Presenta respuestas a los ejercicios propuesto*	*Tipo de enfoque (algorítmica o conceptual)*
Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Function_composition	Si	*Numéricos *Algebraicos *Por problemas en contextos reales Manejo de diagramas y conjuntos.	No	No	Informativa-operativa
Purplemath http://www.purplemath.com/modules/fcncomp3.htm	No Propiedad no conmutativa	*Algebraicos (Dentro de las ligas de la página, que consta de 6 en total incluye: numérico (coordenadas), gráfico, por problemas.	Presentan una calculadora, en donde el lector genera las dos funciones a componer y la computadora da la respuesta	Sí	Algorítmica-conceptual
Mathisfun http://www.mathsisfun.com/sets/functions-composition.html	Si Propiedad no conmutativa	*Algebraicos y manejo de diagramas	Sí	Sí	Operativa-conceptual con énfasis en los dominios y el orden de las operaciones.
Khanacademy (videos) http://www.khanacademy.org/math/algebra2/functions_and_graphs/composing-functions/v/function-composition	Si, menciona lo qué significa la composición en términos operativos	*Numéricos con manejo de fórmulas, tablas y gráficas. La página cuenta con 5 ligas más asociadas al tema que incluyen ejemplos: *Algebraicos. *Numéricos (por evaluación de las funciones) *Por problemas en contextos reales	Sí, aunque sólo son dos ejercicios	Sí	Operativa-conceptual.

2.4. La enseñanza de la composición de funciones $f \circ g(x)$ a través de videos en YouTube en español

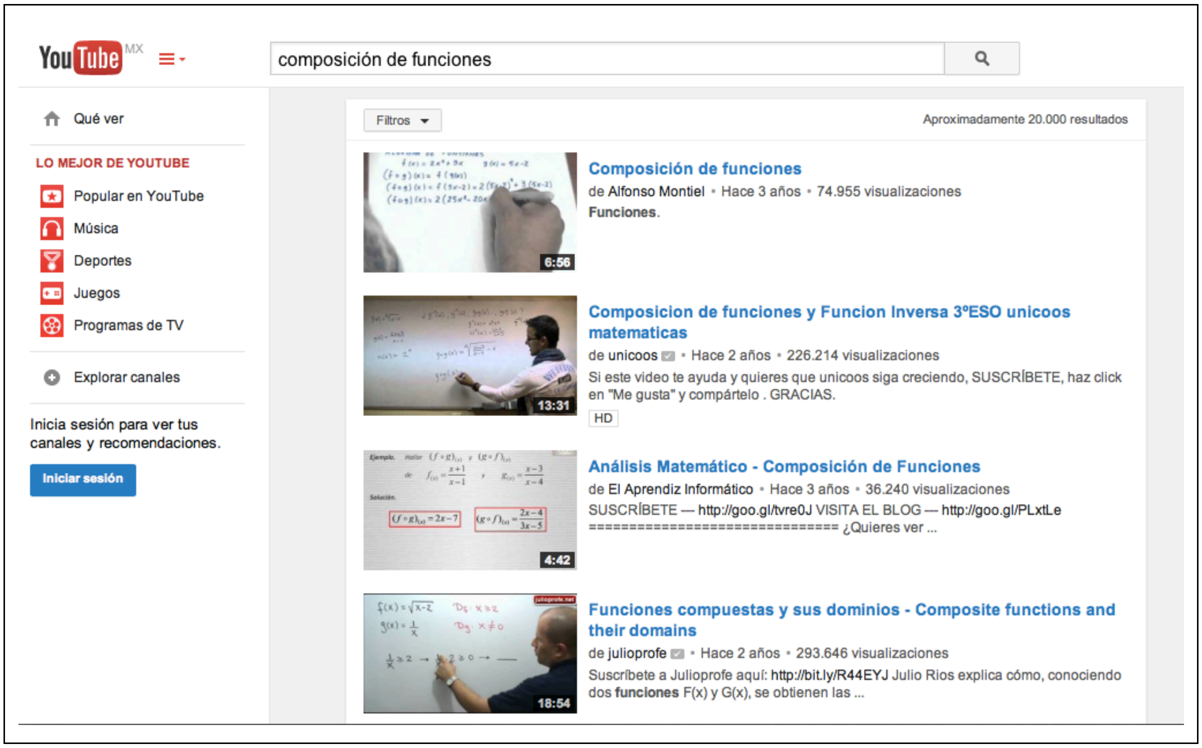
El esquema de análisis sobre la enseñanza de la composición de funciones de los 5 puntos que hemos estado trabajando en las secciones anteriores (2.1, 2.2 y 2.3), no puede ser igual para la información mostrada en video; pues el objetivo general de los videos educativos es mostrar el algoritmo o método de solución de un tema matemático, sin incluir problemas o ejercicios para resolver por el lector, y por ende tampoco sus respuestas. Los videos generalmente se direccionan a la parte operativa de los temas que están mostrando, tratan de dar respuesta a ¿Cómo resuelvo esto?, no intentan conceptualizar demasiado el tópico de trabajo, ni definirlo, si acaso lo describirán como evaluar una función en otra o introducir una función en otra. Por lo que el esquema de análisis para los videos será sólo de un eje principal:

1. Tipo de ejemplos que resuelven: numéricos (tablas, coordenadas, evaluando funciones, etc.), algebraicos, gráficos y por problemas en contextos reales.

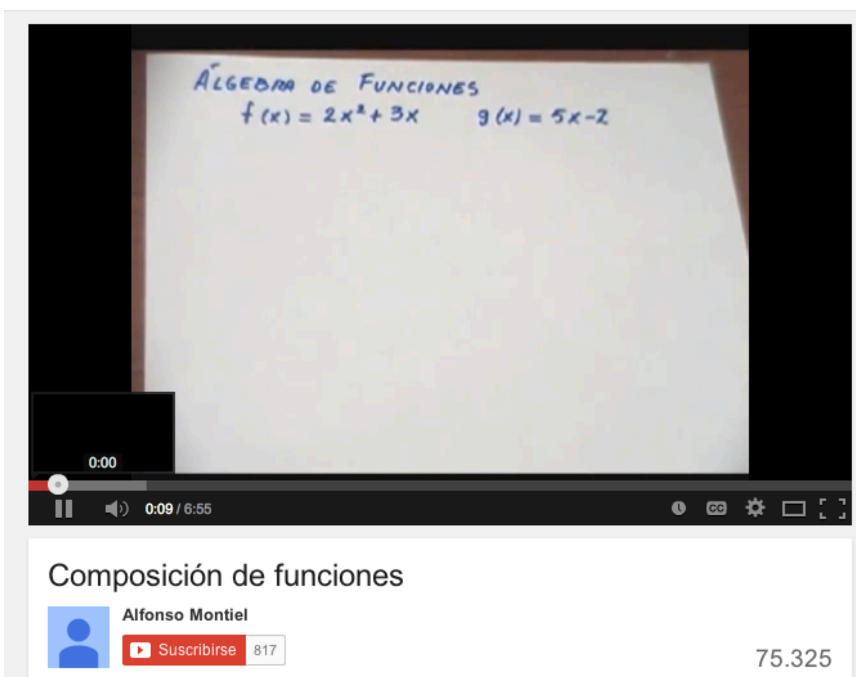
Queremos observar la preponderancia o no hacia los ejercicios algebraicos. Consideramos que los ejercicios en problemas reales dan significado al concepto que se estudia, pero es un recurso todavía usado de manera marginal. Por lo que nos enfocamos en observar el tipo de ejercicios a resolver y con ello se puede concluir una enseñanza de tipo algorítmica o conceptual para la composición de funciones por videos educativos en internet.

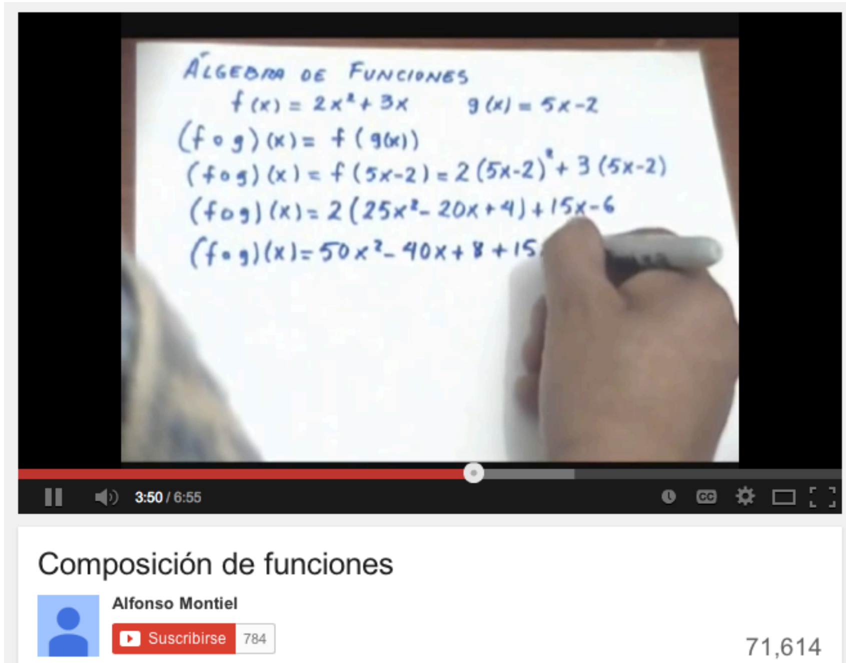
El incluir videos educativos de *YouTube*, nos pareció pertinente dado que este trabajo de investigación versa sobre la enseñanza de la composición de funciones a nivel Bachillerato, y los jóvenes estudiantes suelen acceder de manera cotidiana en sus dudas escolares, además de a sus compañeros, maestras, maestros a la información vertida en internet, en este caso en *YouTube.*

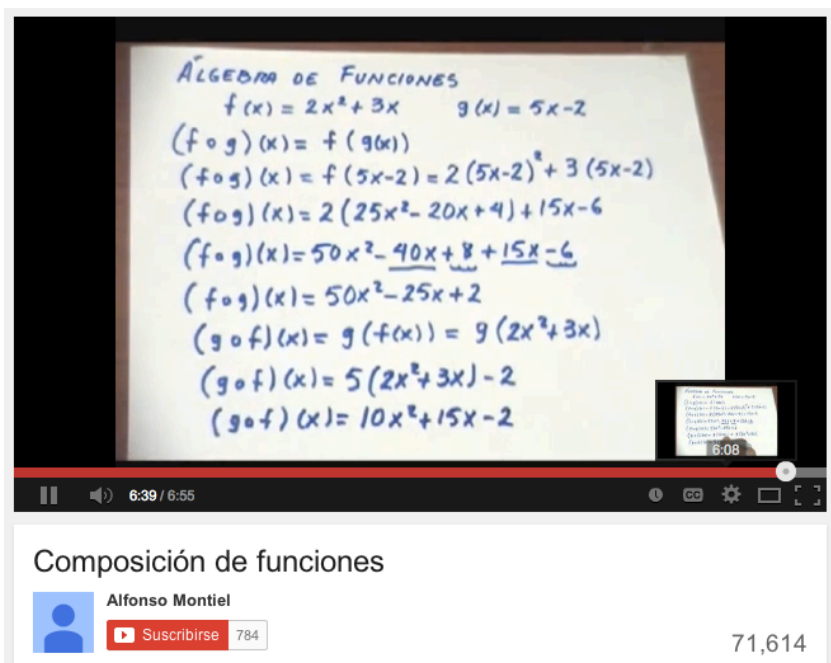
Al solicitar la búsqueda de composición de funciones en *YouTube*, la lista de los primeros cuatro videos en español es la siguiente:



La primera página que resulta de la búsqueda en el portal de Youtube es la siguiente: http://www.youtube.com/watch?v=36glvhtn4Kg

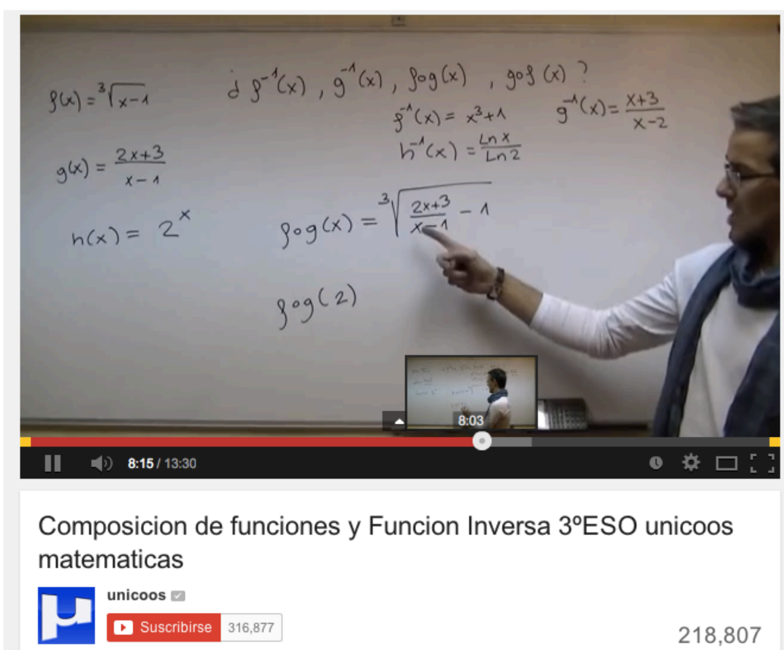






En este video el profesor escribe en una hoja de papel en blanco con la solución de un ejemplo algebraico cuyas funciones son una ecuación lineal $g(x) = 5x - 2$ para una función y una ecuación cuadrática $f(x) = 2x^2 + 3x$ para la otra función, el profesor resuelve tanto $(f \circ g)(x)$, como $(g \circ f)(x)$. No define la composición de funciones propiamente, si no que sólo muestra o enseña la parte operativa-algebraica de la composición de funciones.

La segunda página que resulta de la búsqueda en el portal de Youtube es la siguiente: http://www.youtube.com/watch?v=l6pZGhy0hHc



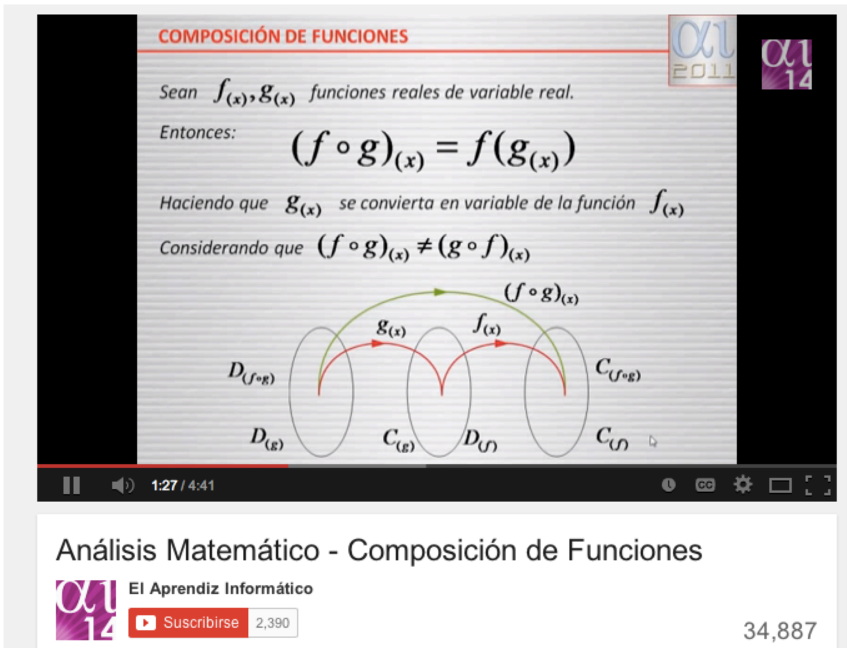
En este video el profesor comienza por explicar cómo se obtiene la inversa de una función y la comprobación de que la función inversa es correcta a través de un ejemplo numérico con tablas; por ejemplo si *x=2* y f *(2)=1*, entonces $f^{-1}(1) = 2$, esto lo resuelve para las dos funciones que obtiene la inversa. Posteriormente presenta como se hace la composición de funciones al sustituir una función en otra. Una función es una raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ y la otra es una función racional $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

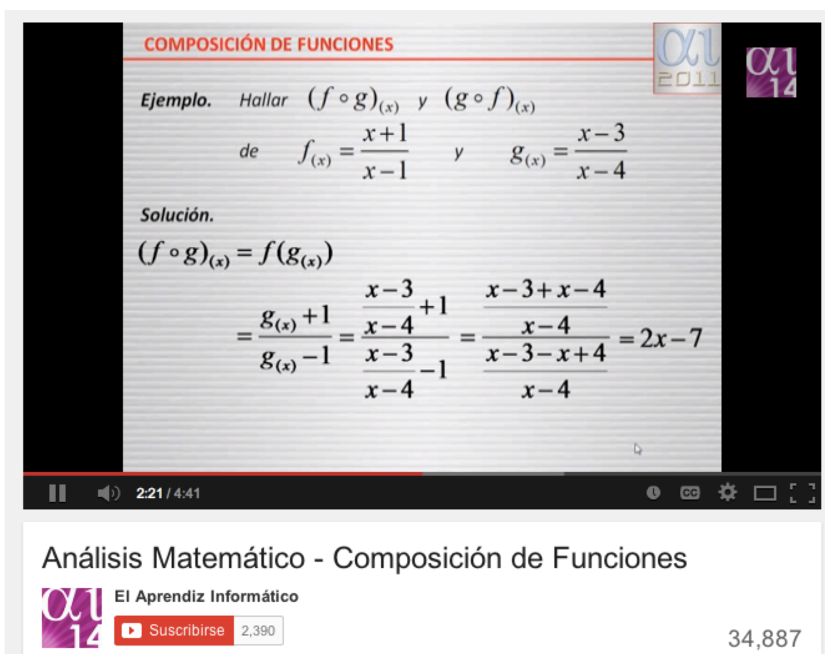
Al terminar de explicar las inversas y la operatividad algebraica de la composición de funciones, va mencionando la importancia de considerar el dominio de las funciones. Al final introduce una función exponencial $h(x) = 2^x$ y resuelve otro ejercicio más. Para concluir, el profesor indica de manera verbal que la inversa de una función compuesta por su inversa siempre da la función identidad *"x"*, escribe $g \circ g^{-1} = x$, pero no la resuelve.

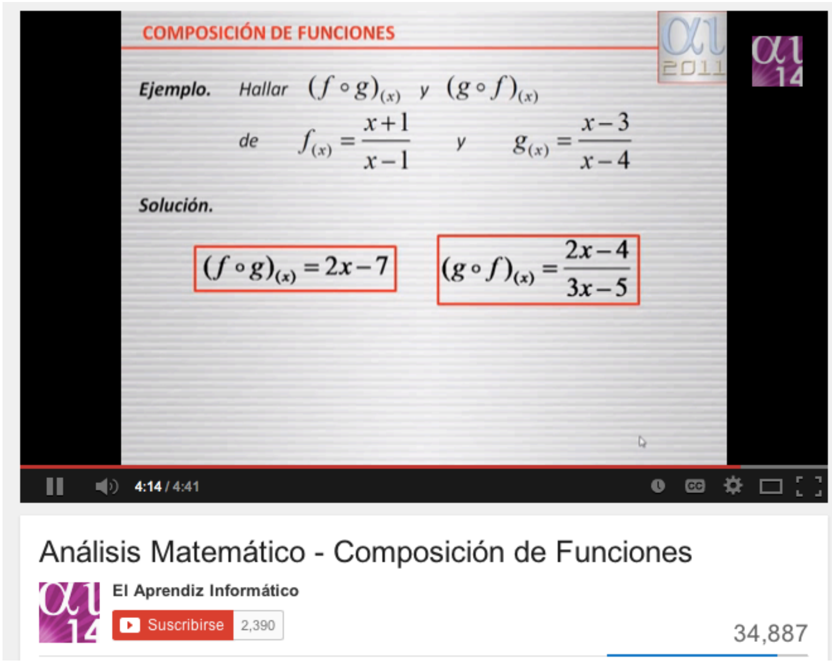
Las operaciones que realiza el profesor son $f \circ g(x)$, $f \circ g(2)$, $g \circ f(x)$, $f \circ h(x)$, $h \circ f(x)$ para mostrar la operación de composición de funciones.

En este caso el profesor va conversando con los estudiantes tratando de darles confianza para manejarse en las operaciones matemáticas y concluye diciendo que lo que tienen que hacer es ejercicios. El objetivo de este video es mostrar como se opera de manera algebraica la composición de funciones, evalúa una composición de funciones de manera numérica, no introduce gráficas, ni definiciones para este tema.

La tercer página que resulta de la búsqueda en el portal de Youtube es la siguiente: http://www.youtube.com/watch?v=2Nj5oegrRDs

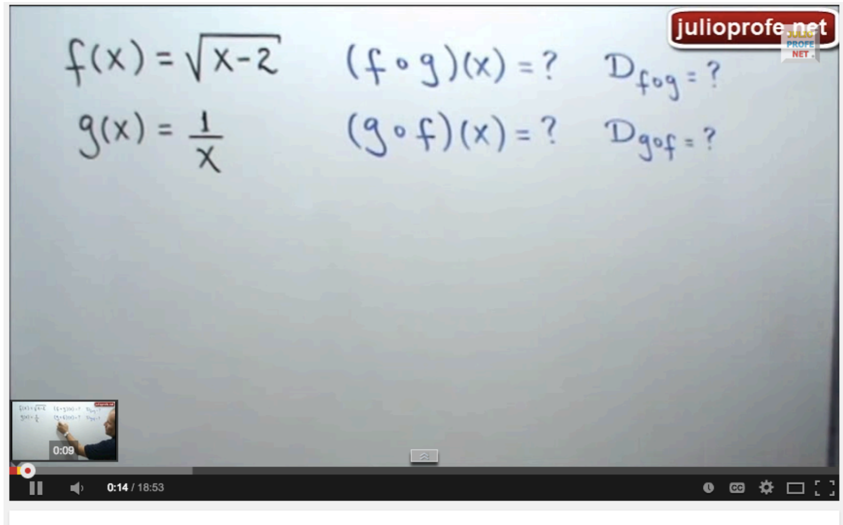


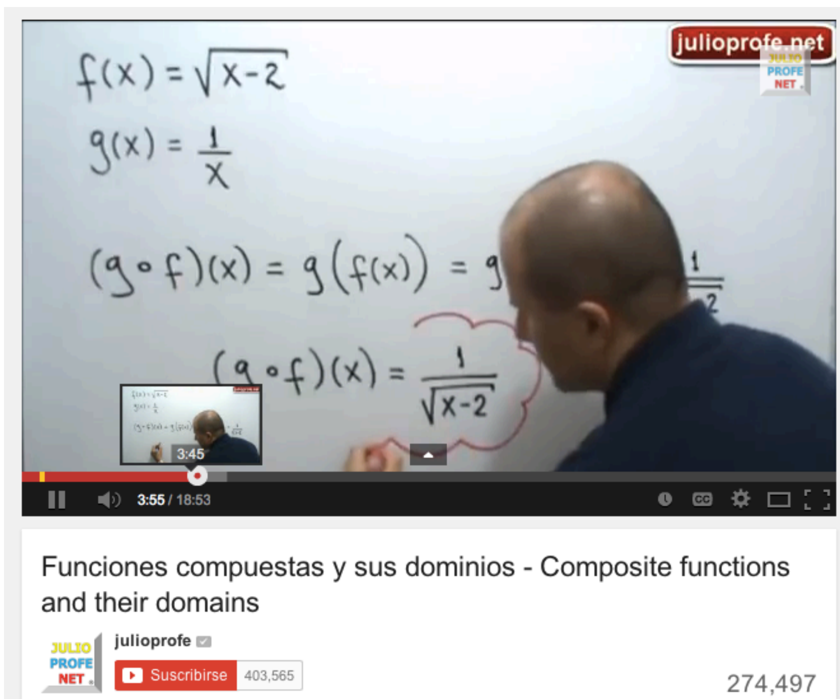


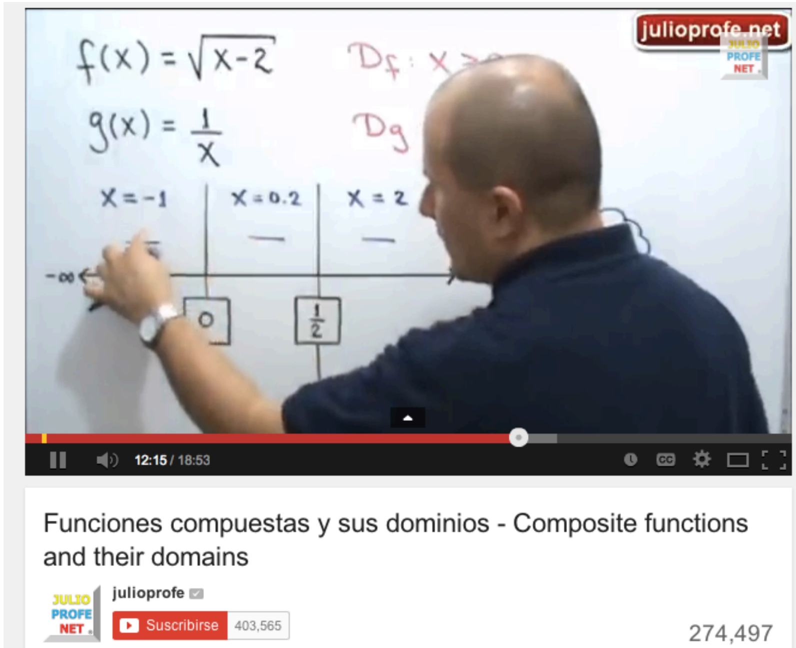


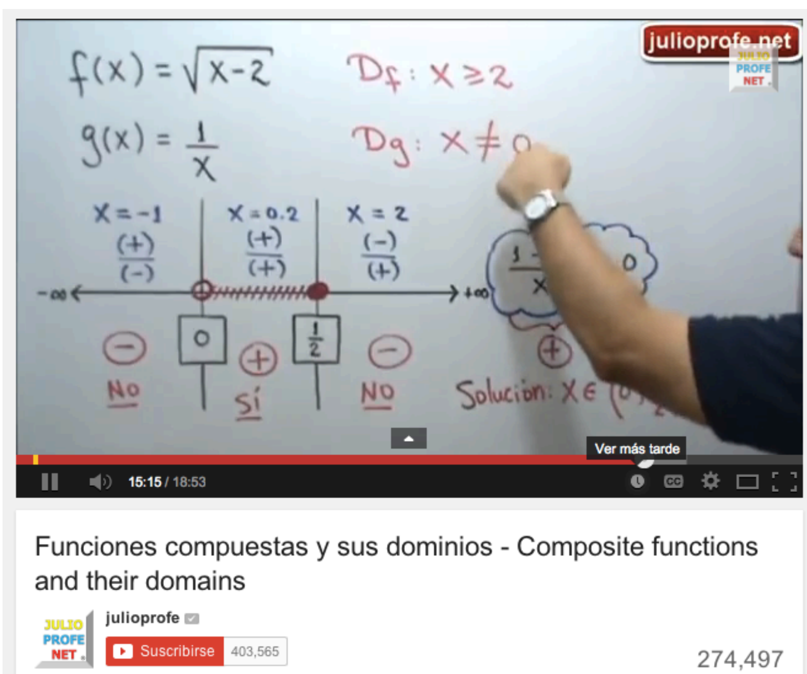
En este video el profesor define al principio es la composición de funciones incluyendo conjuntos en su explicación, así también menciona la propiedad de no conmutatividad de la composición de funciones. Posteriormente explica utilizando la computadora para escribir las ecuaciones la composición de funciones para 2 ecuaciones racionales $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x-3}{x-4}$. El profesor resuelve tanto $(f \circ g)(x)$, como $(g \circ f)(x)$ pero no se detiene en los detalles, pues explica de manera rápida y menciona que se realizan *las operaciones de rigor* particularmente cuando aborda la resta de fracciones algebraicas con un número real, tema que en lo general no manejan fácilmente los estudiantes de bachillerato; pero el profesor no se detiene en éstas operaciones.

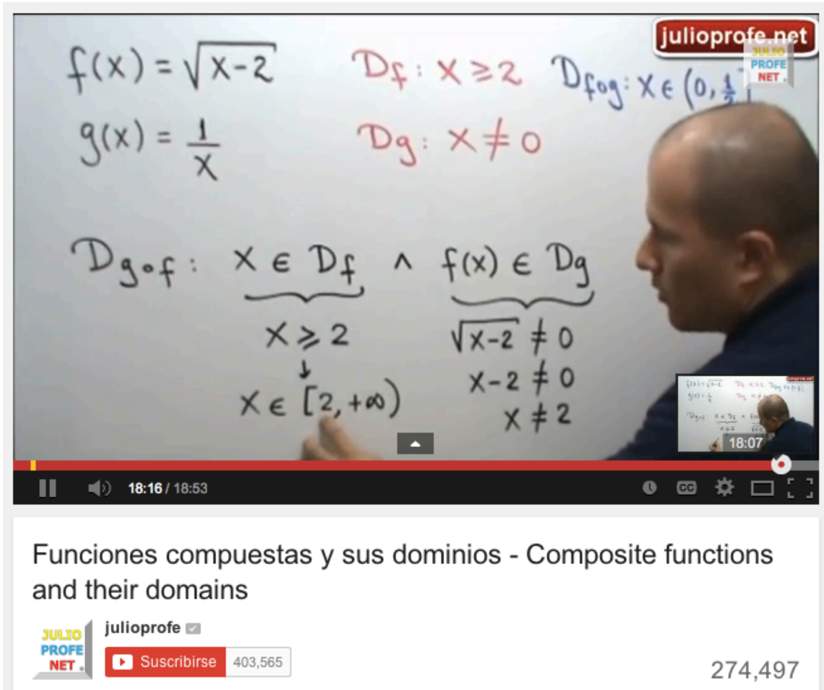
Por último la cuarta página mostrada es http://www.youtube.com/watch?v=fLiwtU-8KN4


julioprofe.net
f(x) = √(x-2)
g(x) = 1/x
(f∘g)(x) = ?
(g∘f)(x) = ?
D f∘g = ?
D g∘f = ?
0:14 / 18:53


julioprofe.net
f(x) = √(x-2)
g(x) = 1/x
(g∘f)(x) = g(f(x)) = g
(g∘f)(x) = 1/√(x-2)
3:55 / 18:53
Funciones compuestas y sus dominios - Composite functions and their domains
julioprofe
Suscribirse
403,565
274,497


julioprofe.net
f(x) = √x-2
g(x) = 1/x
Df: x
Dg
x = -1
x = 0.2
x = 2
-∞
0
1/2
12:15 / 18:53
Funciones compuestas y sus dominios - Composite functions and their domains
julioprofe
Suscribirse
403,565
274,497


julioprofe.net
f(x) = √x-2
g(x) = 1/x
Df: x ≥ 2
Dg: x ≠ 0
x = -1
(+)
(-)
x = 0.2
(+)
(+)
x = 2
(-)
(+)
-∞
+∞
0
1/2
No
Sí
No
Solución: x ∈
Ver más tarde
15:15 / 18:53
Funciones compuestas y sus dominios - Composite functions and their domains
julioprofe
Suscribirse
403,565
274,497



En este video el profesor muestra paso a paso cómo se realiza la composición de funciones de dos funciones; una raíz y una función racional, $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Después de obtener las composiciones $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$. Muestra cómo se obtiene los dominios de las composiciones obtenidas, para ello, obtiene primero el dominio de *f(x)* y *g(x)*. El profesor suele mostrar todos los pasos aritméticos o algebraicos necesarios para ir resolviendo el ejercicio; por ejemplo la resta de fracciones que involucran expresiones algebraicas, la solución de desigualdades, el manejo de signos; todo lo que va necesitando para resolver el ejercicio es explicado. El profesor señala qué es la composición de funciones a través de los dominios e imágenes de las funciones, utilizando para ello flechas y menciona que la composición de funciones es *evaluar una función en otra.*

Resumen

Los cuatro videos cumplen con el propósito de mostrar cómo resolver un ejercicio algebraico sobre composición de funciones. Si bien no manejan mucha teoría o diversidad de ejercicios, atienden el objetivo de la búsqueda por internet de consulta rápida, en donde el estudiante sepa cómo resolver un ejercicio que le dejaron; es decir la practicidad y rapidez del tema. Por lo que para profundidad del tema se deben consultar otros recursos más técnicos, que incluyan definiciones, variedad de ejemplos, como los gráficos, numéricos, en problemas de aplicación, entre otros. En *YouTube* la preponderancia de éstos videos es mostrar de manera rápida y clara el cómo se resuelve un ejercicio de composición de funciones de manera algebraica.

Tabla # 4

Resumen de ejercicios mostrados en páginas de YouTube en español para la composición de funciones

Página	*Ejercicios*
http://www.youtube.com/watch?v=36glvhtn4Kg	Las operaciones que resuelve el profesor son dos ejercicios $(f \circ g)(x)$, y $(g \circ f)(x)$, para las funciones: $f(x) = 2x^2 + 3x$ y $g(x) = 5x - 2$ en forma algebraica.
http://www.youtube.com/watch?v=l6pZGhy0hHc	Las operaciones que realiza el profesor son 5 ejercicios $f \circ g(x)$, $f \circ g(2)$, $g \circ f(x)$, $f \circ h(x)$, $h \circ f(x)$. Para $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ y $h(x) = 2^x$. Cuatro de operaciones algebraicas y uno de evaluación numérica.
http://www.youtube.com/watch?v=2Nj5oegrRDs	El profesor resuelve dos ejercicios algebraicos $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, para: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x-3}{x-4}$.
http://www.youtube.com/watch?v=fLiwtU-8KN4	El profesor resuelve 4 ejercicios, 2 de la composición de funciones $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$, para $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y dos ejercicios más para obtener los dominios de la composición de $Dom(f \circ g)(x)$ y $Dom(g \circ f)(x)$

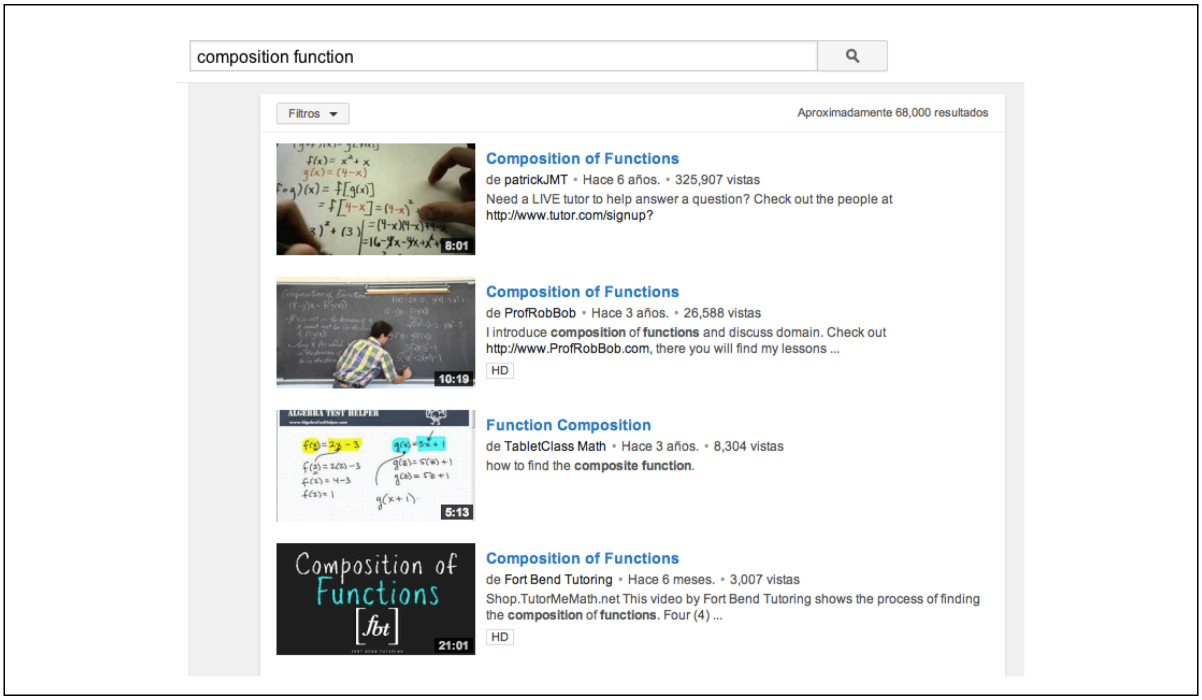
2.5. La enseñanza de la composición de funciones $f \circ g(x)$ a través de videos en YouTube en inglés

Por las mismas razones que en la sección 2.4, el análisis de los videos en inglés será sólo sobre el tipo de ejercicios que muestran para enseñar la composición de funciones.

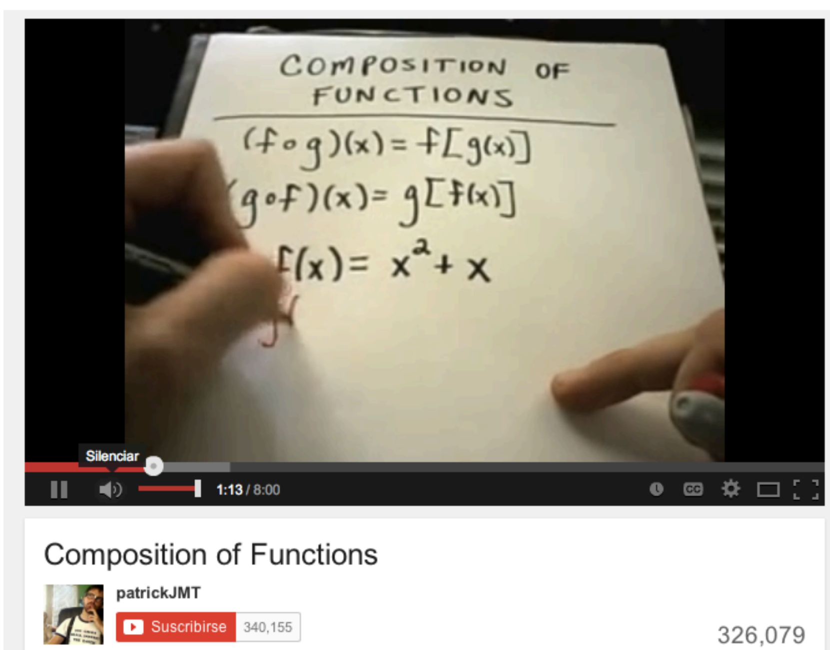
Por lo que el esquema de análisis para los videos será sólo de un eje principal:

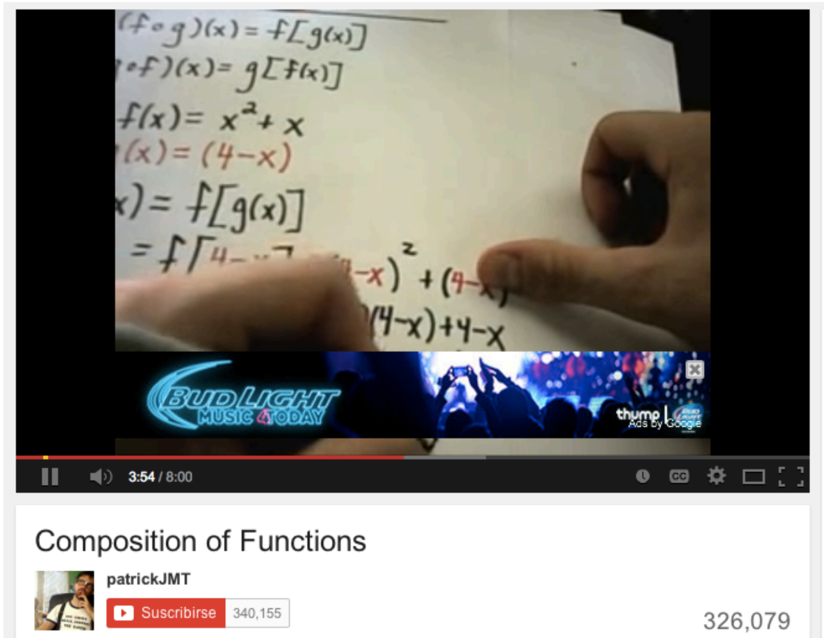
1. Tipo de ejemplos que resuelven: numéricos (tablas, coordenadas, evaluando funciones, etc.), algebraicos, gráficos y por problemas en contextos reales.

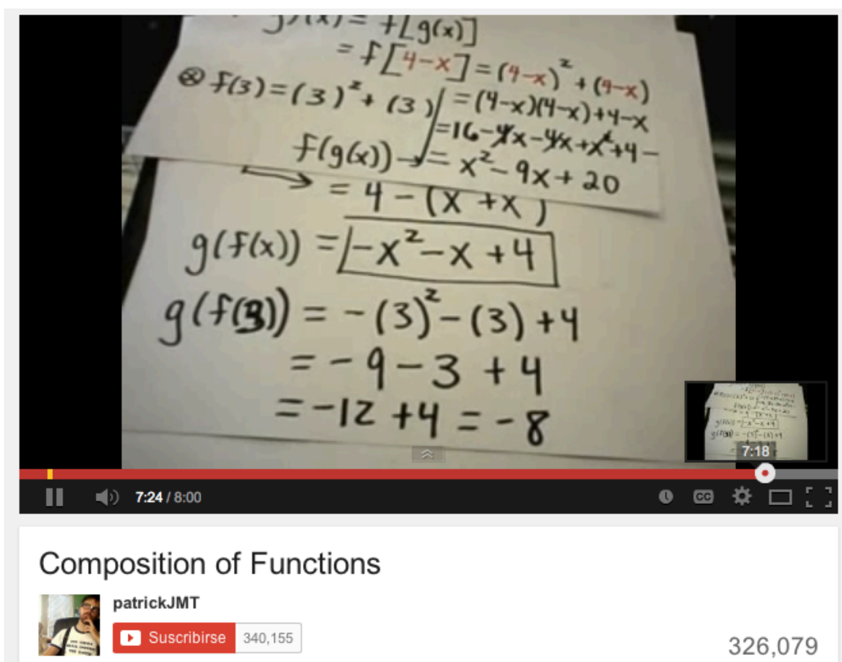
En *YouTube* en inglés la búsqueda arrojó los siguientes resultados:



El primer vínculo que aparece en el buscador de Youtube para el término: *composition function* es: https://www.youtube.com/watch?v=S4AEZEITPDo



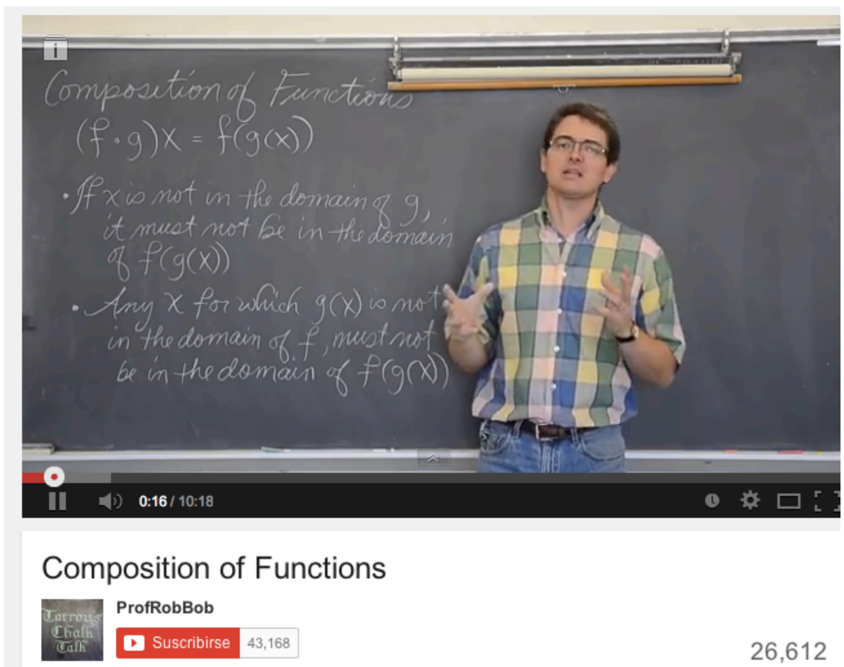


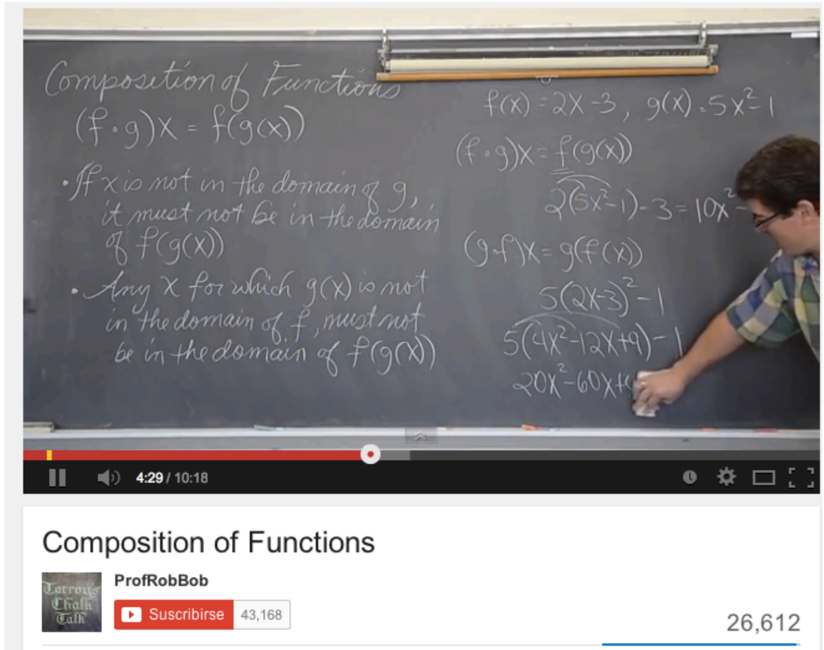


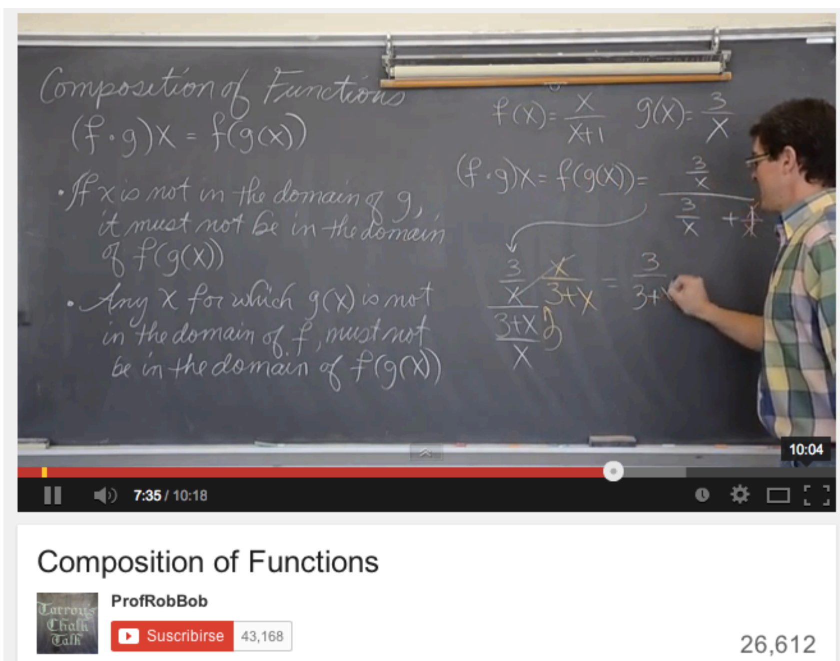
En este video, para ejemplificar la composición de funciones, el profesor utiliza una ecuación cuadrática $f(x) = x^2 + x$ y una ecuación lineal $g(x) = (4 - x)$. Emplea en la solución $f \circ g(x)$ distintos colores para cada función, $f(x)$ en color negro y $g(x)$ en color rojo. Antes de realizar propiamente la primera operación $f \circ g(x)$ escribe al margen un ejemplo numérico $f(3)$ que utilizará como símil en su explicación para sustituir toda una función en la otra función. El segundo ejemplo $g \circ f(x)$ ya no utiliza el cambio de color, ni el ejemplo numérico. Sin embargo al final de la explicación puntualiza que no es el mismo resultado $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$, y concluye sustituyendo un valor numérico en la composición *g* (*f(3)*).

Termina invitando a visitar su página de internet. En el video el profesor menciona que la composición de funciones suele ser una operación que confunde a los estudiantes.

La segunda página mostrada en *YouTube* es: http://www.youtube.com/watch?v=T6-Zdr5w_bE

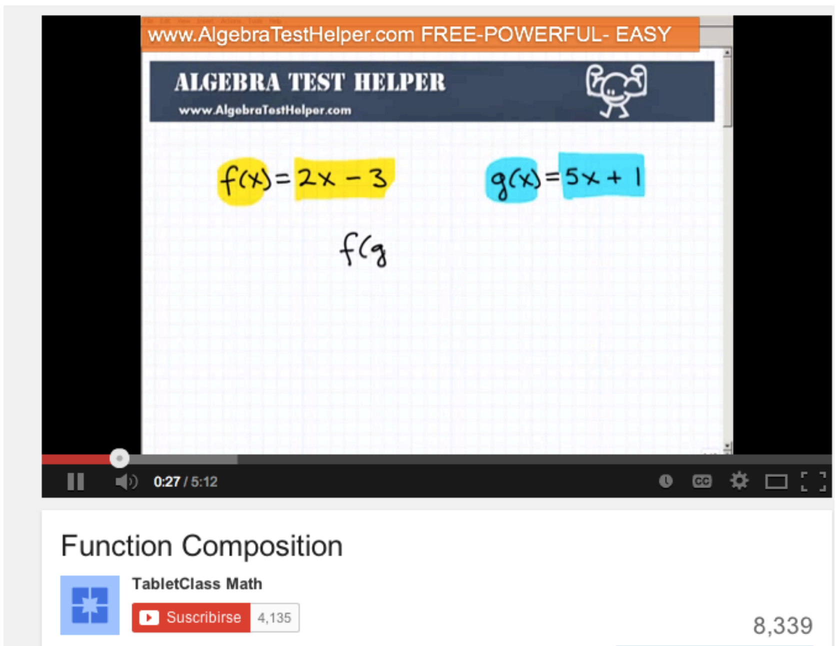


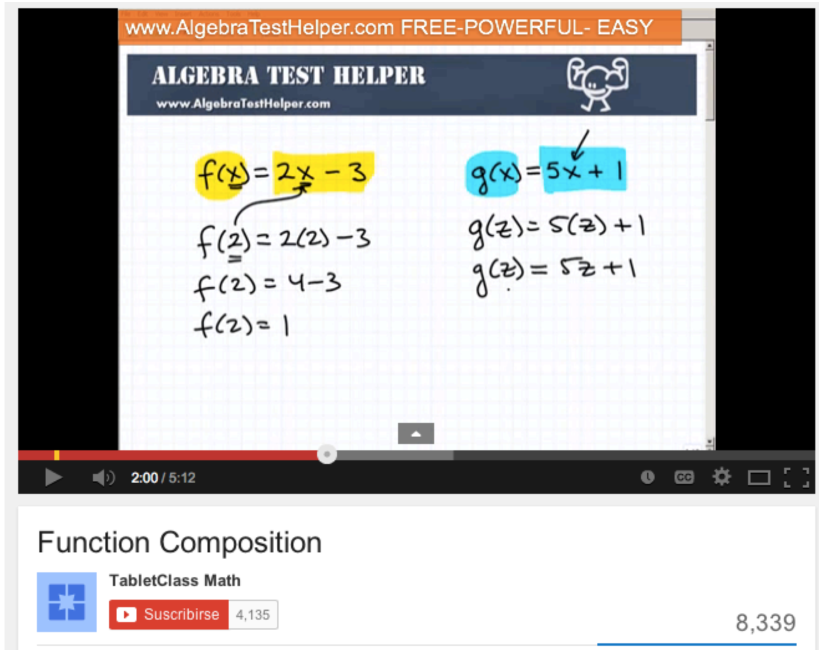


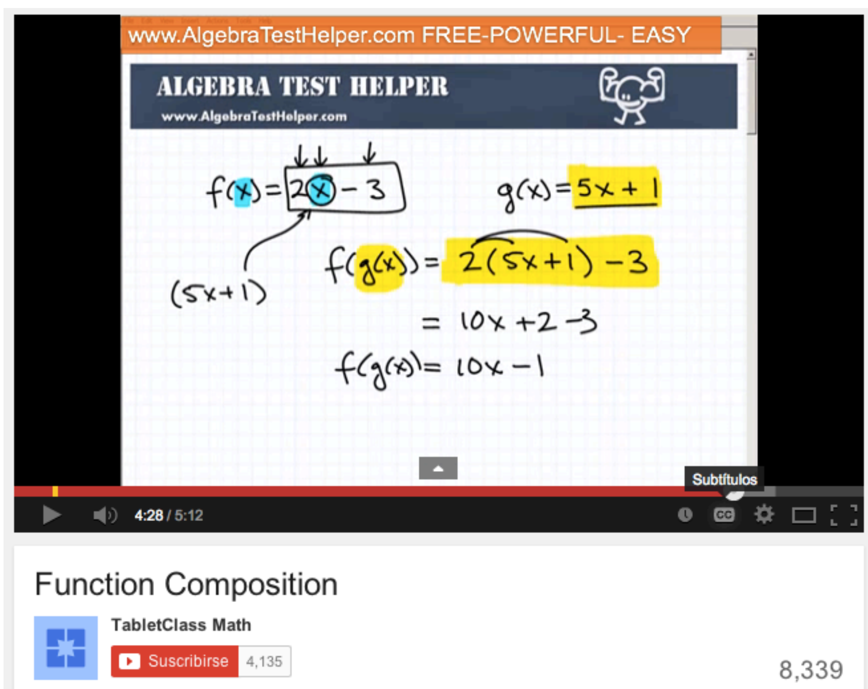


En este video el profesor presenta una definición sobre composición de funciones a través de sus dominios. El video continúa con un primer ejemplo en donde utiliza una función lineal $f(x) = 2x - 3$ y otra cuadrática $g(x) = 5x^2 - 1$, realiza las composiciones, $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$ con las funciones descritas y evalúa $(f \circ g)(2)$. Después realiza un segundo ejemplo en donde ambas funciones son racionales, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = \frac{3}{x}$, resuelve las operaciones de composición en forma algebraica $(f \circ g)x = f\big(g(x)\big)$ y $(g \circ f)x = g\big(f(x)\big)$. Hace énfasis en los valores que no pueden estar en el dominio de ambas composiciones. El profesor explica de manera rápida, no se detiene en las operaciones matemáticas y suele bromear en su video.

La tercera liga fue: http://www.youtube.com/watch?v=4z9ElTz4inQ



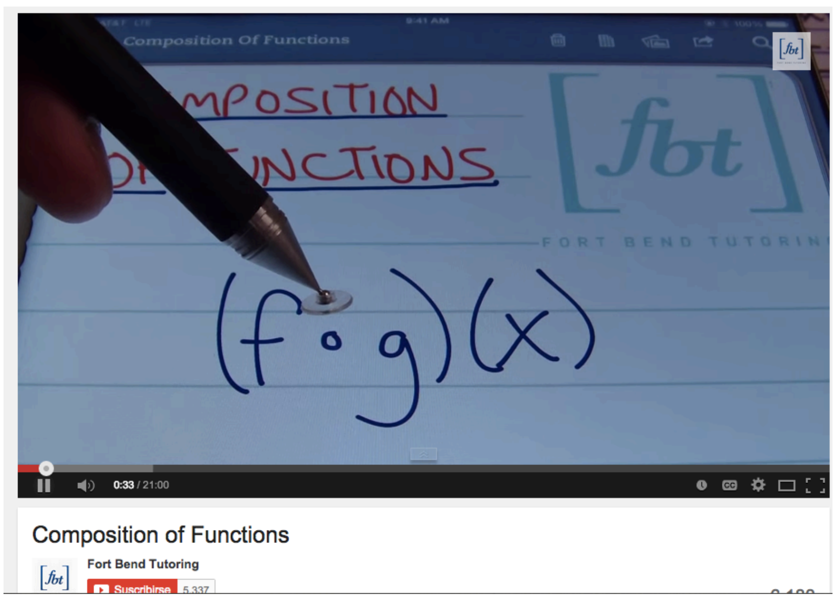


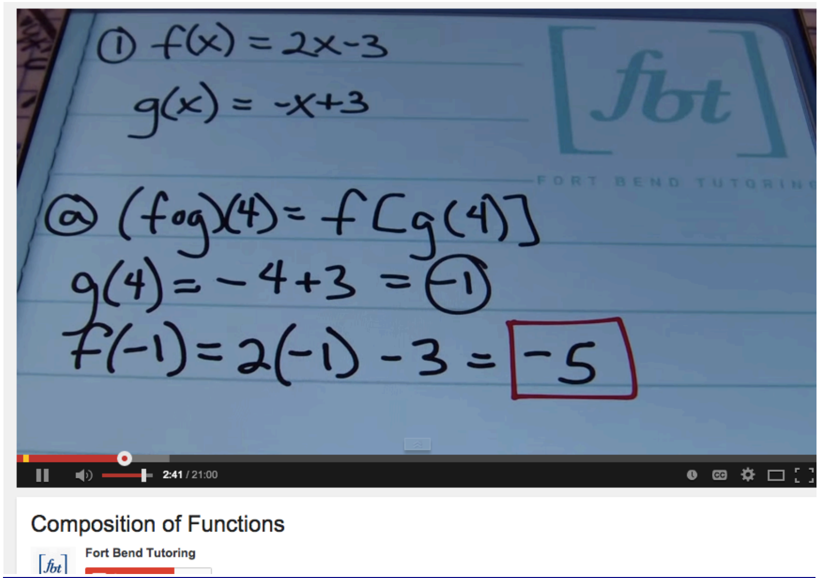


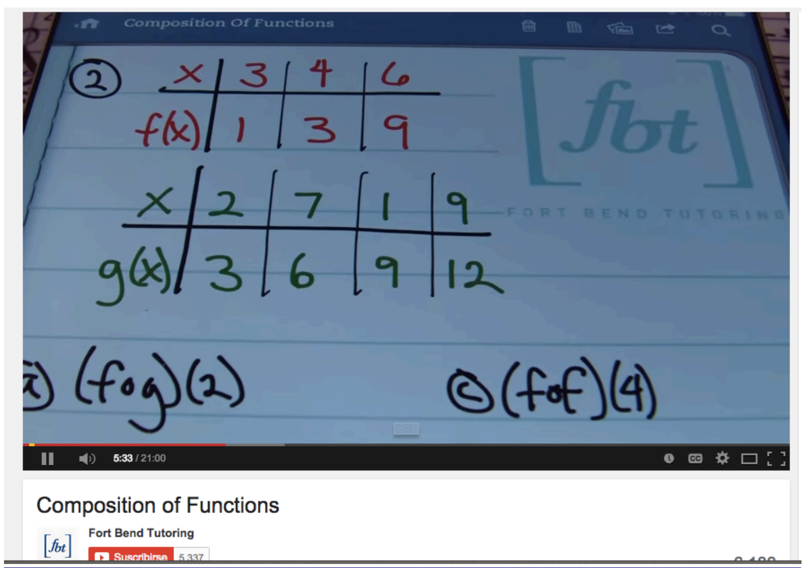
En este video el profesor, realiza la composición de funciones $f \circ g(x)$, donde *f(x)=2x-3* y *g(x)=5x+1*; ambas dos funciones lineales. El profesor comienza explicando la sustitución numérica de *x=2* en $f(x)$ ($f(2)$) y continúa con dos sustituciones algebraicas para la función *g*(*x*), como *g* (*z*) *y g*(*x+1*), con lo anterior como manejo previo de la composición de funciones, realiza con la composición $f(g(x))$. Maneja distintos colores para puntualizar el desarrollo de lo que va haciendo y enfatizar así la sustitución de una expresión algebraica en otra. Por último invita a visitar la página de internet que muestra el video en la parte superior izquierda.

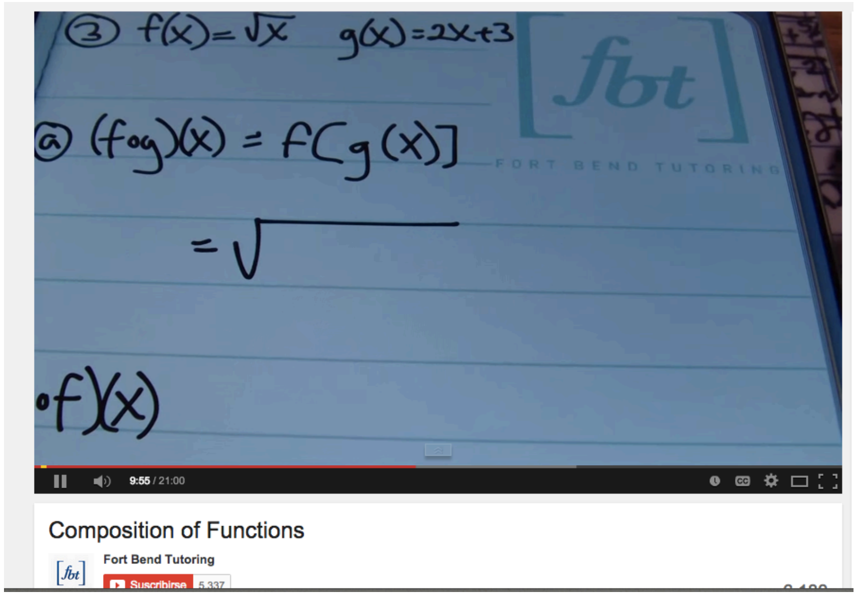
En este video el profesor comenta que la composición de funciones y su notación $f(g(x))$ es una notación complicada para los estudiantes; con risas dice que sus estudiantes cuando escribe $f(g(x))$ *se pueden volver locos.*

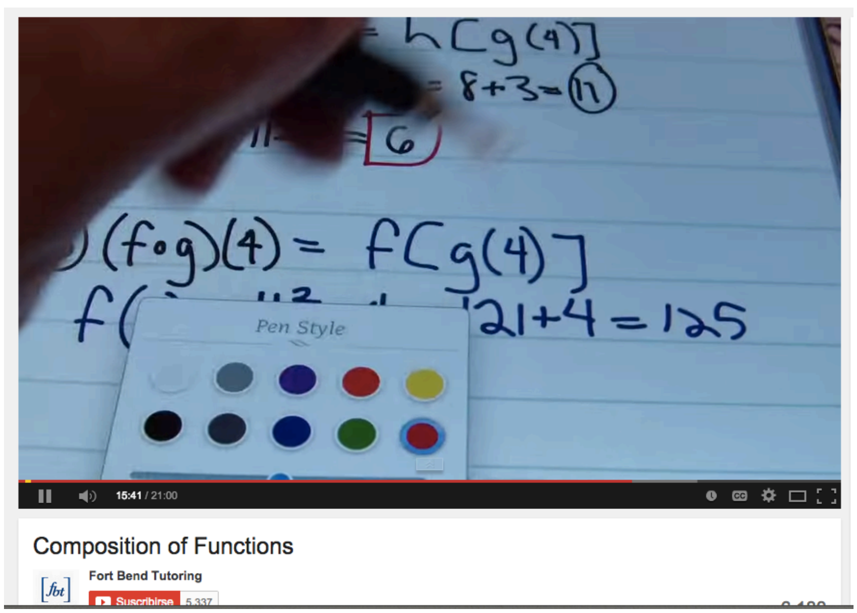
El cuarto video mostrado por Youtube en la búsqueda sobre composición de funciones en inglés es: http://www.youtube.com/watch?v=6je5ra3CbLs

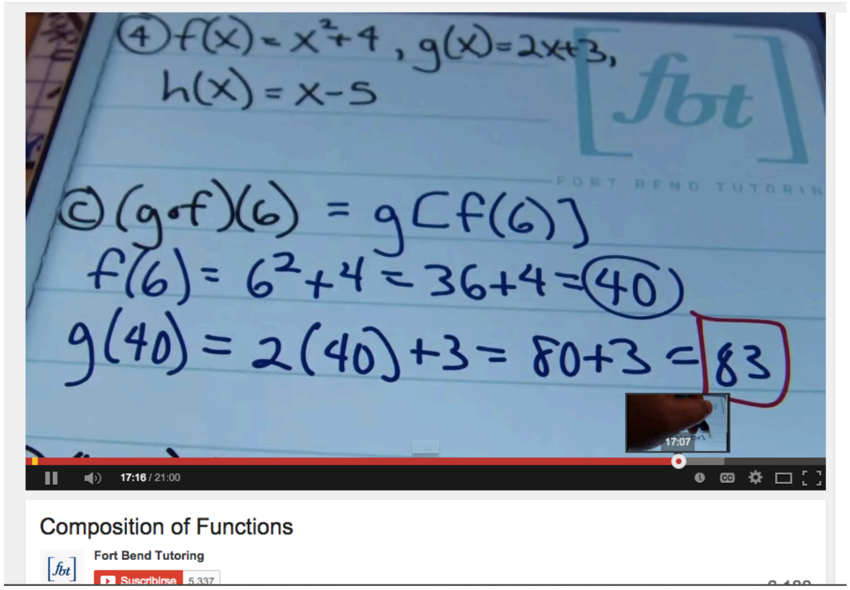


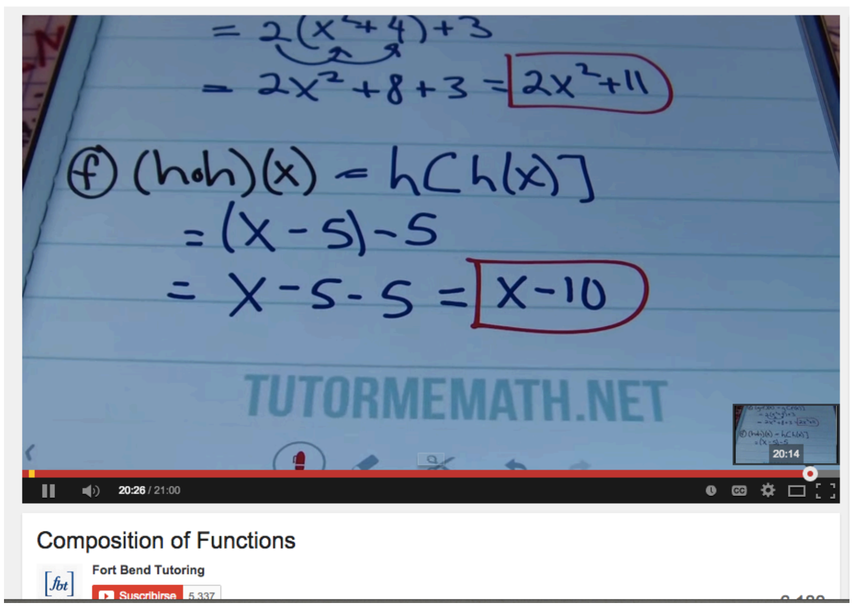

① f(x) = 2x-3
g(x) = -x+3
FORT BEND TUTORING
ⓐ (f∘g)(4) = f[g(4)]
g(4) = -4+3 = -1
f(-1) = 2(-1) - 3 = -5
2:41 / 21:00
Composition of Functions
Fort Bend Tutoring


Composition Of Functions
② x | 3 | 4 | 6
f(x) | 1 | 3 | 9
x | 2 | 7 | 1 | 9
g(x) | 3 | 6 | 9 | 12
FORT BEND TUTORING
(f∘g)(2)
ⓒ (f∘f)(4)
5:33 / 21:00
Composition of Functions
Fort Bend Tutoring
Suscribirse
5.337


③ f(x)=√x g(x)=2x+3
ⓐ (f∘g)(x) = f[g(x)]
= √
∘f)(x)
fbt
FORT BEND TUTORING
9:55 / 21:00
Composition of Functions
Fort Bend Tutoring
Suscribirse
5,337


= h[g(4)]
= 8+3=11
6
(f∘g)(4) = f[g(4)]
121+4=125
Pen Style
15:41 / 21:00
Composition of Functions
Fort Bend Tutoring
Suscribirse
5,337


④ $f(x) = x^2+4$, $g(x) = 2x+3$,
$h(x) = x-5$
fbt
FORT BEND TUTORIN
ⓒ $(g \circ f)(6) = g[f(6)]$
$f(6) = 6^2+4 = 36+4 = 40$
$g(40) = 2(40)+3 = 80+3 = \boxed{83}$
17:07
17:16 / 21:00
Composition of Functions
Fort Bend Tutoring
Suscribirse
5.337


$= 2(x^2+4)+3$
$= 2x^2+8+3 = \boxed{2x^2+11}$
ⓕ $(h \circ h)(x) = h[h(x)]$
$= (x-5)-5$
$= x-5-5 = \boxed{x-10}$
TUTORMEMATH.NET
20:14
20:26 / 21:00
Composition of Functions
Fort Bend Tutoring
Suscribirse
5.337

En este video el profesor se apoya de una tablet y muestra la operatividad algebraica de la composición de funciones a través de evaluaciones numéricas y sustituciones algebraicas.

Comienza con ejemplos numéricos para dos funciones lineales $f(x) = 2x - 3$, y $g(x) = -x + 3$, pero entra directamente a la composición resolviendo por ejemplo $f \circ g(4) = f[g(4)] = f[-1] = -5$, muestra algunos ejemplos numéricos, incluso de una función compuesta por ella misma $g \circ g(-2)$. Después utiliza el recurso del manejo de tablas para $f(x)$ y $g(x)$ y va mostrando ejemplos de cómo se resuelve la composición utilizando para ello tablas. Continúa con la composición de funciones en forma algebraica, en donde $f(x)$ es una raíz y $g(x)$ es una ecuación lineal, $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x + 3$. Por último escribe tres ecuaciones $f(x) = x^2 + 4,\ g(x) = 2x + 3,\ y\ \ h(x) = x - 5$, compone éstas funciones con ejemplos numéricos $h \circ g(4)$, $f \circ g(4)$ y en forma algebraica. Al final de su video da las gracias y muestra direcciones de *Facebook* y *Twitter.*

Resumen

Tabla # 5

Resumen de ejercicios mostrados en páginas de YouTube en inglés para la composición de funciones

Página	*Ejercicios*
https://www.youtube.com/watch?v=S4AEZElTPDo	El profesor resuelve 4 ejercicios, el primero es evaluar *f(3)*, 2 ejercicios más que corresponden a la composición de funciones $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$ y el resultado numérico de la composición *g(f(3))*.Para las funciones $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = (4 - x)$. Hace énfasis en la no conmutatividad de la composición de funciones.
http://www.youtube.com/watch?v=T6-Zdr5w_bE	El profesor resuelve 5 ejercicios sobre composición de funciones, los primeros 3 son $f \circ g(x)$, $(f \circ g)(2)$ y $g \circ f(x)$. Para las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = 5x^2 - 1$. Resolvió 2 ejemplos más, en donde enfatizó los dominios de la composición de funciones $f \circ g(x)$, y de $g \circ f(x)$. Para las funciones racionales, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = \frac{3}{x}$.
http://www.youtube.com/watch?v=4z9ElTz4inQ	El profesor resuelve de manera previa 3 sustituciones, la primera numérica (*f(2))* y las dos siguientes algebraicas *g(z) y g(x+1)*, para concluir con la composición de funciones $f \circ g(x) = f(g(x))$. Para las ecuaciones lineales *f(x)=2x-3* y *g(x)=5x+1*.
http://www.youtube.com/watch?v=6je5ra3CbLs	En este video el profesor resuelve varios ejercicios, en donde utiliza sustitución numérica, tablas y álgebra. Para los primeros ejercicios evalúa de manera numérica $f \circ g(4)$, $g \circ g(-2)$. Para las fuciones lineales: $f(x) = 2x - 3$, y $g(x) = -x + 3$, Resuelve ejemplos con tablas y después ejemplos algebraicos para las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x + 3$. Resuelve más ejercicios de evaluación numérica $h \circ g(4)$, $f \circ g(4)$,y algebraica para las funciones $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = 2x + 3$, y $h(x) = x - 5$.

Capítulo 3. Diseño de la secuencia didáctica

La enseña matemáticas en el salón de clases usualmente sigue el siguiente esquema: el profesor o profesora explica el tema, resuelve algunos ejercicios, posteriormente los estudiantes realizan distintos ejercicios, actividades o problemas sugeridos por el profesor, se revisan los resultados de éstos y en caso de ser necesario se solicitan más ejercicios o se continúa con un tema nuevo. Con nuestra propuesta queremos provocar una ruptura, un cambio de enfoque, por lo que desarrollamos una propuesta diferente y lo pusimos en practica de forma experimental.

El tema de composición de funciones suele enseñarse de forma operativa-algebraica, tal como pudimos observar en el *capítulo 2* sobre *la enseñanza de la composición de funciones*. Nuestro propósito fue generar una secuencia didáctica con varias actividades sobre el tema de composición de funciones, con la característica de plantear analogías con las matemáticas y otras áreas del conocimiento como la biología, conexiones entre conjuntos con elementos numéricos, transformaciones de la composición de funciones y sus gráficas, así como el manejo algorítmico del álgebra.

El objetivo de generar éstas actividades de trabajo para los estudiantes es buscar diversas representaciones para la composición de funciones $f \circ g(x)$; de tal manera que los estudiantes puedan comprender mejor alguna de éstas y puedan así darle mayor significado, comprensión y manejo al tema. Para ello incorporamos el aprendizaje colaborativo, el análisis por problemas, la construcción preliminar por parte de los estudiantes del concepto de composición de funciones, así como la estrategia de búsqueda y relación.

Planteamiento general de las actividades

La *primera actividad* considera al estudiante como personaje activo en el proceso de solución de las actividades de aprendizaje; para ello se considera fundamental no darles una explicación previa sobre la composición de funciones. Se les presenta solamente la actividad comentando que es un tema nuevo y que lo deben trabajar en pares.

La primera actividad desarrolla la asociación y relación entre temas matemáticos y un tema biológico. La segunda explora la búsqueda, construcción y organización de la información numérica, presentada como conjuntos. La tercera actividad relaciona las transformaciones de las funciones compuestas con sus ecuaciones y viceversa. La cuarta actividad propone la construcción de las funciones compuestas en forma algebraica, así como determinar las funciones generadoras de una función compuesta.

Las actividades se desarrollaron considerando la interacción de los estudiantes en trabajo colaborativo, a fin de promover el diálogo, el intercambio de experiencias, puntos de vista, y estrategias de solución.

Primera actividad (Ejercicios de análisis en contextos reales)

En la implementación de la primera actividad los estudiantes no recibieron ninguna orientación sobre el tema de composición de funciones, ni sobre su notación. No obstante, esto no es un tema nuevo pues los alumnos han estudiado las funciones durante el semestre, y han analizado características de las funciones como su dominio, rango, gráficas. Sobre este último aspecto, los estudiantes han trabajado el análisis de los efectos gráficos al variar los parámetros en la forma general de las funciones. Por ejemplo al partir de una función cuadrática $f(x) = x^2$, tenemos los siguientes casos:

- $f(x) = x^2 + 5$ se genera una translación vertical respecto a la gráfica de $f(x) = x^2$ de 5 unidades en vertical (sobre el eje *y*).
- $f(x) = (x - 3)^2$ se obtiene un desplazamiento horizontal de 3 unidades hacia la derecha (sobre el eje *x*) respecto a la gráfica de $f(x) = x^2$.
- $f(x) = -2x^2$ se observan dos cambios respecto a la gráfica $f(x) = x^2$, primero una reflexión con respecto al eje *x* dado por el signo menos (-) y se angosta la gráfica por el 2, pues crece y decrece más rápido en relación a $f(x) = x^2$.

Partiendo de éstos conocimientos preliminares, se desarrollo una actividad didáctica para asociar los conceptos matemáticos previamente estudiados con conceptos biológicos, lo cual condujo a una situación sobre la *"cadena alimentaria"*.

Se propuso que los estudiantes desarrollaran la actividad en pares, a fin de favorecer un diálogo e intercambiar puntos de vista sobre la situación. La primer actividad para los estudiantes fue que leyeran la introducción sobre la *cadena alimentaria*, posteriormente contestar una serie de preguntas encaminadas a asociar la relación lineal y de interrelación entre los protagonistas, que se observa en la cadena alimentaria y el tema de funciones. Este enfoque tiene dos características de innovación didáctica, la primera es romper con el esquema original de la enseña del tema de composición de funciones, que usualmente es a partir de la definición de composición de funciones, explicar su notación y resolver de forma colectiva ejercicios algebraicos principalmente, para posteriormente pedirle al estudiante el resolver otros ejercicios similares o más complejos. En segundo lugar, se propone problematizar una situación real y relacionarla con los objetos matemáticos, lo cual conduce a analizar el contexto, las condiciones y crear supuestos, argumentos para crear un modelo.

Segunda actividad (Aritmética)

Está actividad es preponderantemente numérica y se trabajó con diagramas sagitales. Considerando tres pares de conjuntos, dos colocados arriba y posibles generadores de la composición y el tercer par de conjuntos dibujado debajo de los otros dos, que en el caso de existir la composición sería este último el conjunto composición. Se pidió que lo estudiantes realizaran las siguientes 4 actividades:

1. Identificar una composición cuya relación era directa. La imagen del primer conjunto $f(x)$ tenía los mismos valores numéricos que el dominio de la segunda función expuesta x, aunque en diferente orden.
2. En la segunda actividad no había una composición de funciones, pues los elementos de los conjuntos de arriba, no generaban el tercer conjunto.
3. En la tercera actividad, se tomó el dominio del segundo conjunto g como el dominio del conjunto composición. Para esta actividad se consideró incorporar imágenes para favorecer un análisis visual. Se utilizaron distintas formas geométricas para referirse al dominio e imagen de los dos primeros conjuntos (conjuntos generadores de la composición). Había 3 figuras formando los conjuntos. Para el primer

conjunto se tenía x (hexágono) y $f(x)$ (ovalo) y para el segundo conjunto x (rectángulo) y $g(x)$ (hexágono). El tercer conjunto, que es propiamente la composición, se tiene x (rectángulo) y $f(g(x))$ (ovalo). Para esta actividad se utilizó por primera vez la notación de composición de funciones $f(g(x))$.

4. En la cuarta actividad se utilizó una relación directa como en el primer caso, (secuencia aritmética) pero el orden de los elementos de cada conjunto eran los mismos y se utilizó también, como en el tercer caso, 3 figuras distintas para que la relación fuera con figuras. Se utilizó x (hexágono) $f(x)$ (triángulo) y para el segundo conjunto x (triángulo) y $g(x)$ (corazón), de lo que se obtenía para el tercer conjunto x (hexágono) y $g(f(x))$ (corazón).

En la primera de éstas cuatro actividades, los estudiantes aún no habían recibido una explicación sobre la composición de funciones. La actividad se trabajó por equipos de 4 personas, y se les pidió que buscarán una conexión de tal manera que, a través de los dos conjuntos, definieran un tercer conjunto.

La razón de que los diagramas sagitales contarán con sólo 3 elementos, fue para no saturar de información a los estudiantes. La intención de esta segunda actividad es que los estudiantes encuentren la conexión entre 3 pares de conjuntos; en donde los dos primeros conjuntos generan el tercer par de conjuntos. Cada una de las 4 actividades consiste en 3 pares de conjuntos, en donde cada par de conjuntos tiene su dominio e imagen, y contiene sólo 3 elementos numéricos cada uno. La intención es hacer que los estudiantes encuentren la forma de generar un par de conjuntos a través de los otros dos pares de conjuntos. Los dos últimos ejercicios hacen uso de la misma figura, cuando el conjunto contiene a los mismos elementos. La idea de sólo considerar 3 elementos numéricos por conjunto, es hacer la búsqueda y conexión menos complicada que si cada conjunto contiene a 4 o más elementos.

Después de la primera actividad se les insistió a los estudiantes buscar las relaciones entre los números de los conjuntos, pues la primera de esta actividad causó mucha inquietud entre los estudiantes, ya que no tenían un antecedente de cómo realizar esa búsqueda y como generalmente la resolución de ejercicios por parte de los estudiantes se da después de una exposición y ejemplo que hace el profesor, esta forma de trabajo rompía su esquema base de estudio matemático.

Tercera actividad (Geometría)

Como los estudiantes ya habían trabajado las transformaciones de funciones en forma geométrica (translaciones horizontales, verticales, desplazamientos verticales, reflexiones, homotecias, etc.). Se trató de que el estudiante observara los cambios gráficos de una composición de funciones y que notará cuál era la diferencia gráfica de componer primero $f \circ g(x)$, en relación a $g \circ f(x)$, para ello se buscaron ecuaciones lineales y cuadráticas, para no complicar la observación de los cambios gráficos al componer primero $g(x)$ ó $f(x)$.

La actividad consta de 4 actividades básicas.

1. En la primera actividad se les mostró 4 gráficas; las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que generan la composición y la tercera y cuarta gráfica las funciones compuestas $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$.
2. En la segunda actividad, se les proporcionó la descripción verbal de las gráficas (no las fórmulas) con sus respectivas gráficas y se les pidió que utilizando el ejercicio anterior dedujeran cuál gráfica corresponde a la composición $f \circ g(x)$ y cuál a $g \circ f(x)$.
3. La tercera actividad consistió en componer $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$, a partir de una tabla de datos numéricos donde se presentaron los valores de $f(x)$ y $g(x)$. Para esta actividad se les explicó tres ejemplos numéricos en el pizarrón.
4. La cuarta actividad consistió en mostrar dos gráficas $f(x)$ y $g(x)$ y a través de ellas realizar la composición numérica que se solicitaba; por ejemplo obtener el valor numérico de $f(g(-1))$, a partir de las gráficas $f(x)$ y $g(x)$. Se les solicitó graficar $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$, utilizando los valores encontrados. Para esta actividad también se les explicó de manera rápida cómo se podía leer y resolver un ejercicios del estilo $f(g(-1))$.

Cuarta actividad (Álgebra)

La *cuarta y última actividad* corresponde propiamente al manejo algorítmico- algebraico del tema de composición de funciones. Esta actividad corresponde a la operación de composición de funciones en forma algebraica, incluimos 3 ejercicios en donde el estudiante propusiera cuáles podrían ser las funciones que originaron a una función compuesta, para éste ejercicio no se les proporciona un ejemplo previo. Esta actividad corresponde al cierre de las actividades, para hablar después de las conclusiones, dudas y otros ejemplos. Esta actividad será resuelta por los estudiantes de manera individual.

3.1 Descripción de la actividad 1: Funciones-relaciones y la cadena alimentaria

La primera actividad está diseñada con la intención de que el estudiante use sus conocimientos previos sobre funciones, dominios e imágenes y formule una primer aproximación al concepto de composición de funciones $f \circ g(x)$ a través de un tema biológico, en este caso una lectura sobre *la cadena alimentaria*. Se consideró este tema ya que corresponde a una representación de la composición de funciones de tipo lineal.

Análisis de la primera actividad

Con el objetivo de promover en el estudiante el análisis y relación de tópicos matemáticos a través de contextos reales; se les entregó una lectura a los estudiantes por binas, para que a partir de la información contenida en la lectura, los estudiantes pudieran responder las preguntas.

A continuación se muestra la primera actividad, sus preguntas, sus respuestas y los objetivos educativos buscados.

Actividad 1

Funciones-relaciones y la cadena alimentaria

Instrucciones:

Esta actividad es introductoria a un tema nuevo de funciones; por lo que ha sido adaptada para que tú explores y realices analogías con un tema biológico y las matemáticas.

Lee el siguiente resumen sobre la cadena alimentaria y contesta las preguntas con uno de tus compañeros (binas o pares). Requerirán leer con cuidado y asociarlo con el tema de funciones y relaciones.

La cadena alimentaria[6]

Las cadenas y redes alimentarias describen las relaciones de alimentación dentro de las comunidades; con el fin de ilustrar quién se alimenta de quién en una comunidad, es común identificar un representante de cada nivel trófico (literalmente "nivel de alimentación") que se alimenta de un representante del nivel inmediatamente inferior. Esta relación lineal de alimentación se conoce como ***cadena alimentaria (CA).*** Los distintos ecosistemas tienen cadenas alimentarias radicalmente diferentes y más complejos.

La **cadena alimentaria, también conocida como cadena trófica**, es el **proceso por el cual se transfiere energía alimenticia por medio de seres vivos** en donde *cada uno de estos se alimenta del anterior y es alimento del siguiente.*

Cada cadena alimentaria tiene su **inicio en un vegetal o en un organismo autótrofo**; es decir que es capaz de fabricar su propio alimento ya sea sintetizando sustancias orgánicas, usando energía solar o mediante el uso de sustancia y reacciones químicas, *ejemplo: las plantas y el fitoplancton.* A éstos los llamaremos **productores (P)**

El resto de los integrantes de la cadena alimenticia son denominados como **los consumidores (C).** El **consumidor primario o herbívoro (C1)** es quien se alimenta del organismo autótrofo; es decir, del productor o la planta, *ejemplo: saltamontes, jirafas, vaca, conejo, caballo, etc*. Quien se

[6] Audesirk, T., Audesirk, G. y Byers, B. (2008). *Biología la vida en la Tierra* (8va. ed). México: Pearson Prentice Hall, 560.

alimenta del consumidor primario es el **consumidor secundario (C2)** que generalmente es **carnívoro,** *ejemplo: araña, águila, gato, león, tiburón, lobo, etc.* mientras el **tercer consumidor (C3)** es un **omnívoro** *(se alimenta de plantas y animales), ejemplo: el hombre, cerdo, osos, gallina, peces, etc.)* o un **supercarnívoro.**

La cadena se cierra con la actuación de los **descomponedores (D)**, *ejemplo: hongos y bacterias*, quienes actúan sobre organismos muertos, descomponiendo la materia orgánica y transformándola de nuevo en inorgánica para devolverla al suelo donde pueden ser útiles para las plantas y a la atmósfera; y así, dar inicio otra vez a la cadena. Así cada organismo depende del alimento que obtiene a partir del eslabón inferior de la cadena.

Algunos ejemplos de cadenas alimentarias son las siguientes:

Cadena del organismo autótrofo al consumidor secundario carnívoro

1) Planta (P) Mariposa (C1) Rana (C2) Serpiente (C3)

Imagen obtenida de http://juliethcallejascoral.blogspot.mx/2012_05_01_archive.html

Cadena del consumidor secundario, al organismo autótrofo

2) Gaviotas (C2) Peces (C1) Fitoplancton (P)

Imagen obtenida de ***http://tracecc.lacoctelera.net/***

Esquema sobre la cadena alimentaria

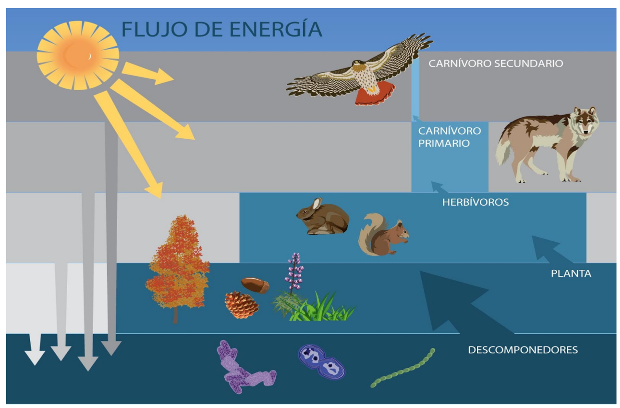


Imagen obtenida de http://juliethcallejascoral.blogspot.mx/2012_05_01_archive.html

Esta lectura contiene las relaciones esquemáticas básicas y la información necesaria para que los estudiantes respondan a las siguientes preguntas.

Contesta las siguientes preguntas en hojas a parte.

Lee las veces que sea necesaria la lectura anterior para contestar las preguntas. Recuerda que una función es una relación entre dos conjuntos o variables (variable dependiente y variable independiente) en donde al primer conjunto se le conoce con el nombre de Dominio y a cada elemento que pertenece al dominio le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto llamado contradominio-codominio-rango-imagen.

1) Da dos ejemplos de cadenas alimentarias desde el productor (P) hasta el consumidor secundario carnívoro (C2). Dibuja a cada actor como en un conjunto relacionándolos con flechas en caso de que un elemento de ese conjunto dependa de un elemento del conjunto anterior.

Respuesta.- a) zanahoria → conejo → hombre

b) algas → peces → tiburón

En esta pregunta se intenta que los estudiantes comiencen a identificar los elementos involucrados: productor, consumidor primario (herbívoro) y consumidor secundario (carnívoro) para que a través de los esquemas con flechas vayan identificando una relación de dependencia entre los elementos involucrados. Dado que el recurso gráfico de las flechas es común utilizarlo en los diagramas sagitales o conjuntos, mostrando así una relación entre los elementos de un conjunto y otro.

2) Considerando la cadena alimentaria como una relación de funcionalidad en donde un ser vivo depende de otro para vivir. ¿Quién dirías que representa al dominio en esta cadena y porqué?

Respuesta.- El dominio es el productor, por ser el organismo autótrofo, ya que no depende que otro organismo (salvo del sol) para generar su propia comida. Por lo que se considera la variable independiente.

Para esta pregunta ya se menciona de manera explícita la relación de funcionalidad entre un ser vivo y otro; con ello se quiere que los estudiantes comiencen a asociar entre un dominio matemático, que corresponde al elemento independiente de una función y el primer organismo de la cadena alimentaria, como lo es el productor, que aunque depende del sol, al ser un organismo autótrofo se puede considerar como el dominio o la variable independiente de la cadena alimentaria.

3) Considerando hasta el primer nivel de los consumidores a los herbívoros agrupa a éstos 2 componentes (consumidor primario- productor) de la cadena alimentaria como dominio e imagen.

Respuesta.- El productor es el dominio y el consumidor primario sería la imagen.

Para esta pregunta, se colocó entre paréntesis *(consumidor primario- productor),* en el orden contrario, para no inducir la respuesta correcta. En esta pregunta se tiene como intención que el estudiante observe la relación de dependencia entre los dos organismos involucrados. Al observar quien depende de quien, pueda encontrar de acuerdo a una relación matemática quien sería el dominio (variable independiente) y quien la imagen (variable dependiente); es decir, en este caso quien es el organismo independiente y quien el organismo dependiente.

4) Considerando hasta el segundo nivel de los consumidores (carnívoros), ¿Quién dirías que es el dominio del consumidor secundario o carnívoro?

Repuesta.- El herbívoro o consumidor primario, de quien depende directamente.

Esta pregunta tiene la intención de que el estudiante vaya observando que al ampliar la relación ahora para 3 organismos (productor, consumidor primario y consumidor secundario), el organismo que es imagen para la pregunta 3 (consumidor primario), se convierte ahora en el dominio del consumidor secundario. Lo que significa que el ser dominio o imagen corresponde al tipo de relación que se está trabajando.

5) ¿Cómo describirías la relación que hay entre el carnívoro y el productor, considerando la relación de dependencia entre un organismo y otro?

Repuesta.- El carnívoro depende del productor a través del herbívoro; de quien obtiene directamente sus beneficios.

Esta pregunta pretende hacer que el estudiante comience a observar que puede existir una relación de dominio principal que no es precisamente el anterior directo. Considerando a los tres primeros organismos involucrados en la cadena alimentaria (productor-herbívoro-carnívoro), el herbívoro representa el dominio directo del carnívoro, pero también a la imagen del productor.

6) En relación a la pregunta 5, ¿Crees que ese tipo de relación se pueda dar en el tema de funciones ?

a) Si tu respuesta es sí ¿cómo sería esa relación entre el productor, primer consumidor y segundo

consumidor, considerando dominios y contradominios? *b) Si tu respuesta es no ¿porqué no se puede dar una relación entre el productor, primer consumidor y segundo consumidor, considerando dominios y contradominios?*

Respuesta.- Sí,a través de la conexión del herbívoro se da la relación entre el carnívoro y el productor.

Dominio ***Imagen=Nuevo dominio*** ***Imagen***

Dominio 1 → *Imagen del dominio 1 = Dominio2* → *Imagen del dominio 2*

Productor → *Herbívoro* → *Carnívoro*

Matemáticamente <u>(aunque no se pretendía que los estudiantes pudieran contestarlo de la siguiente manera)</u>

Dadas dos funciones $f(x)$ *y* $g(x)$, *se da la composición de funciones* $g(f(x))$ *como:*

x Dominio→ f(x) Imagen =nuevo dominio de la función g → g(f(x)) composición de "f" en "g"

Esta pregunta es el salto conceptual al tema de composición de funciones. Aunque no se esperaba que los estudiantes pudieran contestarla fácilmente. Sin embargo generaba una duda que involucra directamente el concepto de composición de funciones.

3.2 Descripción de la actividad 2: La composición de funciones y la aritmética

La experiencia escolar que tienen los estudiantes en matemáticas es mayor en aritmética que en otras ramas de las matemáticas. Esto se debe principalmente a que comienzan a estudiar el concepto de cantidad y número, desde una etapa temprana como lo es preescolar. La intención de diseñar una segunda actividad de manera numérica se debe a que los estudiantes en general presentan mayor comprensión u operatividad de conceptos o ejercicios matemáticos, si éstos se manejan de manera numérica o aritmética en comparación con los ejercicios algebraicos o geométricos.

Para esta actividad, los estudiantes continúan sin haber recibido una explicación previa de la composición de funciones, por lo que sólo con el conocimiento de funciones que tiene, sobre dominios y rangos trataran de contestar estos ejercicios.

La intención principal de estos 4 ejercicios es hacer que el estudiante realice observaciones, búsquedas y conexiones entre diferentes conjuntos y transmitir éstas a sus compañeros de equipo, así como escuchar las opiniones y observaciones de sus compañeros de equipo, para llegar a una respuesta común. De esta manera el estudiante es un sujeto activo y social en su proceso de aprendizaje.

Se transcriben los cuatro ejercicios de la actividad 2, junto con sus respectivas respuestas y objetivos educativos.

Esta actividad está considerada para equipos de 4 personas.

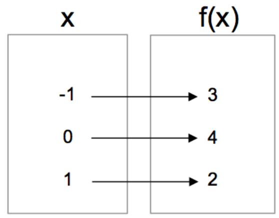
Actividad 2

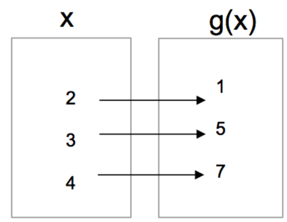
La composición de funciones y la aritmética

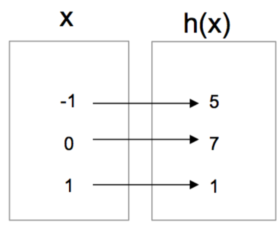
Instrucciones:

La siguiente actividad tiene como objetivo que observes y trabajes con los dominios e imágenes de dos funciones distintas, para formar a través de ellas nuevas relaciones o funciones; por lo que deberás observar, trabajar, analizar y hasta jugar con los distintos dominios y rangos en distintas direcciones para poder encontrar cuál es la transformación que te lleva a la función final. Adelante, observa con cuidado y concluye. Esta actividad es para resolver en equipos de 4 personas.

1) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda







1) ¿Observas alguna manera para generar la función ***x*** ⇨ ***h(x)*** *a través de las funciones* ***x*** ⇨ ***f(x)*** *y* ***x*** ⇨ ***g(x)*** *?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

Respuestas.- x (dominio) → f(x) (Rango)

x (dominio) → g(x) (Rango)

x (dominio) → h (x) (Rango)

a) Sí, tenemos la composición h(x)=g(f(x)). Tomando el dominio de la función f, el primer conjunto de "x" se tiene el dominio de la función h, y considerando la imagen de f(x) que son los mismos elementos que el dominio de la función g se realiza la conexión que va de x → h(x), a través de f y g, ya que h(x) tiene la misma imagen que g(x).

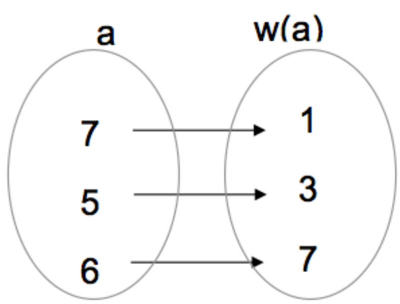
$$Dom_{(x\ de\ h)} = Dom_{x\ de\ f} \xrightarrow{f} Ima_f = Dom_g \xrightarrow{g} Ima_g = Ima_{h(x)}$$

x → h(x)

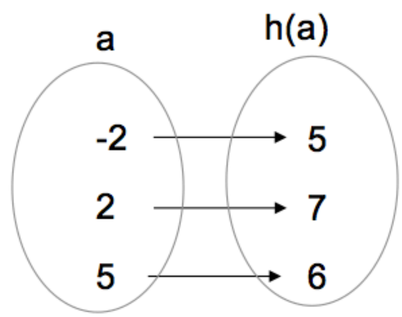
$$Como \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ se obtiene de } h(x) = g(f(x)) = g\left(f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = g\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para este ejercicio, se pretende que los estudiantes observen la relación de igualdad de elementos para los tres conjuntos; por ejemplo los elementos del dominio *"x"* de la función *f* es igual a los elementos del dominio *"x"* de la función *h*, y los elementos de la imagen de *f* (*x*) son los mismos que los elementos del dominio de la función *g*, por último los elementos de imagen de *g*(*x*) son iguales a los elementos de la imagen de *h*(*x*). Se modificaron el orden de los números para que los estudiantes tuvieran que pensar más en las relaciones, que si se colocaban los números en el mismo orden.

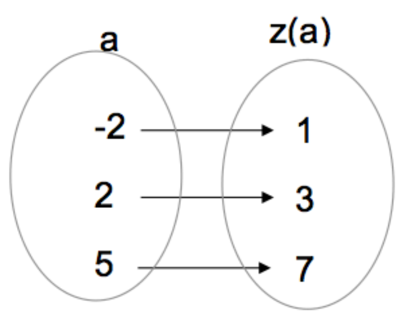
2) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda



____



____



____

2) Trabajando con las imágenes y los dominios de ambas funciones ¿Cómo puedes generar la función z(a) partir de las funciones w(a) y h(a). ¿Observas alguna manera que transformen las funciones

a ⇨ ***w(a)*** *y* ***a*** ⇨ ***h(a)*** *en la función* ***a*** ⇨ ***z(a)*** *?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

Respuesta: a (dominio) → w(a) (rango)

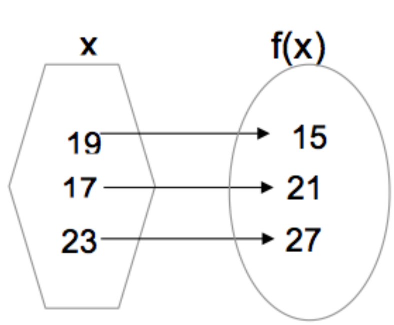
a (dominio) → h(a) (rango)

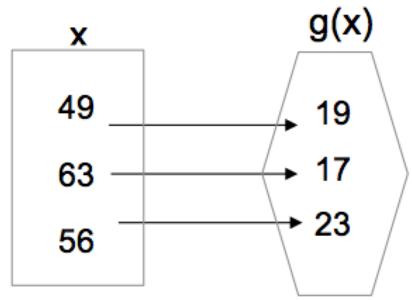
a (dominio) → z(a) (rango)

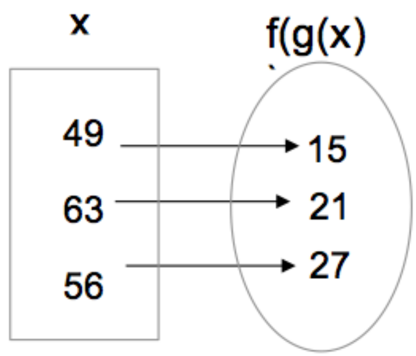
b) No, por ejemplo para los elementos del segundo conjunto de "h", si tomamos a= -2, su imagen en "h", nos lleva a h(-2) =5 y tomando el elemento 5 del dominio del primer conjunto "w", tenemos que la imagen de w(5)=3, y para el tercer conjunto el elemento del dominio -2, no va a dar a 3, si no a 1; por lo que no hay una conexión o relación para llegar de a, w(a) y a, h (a) hacia a, z(a), a pesar de que dos a dos los 6 conjuntos tienen los mismos elementos.

Así estructurado como está este ejercicio, se apoya más la idea de las conexiones que existen entre dominio e imagen, más allá de la igualdad de elementos. En este caso los estudiantes tenían que hacer una conexión más fina para poderse dar cuenta que una función definida por conjuntos con sus respectivos dominios e imágenes, no podían generarse, pues se rompía este esquema que un elemento del dominio tiene que ir a uno y sólo un elemento de la imagen, y en este caso la conexión final no se cumplía.

3) Escribe debajo de cada conjunto la palabra ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa la notación de ***f(g(x))*** que equivale a la composición de las funciones ***f(x) y g(x)*** del estilo ***fog(x).*** Fíjate en la relación de dependencia y en lo que es el dominio de ***f.***







3) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones ***x*** $\Rightarrow$ ***f(x)*** *y* ***x*** $\Rightarrow$ ***g(x)*** *en l a función* ***x*** $\Rightarrow$ ***f(g(x))****?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

Respuesta.- *x (dominio)* → *f(x)* *(Rango)*

x (dominio) → *g(x) (Rango)*

x (dominio) → *f(g(x)) (Rango)*

a) Sí, los elementos del dominio de f(g(x)) son los elementos del dominio del conjunto "x" de la función "g" y los elementos de la imagen de g(x) son los elementos del dominio "x" del conjunto "f", que van a dar a los elementos de la imagen de f(x) , que son el resultado de los elementos de la imagen de f(g(x)). Es decir tenemos:

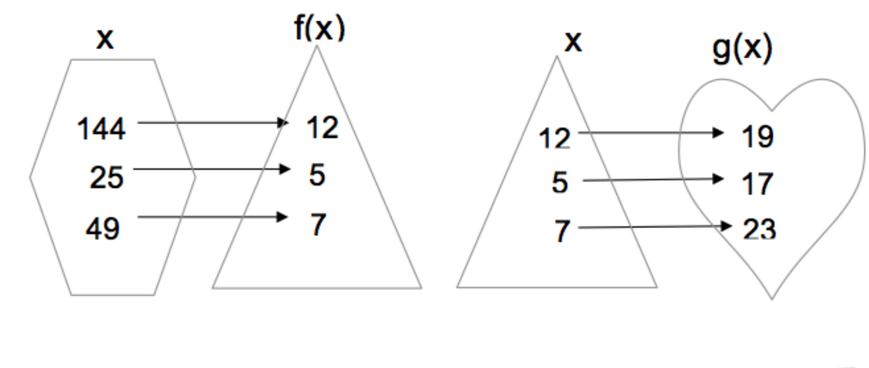
$$Dom_{f(g(x))} = Dom_g \xrightarrow{g} Ima_g = Dom_f \xrightarrow{f} Ima_f = Ima_{f(g(x))}$$

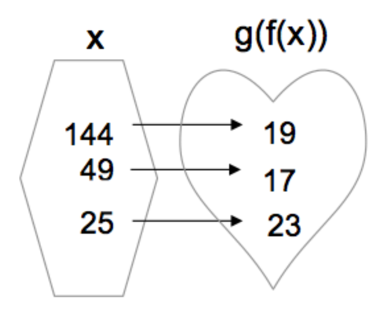
x → *f(g(x))*

$$Como\ \begin{pmatrix}49\\63\\56\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\end{matrix}\begin{pmatrix}15\\21\\27\end{pmatrix}\ se\ obtiene\ de\ f(g(x)) = f\left(g\begin{pmatrix}49\\63\\56\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}19\\17\\23\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\21\\27\end{pmatrix}$$

Este ejercicio, se consideró para ir concretando la idea de relaciones entre dominios e imágenes de los conjuntos o funciones. Para ello se asignaron la misma figura a los conjuntos que tenían a los mismos elementos e incluso se les puso en el mismo orden. Este ejercicio, es mas concreto que los anteriores, así los estudiantes pueden observar cómo se establece la relación entre los conjuntos. Incluso se incorporó por primera vez la notación de composición de funciones que sólo se les indicó de la manera en que se muestra en el recuadro de arriba.

4) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa como la composición de funciones tiene una nueva notación que es ***gof(x)=g(f(x)),*** que está en el último conjunto.





4) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones ***x*** $\Rightarrow$ ***f(x)*** *y* ***x*** $\Rightarrow$ ***g(x)***
en la función ***x*** $\Rightarrow$ ***g(f(x))****?*
a) Si tu respuesta es sí explica como.
b) Si tu respuesta es no, explica porqué
c) ¿Te dice algo la notación g(f(x))?. Explica

Respuesta.- x (dominio) → f(x) (Rango)

x (dominio) → g(x) (Rango)

x (dominio) → g(f(x)) (Rango)

a) Sí, los elementos del dominio del conjunto g(f(x)) son los mismos que los elementos del dominio del conjunto "x" de "f", evaluando "f" se obtiene los elementos del conjunto imagen f(x), el cual tiene a los mismos elementos que el dominio del conjunto "x" de "g", que al evaluarlo se obtiene el conjunto imagen g(x), que tiene los mismos elementos que el conjunto imagen de g(f(x)).

$$Dom_{g(f(x))} = Dom_f \overset{f}{\rightarrow} Ima_f = Dom_g \overset{g}{\rightarrow} Ima_g = Ima_{g(f(x))}$$

x → g(f(x))

Como $\begin{pmatrix} 144 \\ 25 \\ 49 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}$ *se obtiene de* $g(f(x)) = g\left(f\begin{pmatrix} 144 \\ 25 \\ 49 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}$

Este último ejercicio de esta sección, tiene el mismo objetivo que el ejercicio número 3, hacer que los estudiantes observen la relación en forma directa entre dominios e imágenes de los tres conjuntos. Pero ahora la relación es primero el conjunto de *"f"* y luego el conjunto de *"g"*, para obtener *g(f(x))*.

3.3 Descripción de la actividad 3: Las funciones y sus gráficas

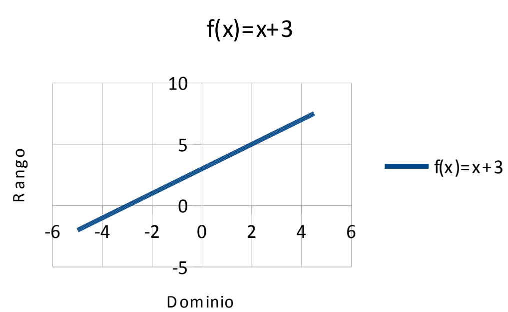
La intención del primer ejercicio dentro de esta tercera actividad, es ir guiando a los estudiantes en la observación de la composición de funciones en forma geométrica, a través de los cambios gráficos que una función realiza en otra, de tal manera que el estudiante pueda ir relacionando los cambios que se dan en las funciones de manera gráfica cuando éstas se están componiendo.

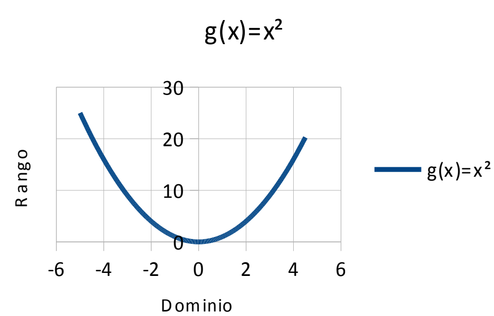
Para esta actividad los estudiantes ya han trabajado de manera previa con distintas transformaciones (translaciones o desplazamientos verticales, translaciones horizontales, reflexiones, y homotecias.), asociando el cambio de parámetros en una ecuación con su respectiva transformación geométrica. Por ejemplo, partiendo de $f(x) = x^2$ al observar una ecuación del estilo $f(x) = x^2 + 4$; el estudiante ya sabe que se desplaza la función original $f(x) = x^2$, 4 unidades hacia arriba sobre el eje vertical *"y"*.

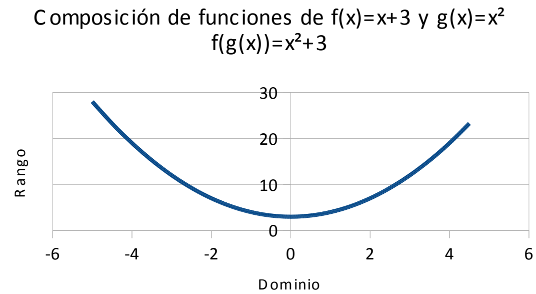
Actividad 3

Las funciones y sus gráficas

1) Observa las siguientes gráficas con sus ecuaciones. Describe en palabras las transformaciones (desplazamiento vertical, desplazamiento horizontal, reflejar con respecto al eje x, reflejar con respecto al eje y, homotecia de la gráfica) que se da en las composiciones de funciones f o $g(x)$=$f(g(x)) = f(x^2) = x^2+3$ y en la composición de funciones gof(x)=g(f(x))=g(x+3)=$(x+3)^2$, descrita en términos de las funciones f(x) y g(x).







a) ¿Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta f(g(x))=x²+3?

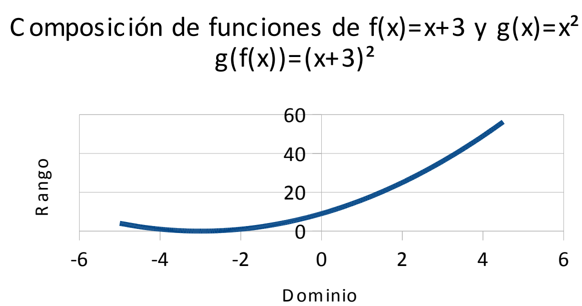
b) Escribe en palabras dentro de la función f qué es la función g(x)?

f(______________________________)

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica f(g(x))=x²+3

d) ¿Qué le hizo la composición f(g(x)) a la función f(x)?

1) II.-



a) ¿Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta g(f(x))=(x+3)² ?

b) Escribe en palabras dentro de la función g qué es la función f(x)?

g (______________________________)

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica g(f(x))=(x+3)²

d) ¿Qué le hizo la composición g(f(x)) a la función g(x)?

Respuestas.- Descripción de las primeras gráficas

$f(x) = x + 3$ *representa una recta con pendiente positiva m=1 y ordenada en el origen en 3, (b=3).*

$g(x) = x^2$ *es una parábola concava hacia arriba y centrada en el origen. Su vértice es la coordenada (0,0).*

1) I.

$f(g(x)) = x^2 + 3$ *es una parábola desplazada "3" unidades sobre el eje vertical "y", cóncava hacia arriba. Su vértice es (0,3).*

a. *En la gráfica* $x \in [5, 4.8)$, *en lo general para la ecuación* $f(g(x)) = x^2 + 3$, $x \in \Re$.

b. *f(parábola centrada en el origen)*

c. *Es una parábola desplazada 3 unidades sobre el eje de las "y", cuyo vértice es (0,3).*

d. *La convirtió en parábola.*

1) II.

$g(f(x)) = (x+3)^2$ *es una parábola con vértice en la coordenada (-3,0), desplazada 3 unidades a la izquierda sobre el eje de las "x".*

a. *En la gráfica* $x \in [5, 4.8)$, *en lo general para la ecuación* $g(f(x)) = (x+3)^2$, $x \in \Re$.

b. *g(recta con pendiente 1 y ordenada en el origen en 3).*

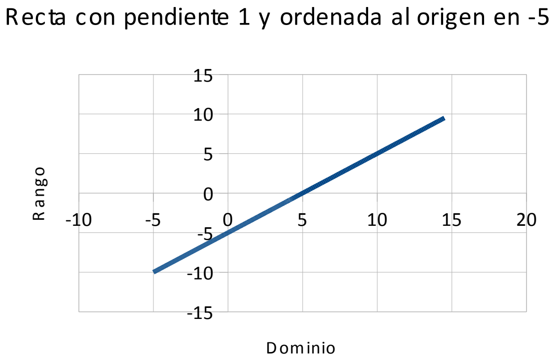
c. *Es una parábola con vértice en V(-3,0), desplazada 3 unidades hacia la izquierda sobre el eje de las "x".*

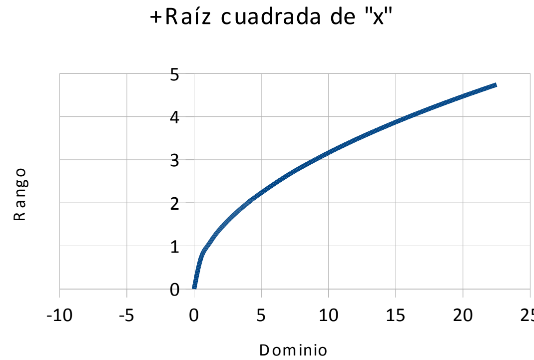
d. *La desplazó 3 unidades a la izquierda sobre el eje de las "x".*

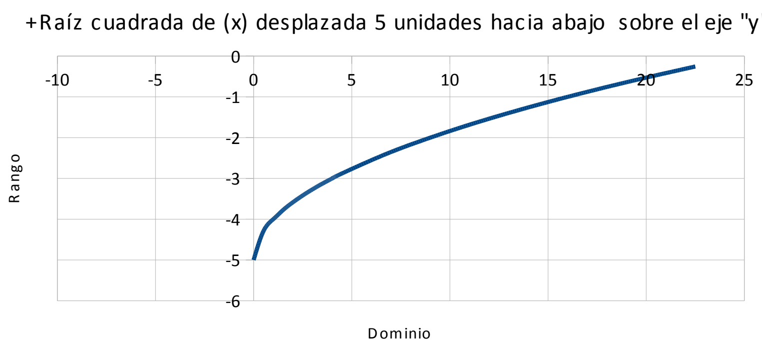
El objetivo de este ejercicio es que los estudiantes pudieran observar los cambios gráficos de la composición de funciones, al mismo tiempo de darse cuenta que no es lo mismo $f(g(x)) \neq g(f(x))$, es decir la propiedad no conmutativa de la composición de funciones.

Parte de la idea en este ejercicio era que los estudiantes observaran como se da el cambio final en la función compuesta, cuando se evalúa primero *g(x)* la parábola en la recta, (que la convierte en parábola), que cuando se evalúa *f(x)* la recta en la parábola, (genera el desplazamiento horizontal en “x”).

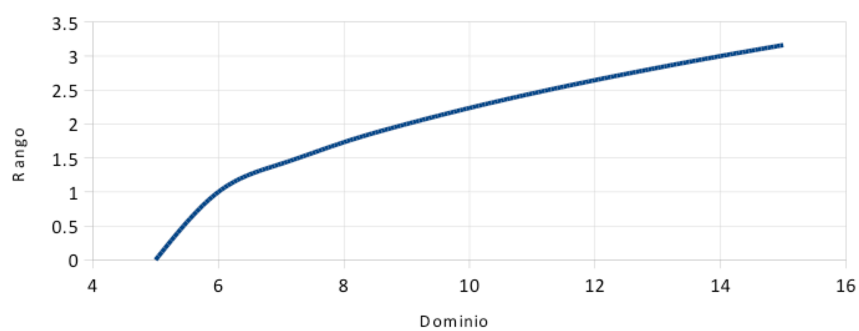
1) III. Observa las siguientes gráficas:







+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades hacia la derecha sobre el eje “x”



a) Si f(x)= x-5 y $g(x) = +\sqrt{x}$ *¿Quién dirías de las dos gráficas anteriores que es la función compuesta f(g(x))=fog(x) y cuál g(f(x)) =gof(x) y porqué?*

Respuestas.- $f\left(g(x)\right) = +\sqrt{x} - 5$, *corresponde a la tercera gráfica (+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades hacia abajo sobre el eje "y")*

$g\left(f(x)\right) = +\sqrt{x-5}$, *corresponde a la cuarta gráfica (+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades hacia la derecha sobre el eje "x").*

En este ejercicio se pretendía que los estudiantes realizaran una analogía en relación al ejercicio anterior. Conociendo las ecuaciones originales y los resultados de las gráficas de las dos composiciones de funciones *f(g(x))* y *g(f(x)),* sin conocer previamente cómo se realiza la operación algebraica de la composición de funciones, pudieran los estudiantes determinar por el cambio en las gráficas cuál era la ecuación que se había evaluado primero y cuál en consecuencia después observando los cambios que se producen en las gráficas en el eje "*x*" y en el eje "*y*".

2) a) Completa las siguiente tabla de valores para f(g(x)) y g(f(x)). Grafica los puntos de f(x) y g(x)

X	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)	3	0	-3	1	0	2	-2
g(x)	-3	-2	2	0	3	1	-1
$\boldsymbol{f \circ g(x)}$							
$\boldsymbol{g \circ f(x)}$							

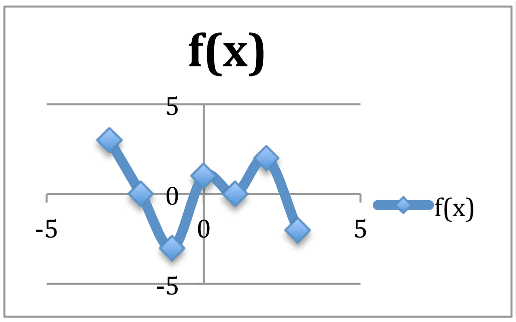
b) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f (x)) utilizando para ello los valores de las tablas que construiste en el inciso "a"

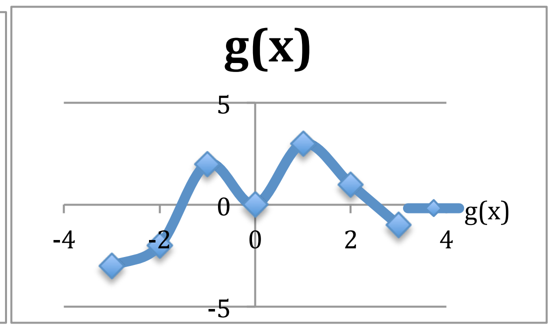
c) De acuerdo a tus observaciones y cálculos, ¿la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

Respuesta.-

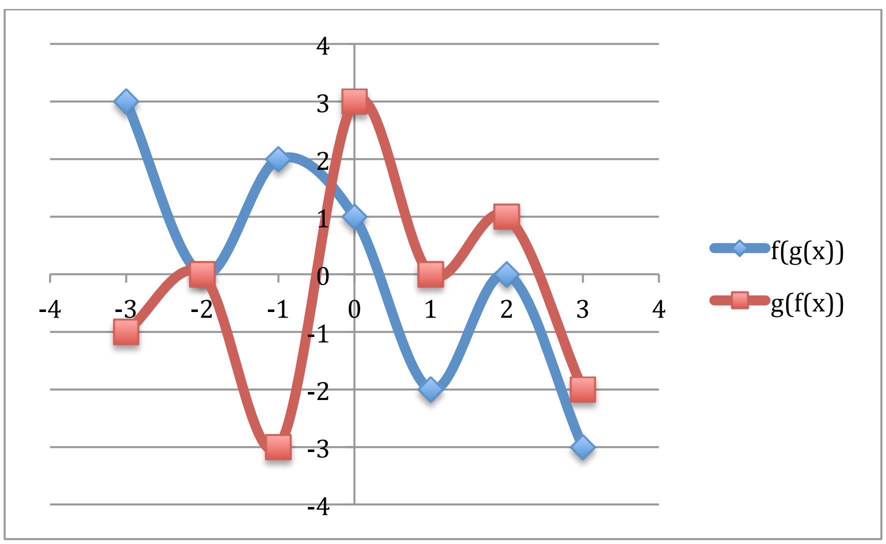
a)

X	***-3***	***-2***	***-1***	***0***	***1***	***2***	***3***
$\boldsymbol{f \circ g(x)}$	*3*	*0*	*2*	*1*	*-2*	*0*	*-3*
$\boldsymbol{g \circ f(x)}$	*-1*	***0***	*-3*	*3*	*0*	*1*	*-2*





b)

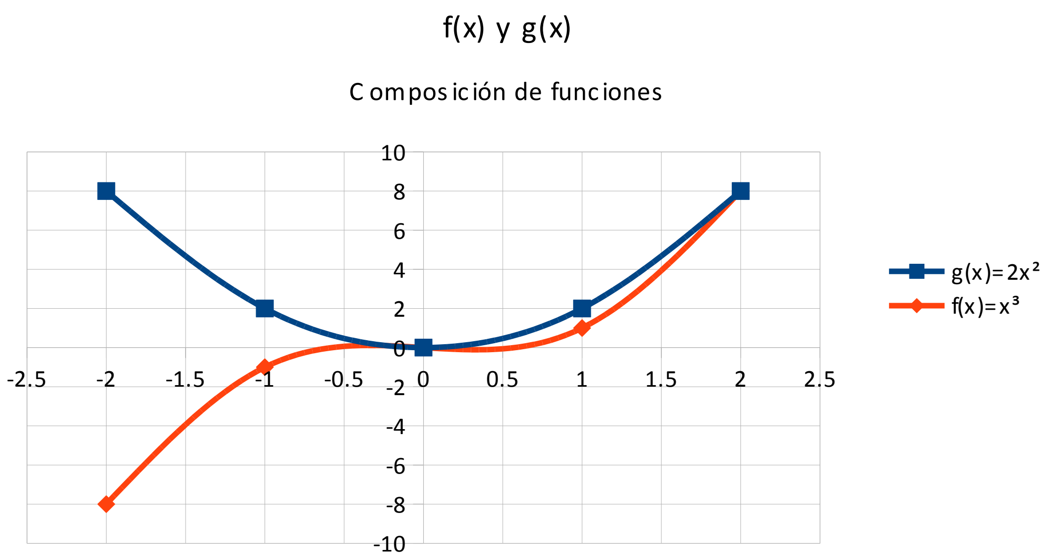


c) No, porque no se obtiene la misma graficar al evaluar f(g(x)) que g(f(x)).

En esta actividad se pretende que los estudiantes observen los cambios gráficos de la composición de funciones, así como el que encuentren que no es conmutativa la composición de funciones pues las gráficas respectivas de *f(g(x))* y *g(f(x))* son distintas.

3) *Utiliza las siguientes gráficas para obtener el valor numérico de las siguientes composiciones.*

Recuerda que el rango de una función se convierte en el dominio de la otra.



a) f(g(-1)= *b) g(f(-1))=* *c) f(g(0))=* *d) g(f(0))=*

e) f(g(1)= *f) g(f(1))=*

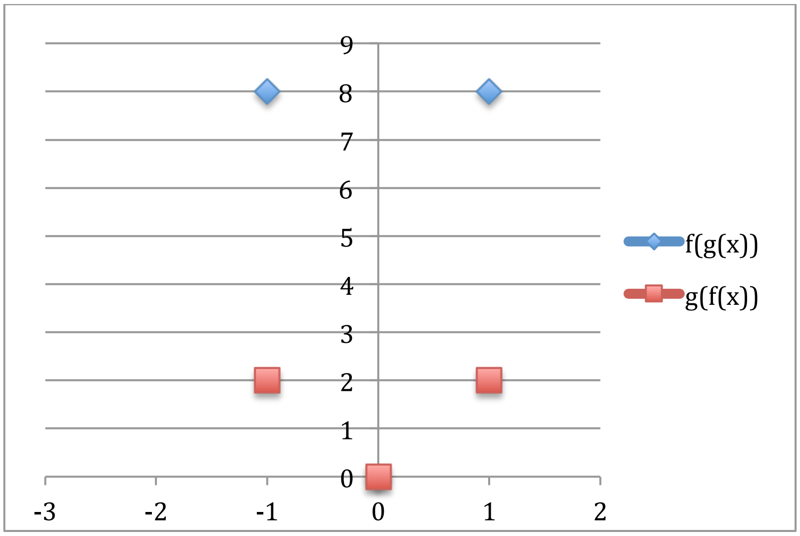
g) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las graficas f(x) y g(x)

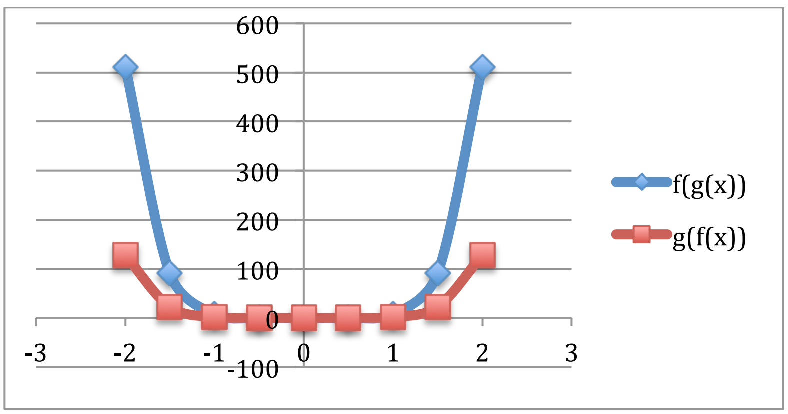
h) En este caso, ¿puedes decir de la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

Respuestas.

a) f(g(-1)=f(2)=8 *b) g(f(-1))=g(-1)=2* *c) f(g(0))=f(0)=0*

d) g(f(0))=g(0)=0 *e) f(g(1)=f(2)=8* *f) g(f(1))=g(1)=2* *g)*





h) No, porque no se obtienen los mismos valores, por ejemplo $f\big(g(-1)\big) \neq g\big(f(-1)\big)$ *ya que* $8 \neq 2$.

Este ejercicio tiene un nivel de complejidad más alto que los ejercicios anteriores. Su objetivo es que los estudiantes lean las gráficas a través de sus números (coordenadas), para poder realizar la composición de funciones. Trabajen el ejercicio de graficación apoyado en las gráficas *f(x)* y *g(x),* pero si utilizan sólo los tres valores numéricos que ya habían encontrado para cada composición *f(g(x))* y *g(f(x)),* la gráfica se observa diferente, pero limitada. Sin embargo para este momento los estudiantes no conocen la composición de funciones en forma algebraica, para que puedan obtener las respectivas fórmulas de *f(g(x))* y *g(f(x))* y graficarlas utilizando para ello sus ecuaciones. Por último se desea que los estudiantes continúen con la observación numérica y gráfica de que la composición de funciones no es conmutativa.

Es hasta estas tres actividades que se pretende hacer explícita lo que es la composición de funciones, es decir, trabajar con la parte conceptual de la composición de funciones. La última actividad trabaja con la parte algebraica y más operativa de la composición de funciones, que para efectos de los siguientes temas en que utilicen este tema, será lo que más utilicen. Sin embargo consideramos que hay que apoyar una educación más integral que incluya no sólo el manejo algorítmico de un tema, si no su comprensión conceptual y por ende un mayor manejo de los temas para el análisis de problemas.

3.4 Descripción de la actividad 4: La composición de funciones $fog(x)$ y el Álgebra

Actividad 4

La composición de funciones $f \circ g(x)$ y el Álgebra

En esta sección realizarás cálculos utilizando para ello el álgebra.

1) Si una función compuesta de dos funciones da como resultado otra h(x)=f(g(x)). En los siguientes ejercicios determina las funciones que pueden ser f(x) y g(x)

a) $f\left(g(x)\right) = fog(x) = \sqrt{x+6}$ *b)* $g \circ f(x) = x^3 + 5$ *c)* $f \circ g(x) = |x^2 - 2|$

b) ¿La elección de las funciones f(x) y g(x) es única?

Respuestas.- a) $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = x + 6$

b) $f(x) = x^3$ *y* $g(x) = x + 5$

c) $f(x) = |x|$ *y* $g(x) = x^2 - 2$

b) La elección de las funciones f(x) y g(x) no es única.

En este ejercicio se tiene la intención de que los estudiantes identifiquen las operaciones básicas que están inmersas en una función, para poder escribirla a través de esas operaciones como funciones básicas que unidas forman la función compuesta. Además de considerar lo el orden en que se operan las funciones para obtener la composición.

2) Utiliza las siguientes funciones para realizar la composición que se indica en forma algebraica o analíticamente
$f(x) = \sqrt[4]{x+2},\quad g(x) = e^{x} - 1\ ,\quad h(x) = \frac{1}{x}\quad ,\ w(x) = x^{3} + 4,\quad z(x) = sen(x)$
$a)\ f \circ h(x) = \qquad b)\ g \circ f(x) = \qquad c)\ w(z(x)) = \qquad d)\ g(h(x)) =$
$e)\ f\left(g\big(h(x)\big)\right) =$

Respuestas.

$a)\ f \circ h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt[4]{(\frac{1}{x} + 2)}$ b) $g \circ f(x) = g(\sqrt[4]{(x+2)}) = e^{\sqrt[4]{(x+2)}} - 1$

c) $w\big(z(x)\big) = w\big(sen(x)\big) = (sen(x))^{3} + 4$ d) $g\big(h(x)\big) = g\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} - 1$

e) $f\left(g\big(h(x)\big)\right) = f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \sqrt[4]{(e^{\frac{1}{x}} + 1)}$

Esta última actividad cierra con las cuatro actividades trabajadas y pretende que los estudiantes desarrollen la habilidad algorítmica de trabajar con la composición de funciones y con ello se concluye el diseño de las actividades didácticas para que los estudiantes entiendan y operen con el tema de composición de funciones $f \circ g(x)$.

Capítulo 4 Análisis de resultados

En este capítulo se presenta un análisis de la implementación de las actividades diseñadas y de las respuestas escritas de los estudiantes. En las tablas concentraremos las respuestas vertidas por los estudiantes en las distintas actividades las cuales fueron realizadas por parejas, equipos de cuatro personas y de manera individual. Describiremos las respuestas generales de los estudiantes, así también analizaremos a detalle sólo algunas de éstas respuestas que consideramos de mayor interés para nuestro trabajo de investigación.

4.1 Características generales y particulares de los Planteles del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal

Algunas de las características particulares los Planteles del Instituto de Educación Media Superior (IEMS) del Distrito Federal, entre otros son:

a. Los estudiantes viven cerca de la preparatoria donde estudian; pues es requisito que el domicilio del aspirante esté ubicado dentro del Distrito Federal, específicamente en alguna de las colonias, barrios o pueblos que atiende el Plantel del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal en el que desee registrarse. La lista de las colonias, barrios o pueblos está disponible en la página de Internet *www.iems.df.gob.mx*

b. Los estudiantes no presentan examen de admisión o selección, con tener su Certificado de Secundaria, Constancia Oficial de Certificado de Secundaria en trámite o Constancia de Terminación de Estudios de Secundaria, para estudiantes nacionales, es suficiente para tener derecho a entrar a un sorteo, en donde al azar se eligen a los estudiantes, en presencia de un Notario Público de acuerdo a la asignación de lugares disponibles para el turno matutino y vespertino en la Modalidad Escolar y Semiescolar para cada uno de los planteles del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal. Cada plantel cuenta con 350 lugares disponibles para estudiantes de primer ingreso en la Modalidad Escolar, con excepción de los planteles Vasco de Quiroga, José Revueltas Sánchez, Iztapalapa 3 e Iztapalapa 4, por estar actualmente su plantel en sede y/o situación provisional.

c. Los grupos son pequeños, en promedio de 25 estudiantes.

d. Las calificaciones son cualitativas-descriptivas. Cada profesor de manera escrita expone los avances o deficiencias académicas que tiene cada estudiante; junto con su desarrollo en clase, y asesoría académica personalizada, así como la forma en que el estudiante puede subsanar las deficiencias académicas que tiene.

e. La preparatoria cuenta con espacios de estudio (cubículos) para los alumnos, cada cubículo cuenta con una mesa, 4 sillas y un pizarrón.

f. Todos los profesores son de tiempo completo, están titulados y enseñan la materia que corresponde a lo que estudiaron a nivel licenciatura. Por ejemplo Filosofía, Matemáticas, Física, etc. los profesores estudiaron respectivamente las carreras de Filosofía, Matemáticas y Física.

g. Cada estudiante cuenta con un tutor-profesor con el que realiza actividades como el análisis de su desempeño escolar, intereses escolares, problemas en las materias o incluso en ocasiones el espacio es utilizado por los estudiantes para hablar sobre sus problemas familiares o personales.

h. Los estudiantes reciben además de sus clases, sesiones de asesoría académica por parte de cada profesor para cada materia, en donde de manera personal se les atiende en sus dudas y se les evalúa. Así como se les da la retroalimentación de su situación escolar, cómo van, qué les falta, qué temas previos requieren para poder acceder a un tema que se está trabajando, si van bien, etc.

i. Cada profesor cuenta con un cubículo en donde atiende a los estudiantes en sus asesorías, padres de familia, y realiza sus actividades de trabajo académico.

j. Dentro del Plan de Estudios, que consta de 38 materias, 5 de las obligatorias son de matemáticas (Matemáticas I, II, III, IV y V). Aunque también se cuenta con materias optativas de matemáticas, de las cuáles el estudiante puede cursar hasta 2. El Plan de Estudios presenta una materia llamada *"Problema eje",* en ella el estudiante requiere hacer un tema de investigación en el área que desee. Presentar un documento escrito de ello y realizar una presentación de manera oral ante la Comisión de Evaluación, que consta de su *Director o Directora* de proyecto eje, *Revisor o Revisora* de Proyecto eje y un representante de la *Comisión Evaluadora.* Esta presentación se realiza cuando el estudiante ha cubierto ya todas sus asignaturas. Al final de la presentación se le indica al estudiante su calificación final de la Preparatoria , que consta de toda la información sobre su desempeño en la Preparatoria y su presentación final de *Problema Eje.*

Las características académicas de los estudiantes al entrar a las preparatorias suelen ser de bajo nivel académico, y algunos de los estudiantes ya han estado en otros sistemas educativos. Sin embargo el trabajo de las preparatorias está encaminado al apoyo de éste tipo de población estudiantil, con marginalidad académica, por lo que cuentan con todo el soporte académico de todos sus profesores.

4.2 Descripción de la implementación

La secuencia de actividades se llevó alrededor de 2 semanas, del 02 de abril de 2014 al 10 de abril de 2014. Éstas se realizaron con un grupo de estudiantes regulares (no recursadores de la materia de Matemáticas IV, en su mayoría) de cuarto semestre (considerando el primer semestre a partir de que entran a la Preparatoria y lo terminan en el sexto semestre). La Preparatoria se llama "Melchor Ocampo", y es perteneciente al Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal. Los estudiantes son de la modalidad escolarizada, y la preparatoria se encuentra ubicada en la Delegación Azcapotzalco. El grupo consta de 25 estudiantes. Las clases de matemáticas, para el caso de Matemáticas IV se imparten cuatro veces a la semana y cada sesión es de una hora. Las dos semanas seleccionadas corresponden a las dos semanas antes de que los estudiantes salieran al periodo vacacional conocido comúnmente como *Semana Santa o Semana Mayor*. Éstas actividades se vieron afectadas la primera semana por el cambio de horario de verano, pues las clases se imparten en la mañana y la segunda semana por una marcha por parte de profesores y estudiantes el día 8 de abril de 2014.

Las actividades se llevaron a cabo en seis sesiones de clase ordinaria de matemáticas. La primera actividad, que corresponde a la lectura de la *cadena alimentaria*, se realizó en una sola sesión. La segunda actividad sobre *conjuntos y artimética*, se llevó a cabo en una sesión y media. La tercera actividad que corresponde a la parte *gráfica de la composición de funciones* se llevó dos sesiones y media de clases, y por último la cuarta actividad que representaba el *álgebra de la composición de funciones* se trabajó en una sola sesión.

La primera actividad se desarrolló en binas, con el objeto de que los estudiantes interactuaran entre sí y socializaran sus ideas y respuestas. La segunda y tercera actividad, la trabajaron los estudiantes en equipos de 4 personas, aunque los integrantes de los equipos para la segunda y tercera actividad cambiaron en algunos de los casos. El objetivo de trabajar la actividad dos y tres en equipos entre otras era el apoyar la comunicación entre pares y la comparación y análisis de ideas entre compañeros. Como la última actividad era de cierre, se trabajó de manera individual.

4.3 La interacción de los estudiantes con las actividades

La interacción de los estudiantes con las distintas actividades, fue diversa de acuerdo a la actividad planteada. En términos generales la interacción fue la siguiente:

a. *Primera actividad*, no se les dio información previa sobre la composición de funciones, sólo se les dijo que consistía en un tema nuevo de matemáticas a trabajar, pero como se trató de una lectura sobre un tema aparentemente no relacionado con las matemáticas y los estudiantes dibujaron para algunas de sus respuestas, en realidad fue una actividad en la que trabajaron de manera relajada y se reían mucho entre sí. Esta actividad, sin duda rompió incluso las actividades que incluyen dinámicas de trabajo y problemas de aplicación en donde se observa muy directamente el trabajo de las matemáticas. En términos generales la respuesta en el salón de clase de los estudiantes para esta primera actividad fue muy positiva; pues se involucraron en la actividad. Tal vez el hecho de hacer dibujos en la clase de matemáticas a nivel preparatoria cambio la dinámica general de trabajo; que aunque de manera general tratamos de hacerla variada y buscar ejemplos relacionados con la vida real y que involucre el interés de los jóvenes, no así el hecho de hacerles dibujar en clase.

b. *Segunda actividad*, está actividad ya generó algo de desconcierto en los estudiantes, pues tampoco tenían un referente previo para resolverlo. Al igual que en la primera actividad, no se les explicó nada más allá de lo que los propios estudiantes ya conocían sobre: funciones, relaciones, dominios e imágenes. Para su solución se les dijo que observarán los conjuntos que consistían en 3 pares de conjuntos con sus dominios e imágenes respectivos, y tratarán de generar una *"conexión"* o *"puente",* que llevará de los dos primeros pares de conjuntos a construir el tercero. En ésta actividad, ya se les comentó que observarán la notación de composición de funciones y reflexionaran sobre qué significa. El comentario sobre buscar un *"puente",* se ve reflejado en las respuestas de los estudiantes que lo utilizan para su explicación. Además utilizaron el elemento grafico de unir los números a través de flechas en la propia hoja de trabajo.

c. *Tercera actividad*, dentro de ésta, la primera actividad consistía en analizar las gráficas y sus ecuaciones, este tema ya se había trabajado con anterioridad a través del manejo de las transformaciones gráficas, por lo que no causo desconcierto entre los estudiantes, para el tercer ejemplo de esta primera actividad se hizo uso del lenguaje natural para expresar la ecuación de dos funciones. El segundo ejercicio consiste en el manejo y lectura de tablas y gráficas para realizar una composición de funciones, se les explicó a los estudiantes cómo podían hacerlo a través de 3 ejemplos respectivamente; 3 para tablas y 3 para gráficas, aunque la explicación no fue amplia, pues tenía sólo el objetivo de mostrar a los estudiantes cómo podían resolver el ejercicio. Durante la explicación de los ejemplos, la atención de los estudiantes fue alta, dado que en las actividades anteriores no habían tenido ninguna explicación que les apoyará para resolver los ejercicios.

d. *Cuarta actividad* aquí se les explicó cómo se realiza la composición de funciones en forma algebraica con 3 ejemplos, aunque sin mucho detalle. Para esta actividad, los estudiantes trabajaron en una sesión de clase de manera individual, pero como estaban por salir de vacaciones no todos los estudiantes entregaron ya esta cuarta actividad, y su actitud era más disipada.

4.4 Interacción de los estudiantes con la profesora

El nivel de interacción y comunicación de la profesora con los estudiantes vario de acuerdo a la actividad que los estudiantes se encontraban desarrollando.

a. *Primera actividad*; los estudiantes sólo preguntaban relaciones de quién come a quién en distintos ejemplos biológicos que ellos pensaban. En realidad la actividad la realizaron propiamente los estudiantes sólos y la profesora era un soporte a sus dudas sobre Biología. Por lo que se les dio la libertad de trabajar y contestar lo que ellos consideraran pertinente.

b. *Segunda actividad*; los estudiantes preguntaban desconcertados a la profesora ¿cómo lo resolvemos?. En realidad los estudiantes buscaban una explicación previa para poder ellos hacer una analogía y resolver la actividad; sin embargo a pesar de que la profesora observaba las respuestas de los estudiantes y los motivaba a que ellos sólos observaran, buscaran y encontraran las conexiones entre los conjuntos, no les explicó un ejemplo similar. Sin embargo un estudiante para el segundo ejemplo dijo que no se podía resolver y la profesora asintió a esa posibilidad, eso les dio más confianza a los estudiantes para resolver las primeras dos actividades; además de utilizar flechas para unir los números y los conjuntos como apoyo a sus respuestas. Para los dos últimos ejercicios de esta actividad, los estudiantes no preguntaban mucho sobre cómo resolverlo. Sin embargo buscaban de manera continua la aprobación de la profesora cuando le mostraban a ella sus respuestas, esto parecía darles seguridad a lo que contestaban.

c. *Tercera actividad;* hubo mucho más interacción profesora-estudiantes, tal y como están acostumbrados, pues la profesora resolvió algunos ejemplos para que ellos supieran como resolver los ejercicios que tenían ellos, esto para el caso de las tablas numéricas y la lectura de las últimas gráficas.

d. *Cuarta actividad;* la interacción con la profesora con los estudiantes se dio a través de la explicación de 3 ejemplos algebraicos que resolvió la profesora en clase.

A pesar de que en el trabajo en aula se intenta incorporar actividades didácticas, de búsqueda, aplicación de problemas, etc. y la interacción de la profesora con los alumnos es constante; el romper el esquema explicación por parte de la profesora, ejemplos-problemas-actividades resueltas por la profesora, actividades a resolver por parte de los estudiantes fue interesante en nuestro caso, pues consideramos que fue una dinámica de trabajado apropiado incluso para incorporarla en futuras actividades matemáticas en clase; en donde se requiera más la construcción de conocimientos por parte de los estudiantes a través de ejercicios guiados.

4.5 Los estudiantes como centro de su proceso de aprendizaje

La intención de las tres primeras actividades, fue que los estudiantes se asumieran ellos mismos a través de procesos de relación, observación, búsqueda, analogías, expresión de ideas, comparación y socialización los que fueran construyendo y entendiendo el concepto inmerso en la composición de funciones. Las actividades se centraron más en la comprensión del concepto de generar una nueva función a través de componer una función en otra, que en la parte operativa de la composición de funciones; sin olvidar por supuesto esta última que estuvo presente principalmente en la cuarta actividad.

Para nosotros es importante hacer que en nuestras clases los estudiantes sean sujetos activos de su propio proceso de aprendizaje, e irles enseñando a cumplir el lema *"aprender a aprender",* a través de las matemáticas, así como darle importancia a la comprensión de conceptos, pues consideramos que entre más se entiende una idea o concepto en cualquier área, pero en nuestro caso particular en las matemáticas, es más fácil que los estudiantes puedan resolver problemas de aplicación en donde de manera implícita o explícita están inmersos dichos conceptos.

4.6 Problemáticas en la implementación

Uno de los mayores problemas de realizar secuencias tan amplias es el tiempo que se dispone en clase para abordar todos los temas que se requieren de acuerdo al Plan de Estudios. Pues la cantidad de temas suele ser amplio y eso genera en muchos casos que los temas se vean de manera superficial o insuficiente para la comprensión de los estudiantes. Por otro lado no podíamos abordar este tema hasta que los estudiantes tuvieran conocimientos de: funciones, relaciones, dominios, imágenes, gráficas, así como las transformaciones graficas que se generan al variar los parámetros en una ecuación. Por lo que se tuvo que ajustar a los tiempos de conocimientos previos y de terminar las actividades en cierto tiempo, para poder continuar con los demás temas correspondientes al temario de Matemáticas IV.

4.7 Problemas asociados con el diseño

De la misma forma que se mencionó en el punto 4.6. el tiempo fue un factor para que la secuencia no fuera revisada de manera tan exhaustiva, como nos hubiera gustado. Si bien en comparación de las actividades revisadas en *el capítulo 2 sobre enseñanza de la composición de funciones,* nuestra secuencia es completa (salvo que no utilizamos para ello el manejo de la computadora por razones de tiempo), consideramos que de haber contado con mayor tiempo para ajustar el esquema básico con el que trabajamos hubieran salido las actividades igual de completas, pero menos amplias.

4.8 Análisis de la información

La transcripción de las respuestas de los estudiantes a las distintas actividades, se da en tablas para poder tener un manejo más claro y ordenado de toda la información.

4.8.1. Respuestas de los estudiantes a la Actividad 1 "Funciones-relaciones y la cadena alimentaria"

Pregunta 1

Da dos ejemplos de cadenas alimentarias desde el productor *(P)* hasta el consumidor secundario carnívoro *(C2)*. Dibuja a cada actor como en un conjunto relacionándolos con flechas en caso de que un elemento de ese conjunto dependa de un elemento del conjunto anterior.

Tabla # 6

Respuestas a la actividad 1-pregunta1

Equipo	Ejemplo # 1	Ejemplo # 2	Observaciones
1	Planta← Animal ← Hombre	Planta ← Pez ← Gato	Dibujos
2	Zanahoria → Conejo → Hombre	Alga o Flor → pez → tiburón	Dibujos
3	Hombre → León →Cebra → Pasto Hombre → León → Jirafa → Pasto	Hombre → Conejo → zanahoria Hombre → Conejo → zanahoria	1) Dibujo y abajo nombre 2) No es productor la jirafa; es hervíboro *Entregaron dos hojas de respuestas el mismo equipo (uno por cada estudiante del equipo; pero con ciertas diferencias entre sí)
4	Zanahoria ← Conejo ← Águila	Alga ← Pez ← Tiburón	Dibujos con los nombres debajo como: productor, C1 y C2
5	Zanahoria ← Conejo ← Serpiente	Nuez ← Ardilla ← Lobo	Dibujos con sus respectivos nombres debajo
6	Planta ← Conejo ← Serpiente	Fitoplancton ← Cangrejo ← Perro	Dibujos
7	Flor ← Jirafa ← León		Dibujos con sus respectivos nombres debajo
8	Planta ← Conejo← Serpiente	Planta ← Ratón ← Búho	Dibujos con sus respectivos nombres debajo y escribieron dominio para el productor y rango para el consumidor primario
9	Pasto ←→ Vaca ←→león	Árbol← Dinosaurio← Dinosaurio	Dibujos *el primer didujo, tenía una flecha en una dirección y abajo otra flecha en la dirección contraria.
10	Zanahoria→ Conejo→ León	Fitoplancton→ Pez→ Tiburón	Dibujos con sus respectivos nombres debajo
11	Planta← Cebra ← León	Planta← Vaca← Humano	No realizaron dibujos; escribieron los nombres de los animales con palabras y los relacionaron a través de las flechas

Una característica que llama nuestra atención en estas respuestas es el orden de las flechas. Para este lectura un estudiante, comento en voz alta para todo el grupo y para dirigirse a la profesora que las flechas de la siguiente imagen estaban al revés:

Cadena del organismo autótrofo al consumidor secundario carnívoro

1) Planta (P) Mariposa (C1) Rana (C2) Serpiente (C3)

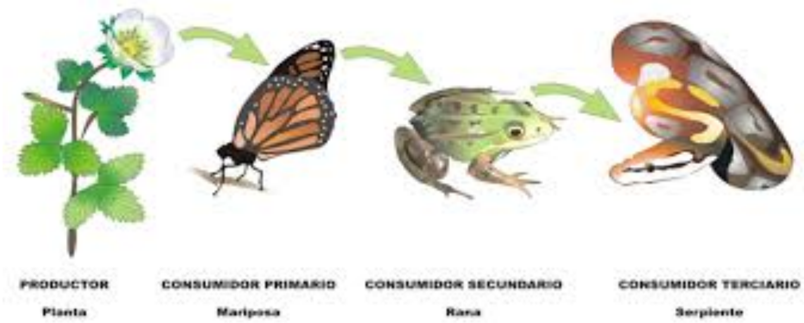


Imagen obtenida de *http://juliethcallejascoral.blogspot.mx/2012_05_01_archive.html*

Considerando que la serpiente se come a la rana y no la rana a la serpiente. La idea inmersa en las flechas nos habla de implicación, ¿qué implica qué?. Si queremos hacer una referencia sobre origen-destino o ¿quién depende de quién?, como en un esquema de conjuntos (dominio-imagen), en donde la flecha de un elemento del dominio va hacia el elemento imagen de quien depende este último; el esquema mostrado en la ilustración está bien. Pero para los estudiantes las flechas significaban quién come a quién, no quién depende de quién, por lo que la dirección se encontraba equivocada, es decir serpiente come a rana, por lo que la dirección sería contraria a la que muestra la ilustración. Esta segunda forma de implicar la cadena alimentaria fue la más natural para los estudiantes, pues en su mayoría eligieron los dibujos con esta dirección, como se puede observar en la tabla de respuestas # 6.

Para esta pregunta un problema con el que se enfrentaron los estudiantes fue en que no siempre sabían quién come a quién; es decir quien es el depredador y quien es la presa.

Esta pregunta la resolvieron los estudiantes en su mayoría haciendo dibujos y se reían en el transcurso de irla contestando.

Pregunta 2

Considerando la cadena alimentaria como una relación de funcionalidad en donde un ser vivo depende de otro para vivir. ¿Quién dirías que representa al dominio en esta cadena y porqué?

Tabla # 7

Respuestas a la actividad 1-pregunta 2

Equipo	Dominio	¿Porqué?	Observaciones
1	Planta (dibujo)	Porque todos los seres vivos de forma directa o indirecta dependen de ella	Respondieron correctamente
2	Planta	Porque ella no depende de alguien para producirse porque es autótrofa (plano cartesiano relación V.D. hombre V.I. Planta)	Respondieron Correctamente
3	El hombre	El hombre depende de la planta entonces es independiente Plano cartesiano (planta en el vertical-hombre en la horizontal)	Estaban mal acomodados los ejes, variable independiente en el eje vertical y variable dependiente en el eje horizontal. *En ambas hojas entregadas
4	Los productores	Porque el consumidor 1 depende de él y el C2 depende del C1	Respondieron Correctamente
5	Los organismos productores (P)	Porque todos necesitan de ellos, la cadena alimenticia empieza por ellos.	Respondieron Correctamente
6	Plantas	De ella dependen los otros	Respondieron Correctamente
7	Planta	Porque de ella depende que este la Jirafa para que el León pueda comer	Respondieron Correctamente
8	Plantas	En ambas cadenas el dominio son las plantas, ya que de ella dependen los consumidores.	Respondieron Correctamente
9	C1(P)=C2	C1(P)=C2	Respondieron Correctamente, aunque la igualdad está equivocada.
10	Zanahoria Fitoplancton	Porque el conejo y el león dependen de él y la zanahoria es independiente Porque el pez y el tiburón dependen de él	Respondieron Correctamente
11	Planta	De ella dependen los demás	Respondieron Correctamente

En todos los casos como se observa en la Tabla # 7 de respuestas, los estudiantes pudieron identificar a la planta como el dominio de la pregunta. Sólo el equipo # 3 al graficar colocaron mal los ejes de dependencia (vertical-dominio y horizontal-rango); sin embargo este equipo en palabras había identificado quien era el dominio y quien el rango para esta pregunta.

El equipo # 9 utilizó para contestar la pregunta la notación de dependencia entre variables ó una de las representaciones que se maneja en funciones al escribir *C1(P)=C2*, implica que *(P)* es la variable independiente y que *C1,* depende de *P*, y de una manera no clara todavía, pero sí intuitiva se puede observar que *C2,* depende de *C1(P).* Si pensamos en la composición de funciones el hecho de escribir *C2(C1(P))* se está escribiendo la composición lineal de dependencia entre los tres primeros organismos involucrados en la cadena alimentaria. Por lo que la aproximación que realiza el equipo # 10 con esta notación, si bien no es correcta por la igualdad, es una idea cercana al concepto que se quiere trabajar en esta actividad sobre composición de funciones.

El equipo # 10 contestó esta pregunta en función de su propio ejemplo del ejercicio 1.

3) Considerando hasta el primer nivel de los consumidores a los herbívoros agrupa a éstos 2 componentes (consumidor primario- productor) de la cadena alimentaria como dominio y rango.

Tabla # 8

Respuestas de la actividad 1-pregunta 3

Equipo	Dominio	Rango	Observaciones
1	Planta	Herbívoro	A un lado de la respuesta correcta; escribieron incorrectamente Dominio depende del rango.
2	Productores	Consumidores, carnívoros	Utilizaron el plano cartesiano que habían hecho para contestar la pregunta número 2 y debajo de los ejes escribieron productores (en el eje del dominio y que denotaron como tal) y consumidores (en el eje vertical que tenían identificado como el rango)
3	Hoja 1) El productor es el dominio, es decir las plantas. Hoja 2) Planta	1) Consumidor primario el rango, es decir el conejo 2) Cebra	En la hoja 2 dibujaron un plano cartesiano, pero con los ejes al revés, escribiendo dominio en el eje vertical e imagen en el eje horizontal
4	Productores	Consumidores primarios	
5	Productor=P		

	Herbívoro=C f(P)=C		
6	Planta Fitoplancton	Conejo Cangrejo	Respuesta relaciona con su respuesta de la pregunta número uno.
7	Planta	Jirafa	Respuesta relaciona con su respuesta de la pregunta número uno.
8	Plantas Plantas	Conejo Ratón *De acuerdo al primer caso (ejercicio 1)	Respuesta relaciona con su respuesta de la pregunta número uno.
9	P	C1	
10	Zanahoria Fitoplancton	Conejo Pez	Respuesta relaciona con su respuesta de la pregunta número uno.
11	Planta	Herbívoro	

Esta pregunta fue contestada de manera correcta, por todos las binas de estudiantes, excepto por la bina # 2 quienes no contestaron. Por lo que los estudiantes pudieron identificar y relacionar al productor como el dominio y al consumidor primario como el rango. Es este caso el nivel de independencia y dependencia entre los organismos involucrados y la analogía con conceptos matemáticos como dominio y rango fue clara, para un ejemplo de la vida real.

Cinco de los once equipos contestaron esta pregunta en función de su propia respuesta dada en el ejercicio # 1 (equipos: 3, 6,7,8,10) al igual que en la pregunta anterior.

De manera consistente el equipo # 3 grafico mal los ejes.

4) Considerando hasta el segundo nivel de los consumidores (carnívoros), ¿Quién dirías que es el dominio del consumidor secundario o carnívoro?

Tabla # 9

Respuestas de la actividad 1-pregunta 4

Equipo	Respuesta	Observación
1	Dominio: Hervíboro Rango: Carnívoro	Respuesta correcta.
2	Hervíboros	Respuesta correcta.
3	Hoja 1) El carnívoro será el dominio y el consumidor secundario es la imagen Hoja 2) Misma respuesta; sólo cambia imagen por rango	Confusión entre consumidor secundario y carnívoro; que es lo mismo.
4	Domino el consumidor primario	Respuesta correcta.
5	Herbívoro=C (en el ejercicio 1 conejo) Carníboro=L (lobo)	Respuesta correcta.

	f(C)=L	
6	Dominio: Conejo Rango: Serpiente Dominio: Cangrejo Rango: Perro	Respuesta correcta, relacionada con su propia respuesta de la pregunta número 1
7	Dominio (hervíboro Jirafa) Imagen (Carnívoro León)	Respuesta correcta, relacionada con su propia respuesta de la pregunta número 1
8	En el primer caso el conejo es el dominio del consumidor secundario que es la serpiente En el segundo caso la rata es el dominio de el consumidor secundario que es el búho	Respuesta correcta, relacionada con su propia respuesta de la pregunta número 1
9	Dominio= C1 Rango=C2	Respuesta correcta.
10	Dominio =conejo Rango=león Dominio=pez Rango=tiburón	Respuesta correcta, relacionada con su propia respuesta de la pregunta número 1
11	Dominio (hervíboro) Imagen (carnívoro)	Respuesta correcta.

Como se puede observar en la Tabla # 9 de respuestas, las parejas: 5, 6, 7,8 y 10 contestaron esta pregunta en función de su primera respuesta. El equipo # 3 presentó una confusión con el carnívoro y el consumidor secundario; los cuales son el mismo.

Para esta pregunta de los 11 parejas 7 de ellas respondieron además de la pregunta que se les hacía, quién era el rango o imagen, aunque no se les había solicitado en el ejercicio. Esto muestra como hay términos que se van identificando a través de otros, o con otros, y se les ve en conjunto más que de manera individual. La relación entre los conceptos de dominio y rango es tan estrecha, que suele definirse el segundo a partir del primero. Esto se hace patente en la respuesta de los estudiantes que agregaron la imagen aunque no se les solicitaba.

5) ¿Cómo describirías la relación que hay entre el carnívoro y el productor, considerando la relación de dependencia entre un organismo y otro?

Tabla # 10

Respuestas actividad 1-pregunta 5

Equipo	Respuesta	Observaciones
1	La relación entre un carnívoro sería con el ejemplo de un humano, omitiendo el 2º eslabón que es el de los herbívoros.	En esta respuesta se observa el poder omitir uno de los organismos involucrados como lo es el herbívoro y hacer la relación directa entre carnívoro y productor, dando para ello un ejemplo.
2	Si se puede por que un ejemplo es el hombre, el puede comer plantas y	Su respuesta en términos generales es igual que el equipo # 1.

	brincarse a la carne y esto es igual porque al final que muera seguirá el productor.	
3	Que si no hay productor no puede haber consumidor y muere el carnívoro.	El productor se convierte en el medio para que pueda sobrevivir el carnívoro.
4	El carnívoro depende del productor porque sin el no existiría el hervíboro que es su presa.	El productor se convierte en el medio para que pueda sobrevivir el carnívoro.
5	El productor no depende de nadie y el carnívoro depende del hervíboro y el hervíboro depende del productor	Sólo describen la relación de dependencia de la cadena alimentaria para los tres primeros organismos involucrados.
6	Que los carnívoros dependen directamente del productor porque el consumidor entre ellos. Pero no se podría si el consumidor no estuviera en medio	Se observa una confusión entre consumidor y herbívoro, pues tanto el carnívoro como el herbívoro son ambos consumidores, aunque primario y secundario respectivamente.
7	Si no hay plantas no come el consumidor secundario y si no hay consumidor secundario no come el carnívoro de la planta depende el carnívoro	Confunsión entre consumidor secundario y carnívoro, pues ambos son el mismo.
8	Sin respuesta	
9	Porque sin (P) no podría existir C1 y si este no existe no existiría C2	Implicación de dependencia entre los organismos involucrados.
10	El León depende de la zanahoria porque la zanahoria es la comida del conejo y sin el conejo el León no tendría que comer (referencia al ejercicio 1)	Implicación de dependencia entre los organismos involucrados.
11	No depende porque el carnívoro depende del hervíboro y el productor depende de los descomponentes.	En esta respuesta se observa sólo una relación directa inmediata, que no pertime poder hacer otro tipo de relación más atrás.

Los equipos # 1 y 2 hacen referencia a eliminar el 2° eslabón de la cadena alimentaria y pasar directamente al primer organismo; para ello hacen uso de un ejemplo. El dar ejemplos para explicar a los demás lo que se quiere expresar es un recurso común tanto en las clases de matemáticas, como en cualquier otra clase. Por lo que los estudiantes en este caso hicieron uso del recurso de ejemplificación para su explicación.

Podemos observar que salvo la pareja número 11 que escribe que no hay dependencia; todos los demás equipos intuyen esa dependencia entre el carnívoro y el productor, aunque esta no se dé de manera directa, si no a través de otro organismo como lo es el herbívoro.

En este caso se está tratando de generar de manera intuitiva la posibilidad de relacionar elementos entre sí , pero no de manera directa, sino a través de un elemento intermedio que sería la conexión entre el elemento origen y el elemento final. Si realizamos una analogía con la composición de funciones podemos encontrar que la conexión entre un dominio *"x"* y la imagen final *f(g(x))* es otra función *g(x)* que une el dominio original *"x"* con la imagen de la función compuesta *f(g(x))*.

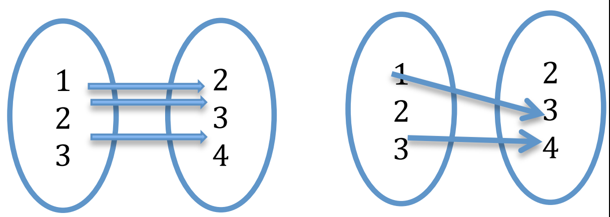
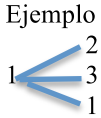
6) En relación a la pregunta 5, ¿Crees que ese tipo de relación se pueda dar en el tema de funciones?

a) Si tu respuesta es sí ¿cómo sería esa relación entre el productor, primer consumidor y segundo consumidor, considerando dominios y contradominios?

b) Si tu respuesta es no ¿porqué no se puede dar una relación entre el productor, primer consumidor y segundo consumidor, considerando dominios y contradominios ?

Tabla # 11

Respuestas a la actividad 1-pregunta 6

Equipo	Sí o No	Explicación	Observación
1	Sí	Sería una relación de dependencia de un consumidor de otro	
2	Sí	Porque sigue siendo un dominio y una imagen Dominio Dominio Rango  Plano cartesiano con 2 rectas que se intersectan. Si porque sigue siendo un dominio y una imagen	En esta respuesta se observa la base de lo que los estudiantes han entendido que tiene una función Dominio e imagen, aunque no se considere el tipo de relación o función que transforma un dominio en esa imagen, que para nuestro caso sería la propia composición de funciones. Sin embargo se reconoce que es una respuesta muy complicada para elaborar por unos estudiantes que no conocen el tema de composición de funciones.
3	Sí	Hoja 1) Dependen todos del productor Hoja 2) Si, dependen todos del producto Ejemplo 	El producto sería para el caso de composición de funciones el dominio origen.
4	Sí	El productor sería el dominio, el primer C sería el contradominio y la imagen el segundo C	Aquí hay una confusión entre imagen y contradominio, pues ambos conceptos son el mismo.
5	Sí	Se puede dar una relación porque suponiendo que el productor=dominio o variable independiente, los demás consumidores serían dependientes de él P=productor C1=Consumidor primario C2=consumidor secundario	En esta pareja la notación de funcionalidad función(variable independiente)=variable dependiente, es clara, así como el quién depende de manera inmediata de quién. *C1* de *P*, *C2* de *C1*. Además continúan

		C3=consumidor terciario f(P)=C1 f(C1)=C2 f(C2)=C3 Pero sin P no podríamos tener ni C1, ni C2 ni C3	haciendo una generalización al escribir que *C3* depende de *C2.* El hecho de que para un organismo se es dominio y para el otro se es imagen, está implícita en la notación y secuencia que utilizan para explicar su respuesta.
6	Sí	Sería una relación tridimensional porque tiene 3 valores, el rango dependerá de cual tomemos como variable	Aunque el término tridimensional, en este caso está mal utilizado, los estudiantes están de manera intuitiva entendiendo que el ser dominio o imagen depende de la relación que está trabajando. Esta es parte de la idea ímplicita de la composición de funciones, pues la imagen de una función se convierte en el dominio de la otra. Por ejemplo en *f(g(x)), g(x)* es la imagen de la función "*g*", pero también es el dominio de la composición; en caso los valores de *g(x)* son valores que corresponden también al dominio de la función "*f*".
7	Sí	Sería una relación directa. Dominio serían todos por la relación que hay entre estos.	En esta respuesta se aprecia que los estudiantes de manera intuitiva están observando el intercambio de la posición del dominio, que es básica en la composición de funciones.
8	Sí	Porque hay alguien que depende de otro	Esta explicación arguye la idea de relación entre variables que existe en las funciones; aunque la explicación es limitada.
9	Sí	Porque todo gira en función de P	Idea intuitiva de un dominio principal.
10	Sí Sí	Porque entre más zanahoria haya más conejos se van a reproducir y más alimento habrá para el León. Porque entre más fitoplancton, el pez comerá más y el tiburón se alimentará más.	Esta respuesta hace referencia a su respuesta del ejercicio # 1
11	No	Porque ambos dependen de otro producto	La respuesta no es clara

A través de esta última pregunta de acuerdo a la Tabla # 11 de respuestas se observa que los estudiantes van manejando de manera intuitiva el concepto de composición de funciones, al considerar un dominio origen en este caso el productor; y que la posición de imagen y dominio se intercambia dependiendo de que parte de la cadena alimentaria de la que está trabajando. Por ejemplo para el productor-herbívoro, se tiene la relación dominio-rango respectivamente, mientras que si se considera herbívoro-carnívoro, la relación es ahora dominio-rango respectivamente. En este caso el herbívoro toma dos posiciones de dominio y rango respectivamente, dependiendo de cuál es la relación que se está observando.

Síntesis final de la primera actividad

Lo que podemos observar en las tablas de respuestas de los estudiantes es que como dice *Fishbein (1982) la intuición es traducible en una acción significativa desde el punto de vista del comportamiento, esto quiere decir que la intuición de un concepto lleva al individuo a asociarla con una acción;* en nuestro caso los estudiantes lograron de manera intuitiva empezar a construir el concepto de composición de funciones a través de una lectura asociada a un contexto real.

La idea de que el dominio y la imagen sean conceptos que pueden intercambiarse dependiendo de la relación que se está trabajando, es una idea que esta ligada fuertemente con la composición de funciones $f(g(x)) = f \circ g(x)$. Pues la imagen de la función en este caso *g(x)* se convierte en el dominio de la función compuesta *f(g(x)).*

Motivados y en acuerdo de las últimas palabras de *García y Serrano (2000), al respecto la fragilidad conceptual manejada por los estudiantes en relación al concepto de función, y a su bajo manejo en coordinar representaciones en forma algebraica y en lenguaje natural y viceversa, dado que no existe coherencia entre la definición formal y la definición informal que proponen los profesores; muestran una fijación frecuente cuando interpretan funciones; identifican la funcionalidad en ejemplos estándares, pero en situaciones funcionales complejas no pueden identificarla; presentan serias dificultades para construir e identificar funciones en situaciones del mundo real.* Quisimos abordar de manera preliminar este tema de funciones como lo es la composición a través de un ejemplo no estándar y de una situación del mundo real. Consideramos que la respuesta de los estudiantes a esta primera actividad fue positiva; pues los estudiantes lograron hacer analogías con conceptos matemáticos y empezar a manejar ideas de manera intuitiva inmersas en lo que es la composición de funciones.

4.8.2 Respuestas de los estudiantes a la Actividad 2, “La composición de funciones y la aritmética”

Para esta actividad, los estudiantes no habían recibido una instrucción sobre la composición de funciones, por lo que sólo con el conocimiento de funciones que tenían, sobre dominios y rangos trataron de responder este ejercicio. Con el objeto de que el estudiante vaya generando cierta información que se requiera en la solución de un ejercicio y no así sólo mostrarles un método en donde el estudiante tiene sólo que aplicar un algoritmo y obtener un resultado.

Esta actividad se llevó dos sesiones. En una clase los estudiantes trabajaron los primeros dos conjuntos y en otra sesión de clases los dos últimos conjuntos. La actividad fue realizada en equipos de 4 personas.

En relación al ejercicio de escribir debajo de cada conjunto la palabra ***Dominio o Rango*** según corresponda, como puede observarse en la siguiente tabla, no representó dificultad alguna para los estudiantes; ya que lograron identificar exitosamente el dominio y rango de cada relación descrita como conjunto.

Tabla # 12

Respuestas a la actividad 2 sobre identificar dominios y rangos

Equipo	Escribieron dominio y rango en forma correcta			
	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
1	2, el tercero vacío	2, el tercero vacío	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos
2	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos
3	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos
4	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos
5	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos
6	Sí en los 3 conjuntos	Sí en los 3 conjuntos	No realizaron la actividad	No realizaron la actividad

Ejercicio 1

1) ¿Observas alguna manera para generar la función $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{h(x)}$ *a través de las funciones* $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{f(x)}$ *y* $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{g(x)}$ *?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

Tabla # 13

Respuestas a la actividad 2-ejercicio 1

Equipo	Sí	No	Comentarios u Observaciones
1	Sí, sustituyeron valores, los valores de la imagen del primer conjunto.		El equipo manejo *un nivel de observación*. Además En la hoja de trabajo unieron con líneas la trayectoria usando el primer y segundo conjunto
2	Si: con el dominio de *f(x)* se puede formar el dominio de *h(x)* y con el rango de *g(x)* se hace el rango de *h(x)* $(x, g^{-1}(x))$ Ruta 1) -1,3 → 3,5 0,4 → 4,7 1,2 → 2,1 -1,5 0,7 1,1		Llegaron a *un nivel de análisis* sobre la composición de funciones por conjuntos. Aunque $(x, g^{-1}(x))$, no es correcto.
3	Sí, porque del dominio de *f(x)* y el rango de *g(x)* sale *h(x)* *f(x) g(x) h(x)* -1→ 3→ 5 0→ 4 → 7 1→ 2→ 1		Llegaron a un *nivel de análisis* sobre la composición de funciones por conjuntos.
4	Observamos que *h(x)* esta formado por el dominio de *f(x)* y por el rango de *g(x),* se tomaron ambas y se formo *h(x),* por lo tanto si se genero *h(x)* a través de las funciones *f(x)* y *g(x)* -1→ 3 → 5 = (-1,5) 0→ 4 → 7 = (0,7) 1→ 2 → 1 = (1,1)		*Nivel de observación y análisis de composición de funciones.*
5	Sí Es una cadena & lleva un orden que ya marcamos en la hoja		El equipo manejo un *nivel de observación.* Trazaron el camino entre los dos primeros conjuntos para formar al tercero
6	Si En el primer ejemplo tomo el dominio para hacer la función del ejercicio 3 y la función del ejercicio 2 tomo el rango para el ejercicio 3 -1, 3, 3, 5, -1, 5 0, 4, 4, 7, 0, 7 1, 2, 2, 1, 1, 1		*Nivel de observación y análisis de composición de funciones.*

El camino para construir el tercer conjunto, que corresponde al conjunto composición, lo dividimos en dos categorías, la observacional, en donde los estudiantes sólo relacionaron los valores numéricos a través de flechas, y el de análisis, en donde los estudiantes trabajaron más con las relaciones numéricas entre los conjuntos.

Como se puede observar en la Tabla # 13 de respuesta, cuatro de los seis equipos (2,3,4 y 6) escribieron la ruta adecuadamente e inclusive la respuesta la expresaron a través de dominios y rangos; los estudiantes pudieron observar una conexión numérica entre los conjuntos y escribieron el camino a través del manejo de coordenadas y flechas.

La estrategia de solución de los equipos 1 y 5 fue a través de mostrar la conexión entre los elementos, uniéndolos con flechas en la propia hoja de la actividad.

Ejercicio 2

2) Trabajando con las imágenes y los dominios de ambas funciones ¿Cómo puedes generar la función z(a) partir de las funciones w(a) y h(a). ¿Observas alguna manera que transformen las funciones

a $\Rightarrow$ *w(a) y a* $\Rightarrow$ *h(a) en la función a* $\Rightarrow$ *z(a)?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

Tabla # 14

Respuestas a la actividad 2-ejercicio 2

Equipo	Si	No	Comentarios u Observaciones
1	Si, sustituyendo valores los rangos del primer conjunto *Esta no puede seguir con la misma relación con la anterior *(*respuesta relacionada con la de un compañero que dijo a todo el grupo que no se podía y la profesora acepto esa como una posibilidad)*		En los conjuntos colocaron unas flechas que van del dominio de *"a"* de *"h"* al rango de *w(a).* Aunque los valores numéricos sí son los mismos, no están manejando de manera adecuada la relación de dominio a imagen.
2	Si: con el dominio *h(a)* se hace el dominio *z(a)* y con el rango de *w(a)* se hace el rango de *z(a)* $(a_z,w(a))$ Ruta 2 7,1 → -2,5 5,3 → 2,7 -2 1 2 3 6,7 → 5,6 5 7		Aunque los valores numéricos sí son los mismos, no están manejando de manera adecuada la relación de dominio a imagen.

3		No, no hay relación entre ninguna de las funciones	Esta respuesta es correcta, pues en este ejercicio no hay composición de funciones entre los conjuntos dados.
4	Sí, la función *z(a)* se genera a través de las funciones *w(a)* y *h(a)* ya que toma el dominio del dominio de *h(a)* y el rango de *w(a)* Las otras funciones como *w(a)* se generan también con *h(a)* y *z(a)* ya que su dominio se saca del rango de *h(a)* y su rango de *z(a)* La función *h(a)* se genera con el dominio de *z(a)* y el rango del dominio de *w(a)*	*No hay nada que las una por lo tanto no hay un puente *(*respuesta relacionada con la de un compañero que dijo a todo el grupo que no se podía y la profesora acepto esa como una posibilidad)*	Este equipo contestó con ambas respuestas, tanto Sí, como No. Lo que invalida su respuesta. Sin embargo para la respuesta Sí, se tiene los mismos valores, pero no están considerando la relación que lleva un elemento del dominio a un elemento del rango.
5		No porque no hay un puente que las una	Está respuesta es correcta.
6	En el segundo ejercicio invirtió el dominio y el rango, de la primera función *w(a)* retomo los valores del rango y del 2º ejercicio *(a)* tomo los valores para el dominio.	*No se puede generar la función *z(a),* con las funciones *h(a)* y *w(a),* ya que no hay ninguna forma de conectarlos y ninguna relación entre ambos.	*(*respuesta relacionada con la de un compañero que dijo a todo el grupo que no se podía y la profesora acepto esa como una posibilidad)*

En realidad las respuestas de este ejercicio en algunos equipos son incluso contradictorias; pues los estudiantes estaban muy inquietos, dado que no encontraban una unión entre los tres pares de conjuntos. Parte de las respuestas negativas, que son la correcta, se atribuyen a un comentario que surgió en el salón de clase por un estudiante que comentó a todo el grupo y dirigiéndose a la profesora que no se podía dar la conexión o unión entre los conjuntos; con lo que la profesora comentó que esa podía ser una posibilidad.

El propósito original de este ejercicio era utilizar ahora como dominio de origen al segundo conjunto, sin embargo hubo un error en la conexión de los conjuntos, por lo que no existe la composición de funciones. Considerando así el ejercicio como está planteado al tener cada dos conjuntos los mismos elementos numéricos, algunos equipos de estudiantes consideraron que sí se podía generar el tercer par de conjuntos con los otros dos pares de conjuntos, pero esto implica que no están considerando la relación funcional entre los elementos con la dirección que le da el dominio a la imagen, sólo están considerando los valores numéricos que observan.

Ejercicio 3

3) *¿Observas alguna manera que transformen las funciones* ***x*** $\Longrightarrow$ ***f(x)*** *y* ***x*** $\Longrightarrow$ ***g(x)*** *en la función* ***x*** $\Longrightarrow$ ***f(g(x))****?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

Tabla # 15

Respuestas a la actividad 2-ejercicio 3

Equipo	Si	No	Comentarios u Observaciones	Nivel de observación ó comprensión
1	Si sustituyendo los valores de dominio el primer conjunto		Flechas que unen el dominio del conjunto 2, con la imagen del conjunto 1. No están considerando la dirección a donde envía un elemento del dominio a otro elemento de la imagen. Por lo que sólo están trabajando con los valores numéricos.	*Nivel de observación numérica.*
2	Si: el dominio *f(g(x))* es el dominio de *g(x)* y el rango de *f(g(x))* es el rango de *f(x)* Ruta 3) 19,15 → 19, 49 49,15 17, 21 → 17, 63 63,21 23, 27 → 23,56 56,27		Aunque en palabras sí describen cuál conjunto corresponde a cuál, no lograron encontrar la ruta que siguen los elementos para llegar al tercer conjunto. Invirtieron los valores del dominio del segundo conjunto, por la imagen. De esta manera construida no se llega a los valores del dominio e imagen de *f(g(x))*.	*Nivel observacional*
3	Sí, porque *f(x)* depende *g(x)* para darnos *f(g(x))*		Aunque la lectura o descripción de la notación *f(g(x))* es aceptable, no describen cómo se forma *f(g(x))* a partir de los dos	

			conjuntos de arriba.	
4	*f(g(x))* está conformada con el dominio del dominio de *g(x)* y el rango del rango de *f(x)* 49 → 19 → 15=(49,15) 63 → 17 → 21=(63,21) 56 → 23 → 27=(56,27)		Este equipo manejo correctamente la dirección que van llevando los elementos de cada conjunto, considerando la relación dominio-rango. En la hoja de la actividad señalaron con flechas cada conjunto *"x"* y *f(g(x))* de que conjunto viene	*Nivel de comprensión* a nivel de concepto
5		No, porque no hay puente que los una		Está respuesta es incorrecta.
6	No realizó ya esta actividad			

En este ejercicio se observa que los estudiantes se fueron en su mayoría sólo por los números y las formas, ya que los conjuntos que contenían a los mismos elementos estaban formados por las mismas figuras. Esto hizo que los estudiantes si bien lograran identificar los conjuntos destino *"x"* y *f(g(x))* con el conjunto con el que estaban relacionados, en realidad salvo el equipo # 4, perdieran la relación que hay entre dominios y rangos; es decir que un elemento del dominio es transformado bajo una relación (en este caso dado por flechas, pues no hay fórmulas o ecuaciones) a un elemento imagen.

Ejercicio 4

4) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones ***x*** ⇨ ***f(x)*** *y* ***x*** ⇨ ***g(x)*** *en la función* ***x*** ⇨ ***g(f(x))****?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

c) ¿Te dice algo la notación g(f(x))?. Explica

Tabla # 16

Respuestas a la actividad 2-ejercicio 4

Equipo	a) Si	b) No	c)	Comentarios u observaciones	Nivel de observación numérica o de comprensión
1	Si sustituyendo valores de la imagen del primer conjunto			Flechas que unen el dominio del conjunto 1 hasta la imagen del conjunto 2.	*Nivel observacional*
2	Si: El *g(f(x))* el dominio es el rango de *f(x)* y el rango *g(f(x))* es el rango de *g(x)* Ruta 4) 144,12 → 12,19 144,19 25, 5 → 5,17 25,17 49, 7 → 7,23 49,23			Construyeron adecuadamente la la ruta y la explicación es aceptable.	*Nivel de comprensión*
3	Sí porque *g(x)* depende de *f(x)* para dar *g(f(x))*		que *g(x)* depende de *f(x)*	Respuesta que sólo corresponde al inciso c). En la respuesta se observa la atención a comentarios de la profesora en clase sobre que *"observaran la notación g(f(x)) en relación a dependencia, dominio y rango"*.	
4	El dominio de *f(x)* y el rango de *g(x)* forman la función *g(f(x))* Es directo el camino 144→ 12 → 19= (144,19) 25→ 5 → 17= (25,17) 49 → 7 → 23= (49,23)			La respuesta es correcta, y con flechas en la hoja de trabajo muestran la conexión de los conjuntos.	*Nivel de comprensión*
5	Si, porque hay un puente que los une		c) Si, que todo depende de una.	Realizaron flechas entre los conjuntos y circularon los elementos que componen el dominio del primer conjunto con el rango de el segundo conjunto *(g(x));* los elementos también los colocaron en círculos y con una llave-flecha juntaron los dos y marcaron las flechas hacia el tercer conjunto. La respuesta del inciso c) no es clara.	
6	No realizó ya esta actividad				

En está última actividad sobre conjuntos, los estudiantes en lo general logran encontrar de manera gráfica como es la conexión entre los dos pares de conjuntos de arriba para formar el tercer conjunto que se encuentra en la hoja de la actividad abajo, que es el que corresponde a la composición de funciones. Ésta conexión que realizan los estudiantes es más visual que de comprensión sobre cómo se está transformando un dominio en imagen y ésta imagen en un nuevo dominio que será transformado en la imagen de la composición; es decir, la relación de funcionalidad no está siendo comprendida por todos los estudiantes, pues su atención se concentra sólo en la relación de números y formas. Sólo los equipos # 2 y 4, muestra una mayor comprensión en el proceso de generar un dominio y una imagen a partir de dos pares de dominios e imágenes considerando la relación que lleva un elemento del dominio a un elemento del conjunto imagen.

Síntesis final de la segunda actividad

Estas cuatro actividades fueron resueltas en su mayoría correctamente; sin embargo se observa que no todos los equipos lograron comprender la parte conceptual del ejercicio; pues cada par de conjuntos representaba una relación de funcionalidad en donde cada elemento del dominio es transformado en un elemento de la imagen, aunque la transformación no se indique con fórmulas o ecuaciones, de tal manera que no sólo era encontrar las regularidades de los números o las formas en el caso de los dos últimos ejercicios. Sin embargo sí hubo equipos que lograron entender mejor la conexión entre los conjuntos como elementos de funciones.

4.8.3 Respuestas de los estudiantes a la Actividad 3, "Las funciones y sus gráficas"

Esta actividad se llevo alrededor de dos y media sesiones de clase. Para esta actividad para el ejercicio de 2 y 3 los estudiantes sí recibieron una elemental explicación sobre la composición de funciones con tablas y gráficas.

Ejercicio 1. I f(g(x))

a) ¿Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta $f(g(x))=x^2+3$?

b) Escribe en palabras dentro de la función f qué es la función g(x)

f(________________________________)

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica $f(g(x))=x^2+3$

d) ¿Qué le hizo la composición f(g(x)) a la función f(x)?

Tabla # 17

Respuestas a la actividad 3-ejercicio 1.I

Equipo	Inciso a)	Inciso b)	Inciso c)	Inciso d)
1	(-5,4.5)	*f* (la desplaza hacia arriba)	La hizo más larga	La hizo más abierta
2		*f*(parábola)	Hace que la parábola suba 3 lugares en el eje de las *"y"*	Hizo que la línea se convirtiera en parábola porque ya cruza por el punto (0,3)
3	*f(x)= x+3* la ecuación crece, su origen debe de pasar por y=3, *$g(x)=x^2$* el origen pasa por (1,0) y es una parábola, *"x"* es igual *x^2*	*f*(una parábola)	Una parábola desplaza 3 lugares sobre *"y"*	La misma parábola pero desplazada 3 lugares sobre el eje de las *"y"*
4	$x \in [-5, 4.5]$	*f*(una parábola x^2)	Que la gráfica se hace una parábola y se mueve al eje de las *"y"* al 3	La transformó en parábola
5	(-5,4.5)	Esta elevado al cuadrado	En el eje de las *"x"* empieza la recta en el valor de -5 y se vuelve decreciente hasta el cero, y a partir del cero la línea se volverá creciente hasta el 4.5 siendo una parábola.	La convierte en parábola
6	(-5,4.5)	*f*(la hace una parábola)	La parábola se traslada 3 unidades sobre el eje de las *"y"*	La hizo parábola

Comentarios y observaciones a la Tabla de respuesta # 17

Inciso a) Todos los equipos, salvo el # 2 respondieron correctamente a esta pregunta. Los equipos 1,4,5, y 6 (4/6) respondieron en relación a las coordenadas de la figura que observaban, mientras que el equipo # 6 (1/6) respondió en forma general quién es el dominio de la parábola $f\left(g(x)\right) = x^2 + 3$. El equipo # 2 trató de hacer una descripción de la gráfica, pero su respuesta es incorrecta.

Inciso b) Todos los equipos, salvo el # 1 contestaron correctamente esta pregunta.

Inciso c) Todos los equipos, salvo el #1 contestaron correctamente a esta pregunta. El equipo # 1 responde a través de lo que observa en el dibujo del ejercicio, mientras que el equipo # 5 hace una descripción de la gráfica de acuerdo a lo que observan de manera numérica sobre intervalos a partir de donde crece o decrece.

Inciso d) Los equipos # 2, 4, 5 y 6 contestan correctamente. El equipo # 1 nuevamente responde a ésta pregunta en relación al dibujo que observa en el ejercicio y el equipo número 3 observa que es una parábola desplazada 3 unidades sobre el eje de las *"y",* sin embargo menciona que es la misma parábola, y para este ejercicio *f(x)* es una recta.

En este caso los estudiantes habían trabajado de manera previa con las transformaciones de funciones; no así con la composición de funciones en forma geométrica.

Ejercicio 1 II. g(f(x))

a) ¿Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta g(f(x))=(x+3)² ?

b) Escribe en palabras dentro de la función g qué es la función f(x)

g (________________________________) .

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica g(f(x))=(x+3)²

d) ¿Qué le hizo la composición g(f(x)) a la función g(x)?

Tabla # 18

Respuestas a la actividad 3-ejercicio 1. II

Equipo	Inciso a)	Inciso b)	Inciso c)	Inciso d)
1	(-5,4.2)	*g*(la hizo horizontal)	La alargo	La hizo larga pero horizontal
2		*g(*parábola)	Desplaza la gráfica 3 lugares hacia los negativos sobre el eje de las *"x"*	Que se desplace sobre el eje *"x"*

3	(-5,4)	Parábola con origen en $x=-3$	El origen se va a desplazar a -3 en el eje de las *"x"*	Elevo al cuadrado el valor de *f(x)*
4	$x \in [-5, 4.5]$	g(abre mucha a la parábola)	Es parábola muy abierta y su vértice se traslada al eje de las *"x"* al -3	Parábola abierta, muy abierta.
5	Se mueve 3 en el negativo de "*x*"	La función *f(x)* esta moviendo 3 lugares a la izquierda en el eje de las *"x"*	Que en el eje de las *"x"* en el valor de -5 la línea recta es una creciente hasta el valor de 4.5, a partir de 3	La desplazó 3 lugares al eje *"x"*, en los negativos
6	(-5,4.5)	g(es una parábola)	Es una parábola y se desplaza sobre el eje de las *"x"* 3 unidades en negativo	La desplazo 3 unidades sobre el eje de las *"x"*

Comentarios u observaciones a las respuestas.

Inciso a) Todos los equipos respondieron correctamente, salvo el equipo # 5. En el caso de los equipos 1, 3,4 y 6 respondieron esta pregunta en relación a los valores numéricos de la gráfica del ejercicio, mientras que el equipo # 2 respondió en general al dominio de la función compuesta $g(f(x))=(x+3)^2$.

Inciso b) Está pregunta no fue contestada de manera correcta por ninguno de los equipos, a pesar de que la función $f(x)= x+3$, es sólo una recta. El equipo # 5 intenta realizar una breve descripción, sin embargo no escribe la respuesta que era "recta". Llama la atención el que esta misma pregunta haya sido respondida correctamente por los mismos equipos en el caso anterior y para el ejemplo de la recta, no pudieran dar la respuesta correcta.

Inciso c) Los equipos 2, 3,4, y 6 respondieron correctamente, aunque el equipo # 2 no es muy explícito, al hablar sólo de la gráfica y no estrictamente de la parábola. El equipo # 1 nuevamente responde a esta pregunta en función de la parte visual de la gráfica; es decir, no en función de su fórmula analítica, si no de la forma que esta visualmente se observa muy ensanchada en la hoja de actividades. El equipo # 5 da una respuesta equivocada, aunque intentan describir características de la gráfica *g(f(x))*.

Inciso d) Los equipos 2, 5 y 6 respondieron correctamente. El equipo # 3 sí escribe sobre la composición *g(f(x))* como la transformación de la recta *f(x)* en parábola, pero aunque lo que describen es correcto, la pregunta correspondía a analizar qué le hacía la composición *g(f(x))* a la función *g(x)*. Sin embargo es interesante esta respuesta que describe propiamente la transformación que resulta en la función *f(x)* al componerla como *g(f(x))*. Nuevamente el equipo # 1 responde en función de cómo observa la gráfica en la actividad (la cuál está deformada en la hoja de actividad, pues está muy ancha en relación a las otras gráficas).

Síntesis de las observaciones

Esta primera actividad, muestra como lo estudiantes van observando las transformaciones que se realizan de componer una función en otra de manera gráfica; comenzando a observar que la composición de funciones no es conmutativa, ni de manera gráfica, ni en su fórmula analítica. Si bien no se les mostró a los estudiantes cómo se obtuvieron las ecuaciones de *f(g(x))* y *g(f(x)),* y ellos partían ya de las fórmulas y sus gráficas, el análisis guiado que realizan los estudiantes para la primera composición es adecuada, mientras que esta se complica para la composición *g(f(x)).*

Ejercicio 1 III.

a) Si f(x)= x-5 y $g(x) = +\sqrt{x}$ *¿Quién dirías de las dos gráficas anteriores que es la función compuesta f(g(x))=fog(x) y cuál g(f(x)) =gof(x) y porqué?*

Tabla # 19

Respuestas a la actividad 3-ejercicio 1. III

Equipo	$f(g(x)) = fog(x)$; Correcto o Incorrecto	$g(f(x)) = gof(x)$; Correcto o Incorrecto
1	Primera gráfica (vertical); correcto	Segunda gráfica (horizontal); correcto
2	Primera gráfica (escribieron la ecuación correctamente) $\sqrt{x} - 5$	Segunda gráfica (escribieron la ecuación correctamente) $\sqrt{x-5}$
3	*f(x)=x-5* (incorrecto)	$g(x) = \sqrt{x}$ (incorrecto)
4	Primera gráfica (escribieron la ecuación correctamente) $\sqrt{x} - 5$	Segunda gráfica (escribieron la ecuación correctamente) $\sqrt{x-5}$
5	Sin respuesta	Sin respuesta
6	Primera gráfica; se desplaza sobre el eje de las *"y";* correcto	Segunda gráfica; se desplaza sobre el eje de las *"x";* correcto

Considerando el estudio de *Guzmán (1998) que reporta la fragilidad en el manejo conceptual que logran los alumnos en relación al concepto de función, particularmente a* *la falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; consecuencia de la enseñanza recibida por los estudiantes, y menciona que los estudiantes están poco familiarizados en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico*. Nos dimos a la tarea de escribir el tercer ejercicio de esta primera actividad.

Para este ejercicio se hizo uso del lenguaje natural, para describir a las gráficas. En este caso nuestra intención es que el estudiante complemente esta actividad a través de la observación del ejercicio anterior, analizando los cambios que se dan en los ejes *"x"* o *"y",* dependiendo del orden de la composición.

Las respuestas de los estudiantes como puede observarse en la Tabla de respuestas # 19, es correcta para el ejercicio de la composición *f(g(x))* y *g(f(x))* en el caso de los equipos 1, 2, 4 y 6, lo que representa el $66.\overline{6}\,\%$. Además de que dos de éstos equipos (el equipo # 2 y 4) lo complementan con la ecuación que le corresponde a la gráfica para ambas composiciones, lo que habla de una lectura adecuada de las gráficas y sus ecuaciones, pues la parte analítica o algebraica de las composiciones no se les había enseñado todavía.

Los estudiantes de los equipos # 2 y 4 mostraron una habilidad matemática desarrollada en la lectura de gráficas y ecuaciones, al generar las fórmulas que generaban ambas composiciones.

Síntesis de la sección

Partiendo de las observaciones de investigadores como *Castañeda, González y Molina (2013), la gráfica contiene mucha información de la función, es un objeto que se mira en forma completa, que posee simultáneamente la medida del cambio y el comportamiento de la medida, lo que ofrece un escenario propicio para el análisis de los comportamientos local y global que incluso se pueden llevar hasta profundas relaciones analíticas. Las situaciones de estudio que se desprenden en esta perspectiva destacan las capacidades para anticipar efectos gráficos, comparación de gráficas y relaciones de rapidez, la* *simulación de comportamientos gráficos, operaciones con funciones en un contexto gráfico*. Desarrollamos esta primera actividad geométrica, partiendo de que los estudiantes realizaran observaciones, comparaciones y análisis entre distintas gráficas, de tal manera que pudieran interpretar una gráfica a partir de los cambios observados en otras gráficas y sus ecuaciones.

Podemos observar que para los tres ejercicios geométricos, los estudiantes muestran un manejo razonable de la lectura de las gráficas y sus ecuaciones respectivas. La interpretación, comparación y observación de regularidades es patente en el tercer ejercicio que es apoyado a partir de los dos ejercicios anteriores; además del uso del lenguaje natural y el lenguaje formal matemático. En este sentido el desarrollo de la actividad se observa en términos generales favorable.

Ejercicio 2

2) a) Completa las siguiente tabla de valores para f(g(x)) y g(f(x)). Grafica los puntos de f(x) y g(x)

b) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las tablas que construiste en el inciso "a"

c) De acuerdo a tus observaciones y cálculos, ¿la composición de funciones es conmutativa?. Explica tu respuesta.

Tabla # 20

Respuestas a la actividad 3-ejercicio 2

Equipo	Completó la tabla bien Número de aciertos/ Total	Realizó adecuadamente las gráficas; sí, no	c)
1	9/14	Realizaron una gráfica que no corresponde a ninguna de las siguientes ecuaciones *f(x), g(x), f(g(x)) y g(f(x))*	No es porque no da el mismo resultado. (respuesta correcta)
2	14/14	*f(g(x))* ; sí. *g(f(x)):* 6 de 7 puntos bien	No es porque f y g tienen distintos valores (respuesta correcta)
3	12/14	Sin gráfica	Sin respuesta

4	14/14	*f(g(x));* sí *g(f(x));* sí	No es conmutativa porque no es la misma operación, porque no coinciden los valores (respuesta correcta)
5	10/14	Sin gráfica	Sin respuesta
6	13/14	*f(g(x))* ; sí. *g(f(x)):* 6 de 7 puntos bien	Sin respuesta

La relación de respuestas correctas para el manejo de tablas numéricas es aceptable en lo general. Sólo la mitad de los equipos realizaron las gráficas de las composiciones *f(g(x))* y *g(f(x))* y sus gráficas están bien en lo general.

En relación a la no conmutatividad de la composición de funciones sólo la mitad de los equipos pudieron observarla, a pesar de que sus tablas estaban correctas en su mayoría, además el equipo # 6 a pesar de haber realizado las gráficas y completado la tabla, no da respuesta a esta pregunta.

Ejercicio # 3

3) *Utiliza las siguientes gráficas para obtener el valor numérico de las siguientes composiciones. Recuerda que el rango de una función se convierte en el dominio de la otra.*

a) f(g(-1)= *b) g(f(-1))=* *c) f(g(0))=* *d) g(f(0))=*

e) f(g(1)= *f) g(f(1))=*

g) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las graficas f(x) y g(x)

h) En este caso, ¿puedes decir de la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

Tabla # 21

Respuestas a la actividad 3-ejercicio 3

Equipo	Ejercicios resueltos correctamente	g) Gráficas	h)¿La composición es conmutativa?
1	0/6	Sobre la misma hoja, pero graficaron *f(g(x))* en lugar de *g(f(x))* y *g(f(x))* estaba mal graficada	No porque no da el mismo resultado (Respuesta correcta)
2	6/6	Utilizaron la misma gráfica del ejercicio, pero están bien graficadas	Sin respuesta
3	5/6	Utilizaron la misma gráfica, y colocaron los valores numéricos que tenían, sin unirlos, por lo que graficaron de manera discreta, no continua.	No porque si importa el orden en que este compuesto (Respuesta correcta)
4	6/6	Utilizaron la misma gráfica del ejercicio, pero están bien graficadas	No porque no son los mismos valores (Respuesta correcta)
5	6/6	Graficaron mal ambas gráficas	Si porque salen los mismos valores (Respuesta incorrecta)
6	6/6	Utilizaron la misma gráfica del ejercicio, pero están bien graficadas	No es conmutativa porque no es lo mismo componer una que componer la otra, ya que orden si influye.

En la tabla de respuestas # 21 se observa que salvo el equipo # 1, que no obtuvo ninguna respuesta correcta, los demás equipos pudieron leer adecuadamente las gráficas para obtener el resultado numérico que se solicitaba. En este caso se observa al menos un manejo operativo adecuado de la composición de funciones, en relación al manejo de dominios e imágenes de dos funciones para generar una tercera que es la función compuesta en forma numérica.

En relación a graficar los valores compuestos encontrados, los equipos 2,3,4 y 6 lo resolvieron bien, aunque el equipo # 3 tenía un valor mal graficado, pues en su tabla lo habían evaluado mal. En el caso de este equipo fue el único que grafico de manera discreta, pues los demás equipos, incluso los que graficaron mal lo hicieron de manera continua. Es común que los estudiantes estén más acostumbrados a trabajar con graficas continuas que con graficas discretas. En este sentido *De la Rosa, (2001) menciona que el paso de la representación algebraica a la gráfica es básicamente una codificación de información, los estudiantes localizan coordenadas resultado de la evaluación de la función, los puntos se unen para formar un segmento, esto produce dificultades y errores al considerar una* *representación incompleta de la función a través del uso del punteo, que además tiene implícito el problema del paso de lo discreto a lo continuo (Duval, 1988).* Por lo que este ejercicio se considera que el $66.\overline{6}\%$, lo resolvieron bien (salvo una coordenada mal graficada del equipo # 3). Los equipos que no graficaron correctamente fueron el equipo # 1 y el equipo # 5. Para este ejercicio, por razones de tiempo se les dijo a los estudiantes que podían graficar en el mismo plano cartesiano en donde estaban las gráficas *f(x)* y *g(x),* con la intención de ahondar en la actividad, y no así en estar haciendo los planos cartesianos correspondientes.

Para la pregunta *"h"* sobre la conmutatividad de las composición de funciones, los equipos # 1, 3, 4 y 5 respondieron correctamente, y no así los equipos # 2 y 5.

4.8.4. Respuestas a la Actividad 4 "La composición de funciones $f \circ g(x)$ el Álgebra"

Este ejercicio fue resuelto en forma individual, pero como se estaba por salir al periodo vacacional, los estudiantes estaban algo disipados y sólo 6 estudiantes entregaron la actividad. Para esta actividad se les explicaron 3 ejercicios de resolución algebraica, pero no se les mostró ningún ejercicio sobre encontrar las ecuaciones que dieron origen a una función compuesta.

En esta sección realizarás cálculos utilizando para ello el álgebra.

1) Si una función compuesta de dos funciones da como resultado otra h(x)=f(g(x)). En los siguientes ejercicios determina las funciones que pueden ser f(x) y g(x)

a) $f(g(x)) = fog(x) = \sqrt{x+6}$ *b) gof(x)=*x^3*+5* *c) fog(x)=* $|x^2 - 2|$

b) ¿La elección de las funciones f(x) y g(x) es única?

Tabla # 22

Respuestas a la actividad 4-ejercicio 1

Estudiante	a)	b)	c)	d)
1	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x)=x+6$ Correcto	$f(x)=x+5$ $g(x)=x^3$ Están al revés las funciones, incorrecto	$f(x)=x^2$ $g(x) = \|x-2\|$ Están al revés las funciones, incorrecto	No porque hay distintas variables
2	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x)=x+6$ Correcto	$f(x)=x+5$ $g(x)=x^3$ Están al revés las funciones, incorrecto	$f(x)=x^2$ $g(x) = \|x-2\|$ Están al revés las funciones, incorrecto	No porque depende del valor de las variables
3	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x)=x+6$ Correcto	$f(x)=x^3$ $g(x)=x+5$ Correcto	$f(x)=x^2$ $g(x) = \|x-2\|$ Están al revés las funciones, incorrecto	No porque no se sabe si en verdad esa es su función
4	$f(x)=x+6$ $g(x) = \sqrt{x}$ Están al revés las funciones, incorrecto	$f(x)=x^3$ $g(x)=x+5$ Correcto	$f(x)=x-2$ $g(x) = \|x^2\|$ Incorrecto	No porque las funciones pueden estar al revés es decir *f(x)* podría ser *g(x)* o *g(x)* podría ser *f(x)*
5	$f(x) = \sqrt{x}$ $g(x)=x+6$ Correcto	$f(x)=x^3+5$ $g(x)=x$ Correcto	$g(x)=x^2$ $f(x) = \|x-2\|$ Correcto	No
6	Si contestar	Si contestar	Si contestar	No

Comentarios y observaciones a los incisos:

Inciso a) Para la primera pregunta el $66.\overline{6}\%$, 4 de 6 estudiantes constestaron correctamente. El estudiante 4 identificó cuáles eran las funciones originales; sin embargo como escribió las funciones al revés y la composición de funciones no es conmutativa, la respuesta no es correcta. El estudiante 6 no contestó nada.

Inciso b) Para ésta composición de funciones, sólo la mitad el 50% de los estudiantes la contestaron correctamente. En este caso 2 de los 6 estudiantes, el estudiante 1 y el estudiante 2, identificaron cuales eran las ecuaciones que daban origen a la función composición; sin embargo como la composición de funciones no es conmutativa la respuesta es incorrecta. El estudiante 6 no contestó nada.

Inciso c) Para esta pregunta sólo 1 de los 6 estudiantes, el $16.\overline{6}\%$ contestó correctamente esta pregunta. Tres estudiantes más lograron identificar las funciones originales, pero al no ser conmutativa la composición de funciones la respuesta está equivocada. El estudiante 6 no contestó nada.

Inciso d) Aunque la respuesta es correcta, pues la elección de las funciones que pueden dar origen a una función compuesta no es única, el argumento de todos los estudiantes es débil, e incluso para el caso del estudiante 4, la justificación es equivocada.

En este ejercicio se observa que algunos estudiantes están teniendo cierta comprensión de cómo se realiza la composición de funciones, pues el encontrar las funciones originales se muestra que el estudiante está entendiendo cuál es la composición y en el caso de algunos estudiantes el orden.

2) Utiliza las siguientes funciones para realizar la composición que se indica en forma algebraica o analíticamente

$f(x) = \sqrt[4]{x+2}$, $g(x) = e^x - 1$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $w(x) = x^3 + 4$,

z(x)=sen(x)

a) $f \circ h(x) =$ *b)* $g \circ f(x) =$ *c) w(z(x))=* *e) g(h(x))=*

f) f(g(h(x)))=

2) *Utiliza las siguientes funciones para realizar la composición que se indica en forma algebraica o analíticamente*

Tabla # 23

Respuestas a la actividad 4-ejercicio 2

Estudiante	a)	b)	c)	d)	e)
1	Bien	Mal	Bien	Bien	Bien
2	Bien	Mal	Bien	Mal	Mal
3	Bien	Mal	Mal	No la resolvió	No la resolvió
4	Bien	Bien	Bien	Bien	Bien
5	Bien	Bien	Bien	Bien	Mal
6	Mal	Mal	Mal	Mal	Mal

La parte operativa de la composición de funciones, como lo es la parte algebraica, de acuerdo *al capítulo 2 sobre enseñanza de la composición de funciones* es la representación a la que los profesores enfocan más sus esfuerzos educativos. Realizando los porcentajes de acierto tenemos la siguiente relación.

Respuestas correctas:

Inciso a) $83.\bar{3}\%$, Inciso b) $33.\bar{3}\%$, Inciso c) $66.\bar{6}\%$, Inciso d) 50%

Inciso e) $33.\bar{3}\%$ Un ejercicio como el de este inciso no se les había enseñado a los estudiantes, una composición de tres funciones.

Síntesis final de la cuarta actividad

En términos generales podemos observar que a pesar de sólo haber dedicado relativamente poco tiempo a esta actividad, los estudiantes ya tenían todo el antecedente de las actividades anteriores y esto se pudo observar sobre todo en el ejercicio 1 de esta cuarta actividad.

La parte operativa de la composición de funciones y de muchos temas en matemáticas se le da en la educación una preponderancia en comparación a la parte del análisis y la comprensión del concepto. Como se pudo observar en el capítulo 2 de esta tesis sobre la enseñanza de la composición de funciones, esta tendencia puede generar una educación a nivel sociedad preponderantemente operativa, por lo que es nuestro interés abarcar una forma de enseñanza más completa e integral que incluya por supuesto la parte operativa de los temas trabajados en matemáticas, pero también el análisis y comprensión de los conceptos. Por esa razón dejamos la actividad algebraica como la última de las actividades de nuestra secuencia didáctica, para apoyar la parte de comprensión y análisis del tema bajo distintas representaciones en matemáticas.

Síntesis general de las cuatro actividades

Apoyados en la idea de varios investigadores educativos en matemáticas que han investigado sobre el tema de funciones como (Duval, 1993; 1996) que habla sobre los contextos de representación matemática. (Castañeda, González y Molina, 2013) sobre la integración de contextos. Guzmán (1998) reporta la fragilidad en el manejo conceptual que logran los alumnos en relación al concepto de función, particularmente a la falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; consecuencia de la enseñanza recibida por los estudiantes, está poco familiarizada en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico. García y Serrano (2000) que señala que los profesores muestran una fijación frecuente cuando interpretan funciones; identifican la funcionalidad en ejemplos estándares, pero en situaciones funcionales complejas no pueden identificarla; presentan serias dificultades para construir e identificar funciones en situaciones del mundo real.

Y otros muchos autores que ponen énfasis en la graficación y en la dificultad cognoscitiva que el concepto de función representa para los estudiantes, creemos que después de haber generado una lectura de asociación y relación de conceptos biológicos con conceptos matemáticos, hacer que los estudiantes relacionen números a través de sus dominios e imágenes, trabajar las gráficas, no desde el punto de vista de sustituir valores en una fórmula matemática para representar puntos en el plano cartesiano, si no como objeto propio de análisis en donde el estudiante puede leer las formas de las gráficas, sus valores numéricos y construir sus ecuaciones, así como trabajar la parte algebraica del tema de composición de funciones, creemos que los estudiantes lograron una mayor comprensión del tema que cómo generalmente se trabaja este en clase.

Por otro lado el haber trabajado de una manera en que el estudiante con la información que se le da vaya observando, construyendo, generando ideas alrededor de un tema y expresarlos con sus compañeros y al grupo de clase en general, apoya el aprendizaje basado en el estudiante como sujeto activo de su propio proceso de aprendizaje, y no así un sujeto que recibe información para poder después reproducirla.

De acuerdo a lo que la profesora observó después en el curso para temas como encontrar la derivada de una función a través de su definición $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, en donde los estudiantes tienen que evaluar *(x+h)* en la función *f(x),* el tema de composición de funciones les ayudó, pues los estudiantes no presentaron tanta dificultad en el manejo y operatividad de obtener la derivada de una función utilizando para ello su definición. Por lo que se considera que las actividades realizadas apoyaron a fortalecer la evaluación de una ecuación en una función.

Capítulo 5 Conclusiones

En el capítulo 1 de este trabajo comenzamos exponiendo nuestro interés en diseñar una secuencia didáctica que estuviera conformada por una amplia gama de representaciones matemáticas y de problemas en contextos reales sobre el tema de composición de funciones $f \circ g(x)$ a nivel bachillerato. Nuestro interés radicaba en la experiencia observada a través de diferentes cursos impartidos de Matemáticas IV, en donde la dificultad en la comprensión y operatividad en este tema era continua y se repetía en cada curso. La importancia de la composición de funciones va más allá del propio curso de Matemáticas IV, pues la falta de comprensión y manejo de este tema, se ve reflejado en cursos posteriores como los son Cálculo Diferencial con la regla de la cadena y Cálculo Integral con el método de integración por sustitución; ambos temas involucran la composición de funciones de manera implícita.

De acuerdo a lo analizado en el capítulo 2 sobre la enseñanza de la composición de funciones en diferentes medios escritos, como libros y enciclopedias para el nivel bachillerato, páginas de internet y videos educativos; revisados éstos últimos tanto en el idioma español, como en el idioma inglés, pudimos observar la preponderancia de la enseñanza algorítmica, que se ve reflejada en la explicación y la petición de solución de ejercicios algebraicos. En este sentido el trabajo gráfico fue escaso o nulo en varios de los medios de información a los cuales accedimos, así como el relacionar el tema con problemas de aplicación para mostrar de una manera más clara al estudiante la conexión entre este tema y la vida no escolar.

La preponderancia de mostrar los temas de matemáticas en forma exclusivamente algebraica, genera en algunos casos la falta de comprensión global del tema o incluso de relación con la vida fuera del aula. El hecho de generar una enseñanza basada sólo en el álgebra para la resolución algorítmica-operativa de ejercicios, limita una visión más amplia y clara que sobre el tema puede tener un estudiante. En ese sentido nosotros quisimos recuperar las observaciones hechas por distintos autores como (Duval, 1993; 2006) sobre los contextos de representación matemática y la idea de integración de contextos de (Castañeda, González y Molina, 2013), entre otros.

Después de haber analizado la forma en cómo en distintos medios de información a los que acceden comúnmente los jóvenes de bachillerato en sus dudas escolares se limitan las representaciones matemáticas, aunque no en todos los casos por supuesto. Nos dimos a la tarea, apoyados además en las conclusiones teóricas de distintos investigadores en matemática educativa en diseñar una secuencia didáctica que involucrará: problemas en contextos reales no estándares, aritmética y conjuntos, la geometría de la composición de funciones a través de sus gráficas, y su operatividad algebraica. Todo esto principalmente en un ambiente de trabajo colaborativo entre los propios estudiantes.

Considerando los resultados encontrados sobre la forma en cómo se enseña de manera preponderante el tema de composición de funciones (en forma algebraica); las conclusiones de varios investigadores educativos como García y Serrano (2000), sobre que los profesores para enseñar el tema de funciones utilizan ejemplos estándares y presentan dificultades para construir e identificar funciones en situaciones del mundo real. Castañeda, González y Molina (2013), quienes manifiestan la importancia del trabajo con las gráficas, dado el contenido de información que ofrecen sobre una función. Duval (1999) sobre que se aprende en la medida que se abstrae el objeto en este caso (el concepto de composición de funciones) de sus representaciones, proceso mediante el cual es importante la adquisición de representaciones semióticas y el libre tránsito entre ellas. Guzmán (1998) quien reporta la fragilidad en el manejo conceptual que logran los alumnos en relación al concepto de función, por la falta de coordinación entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; consecuencia de la enseñanza recibida por los estudiantes, está poco familiarizada en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico. Diseñamos una secuencia didáctica con el objetivo de contestar principalmente a las siguientes dos preguntas de investigación:

1. ¿Los estudiantes pueden desarrollar analogías básicas para identificar el concepto de composición de funciones en ejemplos no estándares sin previo conocimiento de la composición de funciones?

2. ¿ Cuál es el resultado en los estudiantes en relación a sus procesos de comprensión sobre el tema de composición de funciones cuando se hace uso de distintos recursos matemáticos; en donde el estudiante tiene que recrear, reinventar conceptos matemáticos basándose en nociones intuitivas, para continuar su proceso de aprendizaje a través de diversos niveles de concreción y abstracción?

Como parte de los resultados de nuestro trabajo, podemos decir que se logró diseñar una serie de actividades matemáticas y ponerlas en práctica; las cuales consideramos fueron adecuadas para el propósito de nuestra investigación.

Los resultados reportados por los estudiantes en las actividades, las observaciones de la profesora reportados en clase y en las evaluaciones, así como la expresión por escrito de los estudiantes de un cuestionario que contestaron sobre lo que pensaban y sentían en relación a las actividades (dicho cuestionario y resultados se encuentran en los anexos de este trabajo de investigación). Apoyan nuestra visión positiva del trabajo.

Para contestar a nuestra primera pregunta:

¿Los estudiantes pueden desarrollar analogías básicas para identificar el concepto de composición de funciones en ejemplos no estándares sin previo conocimiento de la composición de funciones?

Para contestar nuestra pregunta desarrollamos la primera actividad que consistía en una lectura sobre la *cadena alimentaria;* en esta actividad no estándar y de un tema no propiamente matemático, los estudiantes por pares realizaron analogías entre los primeros organismos involucrados en la cadena alimentaria *productor-herbívoro-carnívoro* y el tema de funciones que conocían como *dominio-imagen.* La mayoría de las parejas lograron realizar la conexión entre quién era el dominio y quién representaba el rango o imagen a través de las distintas preguntas; incluso pudieron darse cuenta del hecho de que un organismo representa al dominio para un tipo de relación y en otra relación distinta el mismo organismo puede representar a la imagen. Por ejemplo *productor-herbívoro* y *herbívoro-carnívoro,* para ambos casos la analogía sería *dominio-rango* y *dominio-rango*, respectivamente, pero en estos dos ejemplos de relación el *herbívoro* para la primera relación representa a la *imagen* y en el caso de la segunda relación se convierte en el *dominio*.

El cambio de imagen de una función a dominio de otra función es una idea que se encuentra inmersa en el tema de composición de funciones $f\big(g(x)\big) = f \circ g(x)$, pues en este caso la imagen de la función *"g",* que es *g(x)* se convierte en el nuevo dominio, de la función *"f",* en caso de que los elementos imágenes de *g(x),* se encuentren dentro de los elementos dominio de la función *f(x).*

Esta primera actividad no estándar y de trabajo sobre problemas en contextos reales, logró que los estudiantes de manera intuitiva y entre ellos solos fueran construyendo los elementos base involucrados en el concepto de composición de funciones a través de un ejemplo propiamente no matemático, y sin antecedentes sobre el tema de composición de funciones.

En relación a nuestra segunda pregunta de investigación:

¿ Cuál es el resultado en los estudiantes en relación a sus procesos de comprensión sobre el tema de composición de funciones cuando se hace uso de distintos recursos matemáticos; en donde el estudiante tiene que recrear, reinventar conceptos matemáticos basándose en nociones intuitivas, para continuar su proceso de aprendizaje a través de diversos niveles de concreción y abstracción?,

Podemos decir que el resultado en la comprensión del tema de composición de funciones fue buena en lo general, de acuerdo a los resultados de la secuencia didáctica y a las observaciones de la propia profesora.

Realizando un análisis de los resultados de las tres últimas actividades de nuestra secuencia didáctica en relación a qué tanto ayudo a los estudiantes en su proceso de comprensión del tema de composición de funciones podemos decir:

1. Para la actividad # 2, sobre *aritmética y conjuntos*, se observan dos características principales:

- Los estudiantes lograron realizar en su mayoría las conexiones que llevaban de dos conjuntos (con sus dominios e imágenes respectivos) a generar un tercer conjunto con su dominio e imagen, que representaba al conjunto composición; aunque lo trabajaron a un nivel observacional solamente. Pues relacionaron los elementos numéricos involucrados y en el caso de los dos últimos ejercicios de esta actividad relacionaron las formas. El equipo # 3 contestó correctamente los 4 ejercicios y los equipos # 1, 2, 4 y 5 contestaron bien 3 de los 4 ejercicios. El equipo # 6 sólo contestó bien la primera actividad.
- La mitad de los equipos (equipos # 2, 3 y 4) lograron comprender en 2 ó 3 de los 4 ejercicios la parte conceptual, pues respondieron considerando el hecho de que cada par de conjuntos representa una relación de funcionalidad en donde cada elemento del dominio es transformado en un elemento de la imagen, aunque la transformación no se indicaba con fórmulas o ecuaciones, si no con flechas. Pero ninguno de los 6 equipos lograron darse cuenta de la relación de funcionalidad implícita para los 4 ejercicios.

Sí sólo se buscará en estos ejercicios el resultado, la mayoría de los equipos estarían bien; sin embargo en nuestro caso, nuestro interés va más allá de la respuesta correcta, pues estamos trabajando la comprensión de la composición de funciones. En este caso sólo la mitad de los estudiantes entendieron de manera informal, aunque no en todos los ejercicios, la relación de funcionalidad entre los elementos que no se marcaban con fórmulas, si no con números y flechas.

Es importante señalar que esta actividad la resolvieron los estudiantes con los conocimientos que ellos tenían sobre función, relación, dominio e imagen, pues no recibieron ninguna instrucción previa o ningún ejemplo parecido para que ellos pudieran reproducir dicho ejemplo; se les dejó que ellos utilizarán sus propias estrategias matemáticas y sociales al interactuar, observar, relacionar, y buscar la información necesaria para resolver la actividad.

2. Para la actividad # 3, sobre *lectura y generación de gráficas y tablas*, se observa una respuesta favorable hacia la comprensión del concepto de composición de funciones en forma gráfica. Podemos resumir las siguientes implicaciones de las respuestas a esta actividades :

- Los estudiantes para el primer ejercicio que constaba de tres incisos, realizan en lo general de manera favorable las observaciones, comparaciones y análisis entre distintas gráficas, de tal manera que pueden interpretar y relacionar una gráfica a partir de los cambios observados en otras gráficas y sus ecuaciones respectivas, por lo que muestran un manejo razonable de la lectura de las gráficas y sus ecuaciones. Para este caso sólo llama la atención que la relación *f(g(x))* tuvo un mejor análisis por parte de los estudiantes que la función compuesta *g(f(x)),* a pesar de que consideramos que ambas funciones compuestas tenían el mismo grado de complejidad.
- Para el caso del inciso 3 de este primer ejercicio, en donde los estudiantes tienen que determinar cuál es la gráfica que corresponde a la composición *f(g(x))* y cuál a la composición de *g(f(x))* a partir sólo de las gráficas *f(x)* y *g(x),* haciendo una analogía o inferencia con el ejercicio anterior, sí se observa una comprensión aceptable de las gráficas de las funciones compuestas *f(g(x)) y g(f(x)),* pues 4 de los 6 equipos, $66.\overline{6}$% lo respondieron correctamente. Incluso los equipos # 2 y 4 generan las ecuaciones correspondientes a las gráficas de las composiciones, sólo con la lectura de las gráficas.
- Para el segundo ejercicio que corresponde en completar una tabla de manera numérica a partir de los valores numéricos de *f(x)* y *g(x),* con el objetivo de encontrar algunos valores para *f(g(x))* y *g(f(x))*, los estudiantes resolvieron en su mayoría correctamente todos los ejercicios. Por lo que el manejo de imagen de una función a nuevo dominio de otra función, en forma numérica se muestra comprendido o al menos manejado adecuadamente por los estudiantes.
- Para el tercer ejercicio de esta actividad que corresponde en encontrar algunos valores numéricos de la composición *f(g(x))* y *g(f(x)),* a través de realizar la lecturas numéricas de las coordenadas de dos gráficas *f(x)* y *g(x),* que están en un mismo

plano, todos los equipos, salvo el equipo # 1, que no obtuvo ninguna respuesta correcta, pudieron leer adecuadamente las gráficas para obtener el resultado numérico de la composición que se solicitaba. En este caso se observa la comprensión gráfica de la composición de funciones, o al menos un manejo operativo-geométrico adecuado.

3. Para la actividad # 4, sobre *álgebra* , se observa una respuesta favorable. Podemos resumir las respuestas a esta actividades así:

- Para el caso del primer ejercicio que constaba de 4 incisos; en donde en los tres primeros incisos los estudiantes tenían que encontrar cuáles eran las funciones que habían dado origen a la función compuesta expuesta (ejercicios como éste no se les explico antes), los resultados muestran una comprensión del concepto de composición de funciones, pues los resultados fueron: el $66.\overline{6}\%$, 4 de 6 estudiantes constestaron correctamente el primer inciso y un estudiante más había identificado a las funciones originales; sin embargo como escribió las funciones al revés y la composición de funciones no es conmutativa, la respuesta no es correcta. Para el segundo inciso la mitad el 50% , contestó correctamente, y dos estudiantes más habían identificado cuales eran las ecuaciones que daban origen a la función composición, pero como la composición no es conmutativa, la respuesta no es correcta. Para el tercer inciso sólo 1 de 6 estudiantes contestaron correctamente $16.\overline{6}\%$ a esta pregunta; tres estudiantes más lograron identificar las funciones originales, pero al no ser conmutativa la composición de funciones la respuesta está equivocada. Haciendo un promedio de los 3 ejercicios el 44.4% contestaron bien identificando funciones originales que podían generar a la función compuesta.
- El último inciso de esta actividad en donde se les preguntaba si la elección de las funciones *f(x)* y *g(x)* es única, aunque todos contestaron correctamente que no, pues la elección de las funciones que pueden dar origen a una función compuesta no es única, el argumento de todos los estudiantes es débil, e incluso en el caso de un estudiante, la justificación es equivocada.

En general se observa en este ejercicio que la suma de las actividades anteriores, generaron en los estudiantes cierta comprensión de cómo se realiza la composición de funciones, pues el encontrar las funciones originales se muestra que el estudiante está entendiendo cuál es la composición y en el caso de algunos estudiantes incluso el orden. Sin apoyo para ello de un ejemplo de solución previa por parte de la profesora.

- Para el siguiente ejercicio de esta última actividad, la cual consistía en 5 ejercicio de composición de funciones en forma algebraica. El último ejercicio estaba formado por la composición de tres funciones (se les explicó a los estudiantes 3 ejemplos de composición de funciones en forma algebraica, sin mucho detalle, pero los tres ejemplos eran composiciones de sólo dos funciones). Se obtuvo los siguientes resultados de respuestas correctas: inciso a) $83.\bar{3}\%$, inciso b) $33.\bar{3}\%$, inciso c) $66.\bar{6}\%$, inciso d) 50%, inciso e) $33.\bar{3}\%$.

En términos generales podemos observar que a pesar de sólo haber dedicado relativamente poco tiempo a la explicación de la solución de esta actividad, los estudiantes ya tenían todo el antecedente de las actividades anteriores y esto se pudo observar en el porcentaje de solución correcta.

En términos generales creemos que después de haber generado una lectura de asociación y relación de conceptos biológicos con conceptos matemáticos, hacer que los estudiantes relacionen números a través de sus dominios e imágenes, trabajar las gráficas, no desde el punto de vista de sustituir valores en una fórmula matemática para representar puntos en el plano cartesiano, si no como objeto propio de análisis en donde el estudiante puede leer las formas de las gráficas, sus valores numéricos y construir sus ecuaciones, así como trabajar la parte algebraica del tema de composición de funciones, los estudiantes lograron una mayor comprensión del tema que cómo generalmente se enseña sólo en forma operativa algebraica.

Por otro lado el haber trabajado con un esquema en que el estudiante con la información que se le da va observando, construyendo, y generando ideas alrededor de un tema, expresando sus conclusiones a sus compañeros de equipo y al grupo de clase en general, apoya el aprendizaje basado en el estudiante como sujeto activo de su propio proceso de aprendizaje, y no así un sujeto que recibe información para poder después reproducirla. Los integrantes que formaban cada actividad fueron variando de actividad en actividad a gusto de los propios estudiantes, aunque hubo equipos que se quedaron con los mismos integrantes para todas las actividades.

Por último de acuerdo a la observación de la propia profesora los estudiantes retuvieron más tiempo la información de esta actividad que otras que se manejan en clase, pues incluso pasado el tiempo recordaban las nociones de sustituir una ecuación en otra. Esto se vio reflejado en sus evaluaciones escritas y en temas que trabajaron posteriormente, como lo es encontrar la derivada de una función a través de su definición $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, en donde los estudiantes tienen que evaluar *(x+h)* en la función *f(x),* que si bien en este caso no se da la composición de funciones, pues se trabaja con la misma función; el tema de composición de funciones les ayudó a los estudiantes a sustituir y evaluar una expresión algebraica en una función determinada. En este caso se observó que los estudiantes no presentaron tanta dificultad como en cursos anteriores.

Referencias

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (3), 203 - 217.

Ardila, V. H. (Ed.). (1998). *Enciclopedia Nova Matemática, tomo 6* (1era. ed., Vols. 1-6). Bogotá: Voluntad S.A. 72-75.

Audesirk, T., Audesirk, G. y Byers, B. (2008). *Biología la vida en la Tierra* (8va. ed). México: Pearson Prentice Hall, 560.

Azcárate, C. y Deulofe.J, (1990). *Funciones y grafica.* Editorial Síntesis .

Castañeda, A., González, R.I. y Molina, J.G. (2013). Secuencia didáctica para el estudio de las funciones a través de la graficación. En G. Buendía, M. Ferrari, y G. Martínez (Eds.) *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas.* México: Díaz de Santos Editorial.

Chevallard, Y., Bosh, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. España: Horsori Editorial.

De la Rosa. (2001). *Tesis de Maestría. El concepto de función lineal en telesecundaria: Una propuesta para el mejoramiento de la articulación entre registros, bajo un modelo integrador a través de la TI-92.* México: Cinvestav.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval, R. (1998). *Registro de representaciones semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II. Pág. 173-202.* México : Iberoamérica.

De Lange. (1987). Real problems with real world mathematics. . *Conferencia Plenaria ICME-Actas del 8° Congreso Internacional de Educación Matemática.* (págs. (pp. 83-110)). Sevilla.: Actas del 8° Congreso Internacional de Educación Matemática.

Flores, A. (2001). *Propuesta de instrumentación didáctica para la enseñanza del concepto de función lineal.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publisching Company.

Fishbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For he Learning of Mathematics,* 3, 2, pp. 9-18

Galdós, L. (s.f.). *Consultor Matemático, Introducción al Cálculo IV* (1ra. ed., Vols. 1-4). Madrid: Cultura, S. A.1071-1080.

García, G. y Serrano, C. (2000). Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: el caso de la función *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 3(3), 357 - 370.

Godino, J. D. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* España, Granada : ReproDigital. Facultad de Ciencias Avda. Fuentenueva s/n. 18071 Granada.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 1(1), 5 – 21.

Hernández, J. A. (2013). *Análisis del discurso de argumentación de estudiantes en la solución de una actividad matemática* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN. México.

Ibáñez, P. García, G. (2012). *Matemáticas IV, con enfoque en competencias* (2da. ed). México: CENGAGE Learning, 42-49.

Lassalle, L. M.-P. (2005). Problemas matemáticos en el aula. Más y más problemas. *SIGMA 21*.

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula, en W. Blum y otros (eds.): *Applications and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*, pp. 22-31. Chichester: Ellis Horwood.

Pollak, H.O. (1976). What industry wants a mathematician to know and how we want them to know it. *Educational Studies in Mathematics.* 7 (1-2), pp 109-112.

Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Mexico: Trillas.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of student´s mathematical beliefs and behvior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 338-355.

Stewart, J. (1999). *Cálculo diferencial e integral*. México: International Thomson Editores, 36-41.

Torres, B. (2014). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología.* Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México.

Referencias de internet

Composición de funciones. (s.f.). En Vitutor. Recuperado de http://www.vitutor.com/fun/2/a_4.html

Composición de funciones. (s.f.). En Wikipedia. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Función_compuesta

Composición de funciones. (s.f.). En Sector Matemática. Recuperado de http://www.sectormatematica.cl/contenidos/funcomp.htm

Composición de funciones. (s.f.). En Vadenumeros. Recuperado de http://www.vadenumeros.es/primero/composicion-de-funciones.htm

Composition function. (s.f.). En Wikipedia. Recuperado de http://en.wikipedia.org/wiki/Function_composition

Composition function. (s.f.). En Purplemath. Recuperado de http://www.purplemath.com/modules/fcncomp3.htm

Composition function. (s.f.). En Mathsisfun. Recuperado de http://www.mathsisfun.com/sets/functions-composition.html

Composition function. (s.f.). En Khanacademy. Recuperado de http://www.khanacademy.org/math/algebra2/functions_and_graphs/composing-functions/v/function-composition

Didáctica (s.f.). En Definición.de. Recuperado de http://definicion.de/didactica/

Montiel, A. (2011, enero 30). Composición de funciones. [Archivo de video]. Video colocado en http://www.youtube.com/watch?v=36glvhtn4Kg

Unicoos. (2011, noviembre 27). Composición de funciones. [Archivo de video]. Video colocado en http://www.youtube.com/watch?v=l6pZGhy0hHc

El aprendiz informático. (2011, marzo 11). Composición de funciones. [Archivo de video]. Video colocado en http://www.youtube.com/watch?v=2Nj5oegrRDs

Julioprofe. (2012, septiembre 16). Composición de funciones. [Archivo de video]. Video colocado en http://www.youtube.com/watch?v=fLiwtU-8KN4

patrickJMT. (2008, marzo 11). Composition function. [Archivo de video]. Video colocado en https://www.youtube.com/watch?v=S4AEZElTPDo

ProfRobBob. (2011, septiembre 12). Composition function. [Archivo de video]. Video colocado en http://www.youtube.com/watch?v=T6-Zdr5w_bE

TabletClass Math. (2011, febrero 25). Composition function. [Archivo de video]. Video colocado en http://www.youtube.com/watch?v=4z9ElTz4inQ

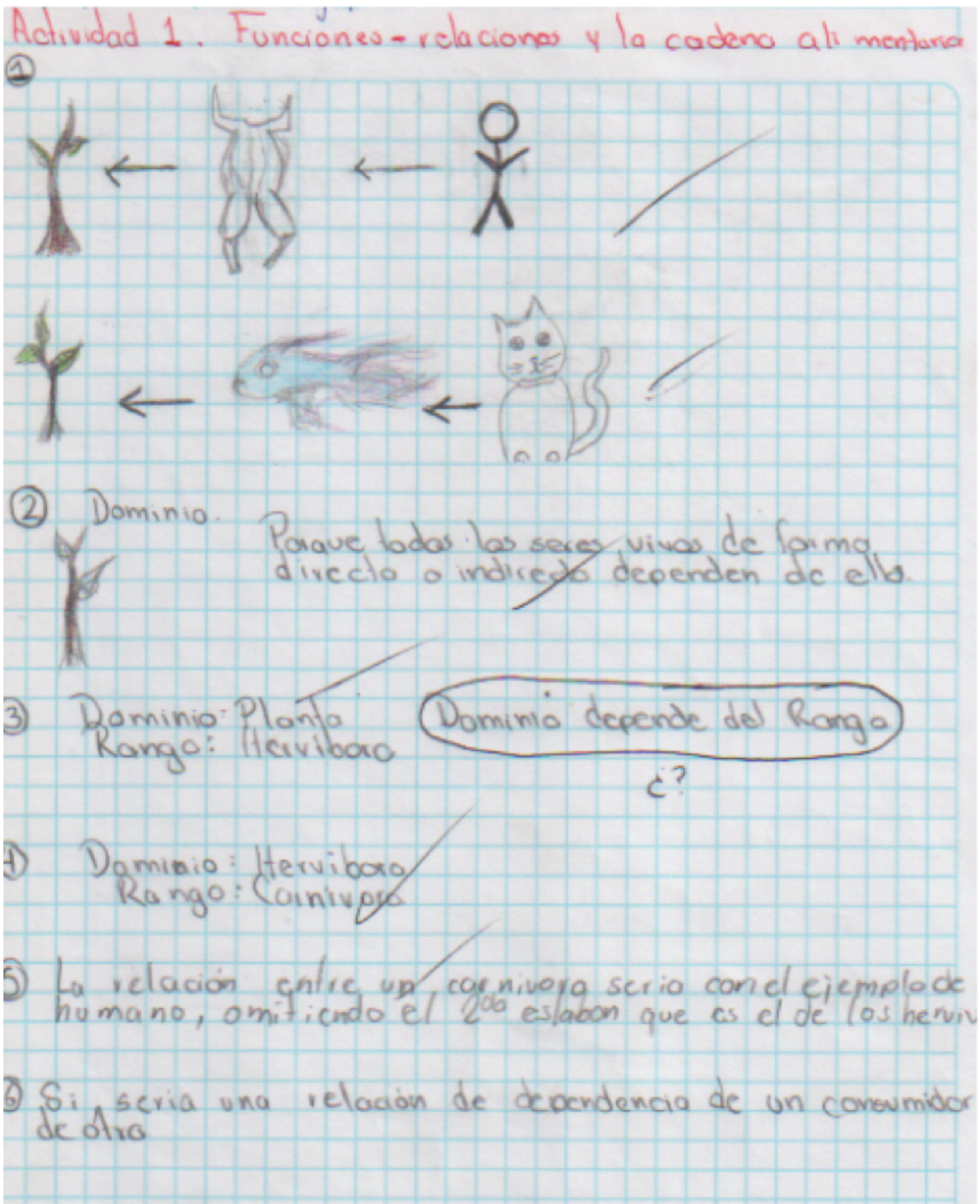
Fort Bend Tutoring. (2014, marzo 09). Composition function. [Archivo de video]. Video colocado en http://www.youtube.com/watch?v=6je5ra3CbLs

Anexos

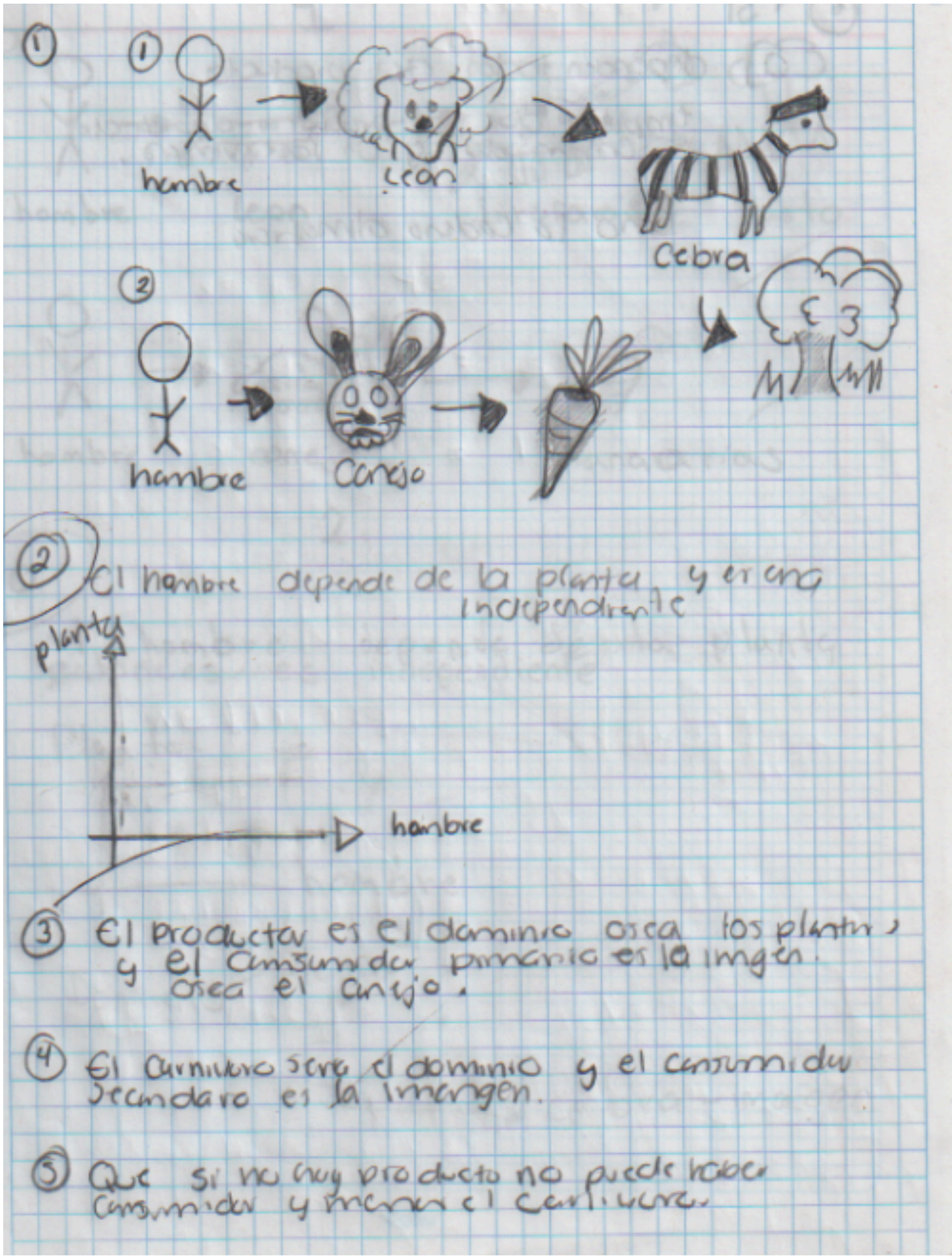
A. Escaneo de algunas respuestas de los estudiantes en las distintas actividades trabajadas que fueron respondidas correctamente e incorrectamente

Actividad 1 "Funciones-relaciones y la cadena alimentaria"

Equipo # 1



El equipo # 3 entregó dos hojas de respuestas; una por cada estudiante.


① ① hombre → Leon → cebra

② hombre → Conejo →

② El hombre depende de la planta y es una independiente

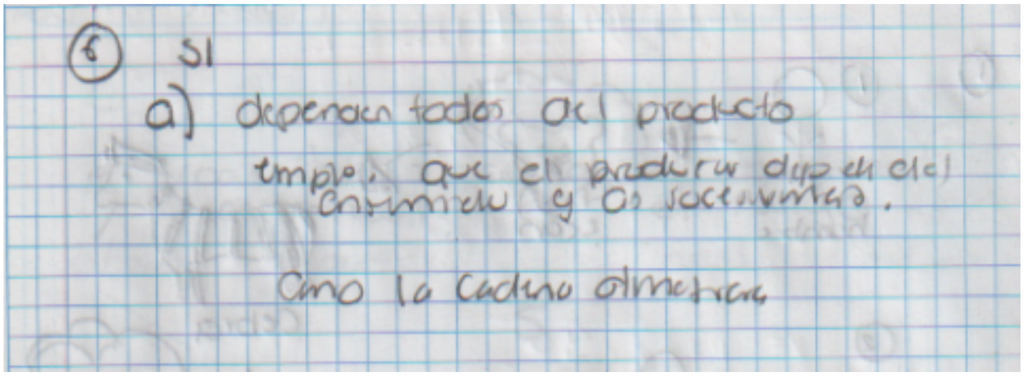
planta

hombre

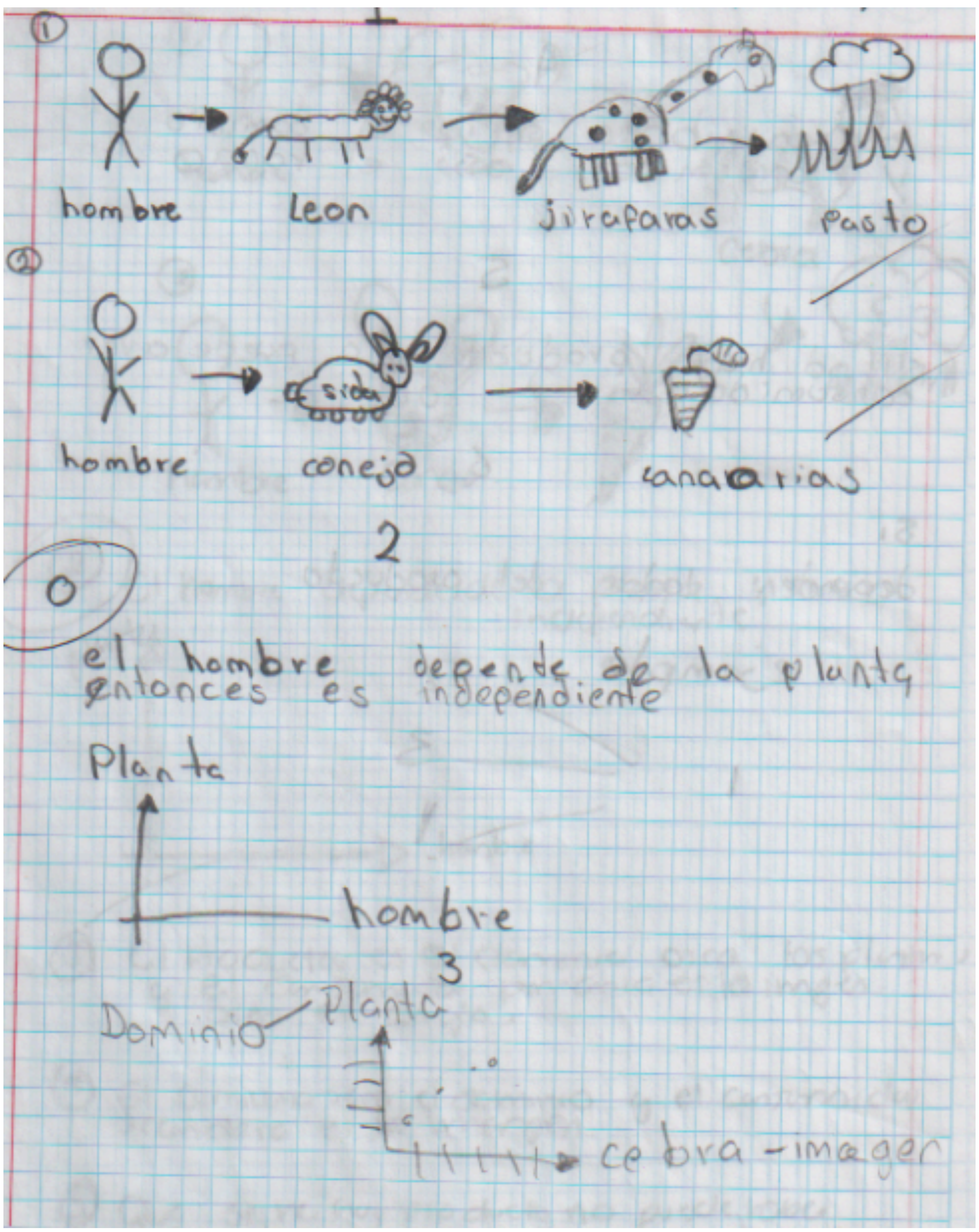
③ El productor es el dominio osea los plantas, y el consumidor primario es la imagen osea el conejo.

④ El carnivoro sera el dominio y el consumidor secundario es la imagen.

⑤ Que si no hay producto no puede haber consumidor y menos el carnivoro.



Segunda hoja de respuesta del equipo # 3



4

el carniboro seria el dominio
y consumidor es el rango

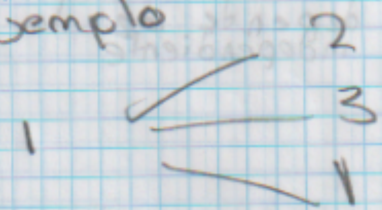
5

si no hay producto no puede aver
consumidor

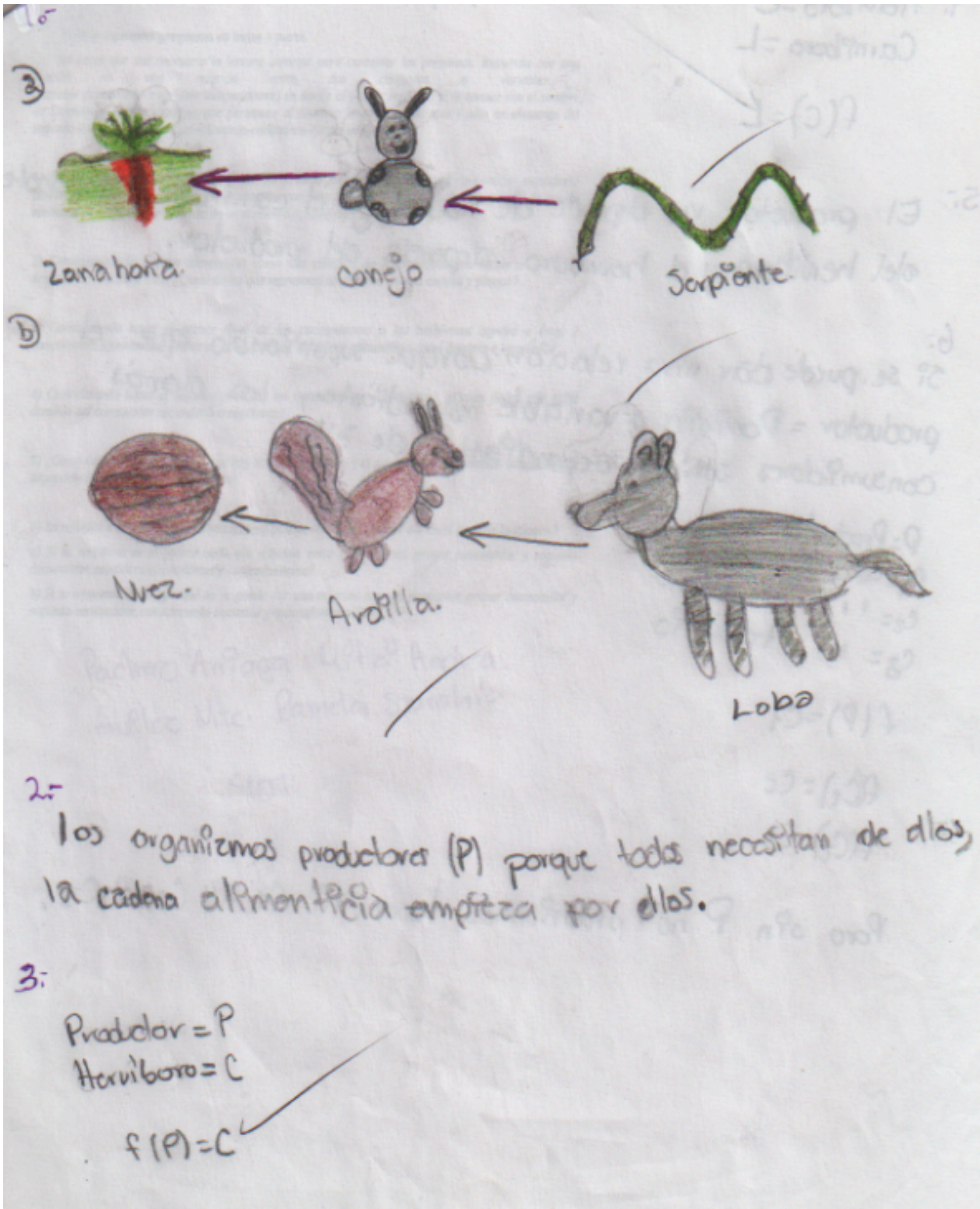
6

si
dependen todos del producto

ejemplo



Equipo # 5


1.-
a)
Zanahoria
Conejo
Serpiente
b)
Nuez.
Ardilla.
Loba
2.-
los organizmos productores (P) porque todos necesitan de ellos, la cadena alimenticia empieza por ellos.
3.-
Productor = P
Herviboro = C
f(P)=C

4.- Herviboro = C
Carniboro = L

$f(C) = L$

5.- El productor no depende de nadie y el carniboro depende del herviboro y el herviboro depende del productor.

6.- Si se puede dar una relación porque suponiendo que el productor = Dominio o variable independiante, los demás consumidores serían dependientes de él.

P = Productor
C_1 = consumidor primario.
C_2 = " secundario.
C_3 = " terciario

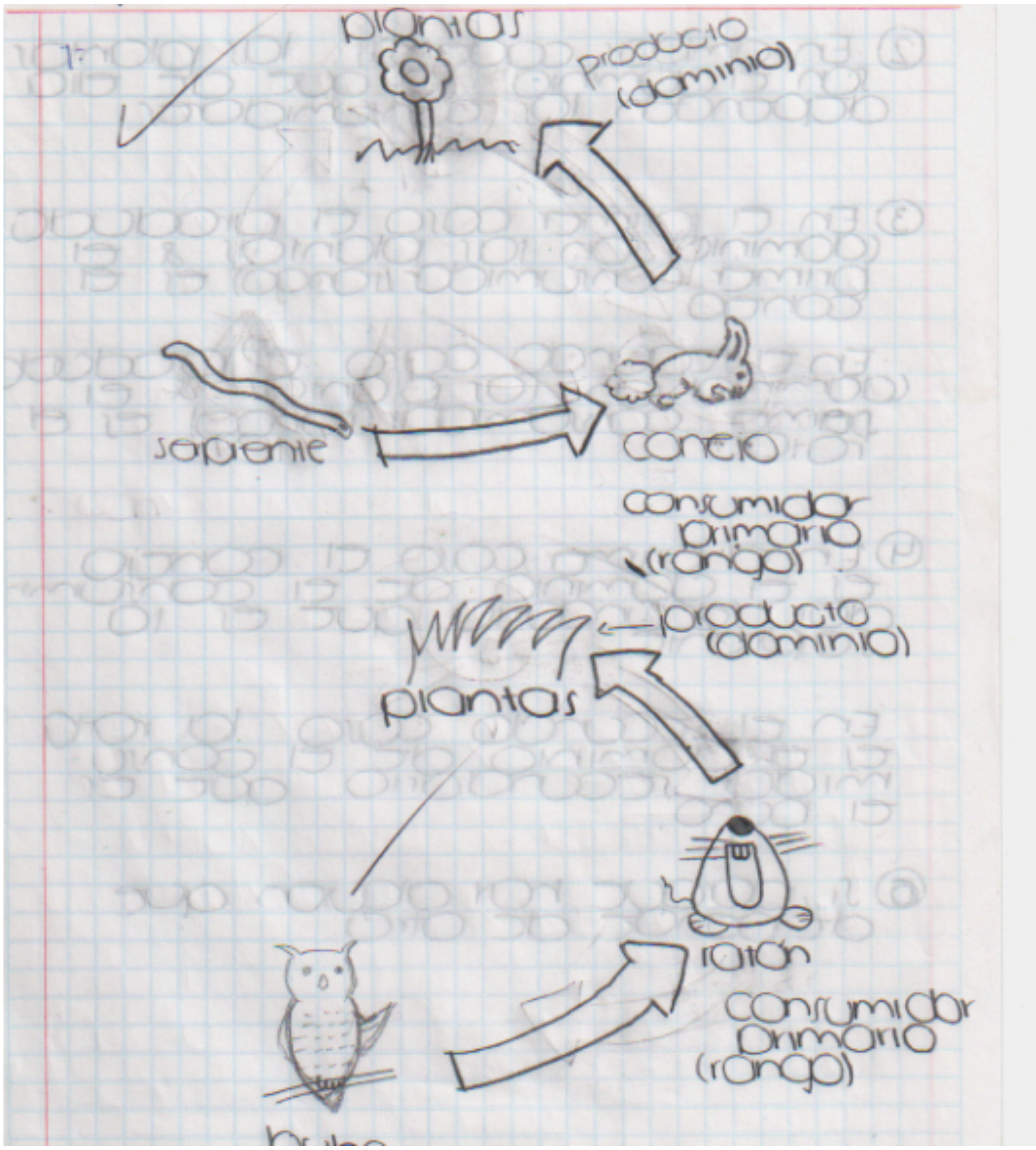
$f(P) = C_1$

$f(C_1) = C_2$

$f(C_2) = C_3$

Pero sin P no podríamos tener ni C_1 ni C_2 ni C_3.

Equipo # 8


plantas
producto
(dominio)
serpiente
conejo
consumidor
primario
(rango)
producto
(dominio)
plantas
ratón
consumidor
primario
(rango)

② En ambas cadenas las plantas son el dominio ya que de ella dependen los consumidores.

③ En el primer caso el producto (dominio) son las plantas & el primer consumidor (rango) es el conejo

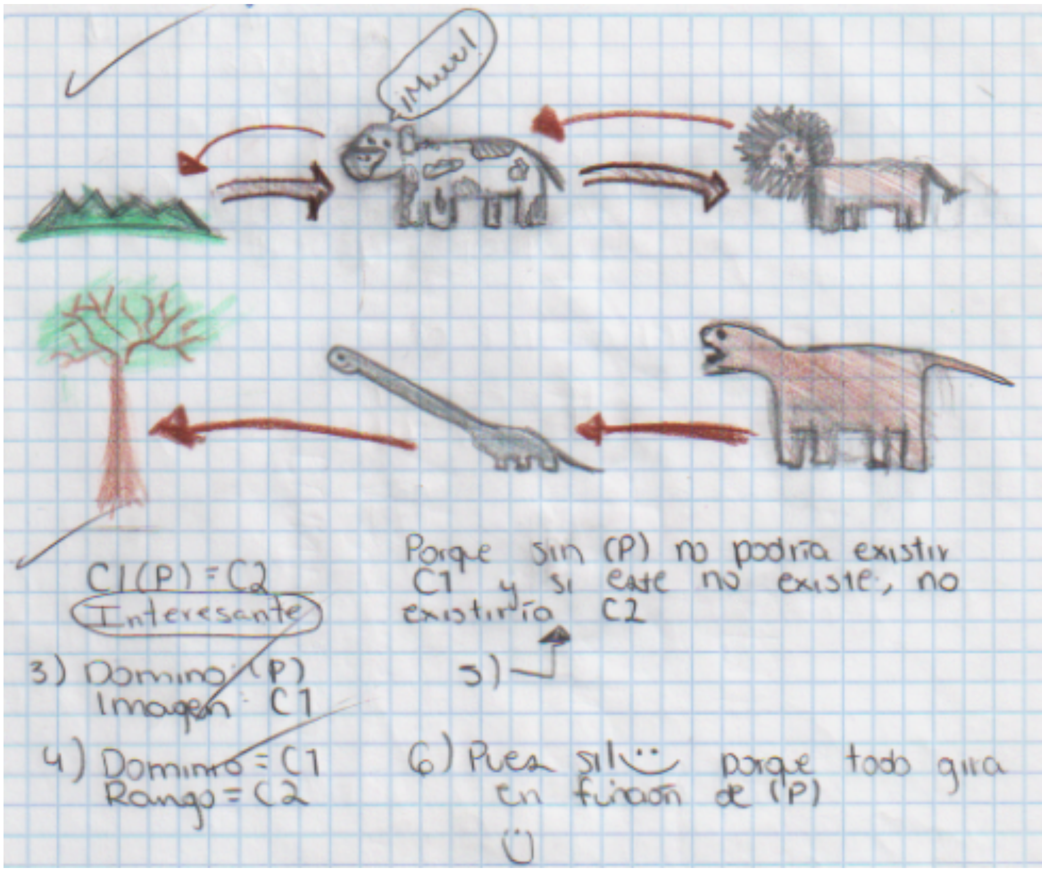
En el segundo caso el producto (dominio) son las plantas & el primer consumidor (rango) es el raton.

④ En el primer caso el conejo es el dominio de el consumidor secundario que es la serpiente.

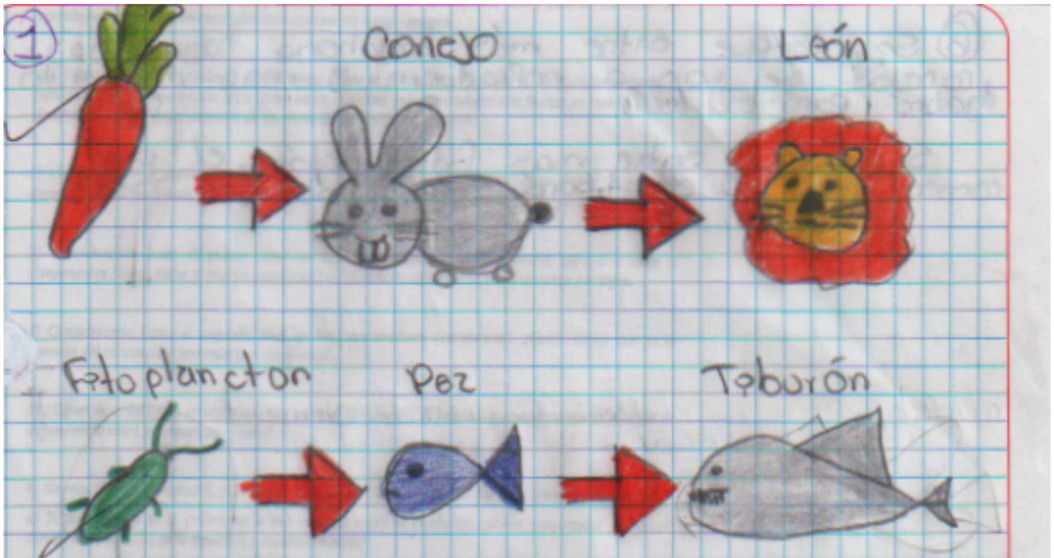
En el segundo caso la rata es el dominio de el consumidor secundario que es el buho.

⑥ Si porque hay alguien que depende de otro.

Equipo # 9


¡Muuu!
C1(P) = C2
Interesante
3) Dominio (P)
Imagen C1
4) Dominio = C1
Rango = C2
Porque sin (P) no podría existir
C1 y si este no existe, no
existiría C2
5)
6) Pues sí porque todo gira
en función de (P)

Equipo # 10



2) La zanahoria es el dominio por que el conejo y el león dependen de él y la zanahoria es independiente.

El fitoplancton es ~~igual~~ el dominio por que el pez y el tiburón dependen de él.

3) Dominio = zanahoria Rango = conejo

Dominio = fitoplancton Rango = pez

4) Dominio = conejo Rango = León

Dominio = pez Rango = tiburón

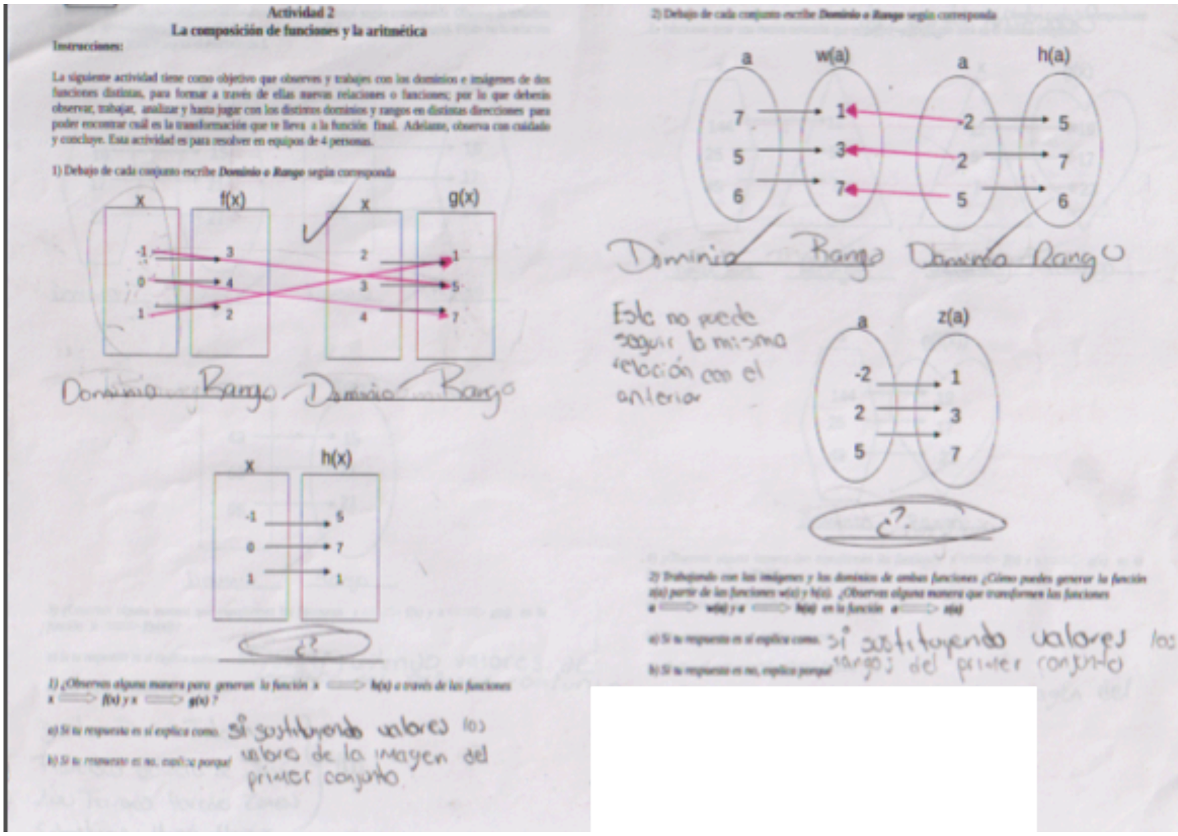
5) El león depende de la zanahoria porque la zanahoria es la comida del conejo y sin el conejo el león no tendría que comer

6) Si, porque entre más zanahoria haya más conejos se van a reproducir y más alimento habrá para el león.

Si, porque entre más fitoplancton, el pez comerá más y el tiburón se alimentará más

Actividad # 2 “La composición de funciones y la aritmética”

Equipo # 1



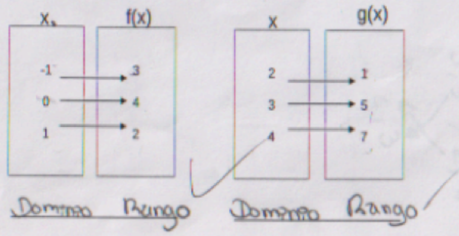
Actividad 2

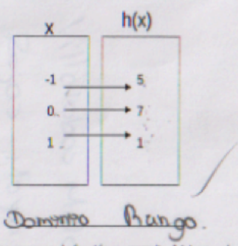
La composición de funciones y la aritmética

Instrucciones:

La siguiente actividad tiene como objetivo que observes y trabajes con los dominios e imágenes de dos funciones distintas, para formar a través de ellas nuevas relaciones o funciones; por lo que deberás observar, trabajar, analizar y hasta jugar con los distintos dominios y rangos en distintas direcciones para poder encontrar cuál es la transformación que te lleva a la función final. Adelante, observa con cuidado y concluye. Esta actividad es para resolver en equipos de 4 personas.

1) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda





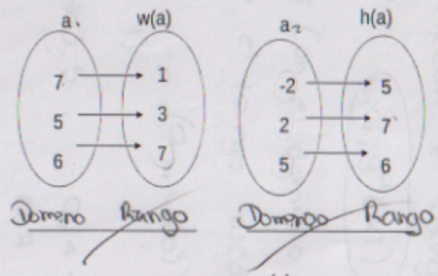
1) ¿Observas alguna manera para generan la función x ⟹ h(x) a través de las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) ?

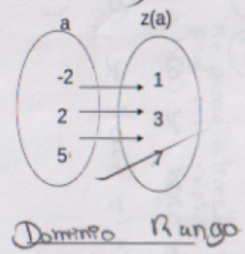
a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

(x − 1 8÷(3)) 3 − 5

2) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda





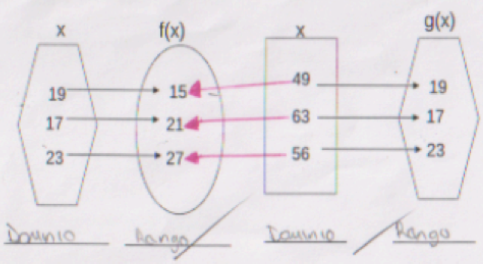
2) Trabajando con las imágenes y los dominios de ambas funciones ¿Cómo puedes generar la función z(a) partir de las funciones w(a) y h(a). ¿Observas alguna manera que transformen las funciones ***a ⟹ w(a) y a ⟹ h(a)*** *en la función* ***a ⟹ z(a)***

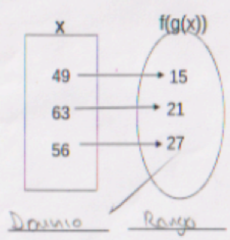
a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

$(a_2, w(a))$

3) Escribe debajo de cada conjunto la palabra ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa la notación de ***f(g(x))*** que equivale a la composición de las funciones ***f(x) y g(x)*** del estilo ***fog(x).*** Fíjate en la relación de dependencia y en lo que es el dominio de ***f.***



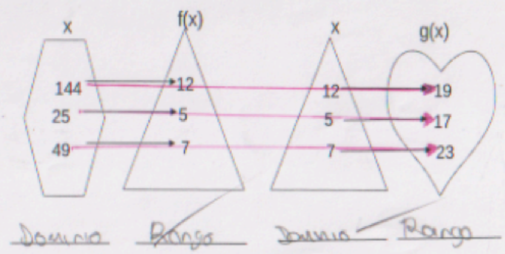


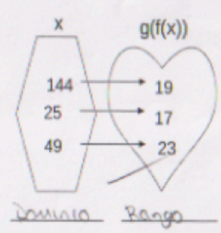
3) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) en la función x ⟹ f(g(x))?

a) Si tu respuesta es sí explica como. Si sustituyendo valores de dominio del primer conjunto

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

4) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa como la composición de funciones tiene una nueva notación que es ***gof(x)=g(f(x)),*** que está en el último conjunto.





4) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) en la función x ⟹ g(f(x))?

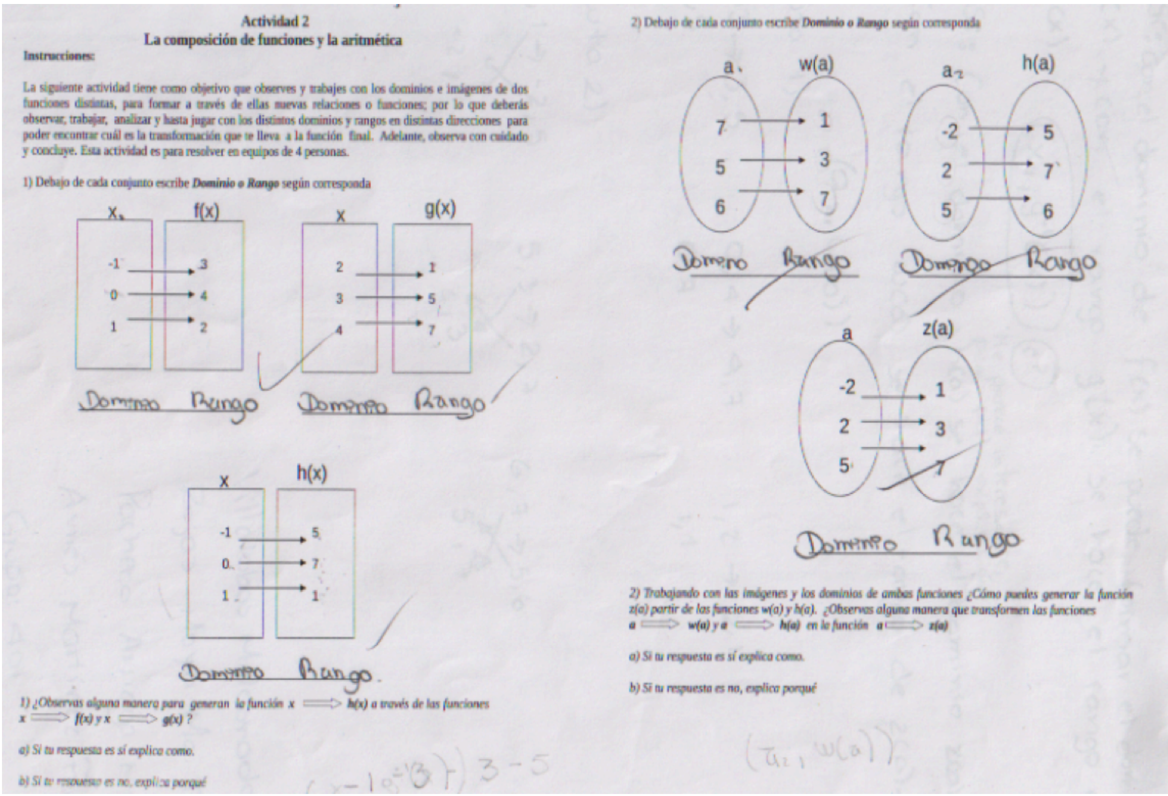
a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

c) ¿Te dice algo la notación g(f(x))?. Explica

Si sustituyendo valores de la imagen del primer conjunto

Equipo # 2



Actividad 2

La composición de funciones y la aritmética

Instrucciones:

La siguiente actividad tiene como objetivo que observes y trabajes con los dominios e imágenes de dos funciones distintas, para formar a través de ellas nuevas relaciones o funciones; por lo que deberás observar, trabajar, analizar y hasta jugar con los distintos dominios y rangos en distintas direcciones para poder encontrar cuál es la transformación que te lleva a la función final. Adelante, observa con cuidado y concluye. Esta actividad es para resolver en equipos de 4 personas.

1) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda

1) ¿Observas alguna manera para generan la función x ⟹ h(x) a través de las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) ?

a) Si tu respuesta es sí explica como.

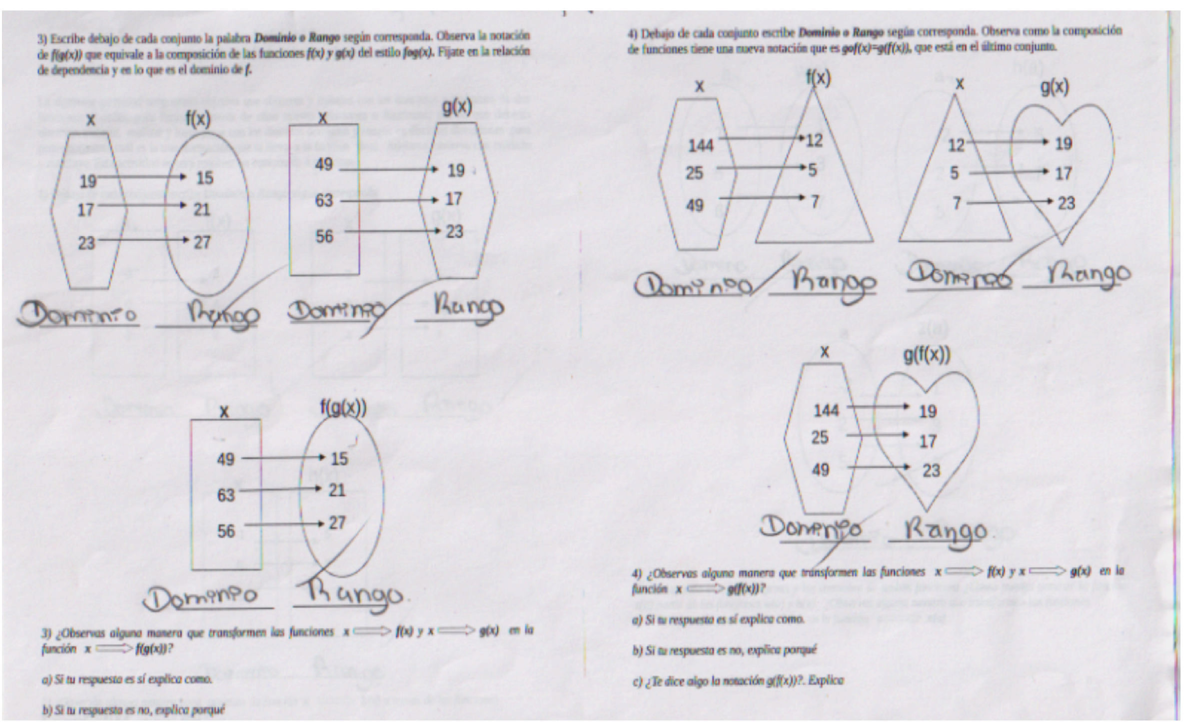
b) Si tu respuesta es no, explica porqué

2) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda

*2) Trabajando con las imágenes y los dominios de ambas funciones ¿Cómo puedes generar la función z(a) partir de las funciones w(a) y h(a). ¿Observas alguna manera que transformen las funciones **a ⟹ w(a) y a ⟹ h(a)** en la función **a ⟹ z(a)***

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué



3) Escribe debajo de cada conjunto la palabra ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa la notación de ***f(g(x))*** que equivale a la composición de las funciones ***f(x) y g(x)*** del estilo ***fog(x)***. Fíjate en la relación de dependencia y en lo que es el dominio de ***f***.

3) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) en la función x ⟹ f(g(x))?

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

4) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa como la composición de funciones tiene una nueva notación que es ***gof(x)=g(f(x))***, que está en el último conjunto.

4) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) en la función x ⟹ g(f(x))?

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

c) ¿Te dice algo la notación g(f(x))?. Explica

1) Si: Con el dominio de $f(x)$ se puede formar el dominio $h(x)$ y ~~con~~ el rango $g(x)$ se hace el rango de $h(x)$. $(x_1, g^{-1}(x))$ ¿?

2) Si: Con el dominio $h(a)$ se hace el dominio $z(a)$ y con el rango $w(a)$ se hace el rango de $z(a)$.

$(a_2, w(a))$

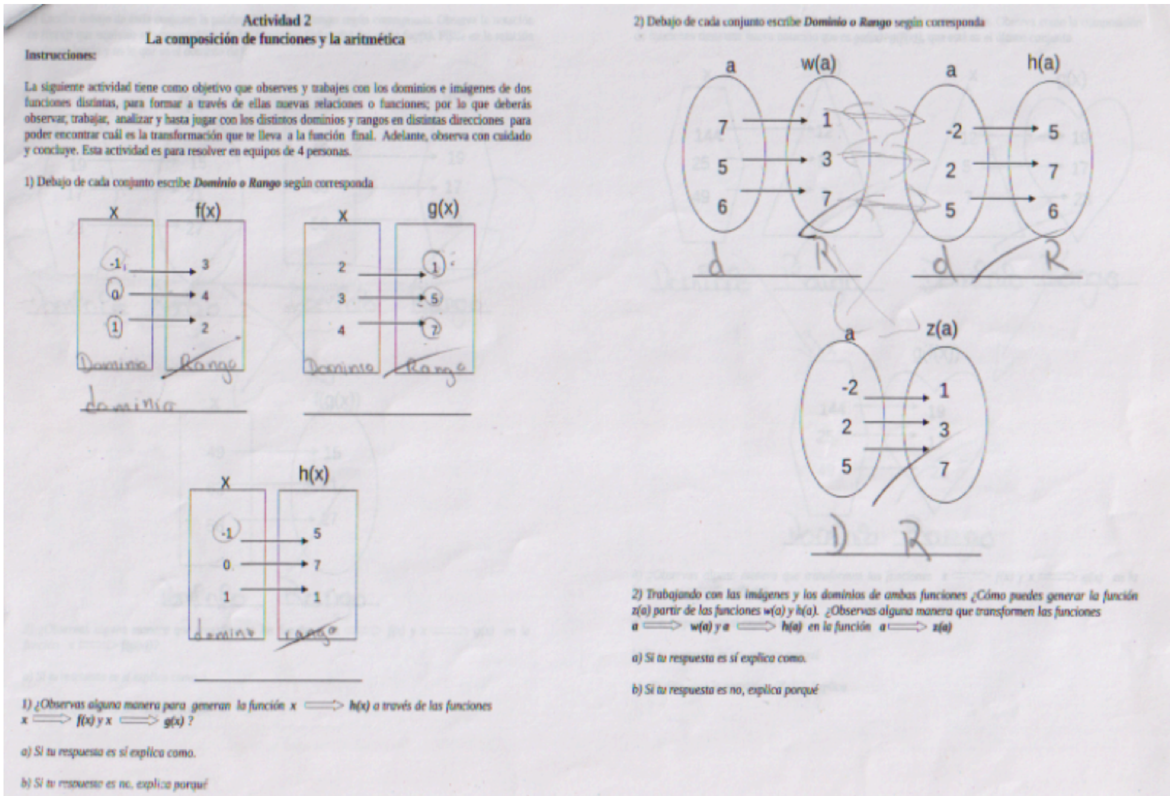
Ruta 1)

$-1, 3 \rightarrow 3, 5$	$0, 4 \rightarrow 4, 7$	$1, 2 \rightarrow 2, 1$
$-1, 5$	$0, 7$	$1, 1$

Ruta 2)

$7, 1 \rightarrow -2, 5$	$5, 3 \rightarrow 2, 7$	$6, 7 \rightarrow 5, 6$
$-2, 1$	$2, 3$	$5, 7$

Equipo # 4



Actividad 2

La composición de funciones y la aritmética

Instrucciones:

La siguiente actividad tiene como objetivo que observes y trabajes con los dominios e imágenes de dos funciones distintas, para formar a través de ellas nuevas relaciones o funciones; por lo que deberás observar, trabajar, analizar y hasta jugar con los distintos dominios y rangos en distintas direcciones para poder encontrar cuál es la transformación que te lleva a la función final. Adelante, observa con cuidado y concluye. Esta actividad es para resolver en equipos de 4 personas.

1) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda

*1) ¿Observas alguna manera para generan la función x ⟹ **h(x)** a través de las funciones x ⟹ **f(x)** y x ⟹ **g(x)** ?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

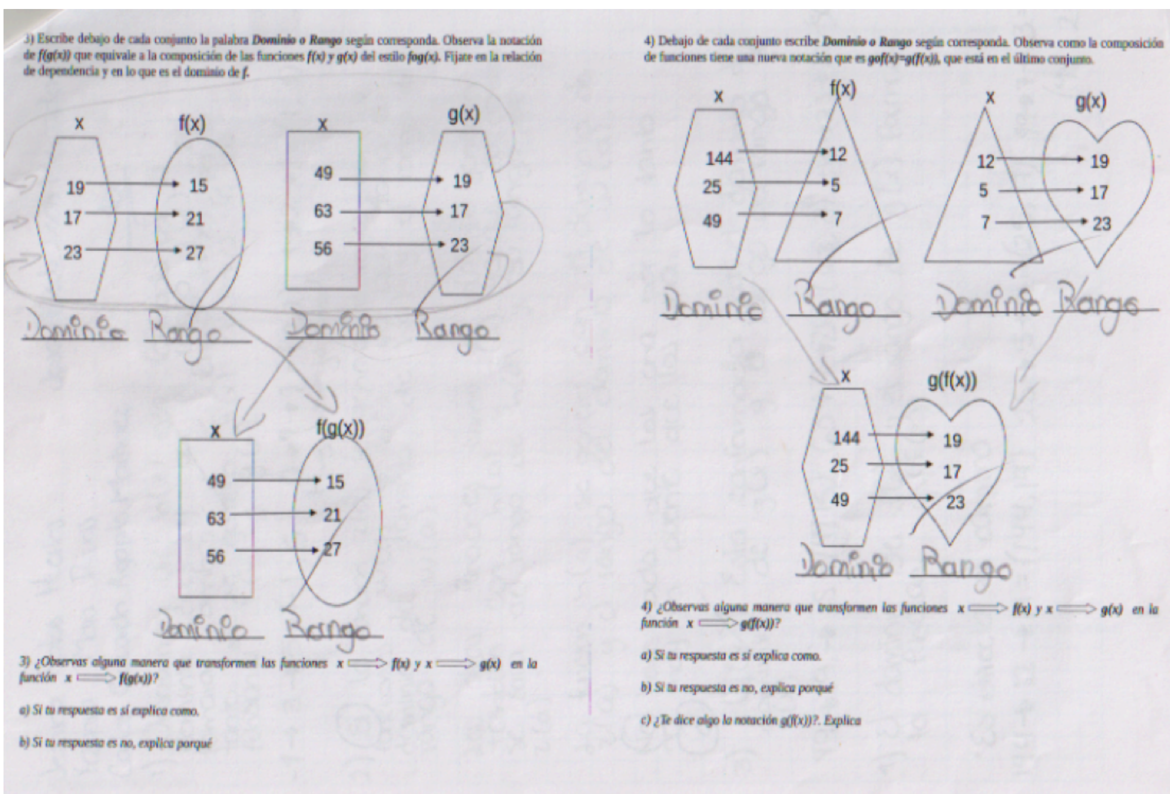
b) Si tu respuesta es no, explica porqué

2) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda

*2) Trabajando con las imágenes y los dominios de ambas funciones ¿Cómo puedes generar la función z(a) partir de las funciones w(a) y h(a). ¿Observas alguna manera que transformen las funciones **a** ⟹ **w(a) y a** ⟹ **h(a)** en la función **a** ⟹ **z(a)***

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué



3) Escribe debajo de cada conjunto la palabra ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa la notación de ***f(g(x))*** que equivale a la composición de las funciones ***f(x) y g(x)*** del estilo ***fog(x).*** Fíjate en la relación de dependencia y en lo que es el dominio de ***f.***

*3) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ **f(x)** y x ⟹ **g(x)** en la función x ⟹ **f(g(x))**?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

4) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa como la composición de funciones tiene una nueva notación que es ***gof(x)=g(f(x)),*** que está en el último conjunto.

*4) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ **f(x)** y x ⟹ **g(x)** en la función x ⟹ **g(f(x))**?*

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

c) ¿Te dice algo la notación g(f(x))?. Explica

1) Observamos que h(x) esta formado por el dominio f(x) y ~~por~~ el rango g(x), se tomaron ambos ~~y~~ se formo h(x), por lo tanto si se genero h(x) a traves de las funciones f(x) y g(x).

-1 → 3 → 5 = (-1, 5) 0 → 4 → 7 = (0, 7) 1 → 2 → 1 = (1, 1)

¡Muy bien jóvenes!

2) Si la funcion z(a) se genera a traves de las funciones w(a) y h(a) ya que toma el dominio del dominio de h(a) y el rango del rango de w(a).

Las otras funciones como la w(a) se generan tambien con h(a) y z(a) ya que su dominio se saca del rango de h(a) y su rango de z(a).

La funcion h(a) se genera con el dominio de z(a) y el rango del dominio de w(a).

No hay nada que los una por lo tanto no hay un puente que los una.

¿?

3) f(g(x)) Esta conformada con el dominio del dominio de g(x) y el rango del rango de f(x).

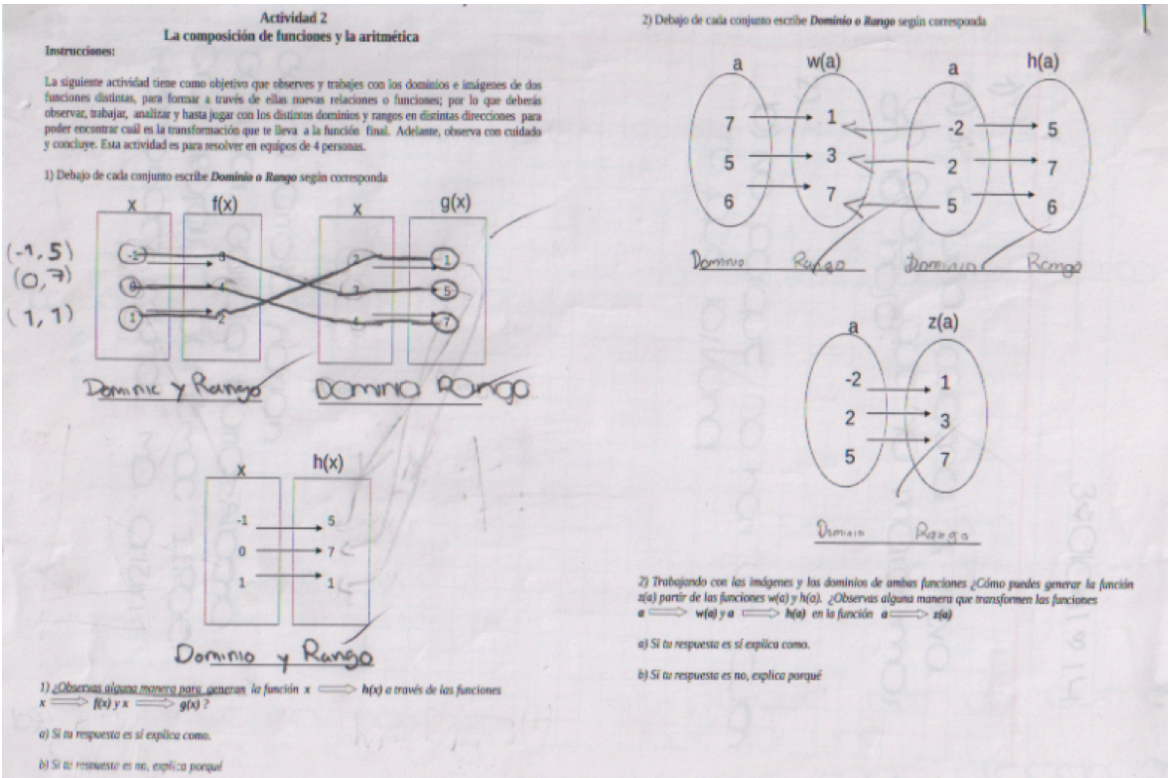
49 → 19 → 15 = (49, 15) (63 → 17 → 21 = (63, 21) 56 → 23 → 27 = (56, 27)

4) El domino de f(x) y el rango de g(x) forman la funcion g(f(x)).

• Es directo el camino

144 → 12 → 19 = (144, 19) 25 → 5 → 17 = (25, 17) 49 → 7 → 23 = (49, 23)

Equipo # 5



Actividad 2
La composición de funciones y la aritmética

Instrucciones:

La siguiente actividad tiene como objetivo que observes y trabajes con los dominios e imágenes de dos funciones distintas, para formar a través de ellas nuevas relaciones o funciones; por lo que deberás observar, trabajar, analizar y hasta jugar con los distintos dominios y rangos en distintas direcciones para poder encontrar cuál es la transformación que te lleva a la función final. Adelante, observa con cuidado y concluye. Esta actividad es para resolver en equipos de 4 personas.

1) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda

1) ¿Observas alguna manera para generar la función x ⟹ h(x) a través de las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) ?

a) Si tu respuesta es sí explica como.

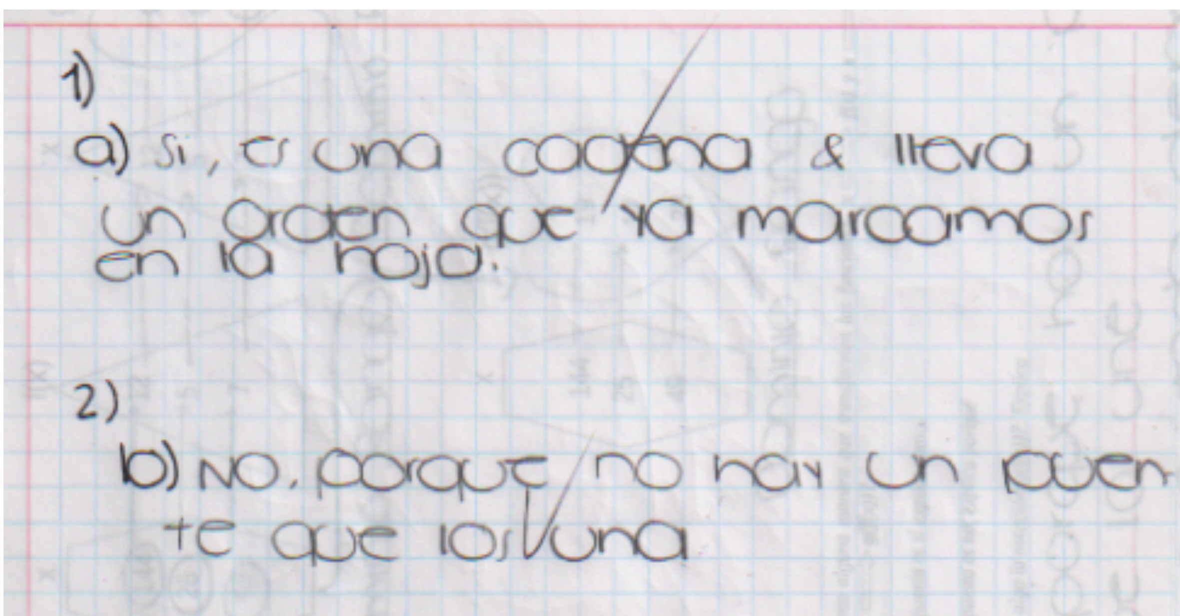
b) Si tu respuesta es no, explica porqué

2) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda

*2) Trabajando con las imágenes y los dominios de ambas funciones ¿Cómo puedes generar la función z(a) partir de las funciones w(a) y h(a). ¿Observas alguna manera que transformen las funciones **a ⟹ w(a) y a ⟹ h(a)** en la función **a ⟹ z(a)***

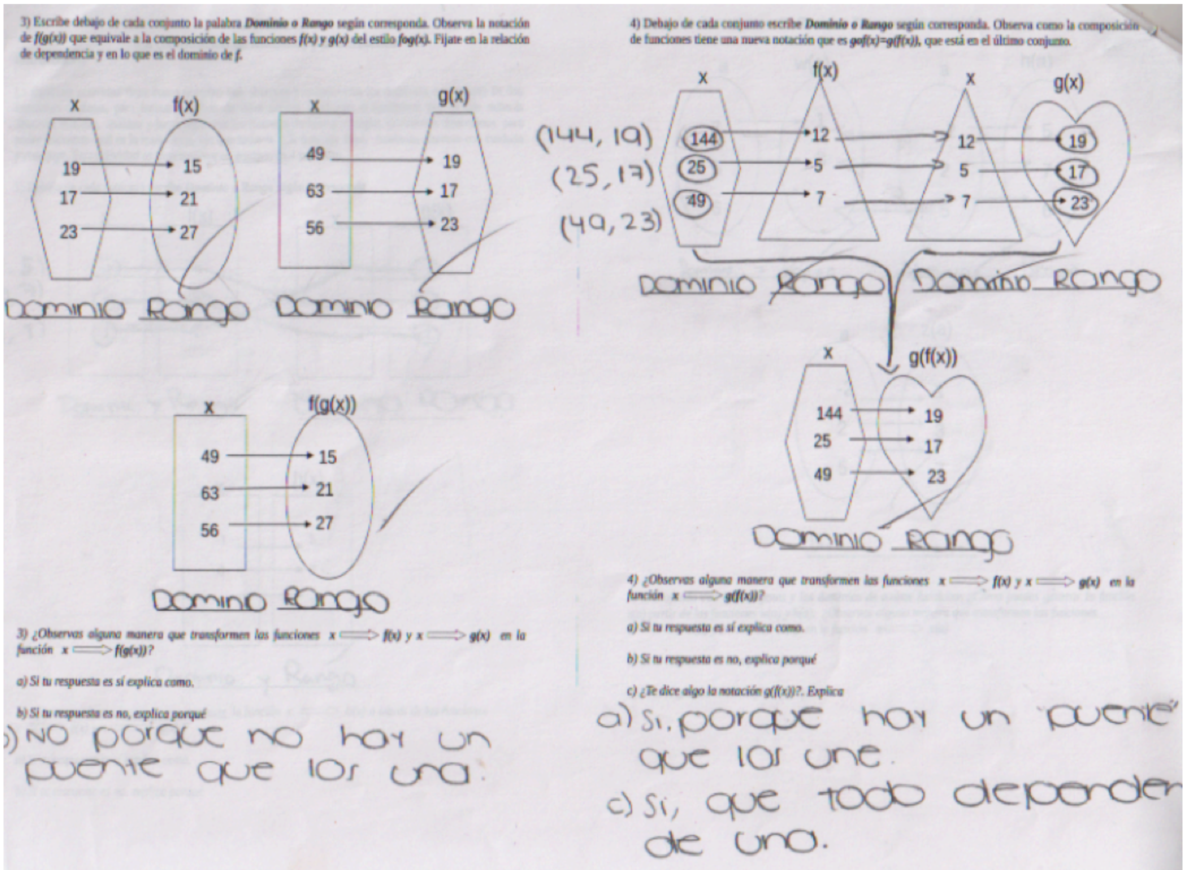
a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué



1)
a) Si, es una cadena & lleva un orden que ya marcamos en la hoja.

2)
b) No, porque no hay un puente que los una



3) Escribe debajo de cada conjunto la palabra ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa la notación de ***f(g(x))*** que equivale a la composición de las funciones ***f(x) y g(x)*** del estilo ***fog(x)***. Fíjate en la relación de dependencia y en lo que es el dominio de ***f***.

x → f(x): 19 → 15, 17 → 21, 23 → 27

Dominio Rango

x → g(x): 49 → 19, 63 → 17, 56 → 23

Dominio Rango

x → f(g(x)): 49 → 15, 63 → 21, 56 → 27

Domino Rango

3) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) en la función x ⟹ f(g(x))?

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

b) NO porque no hay un puente que los una.

4) Debajo de cada conjunto escribe ***Dominio o Rango*** según corresponda. Observa como la composición de funciones tiene una nueva notación que es ***gof(x)=g(f(x))***, que está en el último conjunto.

(144, 19)
(25, 17)
(49, 23)

x → f(x): 144 → 12, 25 → 5, 49 → 7

x → g(x): 12 → 19, 5 → 17, 7 → 23

Dominio Rango Dominio Rango

x → g(f(x)): 144 → 19, 25 → 17, 49 → 23

Dominio Rango

4) ¿Observas alguna manera que transformen las funciones x ⟹ f(x) y x ⟹ g(x) en la función x ⟹ g(f(x))?

a) Si tu respuesta es sí explica como.

b) Si tu respuesta es no, explica porqué

c) ¿Te dice algo la notación g(f(x))?. Explica

a) Si, porque hay un "puente" que los une.

c) Si, que todo dependen de uno.

Actividad # 3 "Las funciones y sus gráficas"

Equipo # 2

I.-

a) $x \in \mathbb{R}$

b) f(parábola).

c) Hace que la parabola suba 3 lugares en el eje de las "y".

d) Hizo que la línea se convirtiera en parabola porque ya cruza por el punto (0,3).

II.-

a) $x \in \mathbb{R}$

b) g(parábola)

c) Desplaza la gráfica 3 lugares hacia los negativos sobre el eje de las "x".

d) Que se desplace sobre el eje "x".

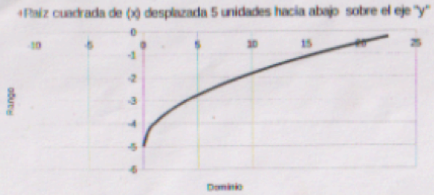
2)

a) la primera gráfica es $f(g(x)) = \sqrt{x} - 5$ porque afecta la gráfica sobre el eje de las "y".

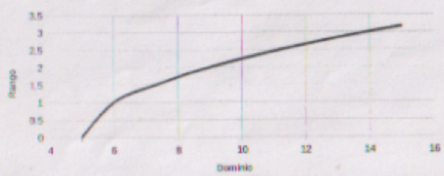
la segunda gráfica es $g(f(x)) = \sqrt{x-5}$ porque afecta la gráfica sobre el eje de las "x".

$f(g(x)) = \sqrt{x} - 5$

+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades hacia abajo sobre el eje "y"



+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades a la izquierda sobre el eje "x"



$g(f(x)) = \sqrt{x+5}$

) Si $f(x) = x-5$ y $g(x) = +\sqrt{x}$ ¿Quién dirías de las dos gráficas anteriores que es la función compuesta $f(g(x)) = f \circ g(x)$ y cuál $g(f(x)) = g \circ f(x)$ y porqué?

) a) Completa las siguiente tabla de valores para f(g(x)) y g(f(x)). Grafica los puntos de f(x) y g(x)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	0	-3	1	0	2	-2
g(x)	-3	-2	2	0	3	1	-1
fog(x)	3	0	2	1	+2	0	-3
gof(x)	-1	0	-3	3	0	2	-2

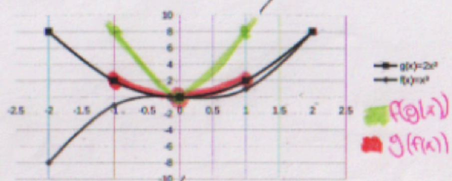
b) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las tablas que construiste en el inciso "a"

c) De acuerdo a tus observaciones y cálculos, ¿la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

3) Utiliza las siguientes gráficas para obtener el valor numérico de las siguientes composiciones. Recuerda que el rango de una función se convierte en el dominio de la otra.

f(x) y g(x)

Composición de funciones



a) f(g(-1))= 8
$f(2)=8$

b) g(f(-1))= 2

c) f(g(0))= 0

d) g(f(0))= 0

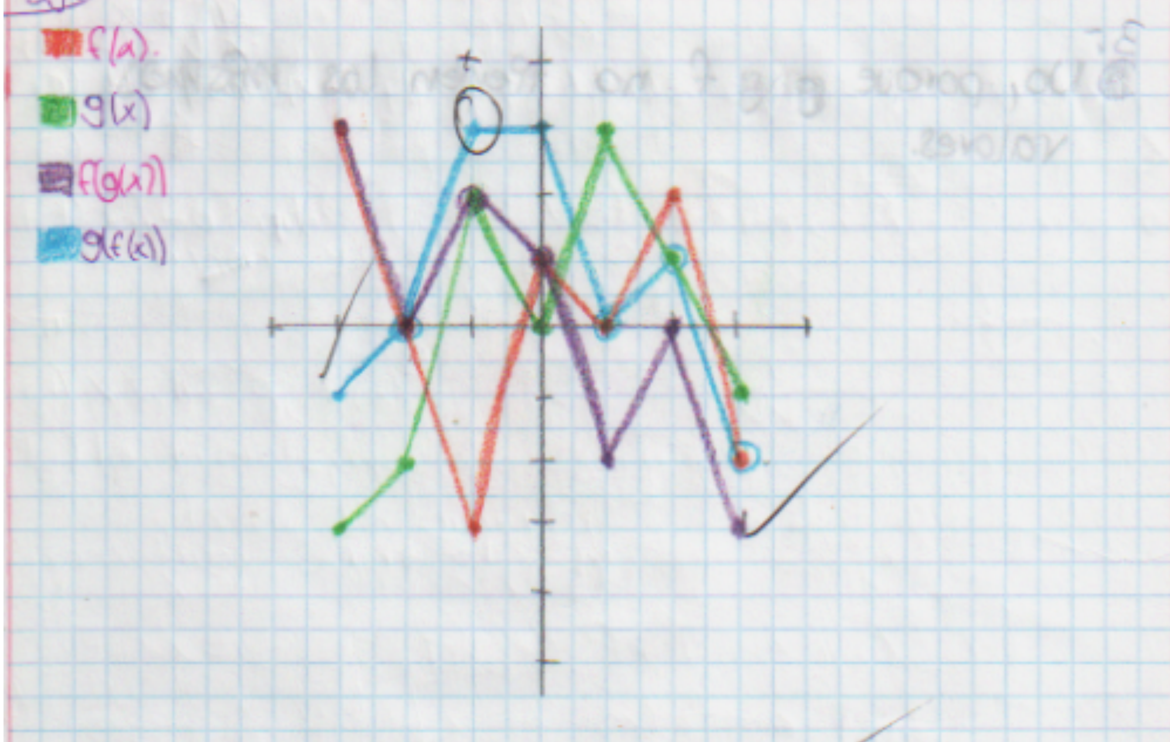
e) f(g(1))= 8

f) g(f(1))= 2

g) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las graficas f(x) y g(x)

h) En este caso, ¿puedes decir de la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

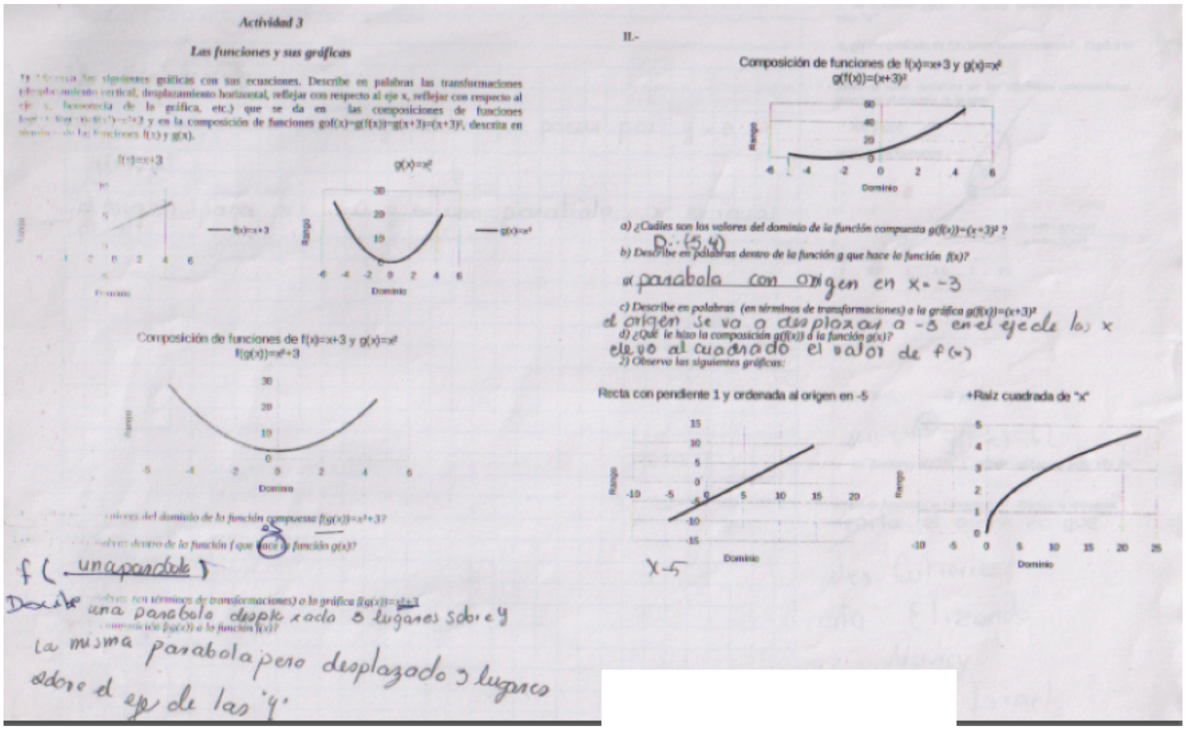
a y b)



c) No es porque g y f tienen distintos valores.

3.-
b) No, porque g y f no tienen los mismos valores.

Equipo # 3



Actividad 3

Las funciones y sus gráficas

Composición de funciones de f(x)=x+3 y g(x)=x²
f(g(x))=x²+3

f (unaparabola)

una parabola desplazado 3 lugares sobre y

la misma parabola pero desplazado 3 lugares sobre el eje de las 'y'

II.-

Composición de funciones de f(x)=x+3 y g(x)=x²
g(f(x))=(x+3)²

a) ¿Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta g(f(x))=(x+3)² ?

D: (5,4)

b) Describe en palabras dentro de la función g que hace la función f(x)?

parabola con origen en x = -3

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica g(f(x))=(x+3)²

el origen se va a desplazar a -3 en el eje de las x

d) ¿Qué le hizo la composición g(f(x)) a la función g(x)?

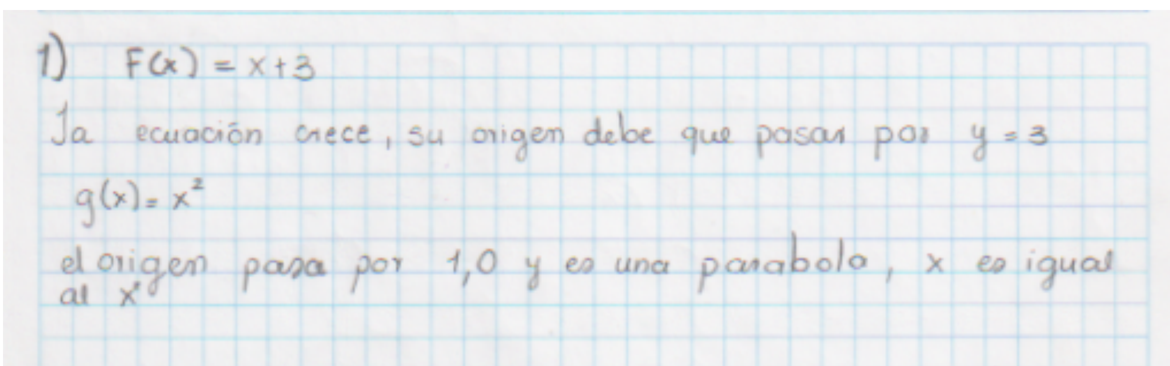
elevo al cuadrado el valor de f(x)

2) Observa las siguientes gráficas:

Recta con pendiente 1 y ordenada al origen en -5

x-5

+Raíz cuadrada de "x"

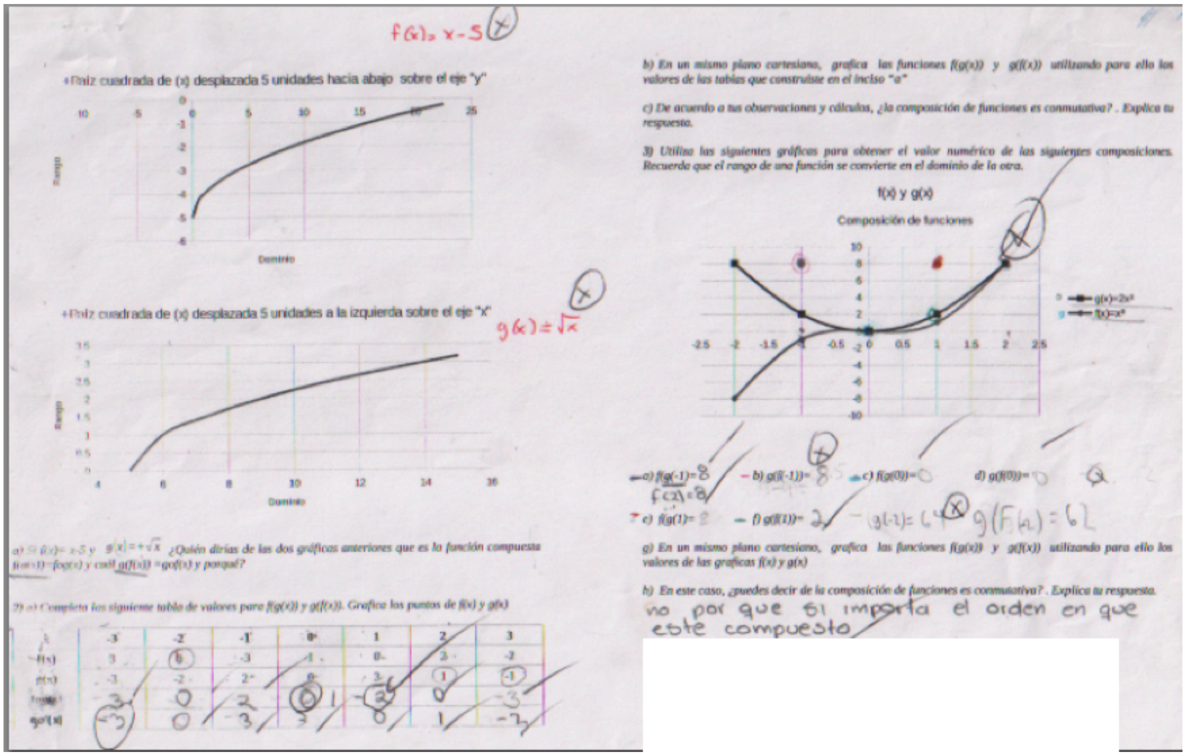


1) $F(x) = x+3$

la ecuación crece, su origen debe que pasar por $y = 3$

$g(x) = x^2$

el origen pasa por 1,0 y es una parabola, x es igual al x^2



$f(x) = x-5$

+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades hacia abajo sobre el eje "y"

+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades a la izquierda sobre el eje "x"

$g(x) = \sqrt{x}$

a) Si $f(x) = x-5$ y $g(x) = +\sqrt{x}$ ¿Quién dirías de las dos gráficas anteriores que es la función compuesta $f(g(x)) = f \circ g(x)$ y cuál $g(f(x)) = g \circ f(x)$ y porqué?

2) a) Completa los siguiente tabla de valores para $f(g(x))$ y $g(f(x))$. Grafica los puntos de $f(x)$ y $g(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	6	-3	-1	0	3	-2
g(x)	-3	-2	2	0	3	1	-1
fog(x)	-3	0	2	0	-3	0	-3
gof(x)	-3	0	-3	3	0	1	-7

b) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$ utilizando para ello los valores de las tablas que construiste en el inciso "a"

c) De acuerdo a tus observaciones y cálculos, ¿la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

3) Utiliza las siguientes gráficas para obtener el valor numérico de las siguientes composiciones. Recuerda que el rango de una función se convierte en el dominio de la otra.

f(x) y g(x)

Composición de funciones

a) $f(g(-1)) = 8$ $f(2) = 8$ b) $g(f(-1)) = 8$ c) $f(g(0)) = 0$ d) $g(f(0)) = 0$

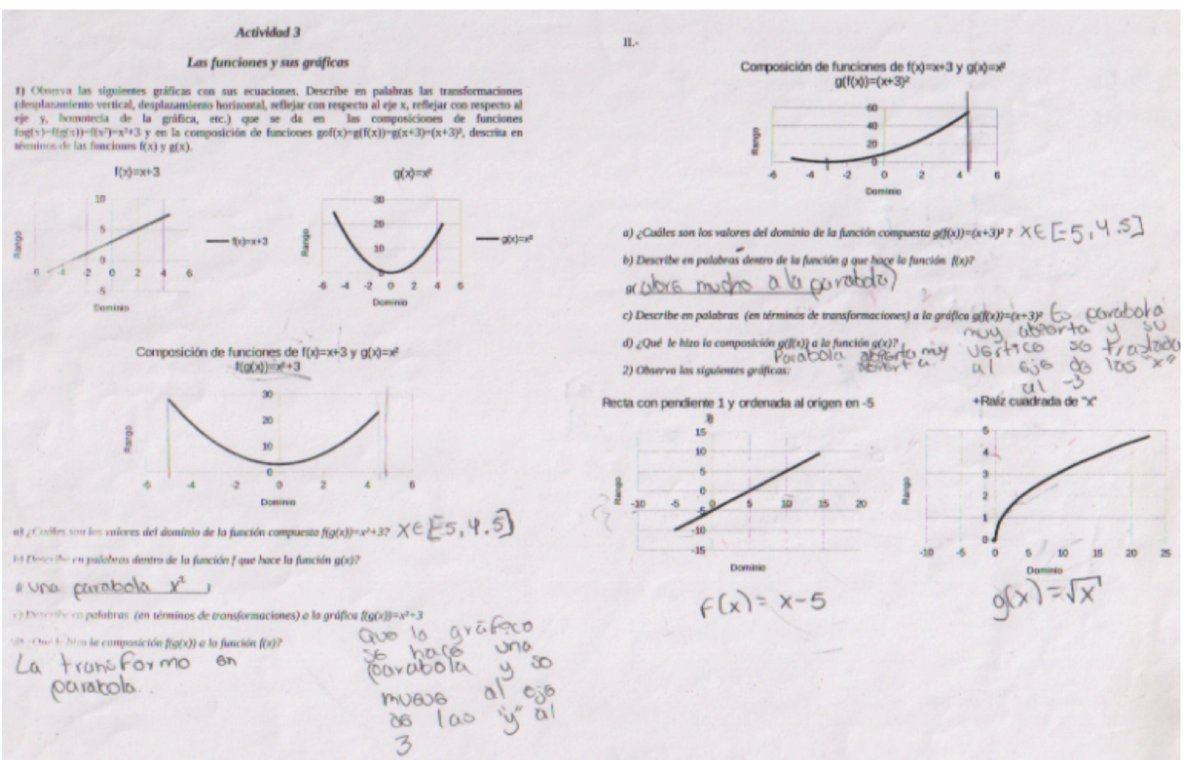
e) $f(g(1)) =$ f) $g(f(1)) = 2$ $g(-2) = 64$ $g(f(4)) = 62$

g) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$ utilizando para ello los valores de las graficas $f(x)$ y $g(x)$

h) En este caso, ¿puedes decir de la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

no por que si importa el orden en que este compuesto

Equipo # 4



Actividad 3

Las funciones y sus gráficas

1) Observa las siguientes gráficas con sus ecuaciones. Describe en palabras las transformaciones (desplazamiento vertical, desplazamiento horizontal, reflejar con respecto al eje x, reflejar con respecto al eje y, homotecia de la gráfica, etc.) que se da en las composiciones de funciones $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+3$ y en la composición de funciones $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2$, descrita en términos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

$f(x)=x+3$ $g(x)=x^2$

Composición de funciones de $f(x)=x+3$ y $g(x)=x^2$
$f(g(x))=x^2+3$

a) ¿Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta $f(g(x))=x^2+3$? $x \in [-5, 4.5]$

b) Describe en palabras dentro de la función f que hace la función g(x)?

f(una parabola x^2)

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica $f(g(x))=x^2+3$

Que la gráfica se hace una parabola y se mueve al eje de las "y" al 3

d) ¿Qué le hizo la composición $f(g(x))$ a la función $f(x)$?

La transformo en parabola.

II.-

Composición de funciones de $f(x)=x+3$ y $g(x)=x^2$
$g(f(x))=(x+3)^2$

a) ¿Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta $g(f(x))=(x+3)^2$? $x \in [-5, 4.5]$

b) Describe en palabras dentro de la función g que hace la función f(x)?

g(abre mucho a la parabola)

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica $g(f(x))=(x+3)^2$ Es parabola muy abierta y su vertice se traslado al eje de las "x" al -3

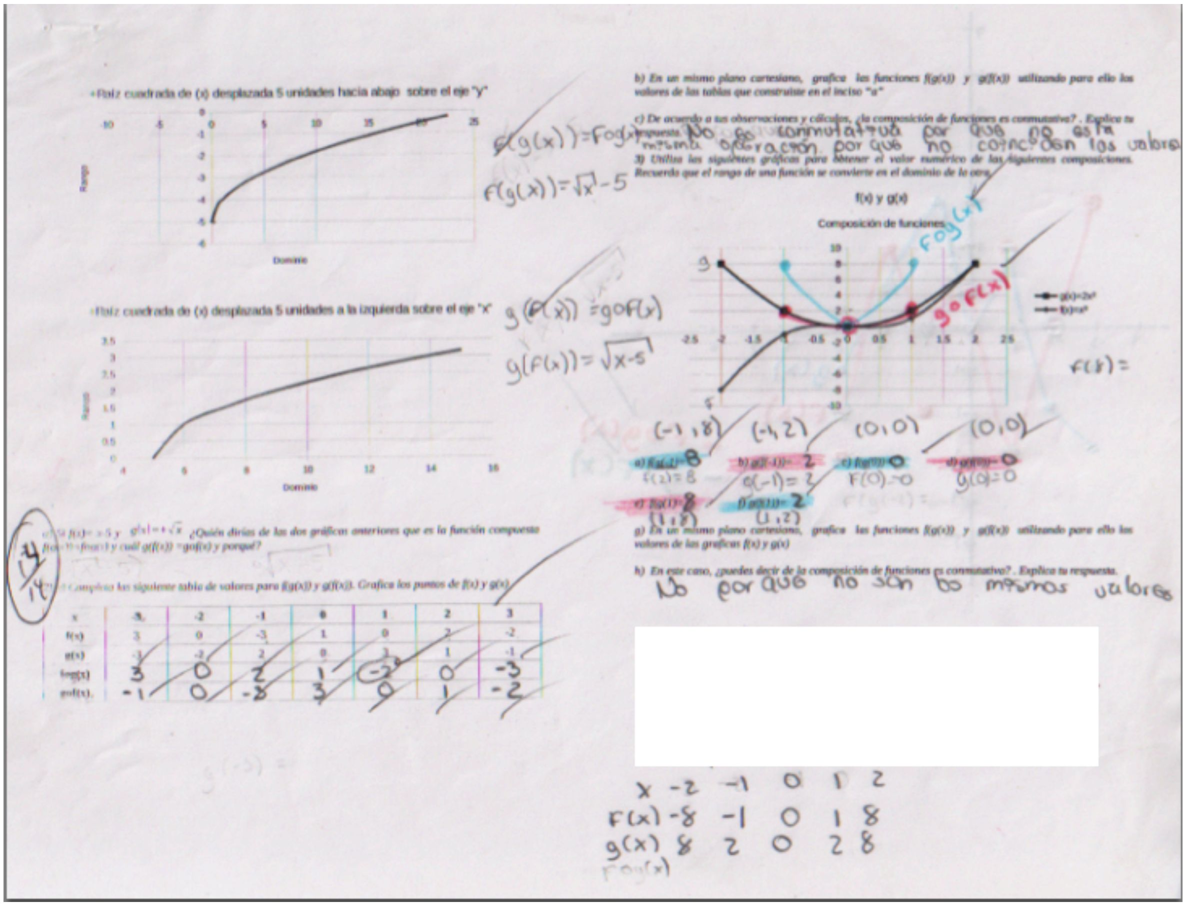
d) ¿Qué le hizo la composición $g(f(x))$ a la función $g(x)$? Parabola abierta muy abierta.

2) Observa las siguientes gráficas:

Recta con pendiente 1 y ordenada al origen en -5

+Raíz cuadrada de "x"

$f(x) = x-5$ $g(x) = \sqrt{x}$



-Raiz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades hacia abajo sobre el eje "y"

Rango

Dominio

$f(g(x)) = f \circ g(x)$

$f(g(x)) = \sqrt{x} - 5$

-Raiz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades a la izquierda sobre el eje "x"

Rango

Dominio

$g(f(x)) = g \circ f(x)$

$g(f(x)) = \sqrt{x-5}$

4/14

c) Si $f(x) = x - 5$ y $g(x) = +\sqrt{x}$ ¿Quién dirías de las dos gráficas anteriores que es la función compuesta $f(g(x)) = f \circ g(x)$ y cuál $g(f(x)) = g \circ f(x)$ y porqué?

Completa las siguiente tabla de valores para f(g(x)) y g(f(x)). Grafica los puntos de f(x) y g(x).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	0	-3	1	0	2	-2
g(x)	-1	-2	2	0	3	1	-1
fog(x)	3	0	2	1	-2	0	-3
gof(x)	-1	0	-3	3	0	1	-2

$g(-3) =$

b) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las tablas que construiste en el inciso "a"

c) De acuerdo a tus observaciones y cálculos, ¿la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta. No es conmutativa por que no esta misma operación por que no coinciden los valores

3) Utiliza las siguientes gráficas para obtener el valor numérico de las siguientes composiciones. Recuerda que el rango de una función se convierte en el dominio de la otra.

f(x) y g(x)

Composición de funciones

fog(x)

gof(x)

$g(x) = 2x^2$

$f(x) = x^3$

$f(x) =$

(-1, 8) (-1, 2) (0, 0) (0, 0)

a) $f(g(-1)) = 8$ $f(2) = 8$

b) $g(f(-1)) = 2$ $g(-1) = 2$

c) $f(g(0)) = 0$ $f(0) = 0$

d) $g(f(0)) = 0$ $g(0) = 0$

e) $f(g(1)) = 8$ (1, 8)

f) $g(f(1)) = 2$ (1, 2)

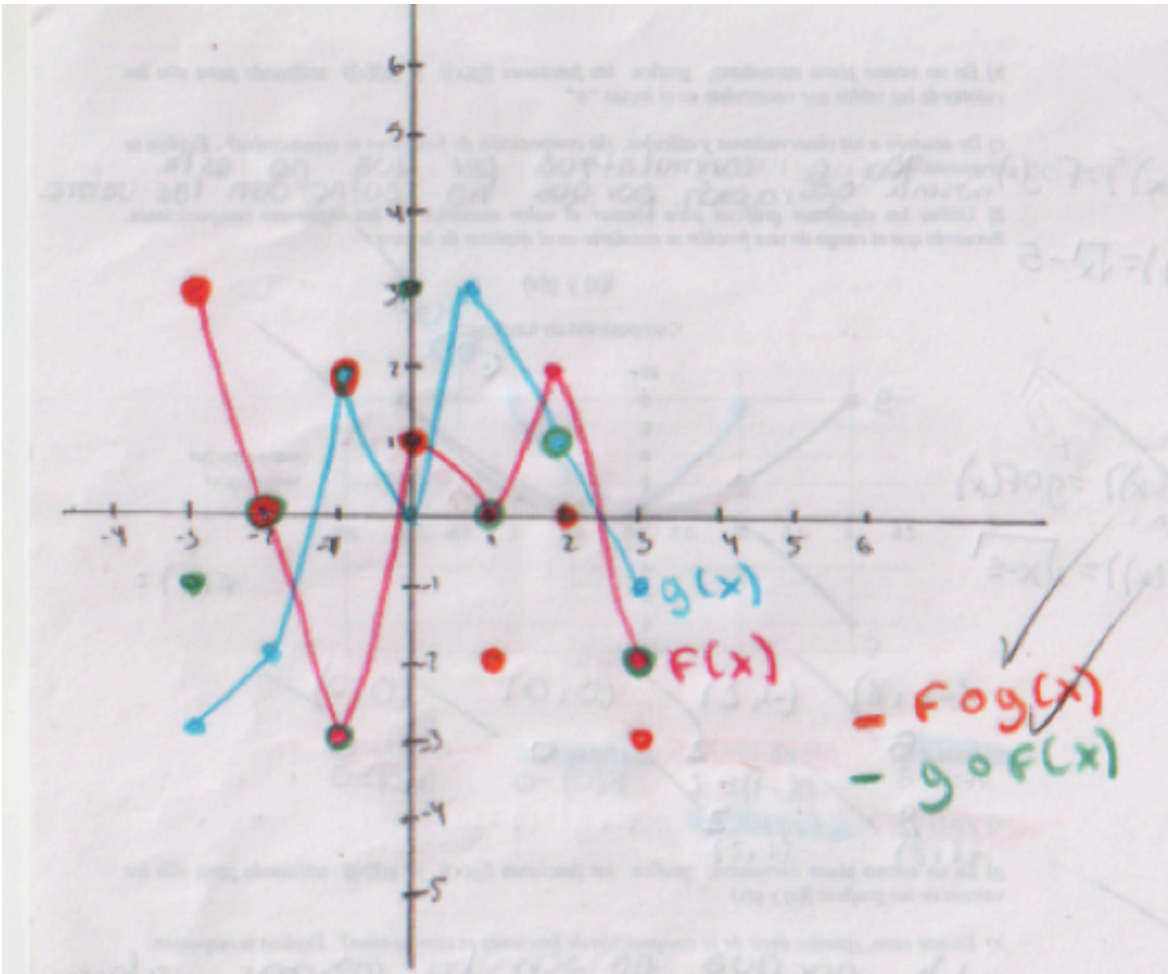
g) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las graficas f(x) y g(x)

h) En este caso, ¿puedes decir de la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

No porque no son los mismos valores

x	-2	-1	0	1	2
F(x)	-8	-1	0	1	8
g(x)	8	2	0	2	8

fog(x)


g(x)
f(x)
fog(x)
gof(x)

Equipo # 6

1

a) Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta $f(g(x)) = x^2 + 3$?

Dominio $(-5, 4.5)$

b) Describe en palabras dentro de la función f que hace la función $g(x)$?

f(la hace una parábola)

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones a la grafica $f(g(x)) = x^2 + 3$

la parábola se traslada 3 unidades sobre el eje de los "y"

d) Qué le hizo la composición $f(g(x))$ a la función $f(x)$.

la hizo parábola

2 Cuáles son los valores del dominio de la función compuesta $g(f(x)) = (x+3)^2$?

Dominio $(-5, 4.5)$

b) Describe en palabras de la función g que hace la función $f(x)$?

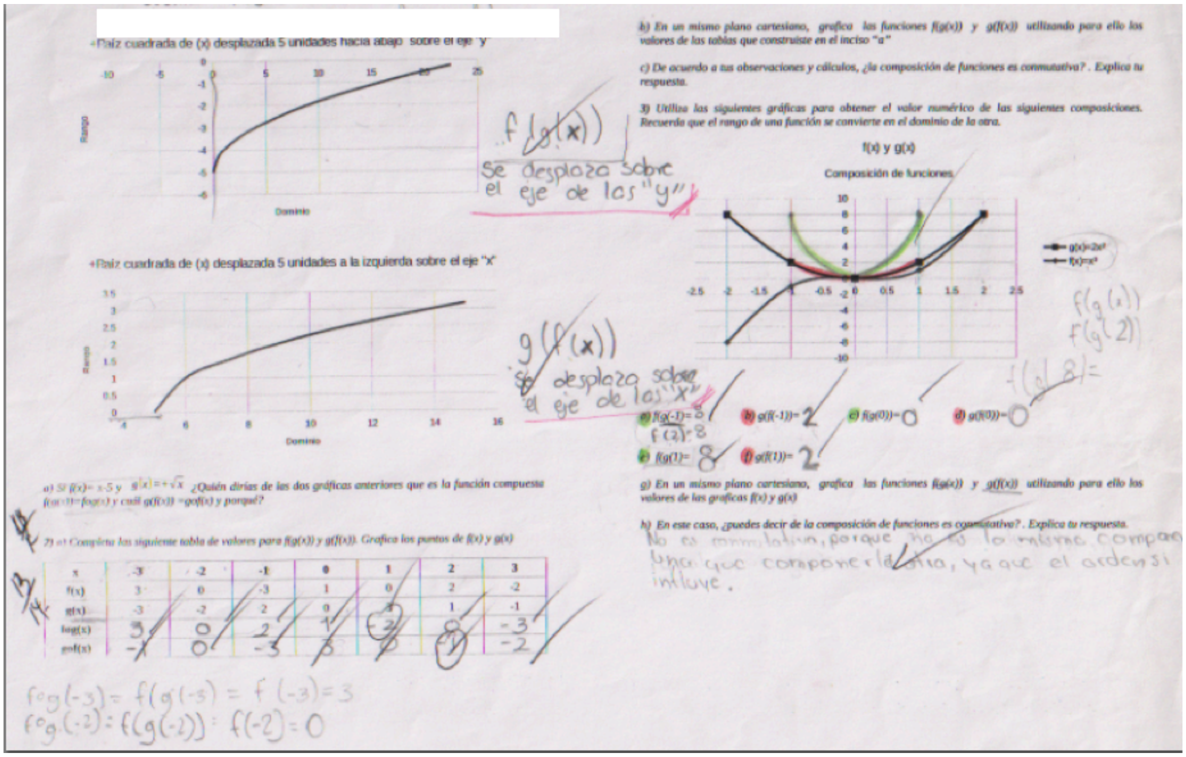
g(es una parábola

c) Describe en palabras (en términos de transformaciones) a la gráfica $g(f(x)) = (x+3)^2$

es una parábola y se desplaza sobre el eje de los x 3 unidades en negativo

d) ¿Qué le hizo la composición $g(f(x))$ a la función $g(x)$

la desplazo 3 unidades sobre el eje de la x en los negativos



+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades hacia abajo sobre el eje "y"

$f(g(x))$
Se desplaza sobre el eje de las "y"

+Raíz cuadrada de (x) desplazada 5 unidades a la izquierda sobre el eje "x"

$g(f(x))$
Se desplaza sobre el eje de las "x"

a) Si $f(x)= x-5$ y $g(x)=+\sqrt{x}$ ¿Quién dirías de las dos gráficas anteriores que es la función compuesta $f(g(x))=fog(x)$ y cuál $g(f(x))=gof(x)$ y porqué?

2) a) Completa las siguiente tabla de valores para f(g(x)) y g(f(x)). Grafica los puntos de f(x) y g(x)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	0	-3	1	0	2	-2
g(x)	-3	-2	2	0	3	1	-1
fog(x)	3	0	2	1	-2	8	-3
gof(x)	-1	0	-3	3	0	-1	-2

$f\circ g(-3)= f(g(-3)) = f(-3)=3$
$f\circ g(-2)= f(g(-2))= f(-2)=0$

b) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las tablas que construiste en el inciso "a"

c) De acuerdo a tus observaciones y cálculos, ¿la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

3) Utiliza las siguientes gráficas para obtener el valor numérico de las siguientes composiciones. Recuerda que el rango de una función se convierte en el dominio de la otra.

f(x) y g(x)

Composición de funciones

$f(g(x))$
$f(g(2))$
$f(g(8))=$

a) $f(g(-1))=8$
$f(2)=8$

b) $g(f(-1))=2$

c) $f(g(0))=0$

d) $g(f(0))=0$

e) $f(g(1))=8$

f) $g(f(1))=2$

g) En un mismo plano cartesiano, grafica las funciones f(g(x)) y g(f(x)) utilizando para ello los valores de las graficas f(x) y g(x)

h) En este caso, ¿puedes decir de la composición de funciones es conmutativa? . Explica tu respuesta.

No es conmutativa, porque no es lo mismo componer una que componer la otra, ya que el orden si influye.

③ a) Si $f(x) = x - 5$ y $g(x) = +\sqrt{x}$ ¿Quién dirías de las gráficas anteriores que es la función compuesta $f(g(x)) = f \circ g(x)$ y cuál $g(f(x)) = g \circ f(x)$ y porqué?

$f \circ g(-3) = f(g(-3)) = f(-3) = 3$

$f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(-2) = 0$

$f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(2) = 2$

$f \circ g(0) = f(g(0)) = f(0) = 1$

$f \circ g(1) = f(g(1) = f(3) = -2$

$f \circ g(2) = f(g(2) = f(1) = 0$

$f \circ g(3) = f(g(3)) = f($

$g \circ f(-3) = g(f(-3)) = g(3) = -1$

$g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(0) = 0$

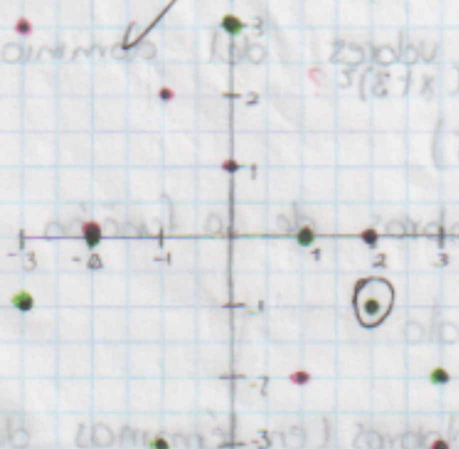
$g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(-3) = 3$

$g \circ f(0) = g(f(0)) = g(1) = 3$

$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(0) = 0$

$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(2) = -1$

$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(-2) = -2$



Actividad # 4 La composición de funciones $f \circ g(x)$ y el Álgebra

Estudiante # 1

① a)

a) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad$ b) $F(x)=x+5$ $\quad$ c) $F(x)=x^2$

$g(x)=x+6$ $\quad$ $g(x)=x^3$ $\quad$ $g(x)=|x-2|$

b) No por que hay distintas variables

② a) $f \circ h(x)=f(h(x))=f(\frac{1}{x})=\sqrt[4]{\frac{1}{x}+2}$

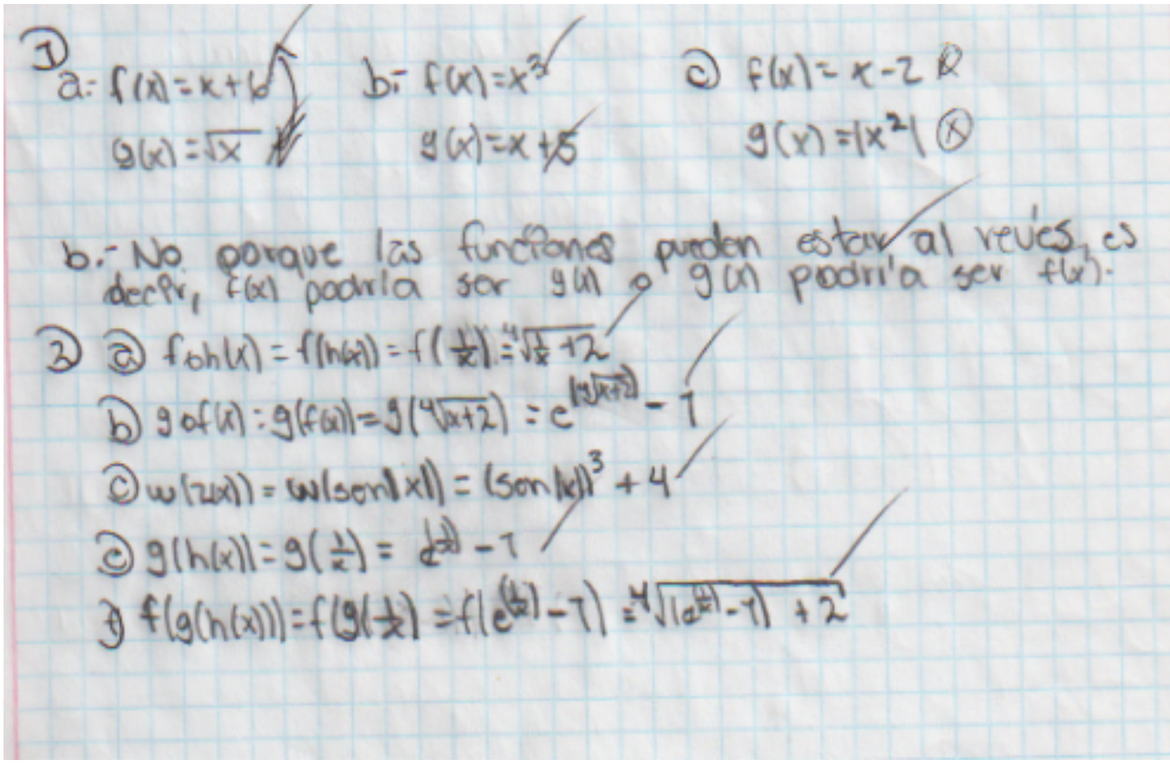
b) $g \circ f(x)=g(f(x))=g(\sqrt[4]{x+2})=\sqrt[4]{e^x-1+2}$

c) $w(z(x))=w(\text{sen}(x))=(\text{sen}(x))^3+4$

d) $g(h(x))=g(\frac{1}{x})=e^{1/x}-1$

f) $f(g(h(x)))=f(g(\frac{1}{x}))=f(e^{1/x}-1)=\sqrt[4]{e^{1/x}-1+2}$

Estudiante # 4


1) a.- $f(x)=x+6$ $g(x)=\sqrt{x}$ b.- $f(x)=x^3$ $g(x)=x+5$ c) $f(x)=x-2$ $g(x)=|x^2|$

b.- No porque las funciones pueden estar al revés, es decir, f(x) podría ser g(x) o g(x) podría ser f(x).

2) a) $f\circ h(x)=f(h(x))=f(\frac{1}{x})=\sqrt[4]{\frac{1}{x}+2}$

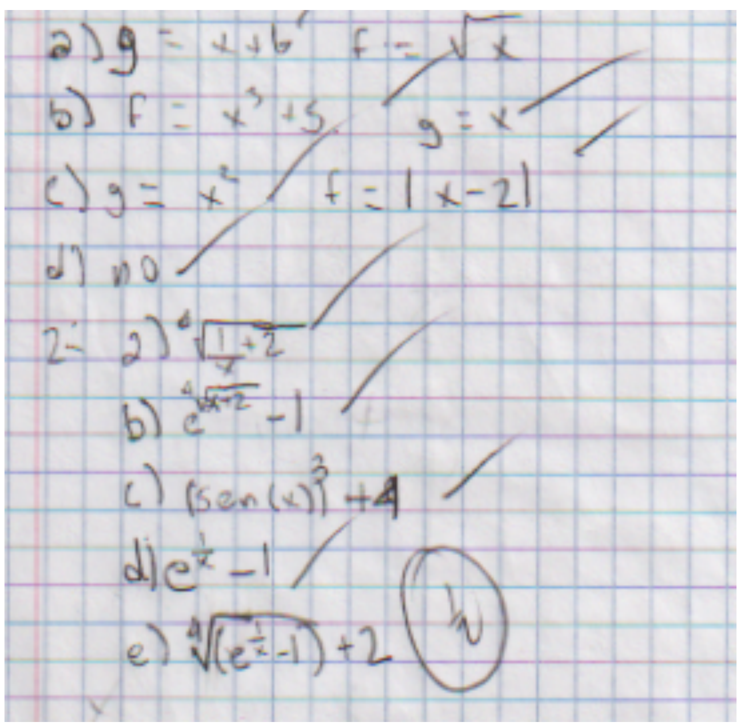
b) $g\circ f(x): g(f(x))=g(\sqrt[4]{x+2})=e^{\sqrt[4]{x+2}}-1$

c) $w(z(x))=w(\text{sen}|x|)=(\text{sen}|x|)^3+4$

d) $g(h(x))=g(\frac{1}{x})=e^{\frac{1}{x}}-1$

f) $f(g(h(x)))=f(g(\frac{1}{x}))=f(e^{\frac{1}{x}}-1)=\sqrt[4]{|e^{\frac{1}{x}}-1|+2}$

Estudiante # 5


a) $g=x+6$ $f=\sqrt{x}$

b) $f=x^3+5$ $g=x$

c) $g=x^2$ $f=|x-2|$

d) no

2- a) $\sqrt[4]{\frac{1}{x}+2}$

b) $e^{\sqrt[4]{x+2}}-1$

c) $(\text{sen}(x))^3+4$

d) $e^{\frac{1}{x}}-1$

e) $\sqrt[4]{(e^{\frac{1}{x}}-1)}+2$

Estudiante # 6

a) $f \circ h(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+2}\right)^4$

c) $w(z(x)) = w(\text{sen } x)$

e) $g(h(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $f(g(h(x))) = f\left(e - 1\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Actividad 4

La composición de funciones fog(x) y el Álgebra

En esta sección realizarás cálculos utilizando para ello el álgebra.

1) Si una función compuesta de dos funciones da como resultado otra $h(x)=f(g(x))$. En los siguientes ejercicios determina las funciones que pueden ser $f(x)$ y $g(x)$

a) $f(g(x)) = fog(x) = \sqrt{x+6}$ b) $gof(x) = x^2+5$ c) $fog(x) = |x^2-2|$

b) ¿La elección de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ es única? => no

2) Utiliza las siguientes funciones para realizar la composición que se indica en forma algebraica o analíticamente

$f(x)=\sqrt[4]{x+2}$, $g(x)=e^x-1$, $h(x)=\frac{1}{x}$, $w(x)=x^3+4$, $z(x)=\text{sen}(x)$

a) $foh(x)=$ b) $gof(x)=$ c) $w(z(x))=$ e) $g(h(x))=$ f) $f(g(h(x)))=$

B. Cuestionario aplicado a estudiantes que realizaron la secuencia didáctica

Como parte de la evaluación de la secuencia didáctica, consideramos la aplicación de un cuestionario para ir obteniendo respuestas que como profesores nos indiquen no sólo los conocimientos y competencias matemáticas aprendidas en el estudiante; generalmente revisadas a través de exámenes, las respuestas de los propios ejercicios, tareas o participaciones en clase; si no también el ir conociendo su sentir hacia éstas actividades. Así a través de las respuestas de los estudiantes, podemos obtener información que pueda sernos útil para ir mejorando nuestra practica docente y lograr un mejor aprendizaje en nuestros estudiantes.

Dado que el aprendizaje de las matemáticas generan sentimientos y emociones muy polarizantes, como lo es el ir del sentimiento de logro al sentimiento de frustración. Se pensó en la aplicación final de este cuestionario.

El cuestionario se les dio a los estudiantes después de haber concluido todas las actividades de nuestra secuencia didáctica. Fue contestada por 12 estudiantes, casi la mitad de los estudiantes que resolvieron las actividades y se les dejó que su respuesta fuera libre. No se les explicó propiamente sobre las emociones positivas y/o negativas, sólo se les mencionó algunas de ellas. Para contestar este cuestionario se les dijo a los estudiantes que no era necesario que escribieran su nombre, que sólo era una evaluación por parte de ellos a la secuencia didáctica.

El formato del cuestionario fue el siguiente:

Cuestionario sobre la secuencia didáctica de composición de funciones del estilo $\boldsymbol{f \circ g(x)}$

La intención de conocer tus respuestas a éstas preguntas tiene como objetivo mejorar, cambiar o eliminar la forma de secuencia que trabajaste durante estas dos semanas; por lo que escribe con toda libertad, pues tú respuesta sólo tiene como finalidad obtener información. Agradezco tu colaboración.

1.- ¿Qué te pareció la secuencia didáctica que trabajaste estas dos semanas?. Haz un comentario en forma libre y abierta:

2.- ¿Te parecieron interesantes las actividades?

Actividad	**Si**	**No**	**Más o menos**	**No sé**
La cadena alimentaria				
Los conjuntos y sus uniones				
La interpretación geométrica				
Las tablas y gráficas				
El manejo del álgebra				

3.- ¿Crees que las actividades te ayudaron a aprender y entender el tema?

Actividad	**Si**	**No**	**Más o menos**	**No sé**
La cadena alimentaria				
Los conjuntos y sus uniones				
La interpretación geométrica				
Las tablas y gráficas				
El manejo del álgebra				

4.- ¿Qué sugerencias propones para mejorarla?

5.- ¿Qué sentimientos o emociones experimentaste con ellas?

Actividad	Sentimientos o emociones positivas	Sentimientos o emociones negativas
La cadena alimentaria		
Los conjuntos y sus uniones		

La interpretación geométrica		
Las tablas y gráficas		
El manejo del álgebra		

Las respuestas obtenidas fueron las siguientes:

1.- ¿Qué te pareció la secuencia didáctica que trabajaste estas dos semanas?. Haz un comentario en forma libre y abierta:

Respuestas:

E_1. Sin respuesta

E_2. Estuvo bien, me gustó que nos haya puesto en equipos, ya que lo comprendí.

E_3. Estuvo bien, sólo que casi no entendí.

E_4. Me pareció buena, pero siento que falta un poco más de ejercicios.

E_5. Más o menos.

E_6. Buena aunque me cuesta trabajo.

E_7. Muy buena, pero explica muy matemáticamente.

E_8. Creo que esta bien y nos ayudo mucho como trabajo este tema.

E_9. Muy buena, le pude entender más este semestre que el anterior.

E_{10}. Me pareció didáctica.

E_{11}. Me pareció un poco rápida pero la forma de explicar estuvo muy bien.

E_{12}. Muy bien porque todos trabajamos y si fue entendible.

2.- ¿Te parecieron interesantes las actividades?

Actividad (#)	Si	No	Más o menos	No sé
La cadena alimentaria (1)	10	1	1	
Los conjuntos y sus uniones	8	2	2	

(2)				
La interpretación geométrica (3)	5	1	6	
Las tablas y gráficas (3)	9	1	2	
El manejo del álgebra (4)	6	1	5	

3.- ¿Crees que las actividades te ayudaron a aprender y entender el tema?

Actividad	**Si**	**No**	**Más o menos**	**No sé**
La cadena alimentaria	10		2	
Los conjuntos y sus uniones	8	2	2	
La interpretación geométrica	4	1	7	
Las tablas y gráficas	9		3	
El manejo del álgebra	8		4	

4.- ¿Qué sugerencias propones para mejorarla?

Respuestas:

$E_{1.}$ Me gustó la forma de poner en equipo y realizar una actividad diferente

$E_{2.}$ Seguir con ejercicios cortos y seguirles entendiendo

$E_{3.}$ Ir más lento, haciendo ejercicios menos complejos

$E_{4.}$ Más ejercicios para analizar

$E_{5.}$ Lenguaje más entendible (no tan matemático)

$E_{6.}$ Sin respuesta

$E_{7.}$ Más divertida

$E_{8.}$ Creo que me va bien así, porque si comprendemos más

$E_{9.}$ Que sigan siendo didácticos (equipos, etc.)

$E_{10.}$ Sin respuesta

$E_{11.}$ Ninguna todo estuvo bien

$E_{12.}$ Que sigan siendo didácticas las clases

5.- ¿Qué sentimientos o emociones experimentaste con ellas?

Actividad	Sentimientos o emociones positivas	Sentimientos o emociones negativas
La cadena alimentaria	Alegría (5) Diversión (2) Acertijo, Reto (1) Sentimiento positivo (4) *sin explicación.	Nervios (1)
Los conjuntos y sus uniones	Reto (3) Comprensión (1) Alegría (1) Emoción (1) Sentimiento positivo (4) *sin explicación.	Tristeza (2) Aburrido (1)
La interpretación geométrica	Reto (3) Sentimiento positivo (4) *sin explicación.	Confusión (1) Angustia (2) No entendí (1) Aburrido (1)
Las tablas y gráficas	Reto (2) Comprensión (1) Felicidad-Alegría (1) Sentimiento positivo (4) *sin explicación.	Aburrido (2) Angustia (2)
El manejo del álgebra	Reto (3) Felicidad (1) Sentimiento positivo (4) *sin explicación.	Un poco de tensión (1) Confusión (1) Hambre (1) Aburrido (1) Angustia (1)

Cuatro estudiantes, marcaron toda la columna de sentimientos positivos, de las distintas actividades, pero no explicaron cuáles habían sido esos sentimientos.

Como los estudiantes llegaron a expresar más de un sentimiento en una actividad el conteo no resulta exacto para los 12 estudiantes que contestaron.

En términos generales se observa que la forma de trabajo fue del agrado de los estudiantes y consideran que sí les ayudo a entender el tema, aunque se requiere de más ejercicios. Por otro lado llama nuestra atención que dentro de la parte geométrica que se dividió dentro del cuestionario en dos partes (interpretación geométrica, y tablas y gráficas) fue la que tuvo apreciaciones más bajas dentro del grupo de estudiantes; a pesar de que los estudiantes la contestaron bien en lo general.