



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Departamento de Matemática Educativa

**Un estudio de reproducibilidad
de situaciones didácticas**

Tesis que presenta
Francisco Javier Lezama Andalón
Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
en la Especialidad de Matemática Educativa

Directora: Dra. Rosa María Farfán Márquez

Resumen

El presente trabajo estudia un fenómeno didáctico denominado como reproducibilidad. Nos empeñamos en identificar y esclarecer los fenómenos asociados a la acción de repetir una ingeniería didáctica en diversos escenarios escolares con la pretensión de lograr un efecto didáctico uniforme. La tarea principal de la investigación se dirigió a la repetición de una situación didáctica en condiciones de control con distintos estudiantes y profesores, a fin de poder localizar, delimitar y en su caso definir los fenómenos asociados al proceso de repetir la situación didáctica. Con el propósito de analizar el proceso de reproducir, se describe con todo detalle la comunicación del escenario a los profesores y después las interacciones de éstos con los estudiantes en el momento de trabajar la situación en el aula. Se muestran los resultados de tales experiencias y a partir de ellos se señalan los fenómenos emergentes haciendo un análisis detallado de cada uno de los polos del sistema didáctico como es el caso de la estructura y el contenido de la situación didáctica, la actividad desarrollada por los estudiantes y el profesor; así como sus respectivas interacciones. Estos elementos son estudiados con la finalidad de poderlos emplear en la construcción de un posible modelo que pueda contener un cierto valor de predicción sobre el fenómeno de reproducibilidad.

Abstract

The present work studies a didactic phenomenon defined as reproducibility. We insist on identify and clarify the phenomena linked to the action of repeating a didactic engineering in diverse school scenarios with the presumption of achieving a uniform didactic effect. The main task of the research was led to the repetition of a didactic situation in controlled conditions with different students and professors, in order to find, delimit, and when necessary define the phenomena associated to the process of repeating the didactic situation. The communication of the scenario to the professors, and later the interaction of them with the students at the moment of working on the situation at the classroom is described with detail with the purpose of analysing the process of repeating. The results of those experiences are presented and based on them the emerging phenomena are shown making a detailed analysis of each of the poles of the didactic system as in the case of the structure and the content of the didactic situation, the activity developed by the students and the professor, and also each of the interactions. These elements are studied in order to apply them to build a possible model that could contain certain predictive value over the reproducibility phenomenon.

Índice

	Página
Introducción	XI
Capítulo I El problema de investigación: Marco teórico y metodología	1
Marco Teórico	1
Teoría de situaciones didácticas	1
La Ingeniería Didáctica	8
El fenómeno de la reproducibilidad	10
El primer estudio sistemático de la reproducibilidad	11
Otros estudios relacionados con la reproducibilidad	21
Un comentario sobre las nociones de reproducibilidad interna y externa	29
Un elemento más sobre la reproducibilidad a considerar	30
Elementos de filiación y ruptura	31
Formulación del problema	34
Propósitos de la investigación	35
Objetivos específicos	36
Diseño y metodología de la investigación	38

Una estrategia de análisis	39
Capítulo II Un análisis sobre la pertinencia y potencia que aporta a la investigación en didáctica de las matemáticas el análisis de la reproducibilidad	41
La Matemática Educativa	41
El estatus de la reproducibilidad en el escenario didáctico	43
Comentario final	51
Capítulo III Aproximaciones al fenómeno de la reproducibilidad	53
El saber	54
Elementos del diseño de la ingeniería “Un estudio didáctico de la función 2^x ”.	54
Propósito de la ingeniería	55
Trayectorias, Órbitas e Historias de Clase.	56
El profesor	63
El Saber en un escenario didáctico; puestas en escena de la Ingeniería.	63
Establecimiento de la estrategia de observación y participación del profesor	64
Tercera puesta en escena; diciembre de 2000: caracterizada por la introducción de la noción de “comunicación del escenario”.	65
Comunicación del escenario, un espacio para la apropiación y el acuerdo	67

	Índice
La visión del profesor	76
Determinación de la dinámica de la puesta en escena y la participación de los profesores.	80
Conclusión	81
Capítulo IV La reproducibilidad en el ámbito de la interacción entre alumnos y profesores	83
El alumno	84
Actividad matemática de los estudiantes	84
Puesta en escena del 2000	85
Consideración de elementos de reproducibilidad externa	85
Elementos de reproducibilidad externa e interna	87
Un fenómeno local	92
Grupo Teoloyucan una experiencia contrastante	96
El sistema didáctico en acción; interacciones entre alumnos y profesores	98
Comentarios a las interacciones	116
¿Qué se reprodujo?	118
Capítulo V Elementos para un modelo de reproducibilidad de situaciones didácticas	123
La situación didáctica en el sistema didáctico	123

La estructura de la situación didáctica como factor de reproducibilidad	125
Los estudiantes ante reproducibilidad	127
El profesor como agente de reproducibilidad	131
El profesor ante la situación didáctica	131
Los profesores y las interacciones con los estudiantes	133
Elementos para la modelación del fenómeno de la reproducibilidad	135
Conclusiones	146
Bibliografía	149
Anexo A Diseño de la ingeniería	157
Anexo B Reportes de los estudiantes, puesta del año 2000	175
Anexo C Historias de clase. Puesta en escena del año 2000.	247
Anexo D Comentarios y reflexiones de los profesores sobre la situación didáctica y modificaciones a la situación didáctica	273

Introducción

En este trabajo, presentamos el desarrollo de la investigación de un fenómeno didáctico denominado reproducibilidad. Dicho fenómeno tiene especial importancia para la didáctica de las matemáticas ya que está asociado a una práctica que desarrollan la mayoría de los profesores en su actividad escolar, “repetir clases”.

La didáctica ha catalogado algunos fenómenos asociados con el repetir clases, en nuestro caso nos ocuparemos de una actividad que consiste en repetir una situación didáctica que se vivirá en un ambiente de aula. Repetimos en varios escenarios una situación didáctica que es el instrumento experimental resultante de un trabajo de ingeniería didáctica. Es decir, lo que se pretende repetir en esta ocasión es un instrumento didáctico amplio que fue precedido de un análisis bastante estructurado sobre un saber matemático específico a aprender y la elaboración de predicciones sobre el aprendizaje de los estudiantes con relación a dicho saber.

Las situaciones didácticas diseñadas después de un análisis detallado de aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos, son llevadas al aula con el fin de que unos estudiantes específicos se adueñen del conocimiento matemático puesto en juego por la situación, pero hasta ahora, nada asegura que dicho instrumento de aprendizaje sea universal.

Existen múltiples factores que lo reducen a una efectividad muy localizada. Estos factores, creemos, forman parte del fenómeno de la reproducibilidad. Nos interesa conocer qué elementos podrían permitirnos lograr efectos didácticos estables, a pesar de cambios significativos en el marco del escenario de aplicación como podrían ser el tiempo y el lugar. Otros profesores, otros alumnos, otra institución, en

fin, un cuerpo muy amplio de condicionamientos y que son objeto de estudio en este trabajo.

A lo largo del escrito intentamos precisar lo que de una manera muy reducida se ha descrito arriba, es decir, precisar qué es lo que nos proponemos estudiar, cómo lo haremos y cómo extraeremos la información pertinente para responder a nuestros cuestionamientos.

El reporte de nuestro trabajo, está compuesto de cinco partes. En la primera, hacemos mención de la teoría de situaciones didácticas y de un importante instrumento de investigación y también de generación de productos de enseñanza, que es la ingeniería didáctica. La exposición de esos dos aparatos teóricos es fundamental, pues es en ese contexto donde se erigió el problema de la reproducibilidad.

Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica, es establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la misma, al repetirla en distintos escenarios.

“El hecho de reproducir situaciones de aprendizaje, provoca una pregunta que es esencial para la didáctica ¿qué es lo que realmente se reproduce? Y agrega: Un profesor que reproduce la *misma historia*, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos, ¿ha reproducido el mismo *hecho didáctico* que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido?”. Además declara, “Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica, no es un resultado de la observación sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable” (Brousseau, 1986).

Como podremos observar, el fenómeno de la reproducibilidad, es inherente al constructo teórico denominado Teoría de Situaciones Didácticas y ha sido estudiado en diferentes momentos.

Es relevante señalar, que las distintas investigaciones que se han elaborado a partir de 1984 con relación al fenómeno de la reproducibilidad, han ido incorporando aspectos nuevos al estudio del fenómeno, pero todas se han caracterizado por una fuerte atención al papel de del profesor, en la actividad de reproducir situaciones didácticas, como lo muestran las siguientes observaciones:

En el contexto de la teoría de situaciones, en la definición de “medio”; ... El medio se constituye así en un elemento fundamental, dentro de la noción de situación didáctica, ya que está constituido por todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y que puede emplear con seguridad y sin cuestionamientos, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el fin de que pueda lograr el objetivo deseado. Es muy importante notar que en tal medio se encuentran el profesor. Este hecho será de gran importancia en el momento de analizar la función del profesor en la actividad de reproducción de situaciones didácticas.

Artigue, en su estudio sobre reproducibilidad, concluye: Es el profesor quien conoce el propósito didáctico de la situación, las vías de solución y los posibles obstáculos para el estudiante así como el control del tiempo escolar, entonces, en esa dinámica, el maestro juega un papel esencial. Él es el actor decisivo de la reproducibilidad.

A partir de ese estudio, las investigaciones que hacen referencia a la reproducibilidad, enfocan especialmente la actividad del profesor, centrándose en sus intervenciones y analizando el origen de éstas.

Es en este contexto donde nosotros hacemos el planteamiento de nuestra investigación: ¿qué tipo de fenómenos podemos esperar aparezcan cuando se repite una situación didáctica, diseñada con un propósito específico, aplicada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios y con la intención de lograr la reproducibilidad de la misma? ¿Cuáles de estos fenómenos

apuntan a lograr la reproducibilidad y cuáles no? ¿Cuáles eran predecibles y cuáles no?

Es a partir de las preguntas que nos hacemos y las investigaciones relacionadas con el problema, que hemos elaborado un esquema que dirigirá nuestro trabajo y es aquel que interpreta a la reproducibilidad de una situación didáctica como una intervención en el sistema didáctico constituido por el estudiante, profesor y un saber matemático de referencia, entrar a un sistema didáctico constituido por estudiantes y profesores concretos, presupone elaborar un conjunto de acciones que permitan llegar a acuerdos profesor que adoptará la situación considerando el saber matemático de referencia y la factibilidad de ser tratado con sus estudiantes. Desde nuestro punto de vista no puede ser llevada una propuesta didáctica a un aula sin atravesar por un proceso de adaptación de la situación al nuevo sistema sistema didáctico, en dicho proceso el profesor deberá contar con un espacio muy flexible para lograr tal adaptación; consideramos que este aspecto constituye una de las claves de nuestro trabajo.

En la segunda parte exponemos la pertinencia de un estudio de reproducibilidad, efectuando un análisis de tres tesis doctorales elaboradas por colegas del Departamento de Matemática Educativa. Constituye una lectura desde una óptica y un interés por descubrir en ellas gérmenes de reproducibilidad y elementos a considerar en tal problemática.

La construcción de largas ingenierías, así como de pequeñas situaciones didácticas con fines exploratorios o de aprendizaje, nos remiten cada vez, a la elaboración de más sólidos análisis preliminares, que consideren aspectos cognitivos, didácticos y muy especialmente, a hacer consideraciones de índole epistemológico pero íntimamente ligadas a condiciones sociales y culturales, como lo muestran los trabajos analizados.

Toda construcción didáctica, nos obliga a hacer consideraciones sobre el carácter efímero o duradero de las mismas, sobre su factibilidad de ser implementada en la escuela. Consideramos que nuestros estudios no pretenden únicamente describir los problemas asociados al enseñar y aprender matemáticas en la escuela, queremos producir conocimiento con el fin de utilizarlo en ella, con viejas o nuevas prácticas, retomando tradiciones y costumbres o infundiendo nuevas prácticas y hábitos, acudiendo a la historia y a la cultura local, aprendiendo a resistir y discernir los embates globalizadores culturales.

Toda práctica escolar, exitosa, está irremediablemente condenada a repetirse, desde un acto improvisado que resulta positivo, hasta el plan escolar elaborado por comités de expertos. Pero, a partir de una experiencia particular, por estructurada y cuidadosa que ésta sea, ¿cómo extenderla a la comunidad? ¿Se pueden hallar mecanismos no autoritarios o visibles, para compartir estas experiencias y prácticas de enseñanza?

Anticipándonos al planteamiento formal, de lo que será el problema de investigación, que este trabajo se propone realizar, diremos que nos proponemos estudiar el fenómeno de la reproducibilidad de ingenierías didácticas o situaciones didácticas. Que este fenómeno lo vemos en las bases mismas de toda elaboración didáctica. Consideraciones tales como, el papel del profesor en la actividad docente, la igualdad de condiciones para repetir una experiencia, estructura de las situaciones para un estricto control de las actividades de aprendizaje, distintas concepciones sobre lo que es la actividad del profesor, modificaciones de las condiciones del investigador, desarrollar experiencias que cada vez se parezcan más a las condiciones normales de clase; serán algunos de los asuntos que se profundizarán y discutirán a lo largo del trabajo.

En el tercer capítulo inicia el punto de arranque de la investigación con el diseño de la ingeniería didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x “. Tal ingeniería se

elaboró con el propósito de que los estudiantes construyeran la noción de función exponencial. La situación consta de tres etapas.

Se llevo a escena en enero de 1997, con un grupo, formado por estudiantes de distintos grados de un bachillerato en la ciudad de México. La puesta en escena resultó exitosa, fue validada por los métodos propios de la ingeniería didáctica.

Repetirla en distintos escenarios hizo surgir en nosotros el interés por el fenómeno de reproducibilidad de situaciones didácticas. A partir de esas experiencias, les propusimos a once profesores, el que reprodujeran con sus estudiantes la ingeniería. Nos constituimos así, en un grupo de investigación sobre reproducibilidad.

Iniciamos el proceso con los once profesores de conocimiento y profundización de la ingeniería. Se les dio a leer los documentos del diseño, y se revisó con detenimiento el contenido matemático de la situación. Se hicieron varias reuniones con los once miembros de nuestro equipo y muchas otras en grupos reducidos, que respondían fundamentalmente a factores geográficos; Toluca, Pachuca y Oaxaca.

A partir de estas experiencias de reproducción de la situación, hemos podido identificar aspectos interesantes tanto de los estudiantes como de los mismos profesores, así como las características de la situación didáctica y organización social de la clase.

Especialmente importante ha sido la observación del aspecto relacionado con las intervenciones del profesor en el desarrollo de la actividad. Esto nos ha llevado a ser cuidadosos en la actividad denominada comunicación del escenario a los profesores, pues es en ella, donde se establece en un principio el espacio de intervención del profesor.

Iniciamos en este capítulo el análisis del sistema didáctico con un estudio detallado del polo del saber y la primera parte de la actividad del profesor especialmente lo

que hemos denominado el proceso de comunicación del escenario. En esta parte hacemos uso de la información recogida en las puestas en escena de los años 1997 y 1998.

En el capítulo cuatro, abordamos el polo correspondiente al alumno, esto lo hacemos cuando analizamos la actividad matemática desarrollada por el estudiante al trabajar situación didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x ”, dicho análisis nos mostrará cómo vive la situación, cómo pone a prueba el diseño, cómo discurre su pensamiento en cada una de sus etapas, cómo pone en acción sus conocimientos previos y cómo se apropia de otros nuevos. También podremos observar cómo discute con sus compañeros y profesor los episodios que lo desconciertan y por ende no encuentra salida para ellos.

Cuando se analiza la actividad del estudiante, podemos observar en la mayoría de los casos un fenómeno esperado, si bien la actividad de los estudiantes se inicia interactuando con planteamientos dados a través de instrucciones en un documento, conforme transcurre el tiempo la interacción se desplaza de manera significativa hacia el profesor, mostraremos que en muchos casos la actividad matemática del estudiante está mediada por el profesor. Intentaremos mostrarla, caracterizarla, e indicar en los casos donde sea patente la función de tal mediación; a tales fenómenos nos aproximaremos analizando las interacciones producidas entre los estudiante y profesores al interior de los equipos de trabajo.

Finalmente en el capítulo cinco, discutimos los elementos que consideramos fundamentales para la elaboración de un modelo descriptivo del fenómeno de reproducibilidad, explicando lo que consideramos los tres espacios de acción que deben ser considerados para reproducir una situación didáctica, estructura, comunicación, adaptación. Estos tres elementos y la consideración de los factores que hacen estable la puesta en escena y especialmente los que rompen dicha estabilidad, nos permiten elaborar unas conclusiones que aunque aún limitadas

pueden dar luz a la actividad de repetir Ingenierías Didácticas en diversos escenarios.

Capítulo I

El problema de investigación: Marco teórico y metodología

El propósito de este capítulo, es el de señalar a la teoría de situaciones didácticas como marco teórico de nuestra investigación, cómo se hará uso de sus categorías teóricas para definir en esos términos nuestro problema de investigación, dar un estatus formal al fenómeno de la reproducibilidad y formular de manera precisa el propósito de la investigación, la metodología a seguir y cuál será la ruta de su desarrollo.

Marco teórico

La teoría de situaciones didácticas.

La evolución de la didáctica de las matemáticas está determinada por sucesivas ampliaciones de la problemática didáctica. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios de su objeto primario de investigación y, en consecuencia, modifica la naturaleza de la didáctica como disciplina científica (Gascón, 1998).

La evolución de la didáctica de las matemáticas de arte a ciencia, ha ido modificando la manera como se entienden los hechos didácticos. Desde la concepción de que la didáctica es un arte, poseído por unos cuantos y que hace que la función del alumno, sea dejarse moldear por el artista, para pasar luego a una

etapa que se le ha denominado clásica, donde el aprendizaje era considerado como un proceso psico-cognitivo.

La didáctica de las matemáticas es considerada como un caso particular, de lo que podría denominarse como didáctica general, en donde las explicaciones de cómo aprende en general una persona, podían ser aplicadas al aprendizaje de las matemáticas.

Gascón, op.cit., p.10, señala los siguientes dos aspectos, como característicos del enfoque clásico en didáctica de las matemáticas:

1. Toma como problemática didáctica, una ampliación limitada de la problemática espontánea del profesor. Menciona como ejemplos de esto, los conocimientos previos de los alumnos, el problema de la motivación de los alumnos para el aprendizaje, los instrumentos tecnológicos de la enseñanza, la diversidad, cómo enseñar a resolver problemas, cómo evaluar, etc.
2. Presentar el saber didáctico como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes más fundamentales, importados de otras disciplinas

Agrega además, que desde el punto de vista clásico, la didáctica de las matemáticas, consiste en proporcionarle al profesor los recursos profesionales para llevar su trabajo de forma eficiente.

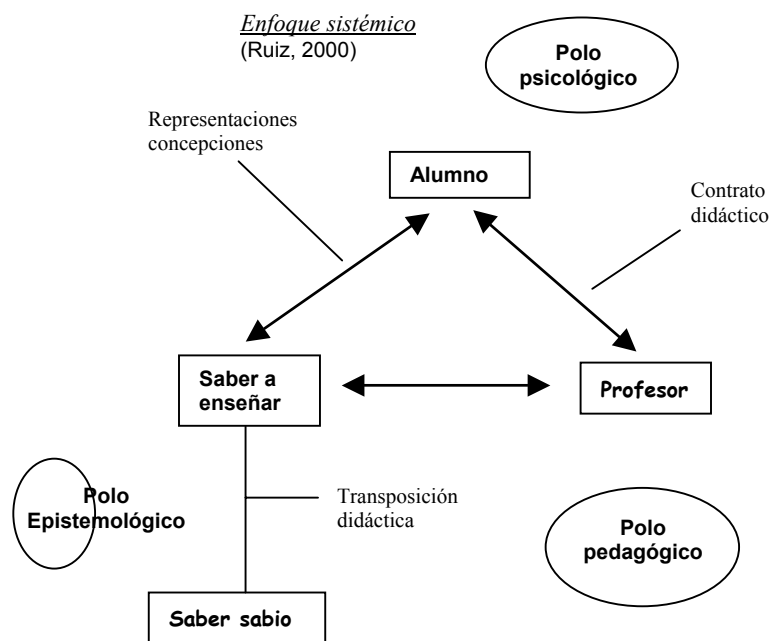
Desde esta perspectiva, enseñar y aprender matemáticas, son nociones transparentes y no cuestionables. El análisis se centra en el alumno o el profesor, condicionándolo fuertemente a los procesos psicológicos asociados a la enseñanza y el aprendizaje. Interpreta el saber didáctico a un saber técnico, renunciando así a construir la didáctica de las matemáticas como un saber científico.

Para construir la didáctica de las matemáticas como saber científico, se requeriría un modelo de la matemática escolar, así como un modelo de la actividad matemática y un modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con el surgimiento de la teoría de situaciones, Brousseau, junto con otros investigadores, se dieron cuenta de la necesidad para la didáctica, de utilizar un modelo propio de la actividad matemática. En esto consiste precisamente, el principio metodológico fundamental de la teoría de situaciones: definir un <<conocimiento matemático>> mediante una <<situación>>, esto es, por un autómata que modela los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima (Brousseau, 1994).

La teoría de situaciones adopta un enfoque sistémico ya que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1998).

Chevallard, (1991) denomina a este esquema teórico, como "sistema didáctico". El



entorno inmediato del sistema didáctico es el “sistema de enseñanza”, que está constituido por un conjunto diverso de dispositivos que permiten operar a los distintos sistemas didácticos. Alrededor de este sistema de enseñanza se encuentra el entorno social, que puede caracterizarse por la presencia de padres, académicos, y las instancias políticas.

Alrededor de lo que Chevallard denomina el sistema de enseñanza en estricto sensu, hay un entorno donde se piensa el sistema didáctico. A tal entorno lo denomina noosfera. En la noosfera los representantes del sistema de enseñanza se encuentran directa o indirectamente con los representantes de la sociedad. Esta versión simplificada del funcionamiento escolar puede desarrollar formas muy complejas de funcionamiento.

Todo funcionamiento social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenido de saberes como contenidos a enseñar (Chevallard, 1991). Los contenidos de saberes designados como aquellos a enseñar en general preexisten al movimiento que los designa como tales, pero en algunas ocasiones constituyen “creaciones didácticas”, por necesidades de enseñanza.

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. “El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica” (Chevallard, 1991, p.45).

La noosfera, es el centro operacional del proceso de transposición. Allí se produce todo conflicto entre sistema didáctico y entorno.

Luego de que en el sistema didáctico se ha determinado un saber a enseñar, este es sin lugar a dudas un saber transpuesto, despersonalizado, descontextualizado. Constituye la labor del profesor proceder en sentido contrario al productor de tal

conocimiento, debe contextualizar y repersonalizar el saber: busca éstas situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar (Brousseau). El estudiante que se ha apropiado de los conocimientos, procede a descontextualizar y despersonalizar para poderlos usar.

La didáctica de las matemáticas se ocupará de la identificación y modelación de los distintos fenómenos que se producen en el sistema didáctico, para ello deberá identificar quiénes participan en él, las relaciones que unen a esos participantes y mostrar los efectos que estas relaciones produce.

Para poder abordar el fenómeno de la reproducibilidad, requeriremos de otros elementos que se encuentran insertos en el sistema didáctico.

Un supuesto básico de la teoría de situaciones es: el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios... Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986).

Este supuesto, se basa en principios de la psicología genética y de la psicología social y que (Ruiz, 2000) resume de la siguiente manera: “El aprendizaje se apoya en la acción. La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación. [Estos, constituyen elementos básicos de la obra de Piaget]. Los aprendizajes previos de los alumnos deben ser tenidos en cuenta para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos: se conoce en contra de los conocimientos anteriores. [Esta afirmación constituye una idea fundamental de la epistemología de Bachelard (1986)]. Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición del conocimiento [Idea básica de la psicología social genética, representada por los trabajos de la escuela de Ginebra tales como Mungny (1986)]”.

La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los problemas que le propone.

Tomando una situación matemática como elemento primario, podemos plantearnos cómo transformarla en una situación de aprendizaje. Para ello, debemos cerciorarnos de que la situación deberá ser de tal naturaleza que el alumno se vea obligado a hacer modificaciones a sus conocimientos previos.

Uno de los factores principales de estas situaciones de aprendizaje, lo constituye el hecho de que las respuestas que produce el alumno, sean respuestas provocadas por las exigencias del medio y no a los deseos del profesor. Al logro de este hecho, se le llama devolución de la situación por el profesor. La devolución no se realiza sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que lo caracterizan (Brousseau, 1994).

Se llama situación adidáctica a una situación matemática específica de un conocimiento determinado, tal que por si misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el alumno. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma de provocar este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hacen que fracasen las estrategias espontáneas (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

Se llamará variable didáctica de la situación adidáctica a aquellos elementos de la situación que al ser modificados permiten engendrar tipos de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución.

El empleo por parte del profesor de situaciones adidácticas, con una determinada intención didáctica, constituyen lo que se denomina situación didáctica. La situación didáctica comprende las situaciones adidácticas, un cierto medio y el

profesor que tiene el propósito de que los alumnos aprendan un determinado conocimiento matemático.

El medio se constituye así en un elemento fundamental dentro de la noción de situación didáctica, ya que está constituido por todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y puede emplear con seguridad, sin cuestionamientos, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el fin de que pueda lograr el objetivo deseado. Es importante notar que en tal medio se encuentran el profesor.

En la relación didáctica maestro-alumno se erige, explícitamente o implícitamente, un acuerdo de cuáles son las responsabilidades de cada uno de ellos. Es un sistema de relaciones recíprocas análogas a las de un contrato, pero a diferencia de los contratos sociales, éste estará determinado no por reglas previas a la relación, sino por la naturaleza del conocimiento matemático buscado. Este contrato didáctico evoluciona conforme evoluciona la relación del estudiante con la situación didáctica. El estudiante puede resistirse a la devolución de la situación, o experimentar problemas, es entonces que, las acciones del profesor, traducidas a la negociación del contrato, experimentan evolución.

Finalmente, como hemos dicho anteriormente, las situaciones didácticas, están caracterizadas por un conocimiento específico. Es posible establecer correspondencias entre estos tipos de conocimientos, los modos de funcionamiento de dichos conocimientos y los respectivos intercambios del alumno con el medio, traducidos en acciones, formulaciones, validaciones. Tales intercambios pueden ser definidos de la siguiente manera:

- Situación de acción, que corresponde a un modelo implícito, que sugiere una decisión o empleo de un algoritmo y que provoca intercambio de informaciones no codificadas. El modelo de acción le permite al alumno mejorar su modelo implícito, son acciones que aún no le permiten formular, probar, ni formular una teoría.

- Situación de formulación, la forma de conocimiento, corresponde a un lenguaje que le permite la producción de mensajes y por ende el intercambio de informaciones codificadas según ese lenguaje. En este tipo de situaciones el estudiante intercambia y comunica sus exploraciones, a sus compañeros o profesor y ya puede comunicarlos en un lenguaje matemático, así sea muy incipiente.
- Situación de validación, que toma la forma de conocimiento de una teoría, que le permite construir sus propios juicios, pudiendo intercambiar juicios. En esta situación, el estudiante debe demostrar porqué el modelo que construyó, es válido, a fin de convencer a otros de ello.

La ingeniería didáctica

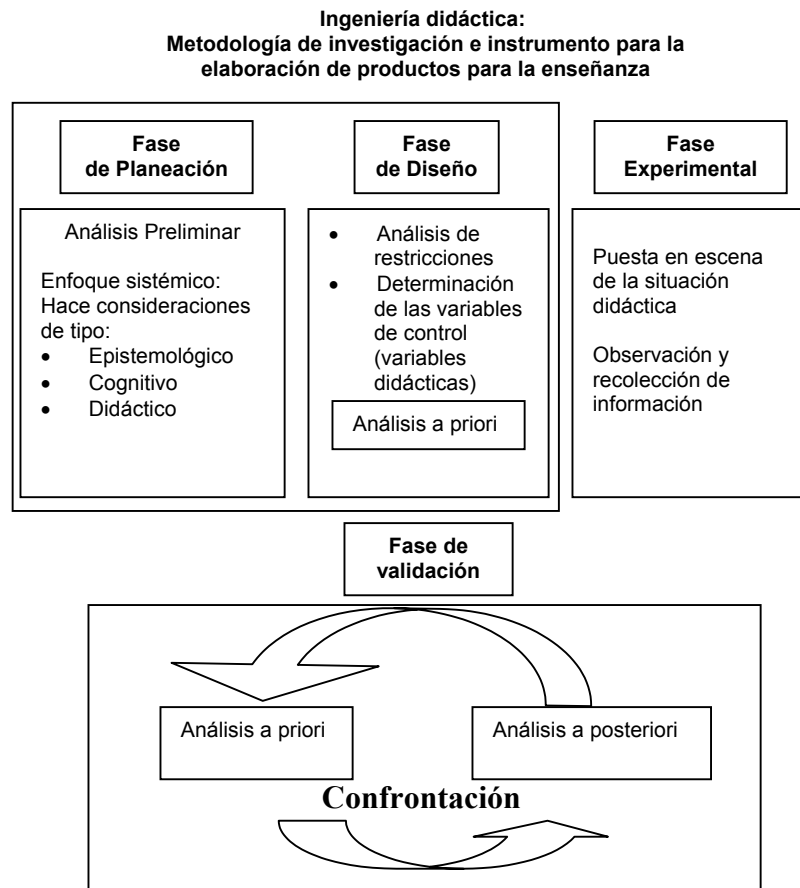
La ingeniería didáctica nace a principios de la década de los ochentas, y constituye una metáfora de la actividad de los ingenieros, quienes para desarrollar sus proyectos hacen uso de los conocimientos científicos de su dominio y ponen a prueba sus resultados al control las ciencias de referencia propias de las ingenierías. Continuando con la metáfora de la ingeniería, se reconoce que los objetos con los que se trabaja en educación, resultan ser mucho más complejos que los considerados por la ciencia y esto obliga al ingeniero-investigador o ingeniero-profesor a hacer uso de todos los recursos a su alcance para lograr su objetivo.

Desde su surgimiento la ingeniería didáctica, ha sido vista con una doble función, como declara Chevillard (1982), “Ingeniería, acción para investigar” e “Ingeniería, acción para la acción”. Tal polisemia de la expresión ingeniería didáctica, vista como metodología de investigación y producción de desarrollos para la enseñanza, le es inherente. Esta conveniente polisemia deja al descubierto que la separación entre la investigación y la acción no es fácil de localizar y sin lugar a dudas puede representar peligros de interpretación.

Un aspecto relevante de la ingeniería didáctica es su esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La ingeniería didáctica se caracteriza también por ubicarse en el registro de los estudios de caso cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

Las fases de la metodología de la ingeniería didáctica constan de análisis preliminares, en los que entran aspectos como: la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones de los estudiantes, las dificultades, los obstáculos, las restricciones donde se realizará la experiencia y los objetivos perseguidos.



Un aspecto importante de la fase de planeación, es el concerniente a tres dimensiones indispensables a considerar para el diseño de la situación didáctica y que son: la dimensión epistemológica (asociada a las características del saber en juego), la dimensión cognitiva (asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza) y finalmente la dimensión didáctica (asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza).

El propósito del análisis a priori es determinar si las restricciones consideradas sobre el sistema didáctico y la elección de las variables elegidas, permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y los significados construidos. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes.

La validación de la ingeniería se lleva a cabo al confrontar las hipótesis elaboradas en análisis a priori y el análisis de los resultados de la fase experimental (denominada análisis a posteriori). A esta fase de la ingeniería se le denomina fase de validación.

Descripción del problema de investigación

El fenómeno de la reproducibilidad

Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica, es establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la misma, al repetirla en distintos escenarios.

Es alrededor del fenómeno del envejecimiento de situaciones de enseñanza, que iniciaremos la exploración del fenómeno de la reproducibilidad, ya que como veremos más adelante, este fenómeno, está asociado a la actividad de repetir la misma clase en varios escenarios distintos.

Brousseau introduce la noción de envejecimiento de las situaciones de enseñanza, para designar el problema que experimenta el profesor, para reproducir una misma lección con nuevos alumnos, los resultados que se obtienen son diferentes en cada

repetición y en ocasiones mucho más pobres. Él afirma que surge en el profesor la necesidad de modificar las instrucciones, su exposición, los ejemplos, los ejercicios y en ocasiones hasta la estructura misma de la lección. Mientras más repite la lección, este fenómeno se acentúa, llegando a cambiar el sentido de la lección original. Reconoce que las situaciones con poca interacción entre alumno y profesor, como las exposiciones seguidas de ejercicios o instrucciones acompañadas de una situación de aprendizaje envejecen más lentamente.

El envejecimiento de situaciones está asociado a otro de índole más general, el de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza. Brousseau, se hace preguntas que nos permiten vislumbrar la problemática asociada al fenómeno de la reproducibilidad:

“El hecho de reproducir situaciones de aprendizaje, provoca una pregunta que es esencial para la didáctica ¿qué es lo que realmente se reproduce? Y agrega: Un profesor que reproduce la *misma historia*, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos, ¿ha reproducido el mismo *hecho didáctico* que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido?”. Además declara, “Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica, no es un resultado de la observación sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable” (Brousseau, 1986).

Son las dos preguntas expuestas arriba las que nos permiten en principio identificar elementos que pudieran caracterizar el fenómeno que designamos como reproducibilidad.

El primer estudio sistemático de reproducibilidad.

En el año de 1984, Artigue, presenta su tesis doctoral con el título: “Contribuciones al estudio de la reproducibilidad de situaciones didácticas –Diversos trabajos de

matemáticas y de didáctica de las matemáticas”. Éste constituye el primer estudio específico sobre la reproducibilidad.

Desde el inicio pone de manifiesto las dificultades que se enfrentan al desarrollar investigaciones con grupos en situación escolar. Afirma que las investigaciones clásicas, clínicas o estadísticas introducen un paréntesis en el medio escolar durante la experimentación; por contrario la experimentación en situación escolar resulta difícil de introducirse de manera efectiva en la complejidad del sistema escolar, ya que no se puede aislar al alumno del grupo, al grupo del maestro, al maestro de la institución. Las preguntas que guían su investigación son:

- ¿cuáles son los fenómenos observados y cuáles son las variables que los determinan?
- ¿qué relaciones existen entre las historias de clase y las historias individuales de los alumnos?
- ¿se puede pasar de un discurso descriptivo llegando a uno explicativo, y aún más, predictivo, a nivel de los alumnos, a nivel del grupo?

Artigue (1984) se propone construir un modelo que le permita caracterizar a la reproducibilidad como fenómeno didáctico, para así poderlo estudiar, explicar y simular.

Para lograr esto, hace un análisis crítico de los primeros diez números de la revista “Recherches en Didactique des Mathématiques”, a fin de establecer el estatus dado a la reproducibilidad, descubriendo que este estatuto era raramente explícito y que cuando lo era, adoptaba una forma esencialmente ideológica.

En el análisis de 23 artículos encuentra 20 trabajos de naturaleza experimental, 5 de ellos concernientes a experimentos dentro de clase y 14 concernientes a experimentos fuera de clase (test, entrevistas individuales, situaciones de interacción...). El artículo restante se puede considerar mixto.

Ante el predominio del tipo de investigaciones fuera de clase, pone atención a las razones que se dan para justificar las elecciones metodológicas e identifica:

- Con respecto a las entrevistas: que eliminan la complejidad del sistema didáctico; que permiten centrarse en las relaciones sujeto-situación problema; que es posible un análisis fino y preciso de los procedimientos del sujeto, así como de su evolución.
- Con respecto a los test: por la economía de la investigación; permiten tratar simultáneamente un gran número de variables.

Con base en estos argumentos y dicho en forma general, estos dos métodos (las entrevistas y la aplicación de test) permiten, elaborar, con mayor conocimiento de causa, una secuencia didáctica experimental y en particular definir mejor las hipótesis que guiarán la observación.

¿Pero qué relación existe entre los métodos elegidos y la noción de reproducibilidad que se maneja explícita o implícitamente en esos escritos?

En los trabajos vinculados con experimentos fuera de clase:

No se emplea el término reproducibilidad, se emplea la expresión “regularidades” y esto en relación con su sentido, precariedad y dominio de validez; para poner de manifiesto tendencias y formular hipótesis explicativas; así como prevención contra generalizaciones e intentos de aplicaciones pedagógicas inmediatas.

Afirma (Artigue,1984) como puede verse, la “reproducibilidad“ no es englobada en la reproducibilidad de una experiencia precisa. La significación de los resultados es reducida a su validez estadística. Los límites percibidos en estas investigaciones se deben entre otros factores a la distancia que las separa de la didáctica escolar.

En los trabajos vinculados a experimentaciones en clase se ponen de manifiesto las dificultades de estructurar métodos eficientes de observación y con ello se soslaya

la reproducibilidad como un propósito explícito de estudio, ya que: algunos procesos individuales pueden no aparecer, a causa de algunas variables difíciles de controlar (papel del maestro, de los líderes, contaminación); algunos tanteos pueden pasar desapercibidos; la dificultad de análisis de los fenómenos observados; la multiplicidad de variables de que dependen dichos fenómenos

Es claro el reconocimiento por parte de los investigadores de las dificultades que entraña la experimentación en clase y algunos de ellos señalan la necesidad de desarrollar una aproximación científica de la experimentación en clase, como es el caso de Vergnaud (1981), que algunos años antes reflexiona planteándose la pregunta:

¿qué precauciones deben tomarse para realizar experimentaciones didácticas en clase, en una experimentación propiamente científica? y subraya los siguientes aspectos

- claridad de los objetivos contemplados y los efectos esperados.
- la fiabilidad de las observaciones realizadas,
- la repetición de hechos didácticos interesantes

En este contexto, la reproducibilidad se asocia con la identificación de regularidad de conductas, particularmente al nivel de distribución de conductas. Las variaciones adquieren sentido en relación con estas regularidades.

No es suficiente observar que se repitan conductas, errores, dificultades y efectos didácticos; sino ir más allá y ver si es posible describir los desarrollos posibles de una serie de lecciones de manera que ciertas regularidades sean repetibles e interpretables.

No se busca que todo ocurra de la misma manera, se sabe que eso es imposible.

Según Artigue, Brousseau (1982) es el primero en enfrentarse al problema de la reproducibilidad e identifica dos tipos de la misma: una externa, de orden dinámico, que se ubica en el nivel de las historias de clase (actividades, procedimientos etc.) y otra interna, que se ubica en el nivel de la comprensión de los significados. Brousseau intenta determinar en qué nivel se sitúa la reproducción de un proceso de construcción de números decimales realizado en 8 clases diferentes a lo largo de 3 años.

Afirma Brousseau: la hipótesis de reproducción de un mismo proceso debe pensarse principalmente en contra de:

- un mejoramiento al menos local,
- un envejecimiento de las situaciones didácticas,

ya que estos procesos llevan a “cerrar” cada vez más las preguntas, disminuyendo el logro del estudiante al enfrentar preguntas más “abiertas”. Aun reconociendo estos hechos no nos dice cómo se resuelve el problema de la reproducibilidad.

La reproducibilidad es un problema que involucra a la dinámica del grupo cuando enfrenta una situación de aprendizaje, pero es extraordinariamente complejo retener todos los factores que son el tejido de esa dinámica a partir de observaciones individuales.

Con base en las concepciones de la noción de reproducibilidad detectadas en esos escritos didácticos, Artigue plantea un primer modelo que denomina ingenuo en donde reconoce en las situaciones reproducibles las características siguientes:

A lo largo de experimentaciones repetidas,

- Los mismos procedimientos deben aparecer (de manera que ellos no sean marginales) con jerarquías comparables.

- La historia de la clase debe poder ser descrita por un pequeño número de órbitas¹.
- Las regularidades observadas a nivel de procedimientos y de órbitas deben ser esencialmente los hechos de regularidades individuales. Ellas no deben estar sujetas a las acciones de centración y desbloqueo (centración y desbloqueo son actividades atribuidas al profesor a través de las cuales éste interviene para regresar al problema a los estudiantes que se han dispersado del mismo y desbloqueo cuando el profesor ayuda a los estudiantes a salvar dificultades que les impiden continuar trabajando el problema) producidas por el instructor.
- Las ligeras perturbaciones que no puedan evitarse y se produzcan de una clase a la otra no deben tener tendencia a amplificarse.

El modelo ingenuo presupone que las regularidades colectivas son la suma de las regularidades individuales o bien que las regularidades individuales finalmente se transforman en regularidades colectivas.

Con base en el modelo expuesto arriba, se tomarán las regularidades en las trayectorias individuales como los elementos que garantizan estabilidad y reproducibilidad suficiente para poderse compartir. Colocándonos en ese modelo se considerarán las situaciones que mejor se adapten a las características del mismo, es decir a situaciones donde:

- el alumno confronta individualmente la resolución de un problema preciso,
- el alumno puede controlar por sí mismo los resultados de su actividad.

¹ Una trayectoria estará constituida por todo aquello que hace un alumno en el proceso de resolver o enfrentar una actividad en clase. Pero esta noción de trayectoria es demasiado amplia y compleja para identificar en ella de manera razonable regularidades cognitivas. Es por ello que se utiliza preferentemente la noción de órbita, la cual permite operar los reagrupamientos didácticamente significativos. Una órbita sería una sucesión finita de estados del sujeto. Dicho de otra manera es una discretización de la trayectoria. El conjunto de las órbitas da la historia de clase.

El método seguido por Artigue para establecer la reproducibilidad consistió en matematizar el modelo ingenuo. Para ello se definen conceptos como los de trayectorias, historias individuales, historias de clase, órbitas, campo ponderado, la noción de vecindad sobre el conjunto de historias de clase.

El método empleado le permitirá, auxiliándose del modelo matemático (Construyendo sobre una población de estudiantes y un conjunto de órbitas, una distribución de frecuencias sobre el conjunto de órbitas; construye unos objetos denominados historias de clase sobre las que determina una ley de probabilidad. Sobre dicho espacio define la noción de vecindad de historias de clase) pasar de las regularidades individuales (trayectorias, historias individuales) a las regularidades colectivas, historia de clase.

Sobre la marcha se da cuenta de que la reproducibilidad no está asociada, en el modelo implícito que se trata de teorizar, a la capacidad de reproducción de una historia determinada, sino más bien a la posibilidad de asegurar que todas las historias posibles están próximas a ella.

A pesar de que la observación anterior surge en el contexto del modelo ingenuo cuya intención es establecer comportamientos generales como una resultante de los comportamientos particulares, podemos hallar en dicha observación elementos de sumo interés. Descarta de hecho, la idea de reducir la reproducibilidad al intento de reproducir una misma historia de clase, como si esta fuera única, sino que por el contrario, señala que las historias de clase son múltiples y que se puede hablar de reproducibilidad si dichas historias no se dispersan, es decir si se mantienen en un determinado rango de cercanía. Este hecho muestra que no es posible buscar una sola vía o uniformidad en los procesos de aprendizaje.

Artigue concluye con relación al modelo ingenuo:

“El modelaje matemático y un estudio probabilístico elemental me permitieron demostrar que el campo de validez de un modelo como ese era muy reducido en

términos teóricos, aun si se satisface con una reproducibilidad muy aproximada como la que definí a partir de la noción de vecindad de historias de clase”.

En otros términos se probó que el tamaño de la muestra de la clase era demasiado pequeño para permitir que las regularidades individuales pasaran a nivel colectivo.

Era indispensable estudiar un modelo donde se tomen en cuenta las interacciones entre los alumnos, para ello se estudió de manera precisa la dinámica de una situación experimentada en una investigación realizada anteriormente por Artigue y Robinet, (1982) sobre las concepciones de círculo en los niños de la escuela elemental. Ella se había llevado a cabo en dos clases con una observación muy detallada, y con un importante grupo de datos recogidos en diferentes pasos de la investigación (análisis epistemológico, análisis de los objetos de enseñanza, pre-experimentación, experimentación, entrevistas individuales).

Primero se construyó un modelo cualitativo de la dinámica de la situación poniendo en evidencia:

- las regularidades individuales que gobiernan los comportamientos de los alumnos,
- Los fenómenos de interacción en el sentido de la clase.

Se trató de llevar lo más lejos posible el estudio del modelo construido, para ello se le asoció una familia de modelos cuantitativos susceptibles de simulación en la computadora.

Con base en este análisis se mostró para esta situación precisa

- que no se podía buscar la reproducibilidad en una historia particular, lo mismo que en incluir una aproximación sesgada de vecindades de historias.

El problema está en determinar a qué nivel se sitúan las regularidades de la dinámica. Son dos los fenómenos que resultan esenciales.

- la fuerte probabilidad de estructuras (órbitas) en posición dominante cuando la difusión (tanto en los equipos como en el grupo) global tiene un coeficiente (una alta probabilidad) elevado,
- la fuerte probabilidad de existencia de bloqueos (que los estudiantes quedan en una órbita y no pueden pasar a otra) que la simple difusión local o una difusión global con un débil coeficiente (con una baja probabilidad) no permite superar en un tiempo compatible con las exigencias escolares.

En el contexto de la situación que se estudió, se tenía una fuerte probabilidad de estructuras con posición dominante, producto de una difusión global espontánea como en el primer grupo o forzada (con la intervención del profesor) como en el segundo grupo.

El desarrollo de una situación en un grupo estará determinado por la estructura de la situación (las posibles vías de solución - trayectorias -, las distintas órbitas que se pueden producir, los elementos de la situación que pueden provocar bloqueos en los estudiantes), la difusión local y grupal que puede ser espontánea o provocada por el profesor.

Es el profesor quien conoce el propósito didáctico de la situación, las vías de solución y los posibles obstáculos para el estudiante así como el control del tiempo escolar.

Entonces en esa dinámica, el maestro juega un papel esencial. Él es el actor decisivo de la reproducibilidad.

Artigue concluye:

“la reproducibilidad está en buscar en las estructuras de historias y no en las historias mismas y dentro de esa reproducibilidad estructural, el profesor tiene un papel activo a desarrollar” (1986, p.55).

Las estructuras de historias hacen referencia a las distintas órbitas que se pueden generar en una situación dada, la reproducibilidad se deberá buscar en la manera como se producen esas órbitas y no en la producción de historias iguales. Afirma Artigue que el papel del profesor en la producción de esas órbitas es fundamental

Artigue reconoce que los resultados obtenidos son limitados, por reducirse a estudiar el problema de la reproducibilidad bajo un ángulo dinámico para una situación y no para un proceso (1986, p. 55)

Artigue en 1989, en el artículo titulado Ingeniería Didáctica, al retomar el tema de la reproducibilidad de situaciones didácticas escribe:

...me parece razonable formular en la actualidad la siguiente hipótesis con respecto a la noción de reproducibilidad: conviene pensar las relaciones entre reproducibilidad interna y reproducibilidad externa en términos de una relación de incertidumbre. En otras palabras, una exigencia fuerte de reproducibilidad externa no puede satisfacerse sino sacrificando otro tanto la reproducibilidad interna.

En el año de 1984 en que está tesis se concluyó, la ingeniería ya se había constituido como instrumento metodológico para la realización de investigaciones en el aula, hecho que permitió a los investigadores, desarrollar experimentos de reproducción de ingenierías que se habían diseñado con fines de investigación o bien, para fines educativos en la introducción de nociones específicas.

A continuación comentaremos algunas de estas experiencias, con el fin de desprender información que sea relevante a nuestro propósito de investigación y para señalar el nuevo rumbo que ha tomado las investigaciones de reproducibilidad; así como señalar si los hubiera, los hallazgos más recientes en este campo

Otros estudios relacionados con la reproducibilidad

Grenier (1989), reporta una experiencia didáctica, con estudiantes 11 a 15 años que tuvo como propósito, la elaboración de una secuencia de situaciones problema, capaz de hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos sobre la simetría axial, antes de la enseñanza formal de la misma.

La investigación se desarrolla en dos planos: desde la perspectiva del profesor, consiste en cumplir con los objetivos de aprendizaje que está obligado a lograr en el marco de un curso de sexto grado, en el sistema escolar francés. Desde la perspectiva del investigador, consiste en hacer funcionar la teoría de situaciones didácticas, a fin de proporcionar elementos de estudio para la misma.

La metodología consistió en aplicar la secuencia didáctica, en un grupo normal de sexto grado con 28 estudiantes de edades entre los once y doce años. El análisis de su desarrollo mostró desfase entre los objetivos de aprendizaje previstos y los realmente obtenidos.

En un segundo tiempo, se modificaron las variables y restricciones sobre la secuencia, en términos de lo que los investigadores habían determinado que había provocado tal desfase, sin embargo se conservaron los mismos objetivos de aprendizaje.

El proceso modificado, fue desarrollado al año siguiente en el mismo colegio con veinticuatro nuevos alumnos de sexto grado, con características equivalentes a los de la primera experiencia.

La comparación del desarrollo de los dos procesos, permitió analizar las consecuencias de las modificaciones hechas. Pero también apareció que el control de las situaciones no era suficiente para asegurar la reproducibilidad del proceso, ya que ciertos desfases son producto de decisiones del profesor como respuesta a situaciones reales de la clase.

La organización del trabajo, sería en pequeños grupos; al concluir esa fase de trabajo, pasarían representantes de cada grupo a exponer sus resultados. El profesor sería un observador en la primera etapa, posteriormente sería el coordinador del debate y finalmente desarrollaría la actividad de institucionalización.

Las modificaciones a las variables de la secuencia, fueron debidas a problemas mostradas por algunos estudiantes en relación con la interpretación de instrucciones, como es el caso de una que indicaba, “construcción precisa”. Algunos alumnos asociaban esto con la necesidad de hacer medidas, <<esta interpretación en términos de medidas, conducía a un bloqueo de la situación, y por ende a la necesidad de usar una regla graduada. Se cambia la instrucción, pero obliga al profesor a explicar el sentido de la tarea a realizar>>.

Un aspecto importante a considerar en esta investigación, radica en las actividades colectivas, específicamente de institucionalización. Situación, etapa, momento, fase, acción, proceso, esas diferentes aproximaciones de la institucionalización están en común con el objetivo (del profesor) de fijar el saber en juego de manera convencional. La institucionalización comporta dos aspectos importantes, la descontextualización y la formulación (reformulación) de los conocimientos puestos en juego en los problemas op.cit., p.44.

El análisis de las fases colectivas para las dos experiencias llevó a los investigadores a hacerse las siguientes preguntas: ¿se puede caracterizar lo que se destaca de la institucionalización en el desarrollo del proceso? Y ¿cuáles son los medios de que dispone el profesor para generar las fases colectivas y cuál es el papel que le toca jugar en esa fase?

En relación con este asunto comenta Grenier: En caso de que después del trabajo en equipo, los objetivos propuestos no se cumplieran, el profesor deberá en la fase de trabajo colectivo, atenerse a los objetivos aprendizaje previstos y luego tratar el

contenido matemático acordado, o bien aceptar los cambios de contenido introducidos por los alumnos y ponerlos a debate.

Sobre esas dos decisiones están las consecuencias que marcan diferencias grandes sobre los aprendizajes.

En el primer caso, el profesor deberá hacer emerger a partir del debate de los estudiantes, los conocimientos surgidos del trabajo en los equipos. En el otro caso los conocimientos puestos a debate, surgidos del trabajo de los equipos pueden mantenerse muy alejados de los conocimientos que estaban planificados.

A partir de las actividades colectivas observadas, Grenier reporta las consecuencias de esas decisiones.

a) La decisión de tratar el conocimiento previsto; el profesor da la solución, apoyándose en las soluciones aisladas de algunos estudiantes.

b) La ignorancia de ciertos procedimientos correctos; basado en la decisión de mantenerse en el marco de los objetivos inmediatos, hace rechazar o no tomar en cuenta procedimientos que mostrarían ser pertinentes pero a más largo plazo.

c) La toma en cuenta de procedimientos marcadamente desiguales. Uno de los propósitos de la fase de equilibrio o de consenso, es el de homogenizar los conocimientos puestos en escena por los estudiantes. El profesor deberá hacer una elección sobre aquellos aspectos que resultan esenciales para lograr el aprendizaje propuesto. La investigadora nos indica que la elección de lo que es esencial resulta una actividad a realizar.

Finalmente Grenier, señala, que dos herramientas importantes en el desarrollo de la investigación fueron, el tomar en cuenta las concepciones de los estudiantes durante el proceso. El estudio de las variables de comando de las situaciones adidácticas. Pero en relación con el funcionamiento del proceso señala dos cosas que han quedado abiertas:

i) en relación con las situaciones adidácticas: ¿Cómo asegurar una devolución del problema en los estudiantes, que preserve el sentido de los aprendizajes en juego sin hacer a la situación caduca?

ii) en relación con la gestión de las fases colectivas (consenso, institucionalización) ¿Qué herramientas desarrollar para un control de los acontecimientos que ahí se producen?

Las elecciones (concientes o no) y decisiones del profesor al respecto son sustentadas por las representaciones que el profesor tiene de sus alumnos, pero también sobre el aprendizaje y el saber. Bajo una preocupación de reproducibilidad de situaciones didácticas no se puede hacer economía del estudio del polo “profesor” del sistema didáctico (Op. Cit., p.55).

Esta investigación muestra la dificultad de lograr un efecto didáctico estable cuando se lleva a una situación didáctica a dos escenarios. En esta experiencia emergen fenómenos en las etapas de institucionalización cuando el profesor deberá tomar decisiones sobre el curso de la discusión en términos de la problemática que plantean los estudiantes en su discusión y los objetivos planteados por el diseño de la situación. Nos permite observar el papel del profesor al momento de tomar decisiones con miras al cumplimiento del objetivo de la situación. Se plantea el fenómeno de las representaciones del profesor en relación a los alumnos, el saber y el aprendizaje. Este hecho constituye un elemento no considerado en el trabajo de Artigue.

En el marco de una investigación sobre reproducibilidad, desarrollada por Perrin-Glorian (1993), se muestra la necesidad de considerar el polo del “profesor” como un elemento fundamental a considerar en un estudio de esta naturaleza.

Ella nos explica la experiencia desarrollada a lo largo de un poco más de ocho años, orientada a mejorar la enseñanza en alumnos de un medio social bajo o poco favorecido. Para ello se planteó la posibilidad de desarrollar un estudio de

condiciones de reproducibilidad de una ingeniería didáctica elaborada con anterioridad por otra investigadora.

Esta ingeniería didáctica, sobre los decimales y las áreas, ya había sido experimentada en otras clases, y esto permitiría probar la estabilidad de la misma. Ello requería un esfuerzo de adaptación de la ingeniería, asunto que consideraron que sería mas o menos fácil subsanar, dada la diferencia en el tipo de alumnos.

El hecho patente de grandes diferencias y distorsiones entre los resultados obtenidos y los esperados, orilló a los investigadores a un cambio de problemática, que consistía, en tomar esas distorsiones como objeto de estudio y por otra parte a encontrar las razones por las cuales, los profesores hacían otra cosa que la acordada con los investigadores. Por otro lado, también pretendían analizar, de una manera más precisa, las dificultades de los alumnos. Todo esto con miras a ampliar el campo de cuestionamientos.

Uno de los problemas que le interesaba explorar, era el encontrar las variables intermediarias posibles, orientadas a explicar las diferencias de aprendizaje a partir de situaciones aparentemente idénticas.

Perrin-Glorian indica que este estudio le permitió analizar la imposibilidad de trasladar ingenierías didácticas, diseñadas para clases ordinarias, y por tanto estables, a clases que cuentan más restricciones y fenómenos imbricados que conducen frecuentemente a mayores negociaciones como es el caso de las clases del medio social bajo o poco favorecido (Margolinas y Perrin-Glorian, 1997).

En esta investigación se muestra el fracaso de llevar una ingeniería didáctica diseñada para un escenario a otro que era muy distinto. A pesar de que se hicieron las adaptaciones que se consideraron pertinentes y se trabajó estrechamente con los profesores de grupo, sobre la marcha se mostró las enormes distorsiones que se producían al aplicar las actividades en el aula, debidas a las interpretaciones que hacían los profesores de las actividades y a las características de los grupos. Tan

fuertes fueron las variaciones que se renunció al planteamiento original de la investigación trasladando el foco de atención a las diferencias de aprendizaje. Esta investigación nos muestra que las ingenierías no son instrumentos universales. Este hecho es relevante en términos de reproducibilidad ya que nos permite poner atención a aspectos de estructura de las situaciones, los trabajos de adaptación para los escenarios y el papel del profesor en la actividad de reproducir ingenierías didácticas.

En 1992, Arsac, Balacheff, y Mante, reportan una investigación en la que con el fin de dar un carácter científico al problema de la reproducibilidad de situaciones didácticas, se plantean la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de fenómenos podemos esperar se reproduzcan cuando la misma situación de clase es implementada por dos profesores distintos en dos diferentes clases?

Con este fin, diseñan un experimento que consiste en plantearle un problema a varios grupos de estudiantes. En el diseño del problema participan los profesores que coordinaran la actividad con el grupo. El experimento debió desarrollarse en dos etapas: en la primera participaron profesores que intervinieron en el diseño del problema. Debido a la fuerte intervención de los profesores en el desarrollo de la actividad, se decidió realizar una segunda etapa repitiendo el experimento pero con profesores ajenos a la elaboración del diseño del problema.

El principal requerimiento para el profesor es que él no puede intervenir en aspectos matemáticos. Él dirigirá la discusión del problema en el grupo y finalmente elaboraría un reporte de lo acontecido.

A partir de la experiencia surgió el problema relacionado con la comunicación de un escenario de una situación didáctica a un profesor y por lo tanto a la descripción de dicho escenario, caracterizándolo con los siguientes elementos:

Propósito didáctico de la situación:

Estructura de la situación

Actividades del estudiante

Actividades del profesor

Tiempo asignado

Organización social de la clase

-Contenido de la situación, que incluye:

Contenido matemático

naturaleza de las actividades

claves de construcción de significados.

Hay que establecer, ligas, interacciones y compatibilidad entre contenido y escenario

A partir del análisis de estas puestas en escena sabemos que, los profesores en este estudio, durante el período de debate, toman varias decisiones opuestas al escenario planeado.

¿Cuál fue la causa de dichas decisiones?

La gestión del tiempo y, la responsabilidad epistemológica del profesor [El profesor, experimenta la necesidad de un cierre aceptable]. Ese hecho provoca una tensión entre esa necesidad y el contrato de no intervención. Esa tensión es el indicativo de lo que Balacheff (1988) denomina responsabilidad epistemológica del profesor].

Esto se hace evidente cuando se analiza junto con el profesor la razón de sus decisiones. ¿Por qué elimina, por qué agrega, por qué no toma en cuenta, por qué privilegia?

Hay dos elementos que no dependen de la administración del tiempo, ni de la responsabilidad epistemológica del profesor: 1) La relación personal del profesor con las matemáticas y con el contenido matemático específico; 2) Las ideas acerca de lo que es aprender y enseñar matemáticas.

Como podemos observar, estas conclusiones giran nuevamente alrededor de las concepciones del profesor.

Es importante notar el deslizamiento de la atención a la posición del profesor, cuando se hacen consideraciones relacionadas con la reproducibilidad. Artigue, llama la atención a ello en su artículo de (1995), cuando cita a (Arsac, 1989), que en su investigación puso en evidencia la desproporción, entre el carácter aparentemente insignificante de algunas intervenciones del profesor y sus efectos reales. Arsac señala la necesidad de construir alguna otra categoría paralela a la de variable didáctica, como podría ser la de escogencia didáctica la cual permita hacer consideraciones sobre las posibles decisiones que toma el profesor ante determinadas situaciones en el curso de las interacciones con los estudiantes y que motiva un cambio cognitivo en el estudiante y que cambia además el sentido y la función del conocimiento.

Arsac para identificar las causas de la elección didáctica del profesor en el marco de la epistemología del profesor en la que se considera, 1) la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas, 2) su concepción de la enseñanza, y 3) su concepción del aprendizaje, que constituyen categorías establecidas por Robert y Robinet (1989) en su definición de representaciones metacognitivas. Estas investigadoras parten de la hipótesis de que la trasmisión está condicionada por las conductas de los profesores en clase. Además agregan otra más, que se refiere a que debe existir una cierta compatibilidad entre los investigadores que dieron origen a una ingeniería y los profesores que van a experimentarla o tratar de utilizarla, para que haya un buen funcionamiento de la transmisión didáctica. Ellas hacen uso de los trabajos de los psicólogos sociales quienes han mostrado que en efecto, “las representaciones sociales, vistas como un sistema de interpretación

que rige nuestra relación con el mundo y con los otros, orientan y organizan las conductas y las comunicaciones sociales” (Jodelet, 1989).

Artigue, reconoce la importancia de estos trabajos, pero indica que sólo están abriendo un tema de investigación, que plantea preguntas y dificultades metodológicas delicadas, pero que tiene de beneficio, la atención que se le está brindando al profesor.

Un comentario sobre las nociones de reproducibilidad interna y externa

Dada la naturaleza dual de la ingeniería didáctica y la gran cercanía que esta práctica de investigación provoca con el profesor y con el aula, crece la tentación de transformar diseños de investigación en diseños para la clase. Tal tentación la experimentan tanto investigadores impacientes con probar en condiciones reales de clase, acciones desarrolladas bajo un control inusual en una clase estándar como por otra parte, profesores cercanos a los investigadores y a las investigaciones mismas, que demandan dicho traslado. Esta demanda de producir objetos didácticos producto de la investigación para ser llevados posteriormente al aula en condiciones reales de clase es una necesidad real, pero que como se ha visto anteriormente, introduce una problemática didáctica muy importante y que comentaremos brevemente para finalizar esta parte de nuestro trabajo.

El diseñador de una situación tiene como objetivo su reproducibilidad interna, es decir una reproducibilidad la cual está situada a nivel de los significados. A pesar de eso, la descripción que generalmente se da de los productos de ingeniería, enfatizan sobre todo las características externas de la reproducibilidad: comportamientos individuales o colectivos, su evolución en el tiempo, que se observa en la superficie, como si la sola reproducibilidad externa garantizará la interna (Artigue, 1991).

Reproducibilidad externa e interna, son elementos que no pueden discurrir por separado. Queda un asunto de primordial importancia, buscar los mecanismos de

reproducibilidad interna haciendo uso de todos los factores que constituyen la reproducibilidad externa.

Un elemento más sobre la reproducibilidad a considerar

La Matemática Educativa ha ido evolucionando en dirección de constituirse como una disciplina científica, en la actualidad se encuentra en proceso de consolidación y por tanto de definición, tanto al nivel de sus métodos de investigación como al examen de la naturaleza de sus hallazgos. El fenómeno de la reproducibilidad adquiere un papel relevante en este aspecto, como así nos lo hace ver Johsua, (1996), en la discusión sobre lo que es un resultado de investigación en el campo de la Matemática Educativa (o Didáctica de las Matemáticas para algunos, o Educación Matemática para otros), al señalar tres aspectos que le parecen básicos para caracterizar lo que es un resultado en nuestra disciplina.

1. Que se apoye en argumentos empíricos: que haya datos empíricos producto de la observación, el análisis y la experimentación que sustenten las afirmaciones.
2. La segunda condición es que la didáctica pase de la identificación de fenómenos didácticos, a la delimitación de condiciones de aparición de esos fenómenos. Afirma que la teoría gana en potencia cuando es capaz de distinguir los fenómenos recurrentes de aquellos que son contingentes, de distinguir las formas de aparición de fenómenos recurrentes y las condiciones de producción de unos y otros.
3. La tercera y quizás la más importante de todas es la de la producción de fenómenos. Eso conduce a pasar de datos de observación a datos experimentales en sentido estricto, sujetos a experimentación. Lo mismo si las limitaciones aparecen al principio que en la reproducción de esos fenómenos, al menos se deberá exhibir la posibilidad de dominio de la evolución del fenómeno, hecho que está ligado a un cierto rango de predicción.

Johsua se pregunta si la Didáctica de las Matemáticas responde a esas tres características; y señala que de ellas, la más problemática es la de la reproducibilidad, sabemos, continúa diciendo, que después de los trabajos de Artigue, la reproducibilidad en sentido estricto no se puede asegurar en didáctica. Uno puede ganar en predicción reagrupando las historias de clase en <<vecindades de historias>> y en distinguir trayectorias y órbitas propias de cada situación didáctica. Y afirma, esto constituye una limitante muy drástica para la reproducibilidad

Ahora sabemos que la reproducibilidad, no depende de elementos internos del diseño únicamente, sino que debe de considerar factores ajenos a él, y que para poder obtener cierta estabilidad en los resultados, como es lo que se necesita con relación al fenómeno de la reproducibilidad, deberemos atender a esos factores para incorporarlos.

Elementos de filiación y ruptura

“Asumimos como problemática de estudio para la Matemática Educativa, el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza. Dicha introducción del saber matemático al sistema didáctico, obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan también a las relaciones entre estudiantes y profesor. Este proceso de incorporación de conocimientos y prácticas altamente especializados al sistema didáctico, plantea una serie de problemas teóricos y prácticos no triviales, que precisan para su estudio de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados a fin de entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas de los actores educativos” (Farfán, 2002).

El profesor es sin lugar a dudas uno de los principales actores educativos a los que alude Farfán. La asunción de la problemática didáctica a abordar por una

comunidad es un asunto de tradición y de escuela. Existen diversa tradiciones y escuelas dentro de un mismo centro de investigación. A decir de Boero et al. (1996) una manera de clasificar los diferentes enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas están estrechamente ligadas con las posibles implicaciones que tenga esta investigación en la profesionalización de los maestros de matemáticas tanto en activo como en formación.

Con base a esas ligas entre investigación y profesores, Boero considera los siguientes tipos de investigación: Generadoras de modelos de innovación (orientados a la enseñanza de objetos específicos, o al desarrollo de ciertas habilidades. Metodologías, currículas, proyectos etc. En muchos casos los profesores participan como investigadores o son modelos de experimentos). Generadoras de Información cuantitativa (Incluyen investigaciones comparativas y cuantitativas en relación a dificultades específicas de aprendizaje de las matemáticas y las posibles correlaciones con factores que influyen tales dificultades. Comúnmente esas investigaciones requieren aparatos estadísticos sofisticados y son realizadas por investigadores que no son profesores de matemáticas). Generadoras de información cualitativa (Recoge producciones de estudiantes, entrevistas, grabaciones de interacciones profesores y estudiantes, así como de grupos de discusión. Frecuentemente los profesores participan como observadores en dichas investigaciones). Generadoras de teoría (Tienen por lo general enfoques sistémicos, esas investigaciones están orientadas a la detección e interpretación de fenómenos didácticos, a análisis históricos o epistemológicos. En muchos casos el profesor juega un papel marginal en la producción de esos resultados).

Retomar una investigación del fenómeno de reproducibilidad debe tener una clara justificación y ésta puede originarse por la necesidad de acercar los productos de la investigación a la escuela a pesar de que los problemas y la misma investigación nace y se desarrolla ahí. Es un hecho que se espera que los productos de la investigación en Matemática Educativa traducidos en reportes en revistas de

investigación especializadas, tengan más allá de los especialistas, como principales usuarios a los profesores en activo y aquellas personas que se encuentran formándose como profesores de matemáticas.

¿Cómo deberán ser comunicados estos productos de investigación?, ¿Cómo podrán ser tomados en cuenta o utilizados por el profesor en su práctica docente? Son preguntas que pueden ser contestadas desde la categoría teórica de la reproducibilidad.

¿Cómo garantizar estabilidad en los efectos didácticos, desde una actividad de clase, el uso de un texto, una ingeniería didáctica, una propuesta curricular, así como la validez de un hallazgo de investigación surgido de un experimento didáctico?

El término estabilidad de efectos didácticos se presenta frágil cuando se observa el recorrido que hemos hecho en las investigaciones sobre reproducibilidad. Artigue realiza simulaciones sobre posibles órbitas en una situación didáctica concreta, pero su modelo le impone restricciones sobre las interacciones entre estudiantes y el profesor, sin embargo, esto no le impide darse cuenta del papel del profesor para el logro didáctico del grupo y esto lo refuerza el hecho de que conoce los resultados concretos de las puestas en escena de la situación.

Grenier, Perrin-Glorian y Arsac, ponen en escena el papel medular que juega el profesor para la degradación del propósito didáctico de la situación didáctica. Investigadores y profesores realizan largas sesiones de trabajo para llegar a acuerdos sobre la manera de trabajar con los estudiantes y cuando se realiza el trabajo en el aula se producen efectos contrarios a lo planeado, sin duda la acción del profesor está determinada por factores extraordinariamente difíciles de controlar.

Cuando el profesor trabaja en el aula con sus estudiantes, independientemente de la modalidad de trabajo que adopte, ya sea dirigiendo el trabajo del grupo y

realizando la actividad de difusor del sentido de la actividad o desarrollando una propuesta de actividad que les devuelva a los estudiantes la responsabilidad de efectuar la difusión del sentido de la actividad (como sería el caso de una situación didáctica) el profesor se erige como el responsable de la construcción de conocimiento del alumno, así se comporta y así entiende su actividad de profesor. Si el grupo se bloquea y no puede avanzar el profesor interviene con fin de que se reproduzca el propósito didáctico de la actividad.

Artigue nos muestra a partir de la modelación de una experiencia con una situación didáctica determinada, que, aunque su modelo toma en cuenta un número limitado de posibilidades de interacción y difusión, pero susceptible de ser simulado cientos de veces, esto le permite obtener resultados substanciales en términos del papel del profesor en la reproducibilidad. Sin embargo las interacciones de los estudiantes con el profesor con miras a la difusión del propósito didáctico se muestran muy complejas, como se ha podido ver a partir de las investigaciones sobre reproducibilidad posteriores al trabajo de Artigue. Esto coloca al profesor en el centro de la discusión sobre la reproducibilidad.

Son dos los elementos en los que nos apoyaremos para efectuar nuestra investigación y que al mismo tiempo esperamos profundizar en ellos: reconocer la importancia del papel del profesor cuando se intenta reproducir situaciones didácticas y en el reconocimiento de que llevar una situación didáctica a un sistema didáctico ajeno al que nació, constituye una intervención sobre el nuevo sistema y que sólo podremos intervenir en él con legitimidad bajo un ordenado proceso comunicación y acuerdos con el profesor responsable que permitan hacer las adaptaciones pertinentes de la situación a ese nuevo sistema.

Formulación del problema

A partir de la puesta en escena de la ingeniería didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x ” en distintos escenarios tanto el diseñador como otros profesores, con la

finalidad de reproducir los propósitos didácticos de la ingeniería; nos proponemos responder a las siguientes preguntas:

¿Qué tipo de fenómenos podemos esperar aparezcan cuando se repite una situación didáctica, diseñada con un propósito específico, aplicada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios y con la intención de lograr la reproducibilidad de la misma? ¿cuáles de estos fenómenos apuntan a lograr la reproducibilidad y cuáles no? ¿cuáles eran predecibles y cuáles no?

Sabemos que repetir no es sinónimo de reproducibilidad. Nuestra revisión de los distintos estudios relacionados con la reproducibilidad, nos muestran las dificultades que se enfrentan cuando se intenta reproducir. A partir de esos estudios, damos por conocidos varios fenómenos que estarán presentes como es el caso de las dispersiones y bloqueos que experimenten los estudiantes al trabajar el contenido de la situación, así como las interpretaciones que sobre el contenido de la ingeniería elabore el profesor y que obstaculizarán nuestro propósito. Con toda seguridad surgirán otros nuevos fenómenos que estamos interesados en detectar.

Propósitos de la investigación

Artigue (1986, p. 55), reconoce que en su investigación los resultados obtenidos se restringen al análisis de la reproducibilidad de una única situación, aún considerando los aspectos dinámicos que esto comporta, no le permite analizar el fenómeno como un proceso. Es decir pudo estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica muy ampliamente, pero esto no le permite hablar del “proceso” de reproducibilidad, es decir de las condiciones generales que permiten la reproducción de un objeto didáctico.

Nuestra investigación busca la identificación de los fenómenos que surjan cuando se repite una la situación didáctica, para desprender de esa experiencia los elementos generales que permitan el establecimiento de una clara definición de los

fenómenos que emergen para utilizarlos en la construcción de un *posible modelo de reproducibilidad* que permita aclarar en que consiste el “proceso” de la reproducibilidad; es decir identificar aquellos aspectos relevantes que caractericen a los actores, los elementos dinámicos relevantes del proceso que resulten determinantes y que no sean exclusivos de la situación, así como el esclarecimiento del papel jugado por las acciones individuales y colectivas constitutivas de las historias de clase. Todo esto con el propósito de que dicho modelo se constituya en un factor de predicción* sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas y de otros instrumentos didácticos.

Objetivos específicos

Para lograr nuestro propósito, buscaremos observar y registrar la información referente al funcionamiento de las distintas componentes del sistema didáctico. La determinación de ese cuerpo de componentes, sus interrelaciones, los procesos que se ponen en marcha, de los cuales forman parte los objetivos específicos que pretendemos lograr y que a continuación exponemos.

- Determinar los factores de reproducibilidad interna; que están relacionadas directamente con la construcción del sentido y el aprendizaje.
 - Determinar la devolución de las distintas situaciones didácticas de la situación, especificando cómo se produce la apropiación del problema por los estudiantes, así como la caracterización del contrato didáctico que se establece así como su evolución.
 - Determinar el desarrollo de los modelos implícitos de los estudiantes, asociados a sus conocimientos previos así como la construcción de nuevos conocimientos en las distintas etapas de la situación.

* Empleamos este término en un sentido descriptivo, como una manera de hacer uso de elementos que permitan conjeturar determinados resultados a partir del cumplimiento de determinadas condiciones. Por la naturaleza del estudio, no puede asociarse el término al valor que se le daría en Estadística.

- Determinar el efecto que produce en los distintos equipos de trabajo, las actividades de discusión y construcción de acuerdos ya sea entre los propios estudiantes o en su interacción con el profesor.
- Determinar los factores de reproducibilidad externa que están relacionados con elementos externos a los estudiantes y que están orientados a hacer que el estudiante logre el propósito didáctico de la situación;
 - Determinar como influye el instrumento didáctico el desempeño de los estudiantes, tal es el caso del propósito, la estructura de la situación, el carácter de las actividades propuestas a los estudiantes, las intervenciones del profesor, así como el tiempo asignado para trabajarla.
 - Mostrar las producciones o la actividad matemática de los estudiantes. Lo dicho y hecho en el desarrollo de la actividad.
 - Organización de la clase.
- Mostrar de manera precisa el papel del profesor en el desempeño del grupo.
 - Determinación de las modalidades de intervención del profesor en el trabajo de los equipos, así como el establecimiento de los principios metacognitivos que guían dichas intervenciones y que rigen su actividad, específicamente con relación a su visión sobre la situación didáctica, las predicciones que establece sobre el desempeño de los estudiante así como su visión del papel que considera le toca jugar para ayudar a sus estudiantes a alcanzar el logro didáctico de la situación. Descripción amplia del proceso de comunicación del escenario orientada a la apropiación de la situación por parte del profesor.

Diseño y metodología de investigación

Nuestra investigación inicia con el diseño de la ingeniería didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x “. Tal ingeniería se elaboró con el propósito de que los estudiantes construyeran la noción de función exponencial. La situación consta de tres etapas. La situación fue ampliamente validada al ser llevada a escena en enero de 1997, ver anexo A.

En 1998, fue nuevamente puesta en escena, pero ahora apoyados por un grupo de once profesores y fue repetida en igual número de equipos de trabajo. Estas experiencias se encuentra reportadas en (Lezama, 1999).

Los resultados del trabajo de tesis de maestría mostraron algunas pistas para continuar la investigación. Había que buscar una explicación más sólida de los resultados obtenidos, especialmente en lo referente a las intervenciones de los profesores y los contrastantes resultados de los equipos.

Continuamos la investigación con la colaboración de tres profesores egresados de un posgrado en la enseñanza de las matemáticas realizado en la Escuela Normal Superior del Estado de México, les propusimos sendas puestas en escena ya con el propósito explícito de investigar reproducibilidad.

Los tres profesores son ingenieros, estudiaron el posgrado en la Normal Superior del Estado de México. Los tres trabajan en bachillerato y en la Universidad Nacional Autónoma de México, en el área de ciencias sociales e ingeniería.

Con ellos realizamos un largo proceso de familiarización con la ingeniería, de abril a noviembre de 2000. Los trabajos han estado orientados a desarrollar el aspecto de comunicación del escenario, así como a la construcción de lo que hemos denominado, el espacio de intervención del profesor. Este espacio surgió como consecuencia de la argumentación y objetivos de esta investigación y que contempla posibles modificaciones de la situación en términos de los juicios de los

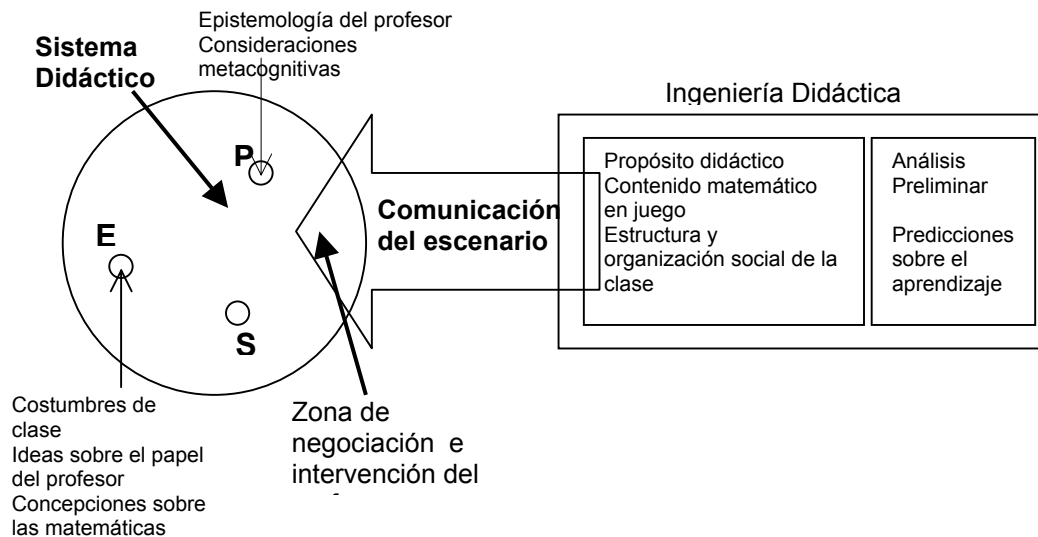
profesores sobre el contenido, la estructuración de las secuencias y las predicciones en términos de sus estudiantes.

Una estrategia de análisis

A partir de los resultados obtenidos de las puestas del 97 y 98 y que se encuentran reportados en (Lezama, 1999) y de los cuales haremos uso en este escrito discutiremos ampliamente la puesta en escena del 2000, que constituye en centro de la actividad experimental de esta tesis.

Cada puesta en escena, fue validada internamente (contrastando los resultados obtenidos con las predicciones hechas sobre la actividad de los estudiantes), como corresponde a una ingeniería didáctica.

Los aspectos de las distintas etapas que sean pertinentes a discutir serán presentados en términos de los tres polos del sistema didáctico, el estudiante, el profesor y el saber en juego.



Para hacer el análisis, se hará uso de las categorías de la teoría de situaciones didácticas; acción, formulación, validación, contrato didáctico, devolución de situaciones didácticas.

Para la comparación de las tres etapas de puesta en escena, se procederá a partir de los procesos de validación de las tres puestas de la ingeniería didáctica; a identificar los factores y fenómenos surgidos, que determinaron el logro didáctico en el caso de haberlo y los que jugaron un papel para impedirlo y esto en términos de:

El estudiante; la devolución y el contrato didáctico, sus costumbres de clase, y sus creencias sobre la matemática, los antecedentes matemáticos.

El profesor; consideraciones epistemológicas, metacognitivas, así como aspectos de comunicación del escenario, desarrollo de la zona de intervención tanto en la preparación de la puesta en escena como en el desarrollo de la situación, previstas o espontáneas.

El saber, las características del saber en juego y los obstáculos matemáticos, a que se enfrentan los estudiantes.

La determinación de esos aspectos para cada puesta en escena, nos permitirá extraer elementos para la elaboración del modelo de reproducibilidad que nos hemos propuesto.

Capítulo II

Un análisis sobre la pertinencia y potencia que aporta a la investigación en didáctica de las matemáticas el análisis de la reproducibilidad

En este capítulo elaboramos un comentario sobre el porqué y para qué de un estudio de reproducibilidad, para ello mostraremos como dentro de una comunidad, por la naturaleza de las investigaciones que se han ido efectuando a lo largo del tiempo, están presentes, si bien no de manera explícita aspectos, elementos y preguntas que atañen al concepto teórico de la reproducibilidad, señalando así su relevancia y la potencia que le puede otorgar a la práctica social de la comunidad el hacer consideraciones sobre dicha categoría.

La matemática educativa

Con este nombre denominamos a la disciplina que estudia los procesos de trasmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar (Cantoral, 1995). A continuación amplía: “la disciplina se propone describir y

explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. No nos reducimos a la búsqueda de una *buena manera de enseñar* una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber, incluso aunque esta actividad se vea desviada de su objetivo de partida. La investigación en nuestro campo se propone afectar al sistema educativo en un sentido benéfico, a saber, mejorar los métodos y contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional que permita resolver problemas y plantear verdaderas preguntas”, op.cit., p. 4.

Para lograr lo declarado arriba, los esfuerzos se han orientado a la definición precisa del objeto de estudio y la caracterización de lo que se ha denominado el discurso matemático escolar.

Señala (Albert, 1996) que las investigaciones de partida (Cantoral, R., 1990; Cordero, F., 1994; y Farfán, R. M., 1993) han brindado elementos significativos para continuar en el diseño y experimentación de estrategias que permitan vincular los resultados de las diversas investigaciones a los sistemas de enseñanza.

“En el Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, en términos generales, en el terreno de la investigación, estamos interesados en tres preguntas centrales, cuáles son los factores que regulan las situaciones de enseñanza en el sistema escolar, cómo se caracterizan los actos de entendimiento y cuál es su vínculo con los aprendizajes, y cuáles son las bases de significación original de conceptos y procesos matemáticos avanzados” (Cantoral y Farfán, 1998).

Nuestra investigación se ubica, en el ámbito de la primera pregunta. Nuestro interés se orienta, a determinar las condiciones que permitan, que un diseño didáctico

determinado, produzca los mismos aprendizajes, en distintas puestas en escena, por el diseñador, y en especial por agentes ajenos al diseño. Queremos determinar si las condiciones que determinan el cumplimiento del efecto didáctico, son endógenas o exógenas al diseño y al diseñador.

Una exploración preliminar, desarrollada en la investigación de maestría (Lezama, 1999) nos ha arrojado, información importante y la seguridad de que la pregunta, alrededor de la reproducibilidad, es relevante; requerimos profundizar en ella, ampliando el horizonte de nuestra pregunta y las estrategias para poder articular respuestas consistentes.

El estatus de la reproducibilidad en el escenario didáctico

A partir del análisis de tres tesis doctorales en las cuales no se hace alusión al concepto de reproducibilidad, mostraremos cómo el hacer consideraciones sobre la misma puede potenciar el impacto de los resultados ahí obtenidos en el sistema didáctico, ya que al hacer consideraciones teóricas sobre la persistencia de los resultados obtenidos al plantear nuevos escenarios de experimentación, o modificaciones de los instrumentos didácticos utilizados puede permitir la consideración de nuevas variables y posibles fenómenos didácticos a estudiar.

Consideraremos tres trabajos de investigación recientes, intentamos identificar en ellos aquellos aspectos que aludan a la reproducibilidad, con el fin de mostrar que ésta se encuentra en la base de todo diseño didáctico y señalaremos aquellos aspectos que están íntimamente relacionados con ella.

Estas tres investigaciones tienen en común que usan como marco teórico la teoría de situaciones didácticas y hacen uso de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, las tres se realizaron en situaciones reales de clase. En las tres se realizaron diseños de situaciones didácticas que fueron enfrentadas por grupos de estudiantes que podríamos calificar de normales.

Albert (1996) en su tesis *La convergencia de series en el nivel superior: un acercamiento sistémico*, declara como propósitos de su investigación, el hallar regularidades y conocer los procesos de construcción de los estudiantes sobre las nociones de series y convergencia, en situación escolar.

Un aspecto que considera relevante es que le permitirá captar la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje dentro del aula. Es decir, le permitirá estructurar una experiencia educativa dentro del aula, no en un laboratorio, o bien, el aula es laboratorio. Además de que contará con elementos de control y análisis de la experiencia educativa, pero que no son externos al proceso. Para ello diseña una secuencia didáctica, orientada a romper con la inercia escolar y que le proporcionen al estudiante, las ayudas necesarias para que ellos logren construir las nociones de serie y convergencia.

Cabe señalar en este momento, que aún en el diseño de una ingeniería didáctica con propósitos de investigación, salen a escena las contrastantes y en ocasiones divergentes visiones de profesores e investigadores, acerca de lo que es el aprendizaje de las matemáticas. Esto determinará de manera importante los supuestos con que se lleva al aula una ingeniería didáctica. Si el investigador detecta que el conocimiento del profesor en relación a la noción de convergencia no es adecuada, esto lo orillará a tomar decisiones didácticas importantes para poder comunicar sus diseños los profesores o intentar que sean ellos quienes las experimenten solos en clase.

A pesar del esfuerzo del investigador por diseñar situaciones didácticas que les permitan a los estudiantes construir de manera independiente las nociones asociadas a las series infinitas, la complejidad temática resiste a un trabajo verdaderamente independiente por parte de los estudiantes. Esto lo podemos observar en los reportes del investigador después de haber realizado el proceso de validación de las secuencias didácticas. En sus observaciones, señala exclusivamente obstáculos de orden epistemológico, pero cuesta trabajo discernir

de sus reportes, asuntos relacionados a categorías tales como las de contrato didáctico, o devolución de situaciones.

El papel del profesor está bien definido, pero la intervención moderada y estructurada del profesor se hace presente y crece con el tiempo, como lo declara el mismo investigador "...La institucionalización frecuente resultó positiva porque esto permitió consolidar lo que los estudiantes iban aprendiendo, y más adelante nos dice: El papel del profesor en el aula no sólo juega un papel fundamental en la fase de institucionalización sino también en la ayuda preliminar que no sólo da los elementos fundamentales para poder abordar los problemas planteados sino que, además busca poner en conflicto la etapa anterior con el fin de suscitar la necesidad de un nuevo modelo interpretativo sobre las series", op. cit. p.176.

La tesis es muy clara en cuanto los propósitos que persigue y la metodología empleada; uno de los asuntos relevantes del trabajo, consistió en que es una experiencia de aula, con todas las dificultades que esto implica y es justamente en este punto donde se pueden hacer preguntas que aluden a la reproducibilidad.

¿Si se repitieran esta experiencia de investigación con nuevos estudiantes, de qué naturaleza serían los resultados que se obtendrían? ¿Dependen de la institución donde se desarrolló la investigación? ¿Si la repitiera el mismo investigador? ¿Y si la repitiera otro investigador? ¿Se podría utilizar la secuencia diseñada por Albert con fines no de investigación sino de instrucción? ¿Qué se les debería pedir a los profesores que quisieran utilizarla con fines de enseñanza? ¿Bastaría con leer la tesis del Albert, para poder repetir la experiencia?, y ¿cuál sería el nivel de estabilidad de los resultados? ¿Podrían ser llevadas sus secuencias didácticas al aula por un maestro convencional? ¿Qué tendríamos que informarle, o cómo deberíamos asesorarle para que lo realizara? ¿Hacia donde debemos dirigir nuestra atención, o cuáles son las categorías de análisis para asegurar cierta universalidad en los resultados o esto es imposible?

Alanís (1996) en su tesis *La predicción: hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*. Hace referencia a lo que se ha denominado “la crisis de la enseñanza del cálculo”, las distintas respuestas educativas que se han dado ante el reconocimiento de dicha crisis. A partir de estos elementos y algunos otros aspectos sobre el surgimiento del cálculo, plantea los propósitos de su investigación, afirmando: “esta tesis tiene como propósito inicial: Sentar las bases para la construcción de una innovación en la enseñanza del cálculo que sea acorde al carácter instrumental que tienen los sectores curriculares de matemáticas y, que favorezcan el que se den en los estudiantes los aprendizajes deseados” (Alanís, 1996, p. 22).

El plantear como objetivo una innovación en la enseñanza, constituye un propósito arriesgado, debido a la desconfianza que profesan los investigadores a las innovaciones alejadas de una sólida investigación que las respalde, y precisamente, en este sentido, cita a Artigue (1995), quien afirma que, contra lo que se podría pensar y desear, las innovaciones en la enseñanza del cálculo se están haciendo de forma independiente de los trabajos de investigación existentes.

Más adelante, después de hacer consideraciones de tipo teórico y metodológico, precisa los objetivos de la investigación, señalando:

“Sentar las bases para la elaboración de una innovación en la enseñanza del cálculo en la que, (1) las nociones matemáticas sean vistas más que como objetos de un saber ya constituido, como herramientas requeridas por los estudiantes para abordar problemas en sus áreas de interés; (2) se procure que los estudiantes construyan dichas nociones y, en todo caso, que los profesores faciliten dicha construcción”, p. 37.

El uso que esta investigación hace de la ingeniería didáctica, es muy importante, ya que pone en juego los dos niveles de desarrollo de la misma, imbricándolos y además abre, de manera explícita el problema de reproducción.

Las secuencias didácticas, son puestas en escena en el contexto de un curso de nivelación, no propiamente de cálculo, en ellas se pone a prueba la posibilidad de que el estudiante sea capaz de construir nociones del cálculo a partir de una idea que denomina “hilo conductor”, que requiere un alto nivel de apropiación, por parte del profesor, de las ideas que permitieron el surgimiento del cálculo, esto implica, un conocimiento histórico poco convencional de los orígenes del cálculo, una seria reflexión epistemológica y adueñarse de un discurso didáctico a contrapelo del discurso predominante en la escuela.

La ingeniería didáctica es tomada como instrumento de investigación, pero también para la acción escolar, para la planeación de clase, para el control del efecto didáctico, y, consecuente con el discurso del investigador, para la innovación, para crear una alternativa didáctica factible de vivir en la escuela.

El investigador nos proporciona las actividades, la idea conductora, la pone en escena, y analiza sus efectos con todo orden, pero también requiere proporcionarnos las características del profesor capaz de desarrollar un curso así. Es en este punto donde los problemas asociados con el repetir efectos didácticos o reproducibilidad se hacen más patentes.

Cómo compartir un discurso, (que se podría calificar de sofisticado) con otros profesores. En el diseño de las actividades se refleja en forma implícita, como enfrenta el investigador este problema; señalando de manera reiterada el papel del profesor, constituyéndolo (como la teoría bien lo señala), en la memoria didáctica, hilvanando (siguiendo la metáfora del hilo conductor) dicho hilo, para apoyar a los estudiantes en la construcción de sus aprendizajes.

Eligiendo cualquier actividad, podemos leer:

Sesión 1

Objetivo: 1) Predisponer al estudiante a la aceptación de nuestra propuesta, acerca de qué y cómo enseñar el cálculo. 2) Resaltar la importancia del objetivo del curso y la manera...

Actividades. 1) el profesor hará una reflexión sobre el actual proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo, con base a responder cuestiones como las siguientes: ¿qué se está enseñando? ... 2) El profesor conformará los equipos y los ubicará “geográficamente” en el aula. 3) El profesor hará una introducción, propiamente, al curso, en la cual puntualice sobre como surge el cálculo ... 4) A manera de cierre, el profesor insistirá en el hilo conductor del curso, ...

Tomando fragmentos de las distintas secuencias didácticas, con el fin de mostrar como resuelve el investigador, la actividad del profesor en el desarrollo del curso.

Sesión 8: 1) El profesor abordará, ahora por cuenta propia, la actividad 2 de la sesión anterior. Lo hará sistemáticamente, de manera tal que: (1) quede clara la conceptualización de d como el número al cual tiende ... 2) El profesor resumirá lo hecho en la actividad anterior estableciendo lo siguiente: ...

Sesión 11: El profesor hará una recapitulación de todo lo que se ha revisado en relación con la cuestión de predecir la posición de una partícula... 2) El profesor discutirá con los alumnos la discusión de los siguientes dos problemas, con los cuales se pretende... 4) El profesor sintetizará la actividad anterior estableciendo la estrategia a seguir para determinar el valor máximo o mínimo que alcanza una magnitud que está cambiando... 6) Como síntesis de esta actividad y cierre de esta sesión, el profesor puntualizará cómo de manera recurrente, se puede ir construyendo la gráfica de la ecuación de posición...

Se nos proporciona toda la estrategia y también de manera muy especial, se tiene que modelar al profesor capaz de desarrollar el curso.

Alanís, reflexiona en un plano más general la factibilidad de lograr el objetivo del curso, y de cuál debería ser la actividad del profesor, que así lo posibilite.

Nos dice; “En el marco teórico y metodológico que ha orientado al presente trabajo, el papel del profesor no es el de transmitir un contenido, sino el de coordinar el que los alumnos enfrenten aquellas situaciones que se han diseñado para que éstos, los alumnos construyan conocimientos adecuados a las características de ese contenido que se desea finalmente aprendan. Pero, ¿qué o quién garantiza a los profesores que tales construcciones pueden ser hechas por los alumnos? Primero, el que a nivel experimental esto suceda así; y segundo, el que se puedan reproducir en clases normales las condiciones en las que se llevó a cabo la experimentación” (Alanís,1996) p. 101.

Concluyendo, un trabajo de esta naturaleza, lleva inherente el planteamiento de la posibilidad de reproducción, si bien el investigador declara como hipótesis de reproducción de la misma, la constatación de que se han producido aprendizajes bajo su propuesta, así hayan sido en condiciones de mucho control, y el que se puedan repetir las condiciones de la investigación, en condiciones normales; sin embargo se pasa por alto las enormes exigencias que pesan sobre el profesor.

Sintetizando, podríamos resumir la hipótesis de reproducibilidad que se desprende de la propuesta de Alanís, aprendizajes iguales, en condiciones iguales, adquisición de nuevas prácticas docentes, acordes a la propuesta.

Efectivamente estos aspectos deberán ser abordados y discutidos en un estudio de reproducibilidad.

Cabe hacer el comentario, que la investigación de Alanís, ha logrado transitar de propuesta preliminar, a la de institucionalización escolar, pues, en colaboración con otros colegas, ya se han impartido cursos haciendo uso pleno de la propuesta didáctica, otros profesores han impartido cursos con su enfoque y además tal propuesta ya se ha convertido en libro de texto publicado en gran escala, que sirve

de apoyo para la puesta en escena del curso. Se trata de un caso que merece un estudio más amplio de reproducibilidad.

Mirón (2000) en su tesis *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones $f \leftrightarrow f'$ en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*, señala que el paradigma imperante en la enseñanza de la derivada es de Cauchy, (la derivada de la función f , es el límite del cociente diferencial cuando h tiende a cero, y apoyándose en la idea geométrica de D'Alembert, que la tangente es el límite de las secantes) y que la derivada lagrangiana es, en cambio entendida como el coeficiente lineal del desarrollo en serie de potencias de una función en torno a un punto dado, el investigador nos indica que: “En esta investigación exploramos la posibilidad de favorecer la significación del concepto de derivada en el sentido de Lagrange, mediante una aproximación que se desarrolla en un ambiente tecnológico” (Mirón, 2000) p.3.

Más adelante nos indica, “...dentro de un medio matemático que incorpora intencional y sistemáticamente las calculadoras graficadoras, en el estudio de la derivada, nos hemos planteado como objetivo principal de esta investigación: *Analizar y explicar la naturaleza del aprendizaje dentro de este medio tecnológico*”. (Mirón, 2000) p. 14.

La secuencia didáctica fue puesta en escena en un grupo de bachillerato en condiciones reales de clase. Se hizo uso del horario normal del grupo, tanto en la fase de preparación (familiarización con la calculadora), como en la fase experimental. Un elemento primordial en el diseño fue el control de las variables didácticas, y su relación con el empleo de la calculadora graficadora.

El profesor es el organizador de la sesión, reparte las hojas de trabajo, prepara la grabación y video filmación de la actividad, así como anima a los estudiantes a que escriban sus discusiones y resultados. El profesor únicamente puede responder dudas fuera de los contenidos temáticos de la actividad.

Una de las características de este trabajo, es la esmerada atención a las variables didácticas, ya que de ello dependía lograr el introducir a los estudiantes al ámbito de problemas que se propone el investigador. Como se ha mostrado en este caso, el profesor no juega un papel primordial en el desarrollo de la secuencia. Es el diseño el que tiene el control.

El haber puesto a prueba la secuencia, en un sentido exploratorio, no ponía a prueba a los estudiantes, sino al instrumento, ¿provoca las acciones planeadas? ¿se interpretan correctamente las preguntas? Es estar buscando la construcción de un instrumento que provoque reacciones estables, que minimice las dispersiones y en este caso hay riesgos importantes por el uso de la calculadora.

Pensar en reproducibilidad, es pensar también en acciones, formulaciones, validaciones y empleo de todo tipo de medios, pero bajo el estricto control del diseño de las actividades.

Comentario final

El breve análisis de las tres investigaciones de colegas del área de educación superior, nos permite señalar, la relevancia del fenómeno de la reproducibilidad de ingenierías didácticas.

La construcción de largas ingenierías, así como de pequeñas situaciones didácticas con fines exploratorios o de aprendizaje, nos remiten cada vez, a la elaboración de más sólidos análisis preliminares, con elementos epistemológicos, cognitivos y didácticos y ahora de manera explícita, a hacer consideraciones de índole epistemológico pero íntimamente ligados a condiciones sociales y culturales, como lo muestran los trabajos analizados.

Toda construcción, de las antes mencionadas, nos obligará a hacer consideraciones sobre el carácter efímero o lo duradero de nuestros estudios, sobre la factibilidad de que puedan sobrevivir en la escuela ya sea tal en sus diseños originales como en

instrumentos adaptados a distintos públicos escolares. Consideramos que nuestros estudios no pretenden únicamente describir los problemas asociados al enseñar y aprender matemáticas en la escuela, queremos producir conocimiento con el fin de utilizarlo en ella, con viejas o nuevas prácticas, retomando tradiciones y costumbres o infundiendo nuevas prácticas y hábitos, acudiendo a la historia y a la cultura local, aprendiendo a resistir y discernir los embates culturales globalizados.

Toda práctica escolar, exitosa, está irremediablemente condenada a repetirse, desde un acto improvisado que resulta positivo, hasta el plan escolar elaborado por comités de expertos. Pero, partiendo de visiones particulares, ¿cómo extender a la comunidad? ¿Se pueden hallar mecanismos no autoritarios o visibles, para compartir experiencias y prácticas de enseñanza? Una salida a las reflexiones planteadas, son la elaboración de investigaciones que aporten información organizada y que muestren la factibilidad de hacerlo.

La importancia, de los asuntos que intervienen en un estudio de esta naturaleza y del papel que creemos tiene la reproducibilidad en la actividad didáctica, relacionada con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, hacen pertinente un estudio de ella.

Capítulo III

Aproximaciones al fenómeno de la reproducibilidad

En este capítulo, haremos uso de los resultados reportados en (Lezama,1999) e iniciamos la reseña de puesta en escena de la ingeniería didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x ” correspondiente al año 2000; con ello emprendemos el análisis de lo que denominaremos el proceso de reproducción de dicha ingeniería. Para dar una visión organizada y teóricamente coherente abordaremos nuestro análisis con una perspectiva sistémica.

Primero centramos nuestra atención en el saber, éste constituye el contenido de la ingeniería, es decir, la ingeniería nace con el propósito de promover el estudio y aprendizaje de un saber que tiene una problemática intrínseca; es esa problemática la que se aborda a través de dicha ingeniería y que deviene en una serie de actividades organizadas para ser trabajadas por el estudiante y que en determinadas condiciones produzcan aprendizajes en éste.

Abordaremos en este capítulo un primer aspecto de la actuación del profesor a través de la actividad que denominamos comunicación del escenario, es decir, el proceso de apropiación de la ingeniería, sus reacciones a ésta, el tránsito de su posición estudiante-profesor a profesor-diseñador que permiten reconocer las

interacciones profesor-saber (para si) y luego de una manera muy clara las interacciones profesor-saber (para otro).

Como las interacciones son la clave de nuestro enfoque y éstas siempre van mezcladas, nuestra posibilidad de mostrarlas son limitadas ante la complejidad de las mismas, por ello habremos de discutir las por separado, en este capítulo restringimos nuestra atención a la estructura de la situación, su origen y evolución, el proceso de intervención de los profesores sobre la misma, la negociación con el diseñador y dejaremos para el próximo capítulo las interacciones del estudiante con la situación analizada a través de lo que hemos denominado la actividad matemática del estudiante así como las respectivas interacciones con el profesor.

El saber.

Elementos del diseño de la ingeniería “Un estudio didáctico de la función 2^x ”.

El diseño de la ingeniería se dio a partir de los resultados de investigaciones de tipo epistemológico ligadas a la noción de función (Farfán,1991,1993) donde se muestran distintas aproximaciones al concepto, el cómo evolucionaron, las dificultades inherentes a dicho concepto, así como las diversas reformulaciones que tuvo a lo largo del tiempo y las circunstancias que propiciaron el establecimiento del actual paradigma del concepto de función; a saber, como objeto analítico.

La función constituye una de las principales nociones matemáticas a adquirir en la escuela, pero a la vez se nos revela como uno de los conceptos matemáticos más difíciles de dominar y enseñar. Asimismo la enseñanza tradicional, aún teniendo otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, evaluando en esencia las competencias adquiridas en este dominio (Artigue,1995)..

Lo anterior explica el porqué los profesores observan la dificultad que representa para los estudiantes identificar distintas funciones, discriminar sus propiedades,

darse cuenta de sus posibles aplicaciones e identificar las situaciones o fenómenos que modelan, agregándose a esto el problema de poderlas representar gráfica, tabular y analíticamente, así como el poder transitar entre dichas representaciones eficientemente.

Propósito de la ingeniería

La ingeniería didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x ” * está orientada a que el estudiante explore y aprenda la noción de función exponencial, propiciando la realización de actividades en las que él efectúe acciones las cuales serán desarrolladas paso a paso, a partir de criterios geométricos; localizando puntos en el plano, escribiendo tablas, identificando regularidades que propicien posteriormente generalizaciones pertinentes; para lograrlo, se propone una construcción cuyas características atienden a:

- Elementos geométricos y gráficos, indispensables en el desarrollo de las actividades en las que se les solicita efectúen trazos y localicen puntos en un sistema coordenado rectangular.
- Inducción de lo local a lo global, ésta se presenta en las actividades en que se les solicita argumentar la posibilidad de localizar más puntos, y en las que se deberá argumentar sobre los cocientes y las diferencias que se observarán en otras tablas diferentes a las analizadas.
- También está presente el elemento de generalización, el cual se puede encontrar en la actividad en que se les pide analizar las regularidades observadas para 2^x y a partir de ello extenderse a otras bases.

Los objetivos específicos de la ingeniería son:

* El diseño de la ingeniería se muestra en el **Anexo A**.

- Proporcionar un proceso geométrico de construcción a través de puntos de la gráfica de la función 2^x , así como analizar regularidades propias de la función, en este caso identificar la naturaleza creciente de esta función.
- Confrontar la concepción espontánea de que 2^x es evaluable sólo cuando x es entero.

Trayectorias, Órbitas e Historias de Clase.

La Situación Didáctica correspondiente a la ingeniería está compuesta de tres etapas, la primera, en donde se proporcionan los elementos geométricos necesarios para encontrar segmentos de magnitud asociada a expresiones exponenciales y la manera de operar con ellos. En la segunda etapa se hace uso de los elementos geométricos para hallar segmentos y así localizar algunos puntos en el plano cartesiano correspondientes a la función 2^x . Finalmente en la tercera etapa se explora la función desde un punto de vista tabular.

La situación está compuesta de actividades propuestas al estudiante a través de instrucciones y preguntas que lo colocan en situaciones problemáticas a resolver; trabajar la situación constituye para quien lo hace, un “continuo” de acciones, formulaciones, validaciones así como una continua toma de decisiones de carácter muy complejo y que van todas éstas entrelazadas. Dicho continuo de actividades de naturaleza compleja dirigidas al cumplimiento de los propósitos de la ingeniería, constituyen lo que se ha denominado trayectorias.

En las trayectorias generadas por los estudiantes hay elementos identificables de manera muy clara, por ejemplo, el seguimiento de una instrucción (estos constituyen elementos que denominaremos externos), pero hay otros mucho más complicados de establecer como puede ser el caso de una toma de decisión o una interpretación en la que, quien observa no sabe cómo surgió (a estos los denominaremos internos).

Ante la complejidad de poder observar las trayectorias bajo esta concepción de continuo, se han seleccionado catorce actividades que constituyen su discretización.

A dichas actividades o estados se le denominan órbitas; el conjunto de éstas órbitas nos darán la historia de clase, el estudiante deberá pasar necesariamente por cada una de ellas, aunque es factible que en algunos casos rompa el orden que hemos establecido o bien su paso por algunas sea implícito.

A continuación, mostramos a través de una tabla la historia de clase ideal, para cada órbita se establece el contenido matemático que ésta pone en juego, la naturaleza de las actividades que la componen desde el punto de vista de la estructura de la situación didáctica y finalmente un esbozo de lo que sería la historia de clase ideal, lo que se esperaba que hiciera y se diera cuenta el estudiante en cada una de ellas.

Órbitas	Contenido matemático en juego	Elementos de la situación didáctica.	Historia de clase esperada.
A1 Identificación de los puntos $(0,2^0)$, $(1,2^1)$, $(2,2^2)$, en el plano.	<ul style="list-style-type: none"> Identificación de pares ordenados en el plano. Uso de potencias enteras y clarificación del significado numérico de 2^0. Identificación de las potencias 2^0, $2^1, 2^2$, como segmentos en el plano. 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de acción: Identificación de los puntos en el plano. Situación de formulación: En la búsqueda del significado de 2^0. 	<ul style="list-style-type: none"> Se espera que interpreten las potencias enteras y las asocien a los segmentos ahí trazados. Si los estudiantes no saben o no recuerdan el valor de 2^0, el colocar la expresión del segmento unitario motive a la interpretación de su valor. Si los estudiantes no logran recuperar el valor correcto o dan valores erróneos, se espera la intervención del profesor para desbloquear.
A2 Identificación de que la actividad es la localización de los puntos $(1/2, 2^{1/2})$, $(1/4, 2^{1/4})$	<ul style="list-style-type: none"> Constituye una actividad de comprensión de la instrucción, fundamental para continuar la actividad. Constituye el 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de formulación: Es una actividad de decodificación de un mensaje escrito, en lenguaje común y haciendo uso de una simbología 	<ul style="list-style-type: none"> Se espera que los estudiantes se ubiquen en el plano y conjeturen como estarán distribuidos los puntos en el plano. En esta actividad enfrentarán el problema de

Órbitas	Contenido matemático en juego	Elementos de la situación didáctica.	Historia de clase esperada.
$(1/4, 2^{1/4})$, $(3/4, 2^{3/4})$ $(5/4, 2^{5/4})$.	primer contacto con las potencias fraccionarias.	simbología matemática.	interpretar las potencias fraccionarias e intentarán darle un significado a la operación en contraste a las potencias enteras.
A3 Identificación de que los segmentos hay que encontrarlos por métodos geométricos.	<ul style="list-style-type: none"> Se requiere recordar los algoritmos de la media geométrica y las semejanzas para el producto de los segmentos. 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de acción: Dado que se requiere que los alumnos muestren que pueden localizar pares ordenados. Situación de formulación: Dado que se requiere que los estudiantes localicen esos puntos empleando argumentos geométricos. 	<ul style="list-style-type: none"> En esta actividad es donde se produce el deslizamiento del problema de elevar a potencias como actividad aritmética o algebraica a la geometría. Si el estudiante no recuerda los algoritmos geométricos no se sale de la problemática de darle sentido a la operación de elevar a potencias fraccionarias, ya que puede proceder al tanteo o buscar otras alternativas geométricas.
A4 Localización del segmento $2^{1/2}$.	<ul style="list-style-type: none"> Uso de potencias racionales y significado numérico de las mismas. Propiedades de los exponentes y radicales. Uso de escuadra y compás. Uso del algoritmo de la media geométrica. 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de acción: Uso de estrategias de tanteo en contraste con la localización de los puntos de manera exacta. Situación de formulación: Para poder traer al contexto del problema el algoritmo de la media geométrica. Situación de validación: Pueden aparecer intentos de justificación de los resultados que proporciona el algoritmo. 	<ul style="list-style-type: none"> Si el estudiante procede geoméricamente y encuentra el segmento equivalente a $2^{1/2}$, podrá compararlo con el segmento unitario y podrá discutir sobre la validez del resultado. Si el estudiante no procede en forma geométrica podrá conjeturar con base al valor de los exponentes 0, $\frac{1}{2}$, 1.
A5 Localización del segmento $2^{1/4}$.	<ul style="list-style-type: none"> Uso de potencias racionales y significado numérico de las mismas. Propiedades de los exponentes y radicales. Uso de escuadra y compás. 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de acción: Uso de estrategias de tanteo en contraste con la localización de los puntos de manera exacta. Situación de formulación: Para poder traer al contexto del problema el 	<ul style="list-style-type: none"> Se espera la descomposición $2^{1/4} = (2^{1/2})^{1/2}$ o $2^{1/2} * 2^{1/2}$ para luego proceder geoméricamente. Para proceder de la primera forma deberán reinterpretar el algoritmo de la media geométrica. Se espera producir

Órbitas	Contenido matemático en juego	Elementos de la situación didáctica.	Historia de clase esperada.
	<ul style="list-style-type: none"> • Uso del algoritmo de la media geométrica. • Uso del algoritmo de la semejanza. 	<p>del problema el algoritmo de la media geométrica.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Situación de validación: Pueden aparecer intentos de justificación de los resultados que proporciona el algoritmo. 	<p>comparación entre los segmentos correspondientes.</p>
<p>A6 Localización del segmento $2^{3/4}$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de potencias racionales y significado numérico de las mismas. • Propiedades de los exponentes y radicales. • Uso de escuadra y compás. • Uso del algoritmo de la semejanza. 	<ul style="list-style-type: none"> • Situación de acción: Uso de estrategias de tanteo en contraste con la localización de los puntos de manera exacta. • Situación de formulación: Para poder traer al contexto del problema el algoritmo geométrico para el producto de segmentos. • Situación de formulación: Al asociar sus operaciones con la obtención de puntos de una función. 	<ul style="list-style-type: none"> • Se espera una descomposición de la expresión $3/4 = 1/2 + 1/4$, para descomponer la potencia en dos ya conocidas y así aplicar el algoritmo del producto de segmentos. • En esta parte se pretende que el estudiante ya esté operando las expresiones exponenciales con racionales. • En estas actividades se espera que ya tenga sentido elevar a potencias fraccionarias y se de cuenta que está obteniendo puntos de una función exponencial más allá para valores no enteros del exponente.
<p>A7 Localización del segmento $2^{5/4}$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de potencias racionales y significado numérico de las mismas. • Propiedades de los exponentes y radicales. • Uso de escuadra y compás. • Uso del algoritmo de la semejanza. 	<ul style="list-style-type: none"> • Situación de acción: Uso de estrategias de tanteo en contraste con la localización de los puntos de manera exacta. • Situación de formulación: Para poder traer al contexto del problema el algoritmo de la media geométrica. • Situación de validación: Pueden aparecer intentos de justificación de los resultados que proporciona el 	<ul style="list-style-type: none"> • Descomposición de exponentes para luego operar geoméricamente. • Obtener segmentos u ubicarlos en el plano y compararlos con los otros segmentos construidos. • Observar el carácter creciente de los segmentos y asociarlos a la características de la función exponencial.

Órbitas	Contenido matemático en juego	Elementos de la situación didáctica.	Historia de clase esperada.
		algoritmo.	
A8 Decisión sobre si es posible encontrar un segmento de magnitud $2^{1/8}$.	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de potencias racionales y significado numérico de las mismas. • Propiedades de los exponentes y radicales. • Uso de escuadra y compás. • Uso del algoritmo de la media geométrica. • Uso del algoritmo de la semejanza. 	<ul style="list-style-type: none"> • Situación de acción: Exige la formulación de una conjetura. • Situación de formulación: Buscar los elementos matemáticos que permiten ver que es factible. • Situación de validación: Buscar los argumentos teóricos que permitan ver que la conjetura es buena. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ahora se da un valor más pequeño de las abscisas para que sea comparado con la unidad. • Y si se puede aplicar el algoritmo con dificultades en el manejo físico de los segmentos al operarlos geoméricamente.
A9 Decisión sobre si es posible encontrar más puntos continuando el procedimiento geométrico.	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de potencias racionales y significado numérico de las mismas. • Propiedades de los exponentes y radicales. • Uso de escuadra y compás. • Uso del algoritmo de la media geométrica. • Uso del algoritmo de la semejanza. 	<ul style="list-style-type: none"> • Situación de acción: Exige la formulación de una conjetura. • Situación de formulación: Buscar los elementos matemáticos que permiten ver que es factible. • Situación de validación: Buscar los argumentos teóricos que permitan ver que la conjetura es buena. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ante la dificultad geométrica de obtener más y más segmentos, se intenta provocar que los estudiantes hagan una generalización teórica de si se pueden obtener más puntos de manera geométrica. • Decir qué tipo de puntos son éstos (caracterizarlos) y cuáles no son posibles de obtener por los medios geométricos dados. • Darse cuenta que es posible de obtener una infinidad de puntos pero que hay otra infinidad de puntos que no es posible.
A10 Comprensión de la tabla 1.	<ul style="list-style-type: none"> • Lectura de una tabla e inducir los patrones que la organizan. 	<ul style="list-style-type: none"> • Situación de formulación: Debe haber identificación del contenido de cada columna; búsqueda de las relaciones entre las columnas, identificación del lenguaje matemático empleado. 	<ul style="list-style-type: none"> • Analizar los elementos de la tabla encontrar la organización de cada columna y las posibles relaciones entre ellas.
A11 Forma de llenar las tablas.	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de las propiedades de los exponentes. 	<ul style="list-style-type: none"> • Situación de acción: Exige la transferencia de la información vertida en la tabla 1 	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicar la comprensión de la tabla uno. • Hacer operar al alumno con el fin de familiarizarlo con la

Órbitas	Contenido matemático en juego	Elementos de la situación didáctica.	Historia de clase esperada.
	<ul style="list-style-type: none"> Factorización. Identificación de progresiones aritmética y geométrica. 	para el llenado de las tablas subsecuentes.	el fin de familiarizarlo con la estructura de las columnas que lo preparen para la identificación de propiedades fundamentales de la función exponencial.
A12 Generalización con relación al valor de la columna 3 para el caso de un incremento arbitrario de x .	<ul style="list-style-type: none"> Identificación de las características de la progresión aritmética. 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de acción: El estudiante relaciona un número con la progresión correspondiente. Situación de formulación: El análisis de los casos particulares permite elaborar generalizaciones. 	<ul style="list-style-type: none"> Identificación del factor de crecimiento, que equivale a la razón en el caso de una progresión geométrica. La posible observación de la relación aritmética en la columna uno con la progresión geométrica de la columna dos y que constituye parte de la función exponencial
A13 Generalización con relación al valor de la columna 5 para el caso de un incremento arbitrario de x .	<ul style="list-style-type: none"> Identificación de las características de la progresión aritmética. Identificación de las características de la progresión geométrica. 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de acción: El estudiante relaciona un número con la progresión correspondiente. Situación de formulación: El análisis de los casos particulares permite elaborar generalizaciones. 	<ul style="list-style-type: none"> La observación de diferencias entre elementos consecutivos para incrementos establecidos en cada tabla. La observación de que a partir de las diferencias también se obtiene una progresión geométrica y que está asociada a los incrementos de cada tabla, pero que se pueden hacer dichos incrementos tan pequeños como se quiera.
A14 Generalización de regularidades para otras funciones exponenciales.	<ul style="list-style-type: none"> Identificación de las relaciones entre la etapa 1 y la etapa 2. 	<ul style="list-style-type: none"> Situación de formulación: Exige la identificación de los elementos principales de cada una de las etapas y sus relaciones, así como la construcción de una visión global de la función exponencial. 	<ul style="list-style-type: none"> Se espera que los estudiantes puedan asociar el carácter creciente de los segmentos de la etapa anterior y el carácter creciente de las columnas analizadas. Que puedan apreciar la posibilidad de hacer el trazo de manera continua. Que puedan conjeturar sobre el comportamiento de la función si se cambia la base.

El desglose en órbitas nos permite distinguir lo que denominaremos el eje conceptual que compone a la situación didáctica y por ende distinguir el carácter de

la actividad matemática a la que se espera introducir a los alumnos. Lo que hemos denominado la historia de clase esperada, no constituye una predicción sobre lo que harán sino que por el contrario a lo que el diseño debe llevarlos en el mejor de los casos, pero estamos conscientes de que puede haber múltiples variantes; constituye un instrumento con el cual podremos comparar las historias que efectivamente desarrollaron los estudiantes para así poder mirar que tan cerca o distantes están de la historia principal.

A partir de nuestro interés de reproducir el propósito didáctico de la situación, la elaboración de la tabla de orbitas con su respectiva historia de clase esperada, se constituyó en un instrumento para el análisis de la actividad de los estudiantes y que es indispensable de conocer por quién pretendiera reproducir la situación, ya que le muestra el contenido y el sentido de cada una de las actividades a desarrollar por los estudiantes.

Estas órbitas fueron establecidas a partir la segunda puesta en escena (Lezama, 1999), sin embargo, los profesores responsables de dicha puesta en escena nos mostraron la necesidad de ser más explícitos en cuanto al sentido de cada una de las actividades de la situación, esto orilló a la ampliación de dicha tabla, ampliando a la columna que hemos denominado historia de clase ideal.

Si bien la tabla indica los problemas matemáticos a afrontar, los elementos conceptuales en juego y las prácticas que se espera provocar en los estudiantes, ésta sólo describe la propuesta desde el polo del saber, constituye una parte primordial del escenario pero que tiene aún un carácter estático, faltan aún los factores que pondrán en movimiento dicha propuesta.

El profesor

El Saber en un escenario didáctico; puestas en escena de la Ingeniería.

La ingeniería se ha llevado a escena en condiciones de control en tres ocasiones, las dos primeras reportadas en la tesis de maestría y la tercera, que es la que se reporta en este trabajo. En ésta, se hace uso de los resultados obtenidos en esas experiencias y que nos permitió una planeación y desarrollo del proceso de reproducción en forma más consistente.

Desde la primera puesta en escena se decidió dividir a los grupos con los que se trabajó en equipos, esto con la finalidad de contar con mayor control en la captura de las interacciones y la difusión del propósito didáctico de la situación didáctica en los estudiantes.

Más adelante se tomó la decisión de considerar a cada equipo como una experiencia independiente, es decir cada equipo es considerado como un ejercicio de reproducción separado de los otros equipos, esto debido a las siguientes dos razones:

- Si en un grupo se constituían cinco equipos de trabajo, éstos lo hacían de manera totalmente independiente, el fenómeno de difusión del propósito didáctico se vivía al interior de los equipos, las discusiones a nivel grupal o puestas en común con todo el grupo adquirirían un carácter contrastante al vivido en el equipo.
- Cada equipo contó por lo general con la presencia de un profesor que en principio fue considerado como un investigador-observador, pero después de la primera puesta en escena quedó patente la necesidad de que los equipos requirieran interactuar con un profesor, este hecho se reformuló a partir de la segunda puesta en escena y fue mucho más patente para la tercera puesta.

Establecimiento de la estrategia de observación y participación del profesor

Uno de los aspectos que fue necesario establecer con claridad fue el determinar cómo se haría el seguimiento de la actividad de los estudiantes al interior de los equipos. Los responsables de hacer anotaciones de aspectos relevantes de la actividad del equipo serían los profesores, pero al mismo tiempo era necesario que apoyara al equipo en momentos críticos.

Esta situación reforzó la necesidad de considerar la actividad de cada equipo como experiencia independiente ya que se resolvió que cada profesor fungiera como tal al interior del equipo. Con base a ello se estableció que la estrategia de observación sería participativa, la cual le permite al profesor interactuar con los estudiantes atendiendo a sus preguntas pero intentando que ellos mismos encontraran las respuestas; se recomendó al profesor que interviniera principalmente para centrar, en el caso de que el equipo tuviera desviaciones ostensibles y desbloquear en el caso de que el equipo quedara estacionado en alguna actividad de la situación y que pareciera infranqueable.

Las actividades de institucionalización nos darían elementos para establecer el logro didáctico de los equipos, por la profundidad de la discusión grupal, la participación de los estudiantes, la manera de justificar sus afirmaciones y las intervenciones de profesor.

Las actividades de los equipos serían audio y video grabadas, a esto agregaríamos las observaciones del profesor, que en especial nos indicaría sobre sus intervenciones.

Se elaboró el correspondiente análisis a posteriori de la ingeniería, poniendo especial interés en la actividad de los profesores, el trabajo en los equipos y las discusiones grupales.

Las puestas en escena se realizaron conforme a lo planeado, permitiendo la observación de los elementos que nos habíamos propuesto.

Tercera puesta en escena; diciembre de 2000: caracterizada por la introducción de la noción de “comunicación del escenario”.

Para preparar la tercera puesta en escena, era indispensable considerar los resultados y las experiencias obtenida de las puestas anteriores. Nuestro interés estaba dirigido a recoger toda la información que nos permitiera identificar y caracterizar el “proceso de reproducción de la ingeniería”.

La situación o el contenido temático de ella no podía ser modificado, pero estudiantes y profesores que constituyen el factor dinámico de la experiencia y por ende son los que introducen los elementos más novedosos y difíciles de controlar en la experiencia, por ello, era indispensable tomar en cuenta algunos aspectos relevantes obtenidos en las experiencias pasadas, como es el caso de:

- El concepto de potenciación en los estudiantes por lo general no es estable, especialmente en el caso de la potencia cero y fraccionaria.
- Las actividades de carácter geométrico les resultaron de sumo interés a los estudiantes, mostraron poca habilidad para trabajarlas.
- A pesar de la poca familiaridad de trabajar en equipos dentro del aula (declarada por sus profesores), los estudiantes no mostraron grandes dificultades para hacerlo.

En relación con los profesores:

- Se mostraron desconcertados para ejercer la función de desbloqueadores y centralizadores dentro de los equipos.

- La interacción con los equipos fue muy variada, desde las intervenciones casi nulas hasta las muy activas en algunos equipos.
- Manifestaron haberles faltado involucrarse de manera más plena con el contenido y el sentido de la situación, hecho que les hizo experimentar cierta incapacidad para orientar adecuadamente a los estudiantes.

La tercera puesta en escena se pudo realizar gracias a la colaboración de tres profesores que recién egresaban del posgrado en la Enseñanza de las Matemáticas de la Escuela Normal Superior del Estado de México, dicha puesta en escena se proyectó con el propósito explícito de investigar reproducibilidad.

Los tres profesores son ingenieros en su formación y realizan actividades docente tanto en bachillerato como en una Facultad de Estudios Profesionales de la Universidad Nacional Autónoma de México en las áreas de ciencias sociales como de ingeniería.

Se realizó un largo proceso de familiarización con la Ingeniería Didáctica, de abril a noviembre de 2000. Los trabajos estuvieron orientados a efectuar con todo detalle el proceso de comunicación del escenario, así como a crear las condiciones y el espacio de lo que hemos denominado, el espacio de intervención del profesor.

El espacio de intervención del profesor constituye un elemento de primordial importancia en la presente investigación, ya que constituía el lugar donde se efectuaría un trabajo con los profesores, en donde desde nuestra perspectiva lograríamos “se apropiaran de la ingeniería”, pues se contemplaban posibles modificaciones por parte de los profesores a la situación didáctica en términos de las observaciones realizadas por ellos sobre el contenido y la estructura de la secuencia, así como a las predicciones que elaborarían sobre el desempeño de sus estudiantes.

Iniciamos el proceso de comunicación del escenario atendiendo a los siguientes aspectos: solución de la secuencia, comentarios iniciales de los profesores sobre la misma, descripción y discusión del contenido matemático que pone en juego, determinación del objetivo de la situación a partir de su experiencia de solución.

Los profesores pudieron conocer ampliamente el origen y proceso de diseño de la Ingeniería, se adentraron en la noción de reproducibilidad, analizaron los reportes de las dos puestas anteriores, a partir de eso determinaron los objetivos de sus respectivas puestas en escena.

Por último se trabajó en la preparación de las respectivas puestas en la que se pondría especial atención a las propuestas de modificación de la secuencia y la elaboración de las predicciones sobre el desempeño de los alumnos. Por último se discutió y elaboró una estrategia de observación.

Se realizaron dos puestas con estudiantes de bachillerato ambas en instituciones públicas del Edo. de México, en diciembre de 2000.

Comunicación del escenario, un espacio para la apropiación y el acuerdo

La primera actividad que se acordó realizar fue el trabajar la situación didáctica, dos profesores la trabajaron en conjunto y el tercero la realizó solo. En ambos casos discutimos ampliamente cada una de las actividades, fundamentalmente los aspectos matemáticos que la componen, eso ocupó un par de sesiones.

Posterior a haber trabajado la situación, iniciamos una reflexión que fue estructurada de la manera siguiente: elaboramos cinco preguntas que deberían ser contestadas por escrito y de manera conjunta por los tres profesores; nos reuniríamos para discutir las y se les solicitaría ampliación y precisión de sus respuestas, repetiríamos ese ejercicio hasta que consideráramos suficientemente discutido el punto.

Las preguntas las confeccionamos conjuntamente y fueron elaboradas con la finalidad de guiar y estructurar una reflexión en grupo, por nuestra parte eran tres elementos los que pretendíamos establecer:

- Identificar qué percibían los profesores como el propósito didáctico de la Ingeniería.
- Identificar cuáles son los saberes que desde la perspectiva de los profesores promueve la situación.
- Obtener una primera y temprana predicción de los profesores sobre el posible desempeño de sus estudiantes.

La reflexión se prolongó por cinco sesiones y nos permitió conocer las reacciones de los profesores a la propuesta didáctica de la situación, así como la visión sobre sus alumnos. A continuación se presenta una sinopsis de la reflexión con los profesores*.

Se colocan las preguntas por separado; cada una de ellas va seguida de su repuesta así como de sus sucesivas reelaboraciones a lo largo de las cinco sesiones con el fin de poder observar cierta evolución de la reflexión.

¿Cuál es le contenido de la situación?

Primera reunión: 8 de abril de 2000

Contenido matemático:

- Identifican el papel integrador de la actividad entre geometría, álgebra y sistemas de números.
- La parte de la situación que más fuertemente llama su atención es la

* Una versión completa de lo escrito por los profesores se encuentra en el **Anexo D**, con el título Elementos de reflexión y comentarios.

geométrica, el uso que se hace de objetos, propiedades y resultados geométricos, así como del uso de escuadras y compás.

- El uso explícito de la distinción entre diferentes tipos de números. (números enteros, racionales e irracionales).
- El uso de exponentes, radicales y operaciones algebraicas.

Problemas centrales:

- Uso de varios conceptos matemáticos para construir la función exponencial por medios geométricos empleando regla y compás.
- Identificar que hay puntos que no es posible construir geoméricamente.
- Uso de geometría para operar objetos propios de la aritmética y el álgebra.

Segunda reunión: 15 de abril de 2000

Contenido matemático:

- En contraste con lo escrito y discutido en la primera reunión, los profesores hicieron una descripción amplia de su actividad matemática al trabajar las tres etapas de la situación, resaltando los aspectos que desde su punto de vista constituían el contenido matemático de la misma: uso de semicircunferencias, concepto de ángulo inscrito en la semicircunferencia y sus propiedades, identificación de triángulos isósceles y uso de sus propiedades, ángulo externo a un triángulo, ángulos suplementarios, semejanza de triángulos, propiedad de la altura a la hipotenusa en un triángulo rectángulo (constituye la media geométrica de los segmentos en que divide la hipotenusa), empleo de proporciones, constitución de la media geométrica como algoritmo para encontrar segmentos de magnitud correspondiente a un número irracional como es el caso de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, y $\sqrt{5}$. Empleo de escuadras y compás para operar el algoritmo. Utilización de la semejanza de triángulos para generar un algoritmo para multiplicar segmentos, operación con potencias enteras y racionales, parejas ordenadas, plano cartesiano. Reconocimiento de los límites físicos y prácticos para operar

con segmentos cada vez más pequeños. Además de las limitaciones prácticas para operar los algoritmos geométricos, identificaron las limitaciones teóricas de los algoritmos empleados; a partir de ese hecho reconocieron la necesidad de inducir algunos resultados a partir de la observación de casos particulares.

Problemas centrales:

- En esta parte resaltan el uso que se hace de todo el contenido matemático de la situación para la construcción geométrica de algunos puntos de la función exponencial 2^x .

Tercera reunión: 22 de abril de 2000.

Contenido matemático:

- Los elementos nuevos en esta reunión se centran en la dificultad física para construir segmentos de magnitud $2^{1/8}$, $2^{1/16}$, $2^{1/32}$, que son cada vez más parecidos y se complica operarlos geométricamente.
- Se hace explícito cuáles son los segmentos que teóricamente se pueden seguir construyendo cuando señalan: nos dimos cuenta que es posible construir segmentos asociados a la expresión 2^x cuando x es de la forma $p/2^q$. Con p y q enteros. Y se distingue plenamente que las raíces de la forma $2^{1/3}$, $2^{1/5}$ no se les puede obtener con el algoritmo de la media geométrica. Se elaboran generalizaciones sobre el comportamiento de la exponencial a partir de la observación de los patrones observados en la tercera etapa de la situación didáctica.

Problemas centrales:

- Los elementos nuevos a la discusión son el señalar que se pueden obtener segmentos cuya magnitud corresponde a un número irracional y que todo el aparato matemático usado es únicamente para poder obtener algunos puntos de la función exponencial.

Cuarta reunión: 5 de mayo de 2000

Contenido matemático:

- Se retoma la discusión alrededor de los valores en que no es posible aplicar el algoritmo geométrico, se hace observación de los números $2^{1/6}=(2^{1/2})^{1/3}$ y $2^{1/10}=(2^{1/2})^{1/5}$, etc., permitiendo dejar muy claro para que números es posible y para cuales no es posible aplicar el algoritmo de la media geométrica.
- En relación a la actividad ocho de la secuencia, surgieron comentarios al carácter creciente de la función, éstos con base a las expresiones que resultan después de realizar la factorización.

Problemas centrales:

- No se agregaron comentarios.

Quinta reunión: 20 de mayo de 2000

- No se agregaron comentarios.

¿Qué provoca resolver la situación?

Primera reunión: 8 de abril de 2000

- Poner en relación varios conceptos matemáticos para la solución de un problema.
- El uso de instrumentos geométricos.
- El rompimiento de la costumbre de usar únicamente números enteros para ejemplificar la función exponencial.
- Despertar interés por construcciones que hagan uso de la geometría.

Segunda reunión: 15 de abril de 2000.

- Se precisó la idea de poner en juego varios objetos matemáticos señalando que la situación desempeña una función integradora.

Tercera reunión: 22 de abril de 2000.

- Se hace explícito que la situación integra elementos de la aritmética, álgebra

y geometría.

- Ampliar la discusión al ejemplificar la función haciendo uso de números racionales e irracionales, señalando explícitamente que la práctica docente siempre hace uso casi exclusivo de números enteros.

Cuarta y quinta reunión.

- No se agregaron nuevos elementos.

¿Qué se aprende?

Primera reunión: 8 de abril de 2000

- Que con una exploración como la de la situación, se puede profundizar más en el análisis de la función.
- Que la exploración propuesta permite interrelacionar conceptos matemáticos aparentemente aislados como es el caso de la semejanza y los números irracionales.

Segunda reunión: 15 de abril de 2000

- Que permite apreciar la potencia de ciertos resultados al ser utilizados para explorar otros. Describen una serie de resultados geométricos que son utilizados en el desarrollo de la situación.
- Se hace énfasis en la importancia de integrar distintos conceptos matemáticos.

Tercera reunión: 22 de abril de 2000.

- Importancia de saber utilizar los teoremas como herramientas.
- Reconocer la importancia para la construcción exponencial al extender las propiedades de exponenciación de los enteros a racionales e irracionales.
- Se reconoce que por los métodos geométricos no se construye en forma

continua la función.

- Se pudo observar el carácter de herramienta –objeto de los conceptos matemáticos.

Cuarta reunión: 5 de mayo de 2000.

- Se puede ver la dificultad de encontrar potencias irracionales, ya que el algoritmo no permite encontrarlas, escriben explícitamente 2^π y 2^e .
- Que el trazo de la función exponencial no se puede hacer de manera continua ya que no se conocen las potencias irracionales.
- En relación al carácter de herramienta–objeto de los conceptos matemáticos señalan que al inicio de la secuencia, los teoremas eran el objeto de estudio y en las partes subsecuentes funcionan como herramientas.

La pregunta siguiente resultó ambigua, esto se reflejó porque fue abordada pero rápidamente se abandonó su discusión a pesar que los comentarios vertidos resultan interesantes.

¿Qué los hace reflexionar?

Primera reunión: 8 de abril de 2000

- Manifiestan que la curiosidad por saber como se interrelacionaban los elementos que componen la secuencia.
- La experiencia de construir la grafica de una función por métodos estrictamente geométricos.
- El poder comprender que la función sea continua cuando se sabe que hay algunos huecos correspondientes a números irracionales.

Segunda reunión: 15 de abril de 2000

- Los profesores después de la actividad seis continuaron localizando más puntos atraídos por la idea de lograr un trazo continuo, y en esa práctica se

cuestionaron sobre la posibilidad de encontrar las potencias irracionales y de índice impar, identificando las limitaciones del algoritmo geométrico.

De la Tercera a la quinta reunión

- En estas reuniones no se agregaron elementos nuevos.

¿Qué sentido matemático tiene la situación?

Primera reunión: 8 de abril de 2000.

- Se plantea como el conocimiento y repaso de conceptos geométricos, aritméticos y algebraicos.
- Desarrollar habilidades para el uso de las escuadras y compás.
- Despertar interés en los estudiantes para relacionar distintos objetos matemáticos.
- Inducir resultados generales a partir de análisis de patrones numéricos y geométricos.

De la segunda a la quinta reunión

- No se agregaron elementos nuevos.

A partir de la experiencia de solución de la situación didáctica 2^a, ¿Cuáles serían las dificultades que enfrentarían los estudiantes para resolver dicha situación?

Primera reunión: 8 de abril de 2000

- Desconocimiento de varios de los conceptos que componen la situación.
- Temor de los estudiantes a enfrentar un problema no común.
- Falta de habilidad en el manejo de los instrumentos geométricos.
- La falta de definición del problema (se refieren a la amplitud del mismo).

Segunda reunión: 15 de abril de 2000.

- Presuponen temor en los estudiantes, por el hecho de que lo que digan y hagan será analizado por terceras personas.
- El desconocer algunos conceptos matemáticos de los que se hace uso en la situación y por tanto les ocupe mucho tiempo y además pierda sentido.

Tercera reunión: 22 de abril de 2000.

- Cambian el término temor por el de incertidumbre pero sostienen la misma justificación.
- Continúa la atención sobre la falta de habilidad del estudiante en el uso de escuadras y compás.
- La gran cantidad de asuntos aritméticos, algebraicos y geométricos que debe enfrentar el alumno le impedirá ver con claridad el propósito de la situación, y esto redundará en el riesgo de ocupar mucho tiempo de trabajo y romper los límites de tiempo programado para el desarrollo de la misma.

Cuarta reunión: 5 de mayo de 2000.

- No interpretar adecuadamente las instrucciones señaladas en cada actividad.
- La falta de experiencia de los estudiantes a trabajar en equipo.
- Falta de iniciativa para trabajar de la manera que mejor les convenga las actividades.
- La falta de costumbre de ser observados cuando trabajan por alguien que tomará notas, otros que estarán videograbando etc..
- Señalan que los estudiantes pueden tener dificultades para el manejo de exponentes y factorización; lo que les impedirá poder extraer información en alguna de las actividades.
- La falta de habilidad de los estudiantes para elaborar reportes escritos de actividades desarrolladas por ellos.

Quinta reunión: 20 de mayo de 2000.

- No se agregaron nuevos elementos.

El trabajar la situación didáctica resultó de mucho interés para los profesores, les gustó mucho. Les atrajo la cantidad de elementos matemáticos que desde su punto de vista se ponen en movimiento, en especial, llamó su atención el uso de la geometría e instrumentos geométricos para tratar asuntos que por lo general estaban acostumbrados a abordar casi exclusivamente con enfoques analíticos. El encontrar en una sola actividad escolar el uso explícito de distintos tipos de números fue otro elemento de comentarios.

El aspecto de poner en juego varios conceptos matemáticos y lo variado de las actividades nos orilló a definir la situación como “robusta”, en contraste a las que están “acostumbrados” a desarrollar en su práctica escolar.

Este mismo carácter robusto de la situación los hace mirar con extrema cautela el llevar la situación con sus estudiantes. De hecho, en la definición de sus respectivos proyectos aparece como objeto de investigación: analizar el desempeño de los estudiantes cuando enfrentan una situación robusta.

Todas las observaciones hechas por los profesores sobre las posibles dificultades de los estudiantes al resolver la situación aparecerán en escena en el momento en que éstos la trabajaron. A partir de la conclusión de esta reflexión, los trabajos de preparación de las puestas en escena estuvieron en gran parte orientados a atender aquellos aspectos que desde la percepción de los profesores serían las dificultades que tendrían sus estudiantes.

La visión del profesor

Resumiendo, podemos decir que la reflexión conjunta sobre la experiencia de trabajar la situación didáctica nos permitió reconocer la visión de los profesores sobre tres aspectos relacionados a la situación y que podemos clasificar así: visión sobre la situación, visión sobre el contenido matemático de la misma y visión sobre los conocimientos, las habilidades y las actitudes posibles a desarrollar por los estudiantes candidatos a trabajar la situación. La visión es contrastante, ya que

están convencidos de la robustez de la situación y que puede resultar atractiva para los estudiantes, pero también reconocen debilidades en sus estudiantes que les puede impedir reconocer su importancia y por tanto no comprometerse al resolverlo.

Visión del profesor Sobre:	
La situación	<ul style="list-style-type: none"> • Contribuye a que el estudiante que integre múltiples conceptos matemáticos. • Permite emplear geometría en actividades que escolarmente se tratan ajenas a ésta. • Obliga al uso y análisis explícito de distintos tipos de números, propiciando romper con esto la costumbre escolar de ejemplificar casi exclusivamente con enteros. • Permite reconocer la potencia de ciertos conceptos matemáticos como es el caso de la semejanza. • Permite reconocer el carácter de herramienta-objeto de algunos conceptos matemáticos.
El contenido matemático	<ul style="list-style-type: none"> • Hace explícita la necesidad de integrar elementos aritméticos, algebraicos y geométricos. • Pone en uso resultados geométricos y orilla a la necesidad de justificar las afirmaciones hechas. • Empleo de exponentes y radicales así como las relaciones entre unos y otros. • Ante la dificultad de operar físicamente segmentos como $2^{1/64}$ se induce a la generalización. • Permite analizar el carácter creciente de la función y la dificultad desde la perspectiva de la situación de hacer el trazo continuo.

El estudiante	<p>Conocimientos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Debilidad en los conocimientos previos del estudiante, y posible desconocimiento de varios conceptos. <p>Habilidades:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Inexperiencia de los estudiantes para manejar escuadras y compás. • Falta de costumbre para elaborar reportes. <p>Actitudes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Temor o desconcierto de los estudiantes a enfrentar un problema no común. • Ante la amplitud del problema, se temía que a los estudiantes se le dificultara reconocer el propósito invirtiendo mucho tiempo en la comprensión del problema. • Temor de los estudiantes a ser observados trabajar. • Falta de iniciativa para trabajar los problemas.
----------------------	--

La desconfianza en relación al dominio de los antecedentes matemáticos de los estudiantes hizo que se elaboraran propuestas para regularizar a los estudiantes o por lo menos fortalecerlos ante la situación didáctica que se les propondría trabajar.

Se propuso enseñar a los estudiantes el uso correcto de escuadras y compás; además elaboraron un programa y materiales para la regularización de sus estudiantes en donde tratarían aspectos matemáticos que los profesores consideraban deberían saber con cierta soltura para trabajar eficientemente la situación. Los aspectos que dicho programa consideraba son: El sistema de los números reales, naturales, enteros, racionales e irracionales. Propiedades de orden de los números reales, leyes de los signos, exponentes y radicales, especialmente radicales y exponentes racionales. Ángulos opuestos por el vértice, concepto de paralelismo. Triángulos y polígonos, clasificación y propiedades principales. Puntos y

rectas notables en el triángulo, Congruencia de triángulos y semejanza de triángulos. Una amplia discusión sobre el teorema de Thales.

Dadas las dimensiones y amplitud de la guía, la cual constituía casi un curso completo de regularización, se les argumentó que no era ese el propósito de nuestra actividad, así mismo se les sugirió como alternativa que resaltarán o hicieran énfasis en sus cursos normales sobre aquellos aspectos que consideraran relevantes para trabajar la situación dado que se contaba con tiempo para hacer eso.

Se acordó realizar todo el trabajo de la primera etapa de la situación (el estudio de los aspectos geométricos, algoritmos geométricos) en sesiones previas a la puesta en escena. Podían ocupar para ello todas las sesiones que consideraran pertinentes con los estudiantes que participarían en la puesta. Cada profesor efectuaría el trabajo de la primera etapa con su grupo de manera independiente, nos reportarían cuando consideraran estar listos. Paralelamente se inició el estudio del fenómeno de reproducibilidad, con la lectura de artículos y la elaboración de sus respectivos protocolos de investigación.

La preparación de la puesta en escena en sus respectivos lugares de trabajo quedaría a cargo de cada uno de los profesores. Se realizaron dos puestas en escena una en el C.E.T.I.S # 36 del Estado de México perteneciente al sistema medio superior de la Dirección General de Tecnológicos DEGETI con un grupo de 15 estudiantes mujeres que se encontraban cursando el sexto semestre. La otra puesta, se realizó con un grupo mixto de nueve estudiantes de la Escuela Preparatoria Oficial No. 83 en Teoloyucan, Edo. de México.

Previo a las puestas en escena, se les solicitó a los profesores, una propuesta de modificación a la situación didáctica, ésta modificación constituía el momento crucial en el cual ellos podría afectar en la estructura de la secuencia, aspecto que constituía un aspecto fundamental ya que esto se producía al final de un largo

proceso de apropiación de la ingeniería. Estas modificaciones serían hechas considerando las características de sus estudiantes, elemento que constituye una parte fundamental de la ingeniería dentro del análisis preliminar, pues es en él cuando se hacen consideraciones didácticas de tipo local (microdidácticas). Desde la perspectiva de nuestra investigación constituía el principal momento de adaptación de la ingeniería a los dos grupos que la trabajarían.

Las modificaciones hechas por los profesores, orientaron su atención principalmente a la precisión de las instrucciones y al cambio de orden de algunas de ellas. Estas modificaciones se centraron principalmente al lenguaje*. La estructura y el contenido de la misma fue dejado intacto.

Determinación de la dinámica de la puesta en escena y la participación de los profesores.

En relación a la dinámica de la puesta en escena, se determinaron tres aspectos. Limitar el tiempo de trabajo de cada una de las etapas a una hora de trabajo, extendiéndolo quince minutos más para culminar los reportes de los equipos. Dividir al grupo en equipos de tres estudiantes, cada uno de ellos acompañado por un profesor. Realizar una etapa de discusión grupal.

Respecto a la intervención de los profesores, se definió como participativa, es decir los profesores asumirían un papel activo frente a los estudiantes, respondiendo a sus preguntas, orientándolos, recordándoles o sugiriéndoles aspectos matemáticos vistos en la etapa de preparación de la actividad. Esta participación aunque así definida estaría restringida a dos aspectos ya discutidos previamente como son el profesor en el papel de desbloqueador y como centralizador. En ambos casos se acordó emplear la estrategia de regresar las preguntas al equipo en el caso de bloqueo tales como, ¿cuál es la dificultad?, ¿por qué están haciendo eso?, ¿qué crees que vas a encontrar haciendo lo que estás haciendo?, etc. El propósito era ser

* Las propuestas de cambio a la situación didáctica y la versión definitiva de ésta, se encuentra en el Anexo D con el título Modificaciones a la Situación.

lo menos directivos posible y fomentar la discusión grupal, por ejemplo preguntarle a algún miembro del equipo si entiende lo que está haciendo su compañero, si está de acuerdo, pedirle que exprese sugerencias etc.. De manera análoga en el caso de que el equipo se hubiera desviado del tema central de la etapa en la que se entraran trabajando. Estos procedimientos fueron discutidos ampliamente con los profesores.

Los profesores también tendrían tareas de observación sobre la evolución del trabajo del equipo, esto en términos de los elementos que estaban planteados en las órbitas. Además acordamos que señalarían sus intervenciones y que reportara una visión general de la dinámica de trabajo al interior de los equipos*. Para afrontar tal actividad, resolvieron videografar la actividad de cada uno de los equipos así como la dinámica global del grupo, además de los apuntes y las audiograbaciones.

Las puestas en escena se efectuaron puntualmente y según lo acordado.

Conclusión

Las tres etapas de preparación para llevar la ingeniería a distintos escenarios didácticos, fueron sustancialmente distintas, cada una de ellas ha estado marcada por una preocupación principal, lograr que el profesor sea más conocedor de la ingeniería, tratando de llegar al nivel de considerarla como idea propia y así poder adaptar a sus estudiantes como acostumbra hacerlo cuando diseña clases o actividades de aprendizaje para sus alumnos. Estamos seguros de haber logrado un alto nivel de involucramiento de los profesores, creando un ambiente de trabajo académico en equipo, totalmente horizontal, atendiendo a sugerencias y discutiendo largamente la conveniencia o no de un cambio en la situación así como en la implementación de la misma en sus grupos.

* Los profesores generaron un documento donde definen cuál será su actuación al interior de los equipos. Dicho documento se encuentra en el Anexo D con el nombre de Estrategia de Observación.

Un elemento relevante a comentar, es que metodológicamente, nosotros nos reconocemos y actuamos como un sujetos ajenos al sistema conformado por los profesores y estudiantes en sus respectivas instituciones; si pudimos llevar nuestra ingeniería a tales estudiantes, es debido a que sus profesores lo propician y permiten, además ellos son los que lo hacen, nosotros somos invitados a la experiencia para observar el evento.

A pesar del alto nivel de involucramiento de los profesores, las largas sesiones de preparación, quedaba por ver la parte sustantiva de la actividad de los estudiantes con la situación, observar cómo la viven y qué resulta de tal experiencia a partir de nuestras predicciones y propósitos didácticos de la misma.

Capítulo IV

La reproducibilidad en el ámbito de la interacción entre alumnos y profesores

En este capítulo abordamos el polo correspondiente al alumno, esto lo hacemos cuando analizamos la actividad matemática desarrollada por el estudiante al trabajar la situación didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x ”, dicho análisis nos mostrará cómo vive la situación, cómo pone a prueba el diseño, cómo discurre su pensamiento en cada una de sus etapas, cómo pone en acción sus conocimientos previos y cómo se apropia de otros nuevos. También podremos observar cómo discute con sus compañeros y profesor los episodios que lo desconciertan y por ende no encuentra salida para ellos.

Cuando se analiza la actividad del estudiante, se observa en la mayoría de los casos un fenómeno esperado: si bien la actividad de los estudiantes se inicia interactuando con planteamientos dados a través de instrucciones en un documento, conforme transcurre el tiempo la interacción se desplaza de manera significativa hacia el profesor. Mostraremos que en muchos casos la actividad matemática del estudiante está mediada por el profesor, intentaremos caracterizarla, e indicar en los casos donde sea patente la función de tal mediación;

a tales fenómenos nos aproximaremos analizando las interacciones producidas entre los estudiante y profesores al interior de los equipos de trabajo.

Sostendremos que la actividad matemática de los estudiantes está fuertemente influida por el profesor dentro de la diversidad de actuaciones de éste.

El alumno

Ya hemos discutido cómo ha evolucionado la preparación de las puestas en escena, ahora nos proponemos mostrar la parte medular de dichas puestas y que denominamos la actividad matemática de los estudiantes, buscaremos exhibir cómo se dio ésta y como llevó a los equipos al cumplimiento de los propósitos didácticos de la ingeniería. Hemos buscado diversos procedimientos que de manera sintética muestren dicha actividad, así como el nivel en el que estamos interpretándola en términos de lo que hemos denominado reproducibilidad externa e interna, además de que haga patente el resultado de las variadas interacciones con el profesor y cómo éstas redundan en el logro o no de los propósitos didácticos de la ingeniería.

Actividad matemática de los estudiantes.

La actividad matemática correspondiente a las puestas de 1997 y 1998 ya ha sido reportadas en (Lezama, 1999), de la experiencia del 97 pudimos identificar las dificultades que experimentan los estudiantes para darle significado a la actividad de elevar exponentes no enteros. Esto nos hizo reforzar la hipótesis de que la ingeniería diseñada con el propósito de introducir a los estudiantes al estudio de la función exponencial, se constituía en un importante medio para enfrentar al estudiante al rompimiento de criterios que están fijos en relación a interpretaciones de la exponenciación para enteros positivos, y que aún las interpretaciones para las potencias cero y negativas, están lejos de ser estables entre los estudiantes.

En la puesta de 1998 encontramos diferencias significativas con la primera. No es nuestro propósito comparar las experiencias, sin embargo cierto contraste de ellas nos permite ver la aparición de elementos nuevos a considerar. La variedad de estudiantes e instituciones involucrados pone a prueba la ingeniería, por la formación de cada uno de ellos, su familiaridad con el tema tratado, sus respectivos intereses en relación con la matemática podría apuntar a una experiencia radicalmente distinta en cada grupo y en relación a la primera experiencia. Es la estructura de la situación la que aparece a primera vista como un elemento unificador de las experiencias, ya que hace que una comunidad discuta y analice en distintos ámbitos y tiempos, las mismas preguntas y afronte problemas similares. Sin embargo como muestran las historias de clase, los equipos se distinguirán por el tiempo que se tomen en resolver las situaciones problemáticas que se les presentan y por la capacidad que tengan para superar los problemas matemáticos que enfrentan, haciendo uso de sus propios recursos y de los que las condiciones del medio les brinda como es el caso del profesor.

Puesta en escena del 2000³

Daremos tres breves visiones de lo sucedido con los equipos, con el fin de mostrar cómo evolucionaron los grupos dentro de la actividad y como se aproximaron al propósito didáctico de la situación.

Consideración de elementos de reproducibilidad externa

En la primera tabla mostramos como avanzó cada equipo y exhibimos si fue resultado de acciones exclusivas de los estudiantes y si hubo intervención o no del profesor.

³ La información expuesta aquí, está documentada en el Anexo C

En la tabla, la letra “ β ” significa que desde nuestro punto de vista el equipo cumplió con las instrucciones interpretándolas más o menos correctamente realizando completa la actividad y que contamos con evidencia de ello.

El par de letras “ βp ” significan lo mismo que la letra β , pero tenemos evidencia de que esto se logró por la intervención del profesor.

La situación didáctica fue diseñada para que el estudiante transitara de manera independiente por ella, para que eso se produzca es necesario que el estudiante tenga cierto control de los conocimientos previos o bien el equipo desarrolle una actividad de interacción entre ellos lo suficientemente activa para ir esclareciendo las situaciones problemáticas. El profesor presente en el equipo tenía una función de apoyar ese esfuerzo de los estudiantes. Orientar, proponer, responder pero confiriéndoles la responsabilidad a los estudiantes.

Las tres formas que hemos adoptado para representar la actividad de los estudiantes tratan de mostrar las circunstancias de cada equipo, cómo emplearon sus propios recursos, y cómo influyó la presencia del profesor

2000	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14
Equipo 1b		β	βp							β	βp			
Equipo 2b	β			p						β	β			
Equipo 3b	β	β	βp					p		β	βp			
Equipo 4b	β	β		p		p				β	βp			
Equipo 5b	β	β		p	p	p	p	p		β	β			
Equipo 6b	β	β	β	βp	p					β	β	β	β	
Equipo	β	β	β	β	βp		β	β	β	β	β	β	β	β

2000	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14
7b														
Equipo 8b	β	β	β	β	β	βp				β	β	β	β	

Lo relevante de este primer acercamiento a la actividad de los equipos es observar su contrastante avance. Los equipos del 1b al 5b constituyeron un grupo que denominaremos el Grupo CETIS y trabajaron juntos en la primera puesta, los equipos del 6b al 8b otra y que denominaremos Grupo Teoloyuca. Desde el punto de vista de la reproducibilidad externa el avance del grupo CETIS fue reducido, los estudiantes trabajaron las dos primeras actividades con grandes dificultades y de manera muy lenta. Pronto, todos los profesores se vieron obligados a intervenir y en algunos casos ya no pudo continuar el avance de los equipos, ya sea por que consumieron el tiempo o por que el equipo entró en una dinámica de suma dependencia del profesor (el profesor guía la actividad pero los estudiantes ya no nos dan muestra de avance).

El grupo Teoloyuca, tuvo un desempeño muy distinto, asunto que será discutido más adelante, pero a diferencia del primer grupo dieron muestra que con mayor tiempo hubiera podido ampliar su avance.

Comparativamente el avance del Grupo Teoloyuca se parece más en su desempeño a los equipos de la puesta en escena del 98. El Grupo CETIS muestra fuertes contrastes aún con los equipos que más bajo desempeño tuvieron en la puesta del 98.

Elementos de reproducibilidad externa e interna

En la siguiente tabla se muestra cuál fue el avance de los equipos en términos del total de actividades a desarrollar. También se muestra cuál fue la intervención del profesor en términos del avance del equipo y cuáles fueron aquellos aspectos que

desde nuestro punto de vista fueron discutidos con suficiente profundidad. Esta tabla nos permite ver de manera paralela lo que hicieron y lo que entendieron de la situación y que nos permite ampliar la visión a lo que hemos denominado elementos de reproducibilidad interna.

Por ejemplo, en el equipo (E1b) tenemos: De las 14 situaciones adidácticas a trabajar, lograron zanjar 4 de ellas, lo que indica que tuvieron un avance del 28% de la situación didáctica. El aspecto de la participación del profesor en dicho avance tenemos que, de 4 situaciones adidácticas trabajadas, en 2 de ellas tenemos evidencia de algún tipo de intervención del profesor, lo que nos hace señalar que en ese equipo tuvo una intervención del 50% por parte del profesor en el avance del equipo. Por último señalamos los aspectos que fueron trabajados con profundidad en el equipo.

En esta puesta en escena un nuevo fenómeno surge, en algunos equipos del grupo CETIS el profesor tiene una participación inusitada en la que él desarrolla algunas partes de las actividades, explicándole al equipo con todo detalle sin lograr con ello avance del equipo. Hemos agregado a la tabla aquellos aspectos que consideramos como logro de los estudiantes y que son indicio de reproducibilidad interna, aspectos que constituyeron dificultades o factores de bloqueo o dispersión en el trabajo de los estudiantes.

E	Avance	Intervención	Logros en la actividad matemática de los estudiantes	Dificultades en la actividad matemática de los estudiantes
	Razón %	Razón %		
E1b	4/14 28%	2/4 50%	<ul style="list-style-type: none"> • Si se dan cuenta que hay que encontrar parejas ordenadas, pero les cuesta trabajo identificar las ordenadas con los segmentos. • Intentan proceder de manera geométrica pero creando sus propios criterios. • Gradúan los ejes con escalas distintas • Ubican únicamente un punto 	<ul style="list-style-type: none"> • No logran asociar las potencias enteras con los segmentos marcados en la hoja de trabajo. • No logran identificar la unidad y eso les hace elaborar escalas distintas en los ejes. • No recuerdan los algoritmos geométricos, además no encuentran el sentido de utilizarlos. • Tienen grandes dificultades para

E	Avance	Intervención	Logros en la actividad matemática de los estudiantes	Dificultades en la actividad matemática de los estudiantes
	Razón %	Razón %		
			<p>pero no hay evidencia que lo identifique con alguna potencia de dos.</p> <ul style="list-style-type: none"> Llenan todas las tablas, pero no logran dar significado a los resultados obtenidos. 	operar con los exponentes y con la factorización.
E2b	3/14 21%	0/3 0%	<ul style="list-style-type: none"> Ubican todas las potencias enteras. Hacen un genuino intento por dar una alternativa para potencias fraccionarias. Lograron llenar todas las tablas siguiendo el ejemplo de la tabla uno. 	<ul style="list-style-type: none"> Elevar a potencias fraccionarias constituye un problema para ellas y tratan de darle salida, operando con productos (el entero por la fracción pero no tienen ningún elemento que les de certeza al operar). La interpretación de potencias enteras no les da ningún indicio para operar con potencias fraccionarias. Al intentar operar con las potencias, muestran grandes dificultades para manejar reglas de los exponentes.
E3b	5/14 35%	2/5 40%	<ul style="list-style-type: none"> Ubican todas las potencias enteras. Tienen claro que hay que encontrar parejas ordenadas, ubican éstas pero pensando en que los puntos deben estar sobre una recta, y la colocan de manera creciente. Logran llenar todas las tablas. 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretan la exponenciación de manera que no les estorbe la interpretación de que los puntos deben estar en línea recta. Esta interpretación les impide problematizar lo relacionado a las potencias fraccionarias. La interpretación de las tablas se ve afectada por la interpretación que han hecho de las expresiones exponenciales.
E4b	4/14 28%	1/4 25%	<ul style="list-style-type: none"> Ubican todas las potencias enteras. Ubican los valores de las potencias fraccionarias vigilando que correspondan los valores de dos a la cero y dos a la uno, los otros dividiendo en cuartos el eje X e Y y ubicando los otros valores en un orden que no rompa el orden que ellas establecieron. Interpretan que las potencias fraccionarias son mayores que uno. Trazan una recta en forma creciente. Logran llenar todas las tablas. 	<ul style="list-style-type: none"> Como los valores los ubican de manera arbitraria guiados por los valores enteros que si saben calcular, no se problematizó el elevar a potencias fraccionarias. En la búsqueda de una alternativa para las potencias fraccionarias interpretan que $2^{p/q}=1+p/q$.

E	Avance	Intervención	Logros en la actividad matemática de los estudiantes	Dificultades en la actividad matemática de los estudiantes
	Razón %	Razón %		
			<ul style="list-style-type: none"> El factor de crecimiento es n y señalan, porque “n” significa muchas. 	
E5b	4/14 28%	0/4 0%	<ul style="list-style-type: none"> Ubican todas las potencias enteras. Llenaron todas las tablas e identificaron el factor de crecimiento. 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretan 2^0, luego de discutir entre el grupo, concluyen que $2^0=1$ y así lo escriben. Finalmente al dar su versión de cómo calcular las potencias fraccionarias escriben $2^{1/2}=2*(.5)=1$, y no entran en conflicto. Generan un criterio para elevar a potencias fraccionarias multiplicando la base por la fracción correspondiente al exponente. Eso les permite ubicar puntos en el plano sin dificultades. El criterio que las guía es el de la aproximación, tiene idea de que de alguna manera que los resultados están dados en forma fraccionaria. Afirman que el criterio geométrico sólo es para comprobación de los resultados.
E6b	8/14 57%	1/8 12%	<ul style="list-style-type: none"> Ubican todas las potencias enteras. Obtienen el segmento $2^{1/2}$. Logran hacer las descomposiciones como producto de potencias pero no les da tiempo de encontrar los segmentos geoméricamente. Hacen explícito el carácter ascendente de la gráfica. Llenan todas las tablas, las comparan e identifican la razón de crecimiento en todas. 	<ul style="list-style-type: none"> El profesor los ayuda para recuperar el algoritmo de la media geométrica, lo recuerdan rápidamente y lo aplica con efectividad. El algoritmo del producto de segmentos no lo logran aplicar pero saben que es posible encontrar resultados para las potencias fraccionarias. No logran encontrar la relación entre el incremento de la variable y la razón de crecimiento.
E7b	13/14	1/13	<ul style="list-style-type: none"> Ubican las potencias enteras. Desarrollan criterios propios para encontrar las potencias fraccionarias. Encuentran relaciones de proporcionalidad que les permite reconstruir rápidamente el algoritmo de la media geométrica. Observan claramente el carácter creciente de la función. 	<ul style="list-style-type: none"> El haber encontrado un método alternativo para encontrar la $\sqrt{2}$, dificultó la obtención de $\sqrt{\sqrt{2}}$, pero la exploración permitió encontrar otras potencias empleando recursos geométricos más simples. Sin embargo no pueden encontrar $2^{3/4}$.

E	Avance	Intervención	Logros en la actividad matemática de los estudiantes	Dificultades en la actividad matemática de los estudiantes
	Razón %	Razón %		
	92%	8%	<ul style="list-style-type: none"> Llenan todas las tablas, identifican el factor de crecimiento y elaboran una hipótesis de cómo es el crecimiento de la función. 	
E8b	10/14 71%	1/10 10%	<ul style="list-style-type: none"> Ubican todas las potencias enteras. Encuentran los segmentos $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$. Hacen descomposición de los exponentes para encontrar los otros segmentos pero se equivocan al multiplicar los segmentos. Logran el llenado de todas las tablas. Identifican los factores de crecimiento pero no pueden generalizar. 	<ul style="list-style-type: none"> No pueden aplicar el algoritmo para producto de segmentos, sin embargo conocen las descomposiciones de exponentes que posibilitan la obtención de la potencia. Identifican el factor de crecimiento con el incremento de la variable.

Como se puede observar, los grupos avanzaron en la dirección que marcaba la situación, si bien la lectura e interpretación de la información que había que obtener de la hoja de trabajo no fue uniforme, todos terminaron interpretando de manera correcta. Pronto se puso en juego los conocimientos previos de los estudiantes, el manejo de los exponentes enteros suscitó algunos conflictos pero fueron superados. Todos los equipos mostraron dificultades al enfrentar potencias fraccionarias, fue la etapa que algunos equipos no lograron superar pero que generó las acciones más interesantes de los equipos. En esa etapa estaban los equipos totalmente inmersos en el problema al que los quería llevar la situación. Como se puede ver en la tabla anterior y que luego analizaremos con más detalle, los estudiantes al no tener a la mano respuestas seguras a los problemas que se les planteaban, optaron por dar respuestas tratando de dar sentido al problema de elevar a potencias fraccionarias.

Es relevante notar el hecho de que si para ellos tenían un significado elevar a potencias enteras positivas, su actuar con las potencias fraccionarias debería ser del mismo nivel, es decir deberían dar una respuesta de tal manera que tuviera un significado tan claro como el de las potencias enteras. La respuesta se complicaba ya que la actividad autoimpuesta por los estudiantes iba más allá del algoritmo, requería de mayor sentido. La construcción de diversa respuestas por parte de los equipos dificultó una pronta interpretación de lo que finalmente hicieron y por otro lado causó conflicto entre los profesores ya que eran testigos de respuestas inadecuadas que los obligaba a interactuar intensamente en los equipos en busca de la respuesta correcta.

Un fenómeno local

Como hemos explicado con anterioridad la situación didáctica consta de tres etapas, se resolvió trabajar la primera etapa por separado, cada profesor buscaría la manera de trabajarla de acuerdo a la disposición del tiempo de él y sus estudiantes. Cuando hubieran cubierto ese requisito estaríamos en condiciones de trabajar las etapas complementarias. Así se hizo. Cada profesor podría efectuar la realización de la primera etapa de la manera que mejor conviniera, pero era indispensable que los estudiantes tuvieran dominio de los algoritmos geométricos para manipular los segmentos en la etapa subsiguiente. Recibimos el reporte de que los grupos estaban listos. Se llevaron a cabo sendas puestas en escena e inmediatamente nos dimos cuenta de una gran diferencia entre los dos grupos. En el grupo CETIS, en general no tenían dominio de los algoritmos geométricos, a diferencia del grupo Teoloyuca que aunque no los tenía dominados, con unas cuantas sugerencias eran capaces de recuperarlo.

El fenómeno surge en el grupo CETIS cuando en la segunda etapa enfrentan la necesidad de hacer uso de dichos algoritmos, algunas estudiantes los recordaban vagamente o de plano no tenían la más mínima idea de lo que había que hacer. Podríamos afirmar que el grupo CETIS enfrentó la segunda y tercera etapa de la

situación ajenas de la primera. Este hecho es muy significativo por lo que sucedió en el trabajo de la segunda etapa.

Hasta ahora la situación didáctica ha guardado gran estabilidad en todos los equipos que la han trabajado, en los siguientes hechos. Los estudiantes si son capaces de elevar a potencias enteras, si bien surgen dificultades para la potencia cero. En todos los equipos han mostrado dificultades para cuando la potencia es racional, es decir el planteamiento de elevar dos a la potencia $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etc., enfrenta a la mayoría de los estudiantes al rompimiento de las ideas asociadas a elevar a potencias enteras positivas. Como ya se ha señalado en la descripción de las órbitas, la incorporación de la estrategia geométrica consiste en deslizar el problema del campo numérico al campo de la geometría donde ellos puedan manipular unos objetos geométricos de magnitudes raíz cuadrada de dos, raíz cuarta de dos, etc..

En el caso del grupo CETIS las estudiantes, no con pocas dificultades remontaron las primeras etapas de la situación, llegando a aquellas donde se les pedía manipulas las potencias fraccionarias de dos. Las estudiantes desconcertadas entablaron una lucha con sus conocimientos previos que no les proveían de alternativas claras para responder al cuestionamiento. La vía geométrica les estaba vedada por razones descritas con anterioridad. Como en ninguna otra experiencia las propuestas fueron ricas e ingeniosas. Las estudiantes no dieron muestras de preocupación o se arredraron ante el problema. Su ingenio se puso en marcha y nos proveyeron de varias interpretaciones. Este hecho contrastaba con la cara de desconcierto de sus profesores que teníamos el firme convencimiento de que todo marchaba mal. Este hecho determinó la experiencia pues nos movíamos en distintos niveles, las estudiantes a buscar una salida a los problemas planteados y los profesores a luchar por hacer que las estudiantes elaborarán respuestas acordes a lo planeado.

En las tablas que siguen se muestra desde el punto de las interpretaciones de los estudiantes, las salidas que dieron a los problemas planteados por la situación y que en el tiempo concedido para trabajar la experiencia les permitió afrontar.

Equipo 1B	Equipo 2B	Equipo 3B	Equipo 4B	Equipo 5B
<ul style="list-style-type: none"> • Ubican puntos en forma aproximada. (2) • No ubican a las potencias fraccionarias. (3) • No interpretaron 2^0. (1) • Afirman que $2^1=1$ y $2^2=2$. (3) • No dan ningún significado a las tablas. (5) 	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretan correctamente las potencias enteras. (8) • Señalan $2^0=1$. (8) • No recuerdan los procedimientos geométricos. (10) • Intuyen que para obtener $2^{1/2}$ hay que efectuar alguna operación pero no la establecen. (11) • Hacen propuestas al profesor para hallar $2^{1/2}$, por ejemplo $2^{1/2}=2.5$. (11) • Logran llenar las tablas pero no logran darle significado. (13) • Al trabajar con las tablas interpretan los exponentes fraccionarios como radicales pero en forma inconsistente. (13) 	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican las potencias enteras, pero proceden después en forma contradictoria. (15 y 17) • Interpretan las potencias fraccionarias diciendo que $2^{p/q}=p/q$. (17) • Generan una línea recta como gráfica. (21) • El análisis de las tablas les sugiere un comportamiento de crecimiento o decrecimiento. (26) 	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretan los segmentos asociados a potencias enteras con dificultad. (28) • Ubican a 2^0 como el primer punto de la gráfica, no quedando claro si lo interpretan como 1 o 0. (32) • Para ubicar los puntos asociados a potencias fraccionarias hacen uso de interpolación. (31) • De la disposición de su gráfica se desprende que $2^{p/q}=1+p/q$ y además que $2^0=1$. • Tienen dificultades para llenar las tablas y no pueden darle sentido a las mismas. (35-37) 	<ul style="list-style-type: none"> • Localizan inmediatamente los puntos asociados a potencias enteras. (38) • Afirman $2^0=1$. (38) • Afirman que $2^{p/q}=2(p/q)$ pero la fracción escrita en forma decimal. (41-45) • Logran llenar las tablas pero no logran darle sentido. (47-49)

Concluyendo la experiencia con el grupo CETIS, el grupo de profesores se mostró desconcertado por los errores en los que habían incurrido las estudiantes y los habían orillado a prácticas que en la planeación se habían acordado no tener tales

como las de intervenir explicando procedimientos a los estudiantes, o mantener largos diálogos con los equipos, así como entrar a los procesos de validación de las afirmaciones de los estudiantes.

Se experimentó una sensación de fracaso, ya que las respuestas de los estudiantes tenían varios errores y no habíamos logrado en el tiempo establecido para la actividad corregir algunos de ellos.

Inmediatamente se buscó dar una explicación a lo sucedido. La experiencia mostró de manera clara que las estudiantes habían enfrentado la situación sin los antecedentes matemáticos necesarios para desarrollar la actividad, especialmente eran incapaces de recordar los algoritmos geométricos.

Si las estudiantes no contaban con los elementos matemáticos suficientes, por qué no habían rechazado trabajar la situación o bien, deberíamos interpretar sus respuestas como acciones para salir del paso. Los cinco equipos habían elaborado de manera independiente respuestas distinta y erróneas.

Una primera explicación de lo sucedido se elaboró a partir de una caracterización del contrato didáctico que se estableció. Las estudiantes no contaban con los antecedentes matemáticos para superar algunos problemas planteados (los fundamentales). Los profesores les estábamos proponiendo problemas que no podían afrontar con solvencia, los profesores teníamos planeado apoyar pero dejar la responsabilidad de la respuesta a los estudiantes. La preguntas de las estudiantes habían sido variadas en los equipos y las interacciones no daban muestra de que encontraran una salida.

La primera explicación en términos del contrato fue el que las estudiantes que habían sido invitadas por su profesor a participar en la actividad no lo habían querido defraudar y por ello se habían esforzado en elaborar respuestas que difícilmente podrían justificar.

Esta explicación solo toca el propósito y sentido de la situación por el contenido temático de las respuestas, pero no dice nada en relación al cumplimiento del propósito de la ingeniería y mucho menos del problema de la reproducibilidad.

Grupo Teoloyucan una experiencia contrastante

En el grupo Teoloyucan las cosas fueron distintas. Los estudiantes trabajaron la primera etapa con un criterio de entrenamiento, de “prepararse para” y con ese antecedente los resultados fueron distintos. Este grupo se comportó de manera muy parecida a las experiencias del 98, sin embargo el equipo 7b en su desempeño se pareció más a alguno de los mejores equipos de la experiencia del 97, desde el punto de profundidad de las discusiones y el avance de los equipos, la puesta del 97 ha sido la más significativa, pero las condiciones fueron extraordinarias tanto en tiempo como en motivación de los estudiantes.

Hay que señalar que el equipo 7b, compuesto por tres estudiantes ha sido probablemente el más original de todos los trabajados bajo control hasta la fecha. Su originalidad estribó en el hecho de que hicieron cambios en el orden del trabajo de la situación, generaron su propia estrategia geométrica para resolver los asuntos planteados y obtuvieron el significado más profundo de los algoritmos geométricos. Es decir entendieron a cabalidad que se estaba hablando de proporcionalidades.

Lo más extraordinario de esta experiencia fue la dinámica de trabajo y que describimos brevemente a continuación.

La etapa dos de la secuencia, después de pedir que se ubique ciertos segmentos asociados a potencias enteras, pide se encuentren por medios geométricos los puntos $(1/2, 2^{1/2})$, $(1/4, 2^{1/4})$, $(3/4, 2^{3/4})$, etc., en ese orden. Los estudiantes se dan cuenta que el orden está invertido, deciden encontrar primero $(1/4, 2^{1/4})$, pero no recuerdan el algoritmo geométrico. Enfrentan el primer bloqueo, cómo encontrar geoméricamente $2^{1/4}$. Es este bloqueo que les hace resolver toda la situación, pues en su búsqueda encuentran todas las demás potencias. Descubren que a través del

teorema de Pitágoras pueden encontrar $2^{1/2}$, esto los anima a buscar la raíz cuarta por ese medio, pero se resiste a salir. Rápidamente se dan cuenta que $2^{3/4}=2^{1/2} \cdot 2^{1/4}$; $2^{5/4}=2 \cdot 2^{1/4}$; $2^{3/2}=2 \cdot 2^{1/2}$; $2^{7/4}=2 \cdot 2^{3/4}$. Si conocieran $2^{1/4}$ todo estaría resuelto. Insisten con el teorema de Pitágoras porque saben que $2^{1/4} = (2^{1/2})^{1/2}$. Deciden explorar el algoritmo estudiado en la primera etapa y lo recuperan con cierta facilidad, en el intento se dan cuenta que los dos algoritmos descansan en la semejanza, e inician el planteamiento de semejanzas para encontrar la anhelada raíz cuarta de dos. Es un ejemplo muy interesante de devolución de una situación didáctica. El intento de solución de la parte les da el todo.

Equipo 6B	Equipo 7B	Equipo 8B
<ul style="list-style-type: none"> • Identifican correctamente los segmentos con potencias enteras. (50) • Recuperan el método geométrico con ayuda del profesor y lo aplican correctamente.(52) • Logran descomponer $2^{1/4}$ pero no lo pueden encontrar geoméricamente.(54) • Señalan que identifican una gráfica ascendente. (55) • Hacen el llenado de las tablas de manera correcta. (56,57) • Interpretan de manera incorrecta la idea de factor de crecimiento. (Confunden el incremento de la variable con la idea de factor de crecimiento).(58) • Logran interpretar el carácter creciente de la función exponencial. (59) 	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican las potencias enteras. (60) • Identifican las potencias fraccionarias como radicales. (61) • Saben que deben proceder de manera geométrica, pero no recuerdan dichos criterios.(62) • Deciden buscar primero el segmento $2^{1/4}$, llevados por un orden natural.(62) • Encuentran $2^{1/2}$ empleando teorema de Pitágoras.(63) • Hacen estimaciones numéricas para ubicar a $2^{1/4}$. (64) • Intentan extender dicho procedimiento para encontrar a $2^{1/4}$.(64) • En dicha búsqueda encuentran criterios para encontrar $2^{5/4}$ y $2^{3/2}$. (64) • Reconstruyen el algoritmo de la media geométrica. (64) • Hacen uso de proporciones para encontrar $2^{7/4}$.(66) • Muestran que son capaces de hallar más puntos por ese medio.(67 y 68) • Llenan las tablas de manera correcta.(69-71) • Se dan cuenta de la estructura de la función, e identifican las razón de crecimiento y la forma como va creciendo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican sin dificultad las potencias enteras.(74) • Tiene presente el criterio de la media geométrica y encuentran correctamente $2^{1/2}$ y $2^{1/4}$.(76-78) • Logran descomponer analíticamente $2^{3/4}$ pero no pueden reconstruir el algoritmo geométrico para el producto de segmentos.(79) • Si logran entender la estructura de las tablas.(81) • Tienen confusión entre el valor de incremento de la variable y el factor de crecimiento.(82) • No les da tiempo para discutir sobre la función exponencial en general.(84)

	(72) Hablan de la función exponencial en general y hacen observaciones sobre las características de la base.(73)	
--	---	--

En la tabla se muestra lo hecho por los estudiantes, una rápida inspección nos hace ver que las experiencias son contrastantes.

En términos de reproducibilidad qué se puede decir. Si el grupo Teoloyuca estaba mejor preparado para la experiencia, sus resultados fueron más aceptables y en algunos aspectos más profundos que el grupo CETIS. ¿Qué podemos afirmar sobre reproducibilidad? . Si fuimos los mismos maestros los que condujimos las experiencias, la situación fue la misma, las mismas preguntas, los escenarios físicos no creemos que hayan influido significativamente en ello. La discusión en los equipos giró en el mismo tenor en todos los equipos pero con frutos distintos.

Sabíamos que no podíamos esperar experiencias iguales, cada vez vemos más claro aquellos aspectos que introdujeron mayor ruido a las experiencias y que las hace muy distintas pero no se puede afirmar que disparadas. Aún nos queda analizar el papel de las interacciones con los profesores que nos aportarán más luz sobre los aspectos de la reproducción de los efectos didácticos.

El sistema didáctico en acción; interacciones entre alumnos y profesores

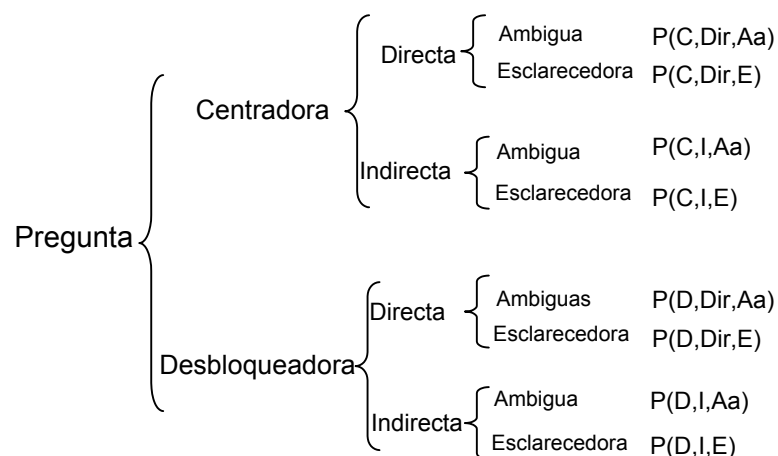
Como hemos podido observar el avance de los equipos discurre en algunos casos trabajosamente invirtiendo períodos significativos de tiempo en discutir cada uno de los elementos de las actividades constitutivas de la secuencia. En esta parte del trabajo vamos a establecer si bien de manera burda, el carácter y resultado de las interacciones entre profesores y estudiantes. En la planeación de las puestas en escena las interacciones fueron consideradas y se vio la necesidad de controlarlas por parte del profesor. Sabíamos que el estudiante consultaría al profesor para solicitarle orientación, para que le validara resultados etc., se acordó que el

profesor debería generar siempre una política de interacción pero sujeta a dos categorías básicas.

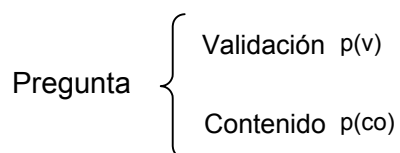
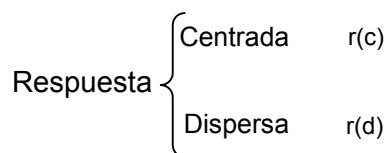
Dichas categorías se denominaron como interacciones de centración y desbloqueo. Centración, dirigida a regresar al tema de la situación al equipo si éste se dispersaba del mismo, y desbloqueo en el caso de que por alguna razón el equipo se detuviera largamente en algún asunto o bien diera muestra de que el problema que estaba enfrentado le resultaba infranqueable. Realmente las razones por las cuales un equipo se bloquea o se dispersa pueden ser múltiples, nosotros decidimos atender aquellas que estuvieran referidas al contenido matemático de la situación, a los antecedentes matemáticos de los estudiantes y a la dinámica del trabajo en equipo.

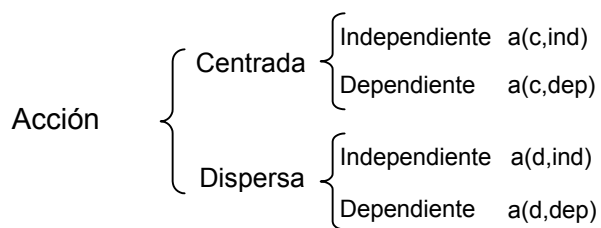
En un esfuerzo de simplificación de la descripción de las interacciones hemos elaborado un aparato descriptivo que a continuación se explica:

“←” Con este símbolo designamos interacciones que se inician o resultan en el sentido Profesor-Estudiante. Estas interacciones pueden ser Preguntas (**P**), Observaciones (**O**) (comentarios sobre el trabajo de los estudiantes), Indicaciones (**I**) (pueden ser tales como señalar errores, proponer actividades) y Acciones (**A**) (ejecutar actividades ante el equipo o con el equipo). Estas, **P**, **O**, **I** y **A** podrían tener función Centralizadora (**C**) o desbloqueadora (**D**). Estas dos funciones pueden tener el carácter directo (**Dir**) o indirecto (**Ind**). Tal carácter directo o indirecto podría ser formulada en forma ambigua (**Aa**) o esclarecedora (**E**) a los estudiantes. A continuación se muestra un esquema para el caso de las preguntas y que podría repetirse para las observaciones, indicaciones y acciones de manera análoga.



“ \rightarrow ” Con este símbolo designamos interacciones que se inician o resultan en el sentido Estudiante-Profesor. Estas interacciones pueden ser: Respuestas (**r**), Preguntas (**p**) y Acciones (**a**). En el caso de las respuestas “**r**”, éstas pueden tener el carácter de ser centradas (**c**) o dispersas (**d**) en relación a la pregunta formulada. En el caso de las preguntas “**p**”, pueden ser dirigidas a obtener la validación del profesor (**v**) o solicitando información de contenido matemático (**co**). Finalmente las acciones “**a**”, pueden ser centradas (**c**) o dispersas (**d**) en relación a la actividad que se está desarrollando. Finalmente se puede decir que las respuestas, preguntas y acciones pueden efectuarse independiente (**ind**) o dependiente (**dep**) del profesor. A continuación se muestran los esquemas para las respuestas, preguntas y acciones.





Si bien la calificación de cada una de las interacciones en las categorías que arriba se han planteado podría parecer arbitraria, se debe decir que se tiene el interés de interpretar con cierto grado de precisión cómo es un diálogo entre equipo y profesor para poder darnos cuenta cómo dicha interacción puede determinar el derrotero del equipo y finalmente poder hacer explícitos los factores que lleven al logro didáctico o no de la situación.

No podemos olvidar de que queremos caracterizar el proceso de reproducción de una situación didáctica y para ello requerimos observar los fenómenos que se producen al trabajar la situación didáctica. Por ello observamos con interés la actividad matemática, pero si bien el profesor está por principio interesado en que el estudiante, en este caso el equipo, alcance el propósito didáctico de la situación y que gira alrededor del cumplimiento cabal de ciertas actividades de orden matemático, para observarla y dado que la situación tiene un determinado nivel de complejidad tanto conceptual como operativa, nos obliga a separarla en actividad matemática que ya se ha discutido anteriormente y la dinámica en la que dicha actividad matemática se produce. Dicha dinámica es muy compleja y para estudiarla centramos nuestra atención en las interacciones.

A partir de estos esquemas de interacción, analizaremos los principales episodios de interacción producidos durante la puesta en escena del 2000 a fin de profundizar en la trama de las mismas para así identificar elementos de la actividad de los estudiantes a fin de determinar el logro didáctico de las experiencias.

Presentamos a través de una tablas los episodios referidos, así como su calificación en términos de la caracterización establecida en los esquemas descritos previamente. El número entre paréntesis al pie de la palabra profesor, corresponde a la numeración establecida en las historias de clase, Anexo D.

Equipo 1b	
<p>PROFESOR (3)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Pregunta <i>¿qué fenómeno observan con los puntos 2^0, 2^1, 2^2?</i> E: Contestan que están comentando. • P: <i>Nosotros estudiamos otras propiedades ¿qué significa $2^{1/2}$?</i> E₂: <i>La mitad de un entero.</i> • P: <i>Así lo interpretas tú, pero hay una condición matemática, ¿si manejaron leyes de exponentes? E_{1,2,3}: Si, si. P: <i>Y luego radicales ¿verdad? E_{1,2,3}: Si.</i></i> • P: <i>No se si ya encontraron la relación. P: Le dice a E₁, tú parece que estás cerca. Con esto que dije ¿no interpretas nada? E₁: No responde.</i> • P: <i>¿No se acuerdan?, es parecido a una semicircunferencia, ustedes revisaron dos estrategias geométricas. Cada una de ellas tiene un significado. Por qué no intentan hacer una, ¿para qué la utilizaron?. E₂: <i>Para encontrar la raíz.</i></i> • P: <i>Ahora háganlo.</i> • P: <i>en esta parte con su participación intenta que el equipo recupere el algoritmo geométrico para la raíz cuadrada (insiste mucho para tratar de lograr el objetivo).</i> • E₂: <i>Marca un segmento que divide en cuartos como lo que hizo en el eje "X" nuevamente. Hace un trazo de la supuesta raíz y le pregunta al profesor.</i> • El Profesor trata de indicar que el trazo hecho por la estudiante no toma en cuenta segmento unitario dado en la hoja de trabajo. E₂: <i>Traza un nuevo segmento que vuelve a dividir.</i> • E₁: <i>Realiza un nuevo planteamiento, según su interpretación.</i> • El equipo saca los apuntes que elaboraron en la actividad correspondiente a la etapa uno de la secuencia y que fue realizada 	<ul style="list-style-type: none"> ← P(C, Dir, Aa) ↪ r(d) ← P(D, Dir, E) ↪ r(d) ← O(D, I, Aa) ← P(C, Dir, Aa) ← O(D, Ind, Aa) ← P(D, I, Aa) ← I(D, I, E) ↪ r(c) ← I(C, Dir, E) ← I(D, Dir, E) ↪ a(d, ind) ↪ p(v) ← O(C, Dir, E) ↪ a(d, dep)

<p>previa a la puesta en escena; discuten las dos propuestas ya elaboradas; no logran hasta el momento recuperar el algoritmo a pesar de haber consultado sus apuntes.</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Insiste mostrando de plano el documento que se manejó en las sesiones previas, donde se dan los elementos para desarrollar el algoritmo. • El equipo no puede recuperar el algoritmo, definitivamente retoman el apunte correspondiente y con ayuda del profesor discuten el procedimiento para obtener $\sqrt{2}$. 	<p>$\mapsto a(d, dep)$</p> <p>$\leftarrow A(D, Dir, E)$</p> <p>$\mapsto a(d, dep)$</p> <p>$\leftarrow A(D, Dir, E)$</p>
--	---

Historia abreviada de las interacciones del episodio.

A pesar de su inexactitud, nos permite observar de manera burda lo siguiente:

<p>$\leftarrow P(C, Dir, Aa) \mapsto r(d) \leftarrow P(D, Dir, E) \mapsto r(d) \leftarrow O(D, I, Aa) \leftarrow P(C, Dir, Aa)$ $\leftarrow O(D, I, Aa) \leftarrow P(D, I, Aa) \leftarrow I(D, I, E) \mapsto r(c) \leftarrow I(C, Dir, E) \leftarrow I(D, Dir, E)$ $\mapsto a(d, ind) \mapsto p(v) \leftarrow O(C, Dir, E) \mapsto a(d, dep) \mapsto a(d, dep) \leftarrow A(D, Dir, E)$ $\mapsto a(d, dep) \leftarrow A(D, Dir, E)$</p>
--

Cómo se ha señalado con anterioridad el equipo “1b” forma parte del grupo CETIS, sus antecedentes matemáticos eran débiles y no estaban en condiciones de reconstruir el algoritmo geométrico.

El actuar del profesor es comprometido con el equipo, pero al darse cuenta de la situación de las estudiantes le cuesta trabajo generar una estrategia de apoyo que les permita avanzar un poco más rápido. El profesor estaba enterado de las características de los estudiantes pero le costó en la práctica ajustarse a sus necesidades.

Las respuestas ambiguas por parte del profesor podemos interpretarlas de la siguiente manera: o bien el profesor no entiende lo que hacen los estudiantes, o

como no identifica errores en sus aseveraciones no las toma en cuenta y efectúa intervenciones que a su juicio introduzcan a los estudiantes al problema.

En el afán de llevar al equipo al cause adecuado, toma en cuenta lo hecho y dicho por los estudiantes sin detenerse a explorar por qué, tiene presente el propósito de la situación e intenta salvar enormes lagunas de los estudiantes adoptando el papel de instructor. Este hecho se le puede atribuir al tiempo limitado con el que contaba el equipo y del cual el profesor si es consciente.

El profesor inicia preguntando o haciendo observaciones ambiguas, pasa a indicaciones esclarecedoras y culmina con acciones directas esclarecedoras. Es decir termina involucrándose en la actividad del equipo.

Resulta de sumo interés el aspecto de las preguntas y observaciones calificadas como ambiguas, está fueron consideradas así por que en el diálogo no resultan pertinentes en su sentido o en el lenguaje empleado por el profesor y que a los estudiantes no les dice gran cosa. Lo dicho por el profesor no los orienta, por el contrario los distrae de lo que el están pensando. Casi siempre que se calificó a una pregunta u observación de ambigua redundó en una respuesta o acción del mismo tipo por parte de los estudiantes.

Los estudiantes ante las preguntas ambiguas, generan respuestas dispersas, pasan por preguntas con miras a validar su actividad y concluyen con acciones dependientes del profesor.

Lo que caracteriza a este episodio es la ambigüedad de las interacciones del profesor, es hasta que el profesor toma el control o dominio del grupo que sus interacciones se tornan esclarecedoras tanto en el lenguaje como en los propósitos del profesor.

Equipo 2b	
<p>PROFESOR (11)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: ¿que quieres decir con que no puedes representar $2^{1/2}$? • E: Debo representar $2^{1/2}$ como un entero. • P: ¿Qué es $2^{-1/2}$? Ya sabes donde está $1/2$, ahora cómo se localiza $2^{-1/2}$. Sólo van a localizar los puntos. • E: Tenemos la idea más o menos. Nada más vamos a localizar los puntos. • Si tenemos $1/2$, $2^{-1/2}$ dos enteros un medio • P: Pregunta si el equipo ya decidió en donde se localiza el punto ($1/2$, $2^{1/2}$), $E_{1,2,3}$. El equipo contesta en forma afirmativa y señala. • P: Pregunta qué es más grande $2^{-1/2}$ o 2^1. E: $2^{-1/2}$. • P: Por qué • P: Intenta hacer reflexionar al equipo con relación a los segmentos $2^{1/2}$ ó 2^1 además de entender como es que proponen sus respuestas que aparecen en su gráfica, es decir cómo interpretar a los exponentes fraccionarios. • Hace notar el error en la interpretación que hace el equipo • P: Pregunta si conocen el significado de $2^{1/2}$. E: Si, representa una potencia. P: Vuelve a preguntar quién es más grande $2^{1/2}$ ó 2^1. E: Responden que cuando se tiene $2^{0.5}$ es más grande que 2^1 y cuando se tiene $2^{1/2}$ es más chico. P: ¿Cambia el resultado cuando variamos la forma de representar? ¿Es lo mismo $2^{0.5}$ que $2^{1/2}$? La primera pregunta $0.5 = 1/2$. E: Si. P: Son dos expresiones, sabemos que $0.5 = 1/2$. Entonces $2^{0.5} = 2^{1/2}$ yo digo que si. E: Si • P: Si yo les pregunto cuanto vale 2^3 ¿podrán decir cuanto vale? E: Si porque está elevado a una potencia $2^3 = (2)(2)(2) = 8$. P: ¿Pueden aplicar el mismo criterio de 2^3 que a $2^{1/2}$? E: $1,2,3$ No les queda claro que es lo que deben hacer • P: Les recuerda que existe un método geométrico que les permite encontrar un segmento de longitud $2^{1/2}$ y que fue estudiado con anterioridad en una actividad previa a la puesta 	<p>← P(D, Dir, E) ↗ r(c)</p> <p>← P(D, Dir, E)</p> <p>↗ r(d)</p> <p>↗ r(c)</p> <p>← P(D, Dir, E) ↗ r(d)</p> <p>← P(C, Dir, E) ↗ r(d)</p> <p>← O(D, Ind, E)</p> <p>← I(D, Dir, E)</p> <p>← P(D, Dir, E) ↗ r(c)</p> <p>← P(D, Dir, E) ↗ r(d)</p> <p>← P(D, Dir, Aa) ← A(D, Dir, E) ← O(D, Dir, E) ↗ a(d,dep)</p> <p>← A(D, Dir, E) ↗ r(d)</p> <p>← P(D, Dir, Aa)) ↗ a(d,dep)</p> <p>← I(D, Dir, E)</p>

en escena. E_{1,2,3} No recuerdan el algoritmo que les permite resolver la situación.	
--	--

Historia abreviada de las interacciones del episodio.

<p>← P(D, Dir, E) ↗ r(c) ← P(D, Dir, E) ↗ r(d) ↗ r(c) ← P(D, Dir, E) ↗ r(d)</p> <p>← P(C, Dir, E) ↗ r(d) ← O(D, Ind, E) ← I(D, Dir, E) ← P(D, Dir, E) ↗ r(c)</p> <p>← P(D, Dir, E) ↗ r(d) ← P(D, Dir, Aa) ← A(D, Dir, E) ← O(D, Dir, E) ↗ a(d,dep)</p> <p>← A(D, Dir, E) ↗ r(d) ← P(D, Dir, Aa) ↗ a(d,dep) ← I(D, Dir, E).</p>
--

Este episodio se caracteriza por que todas las interacciones están dirigidas a romper un bloqueo (las estudiantes no pueden decir cuál es el valor de $2^{1/2}$).

A pesar de que todas las preguntas, observaciones e indicaciones son dadas en la mayoría de los casos en forma directa, el profesor no logra romper el bloqueo por que las estudiantes no cuentan con los recursos matemáticos para hacerlo.

Las preguntas hechas por el profesor a los estudiantes, surgen como consecuencia de una interpretación errónea sobre cómo obtener $2^{1/2}$ por parte de los estudiantes, la serie de preguntas y observaciones sólo logró inhibir la actividad del equipo que se sintió abrumado por las preguntas a las que no podían dar respuestas contundentes. Este hecho provocó cierto rompimiento del profesor con el equipo quien ya no se sintió con la confianza de solicitarle su apoyo. Por lo contrario las preguntas del profesor adquirirían cierto carácter de intromisión en la actividad del equipo.

El bloqueo no fue posible romperlo con intervenciones a modo de preguntas, en este caso el profesor no pudo darse cuenta que cuál era la necesidad del equipo, que en vez de ser interrogado requería de indicaciones breves pero que les permitiera recordar alguna definición o interpretación.

El profesor, con el criterio de hacer que los estudiantes fueran los responsables de construir sus interpretaciones, cierra la posibilidad de avance en el equipo, que finalmente quedan con respuestas provisionales y que no pueden validar.

En este caso podemos observar como una política o actitud del profesor determina el avance del equipo. Este hecho hace reflexionar sobre qué hubiera pasado con otro profesor y otra dinámica de trabajo. Los antecedentes matemáticos, la situación, el escenario son los mismos pero las interacciones con el profesor distintas.

Reproducir efectos didácticos se torna frágil cuando un actor tan importante como es el profesor no es capaz de hacer avanzar a los estudiantes en el cumplimiento de dichos efectos.

Si los estudiantes no cuentan con los antecedentes matemáticos o éstos son débiles, cuál es la estrategia idónea a seguir por el profesor, cómo aprender a escuchar y a entender la dinámica del grupo para que en tiempos muy cortos el profesor pueda generar prácticas adecuadas que permitan avanzar al equipo en el cumplimiento de los propósitos didácticos.

Otro aspecto importante a comentar, es el carácter de los objetivos de la situación didáctica, si bien el propósito didáctico se establece en relación de un asunto matemático puntual, este debe ser establecido de manera robusta, no puede ser dado a través de una sola práctica o resultado sino que debe ser establecido a través de aspectos que lo caractericen o que apunten hacia él. Alcanzar alguno de esos aspectos permite pasar tarde o temprano al objeto de estudio.

Equipo 3b	
<p>PROFESOR ⁽¹⁷⁾</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Están utilizando mal las escuadras. ¿Llevaron dibujo? E_{1,2,3}: No se desconciertan. E₂: Empieza a borrar, borra los 	<p>← O(C, Dir, E)</p> <p>↪ a(d,dep)</p>

<p>puntos que habían localizado entre 1 y 2 en el eje X.</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Les indica directamente como utilizar las escuadras para trazar perpendiculares aun segmento (en este caso al eje X). También les hace la indicación de otras formas y ejecuta una más. E: El equipo realiza los cambios tomando en consideración la indicación del profesor en cuanto al manejo de las escuadras. 	<p>← A(C, Dir, E) ↪ a(d,dep)</p>
<p>PROFESOR (21)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Haciendo referencia a 2^0 como la unidad les dice: “La mitad $\frac{1}{2}$ y la mitad $\frac{1}{2}$”, entonces señala la mitad del segmento y agrega ¿“entonces aquí es $\frac{1}{2}$ no?”. Y les hace la indicación de que revisen. E₃: Propone realizar la división del eje Y considerando la aclaración del profesor a partir del origen para facilitar el desarrollo. E₂: Insiste en su propuesta, a ésta se le une E₁. debaten. 	<p>← I(C, Dir, E) ↪ a(d,dep)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • P: A ver su trabajo. E_{1,2,3}: Explican las consideraciones realizadas en su planteamiento. E₁: pregunta ¿qué, estamos mal? P: A simple vista se ve. Les repito (haciendo énfasis en la localización de la unidad). Este es uno, este es $\frac{1}{2}$ (la mitad). E₃: Bórrale. P: Revisen bien. E₃: Borra solo las divisiones del eje sobre X de 0 a 2. E₂: Borra todo. P: Una pregunta, ¿2^0? E_{1,2,3}: Uno, la unidad. P: Haber, marquen $(1, 2^1)$ Hace énfasis en 2^0, 2^1 y 2^2. con estas indicaciones terminan ejecutando la propuesta de E₃ con relación a la división del eje Y a partir del origen. E₃: Toma el compás con la abertura correspondiente a un $\frac{1}{4}$ y divide a todo el eje Y. E₂: Coloca los números correspondientes a cada división 	<p>← I(C, Dir, Aa) ↪ a(d,dep) ↪ p(v) ← A(C, Dir, Aa) ↪ a(d,dep) ← I(C, Dir, E) ↪ a(d,dep)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • En esta parte se observa nuevamente que la base (2) no tiene significado alguno, es decir $2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, etc. Incluso comentan que el resultado no cambia mucho. 	<p>↪ a(d,dep)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • E₂: Finalmente construye bajo la misma dinámica ($\frac{1}{8}$, $2^{1/8}$). P: Pregunta por $2^{3/4}$. E_{1,2,3}: Le indican que $\frac{3}{4}$. 	<p>↪ a(d,dep)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • P: Están mal 	<p>↪ a(d,dep)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • E_{1,2,3}: Se confunden pero deciden exponer la propuesta que ellas construyeron es decir solo sobreponen el acetato y 	<p>← O(C, Dir, Aa)</p>

ellas construyeron, es decir solo sobreponen el acetato y marcan los mismos trazos que obtuvieron.	$\mapsto a(d,dep)$
--	--------------------

Historia abreviada de las interacciones del episodio.

$\leftarrow O(C, Dir, E) \mapsto a(d,dep) \leftarrow A(C, Dir, E) \mapsto a(d,dep) \leftarrow I(C, Dir, E) \mapsto a(d,dep)$ $\leftarrow I(C, Dir, Aa) \mapsto a(d,dep) \mapsto p(v) \leftarrow A(C, Dir, Aa) \mapsto a(d,dep) \leftarrow I(C, Dir, E) \mapsto a(d,dep) \mapsto a(d,dep) \mapsto a(d,dep) \leftarrow O(C, Dir, Aa) \mapsto a(d,dep).$
--

Este episodio nos permite ver una fuerte intervención del profesor, si el profesor realiza excesivas observaciones e indicaciones se produce en el equipo una natural dependencia. Como se puede observar en este equipo la dependencia del profesor no garantiza acciones centrada o pertinentes por parte del equipo, sino que por el contrario pueden tener el carácter de dispersas. Este hecho es resultado de que los estudiantes se encuentran respondiéndole al profesor y no a la lógica interna del problema.

El trabajo en un ambiente de fuerte intervención del profesor no puede garantizar el cumplimiento de los objetivos didácticos por parte de los estudiantes. Si el profesor interviene sistemáticamente, aún viendo la debilidad de los estudiantes puede ser interpretado como que el profesor no los ve débiles objetivamente, sino que más bien los cree débiles.

Si el profesor ve indefensos a sus estudiantes frente al problema, les puede estar negando la posibilidad de devolución del mismo y eso también puede estar reflejando la visión del profesor frente al mismo. Se puede producir el siguiente razonamiento, si yo profesor veo dificultad en el problema mucho más mis estudiantes.

El plantear una situación didáctica a un grupo de estudiantes exige un completo dominio de la misma en todos sus elementos y además un alto nivel de apropiación.

Este episodio se caracteriza por contener demasiadas observaciones e indicaciones por parte del profesor orillando al equipo a acciones totalmente dependientes del profesor.

Equipo 4b	
<p>PROFESOR (31)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Les dice que para el cálculo de segmentos utilizaron ciertos métodos en la etapa previa a la puesta ya que la forma como lo están haciendo es muy general y se van a ir perdiendo; entonces retoman las actividades que realizaron previamente con su profesor. • E₂ Así, sí, e inicia dividiendo con compás el eje X para encontrar $\frac{1}{2}$. E_{1,2} Dividen también un primer sector del eje Y con el compás. • P: El profesor se da cuenta que están localizando puntos y no segmentos, observa que están cometiendo un error. Por ejemplo en el punto $(\frac{1}{2}, 2^{1/2})$ el $\frac{1}{2}$ lo determinan bien pero $2^{1/2}$ no. • P: <i>¿Cómo aseguran que lo que están marcando es en realidad $2^{1/2}$? Por eso la actividad les indica que construyan los segmentos. Entonces lo que hay que hacer es construir los segmentos por medios geométricos para poder localizar los puntos (X,Y); otra vez recurran a la actividad que hicieron anteriormente con su profesor.</i> Les insistió otra vez que lo que trabajaron en sus antecedentes, deben trabajarlo en esta parte para que no quede independiente de la información proporcionada. • E_{1,2,3} Interactúan y deciden construir una nueva gráfica con la misma escala que la proporcionada, en el material. Hacen la división total del eje Y en cuartos con el compás. • Hasta el momento lo que rescatan por medios geométricos, es solamente la división de un segmento en dos partes iguales. 	<p>← O(C, Dir, E)</p> <p>↪ a(c,dep)</p> <p>← P(C, Dir, E)</p> <p>← I(C, Dir, E)</p> <p>↪ a(d,dep)</p>

<p>PROFESOR (32)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: <i>Porqué no dejan que E₃ plasme su idea.</i> • E_{2,3} Realizan los trazos aproximados de los segmentos en la nueva gráfica. Mantienen la idea original de conservar a 2⁰ como origen y 2¹ como la unidad. 	<p>← I(C, Dir, E) ↦ a(d,ind)</p>
<p>PROFESOR (33)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: <i>Voy a ver que puedo rescatar de su primer gráfica. ¿Cuánto es 2⁰? ¿Haber, cómo tomaron sus unidades? (induce para la conclusión de 2⁰ = 0). Entonces lo que ustedes proponen aquí no nos conduce a una solución adecuada. ¿Se acuerdan de la semicircunferencia?.</i> • El profesor les va explicando cada una de las partes de la secuencia, las alumnas reflejan entender lo que les informaba ya que varios de los trazos son realizados por ellas mismas, la participación del profesor cada vez es mayor hasta el punto de que él mismo realiza parte de los trazos, entonces les dice que ojalá halla quedado clara la explicación y como ya no hay tiempo de recomponer, las exhorta a que expongan la idea primaria ante el grupo. 	<p>← A(C, Dir, Aa) ← P(C, Dir, Aa) ← A(C, Dir, E) ↦ a(c,dep) ← A(C, Dir, E)</p>

Historias abreviadas de las interacciones del episodio.

El signo // denota separación entre los episodios que en este caso, aunque están íntimamente ligados constituyen interacciones separadas.

<p>← O(C, Dir, E) ↦ a(c,dep) ← P(C, Dir, E) ← I(C, Dir, E) ↦ a(d,dep) // ← I(C, Dir, E) ↦ a(d,ind) // ← A(C, Dir, Aa) ← P(C, Dir, Aa) ← A(C, Dir, E) ↦ a(c,dep) ← A(C, Dir, E).</p>

Esta interacción está caracterizada por una fuerte intervención del profesor que inicia observaciones, preguntas, indicaciones para finalmente intervenir ampliamente tomando la dirección del grupo. Esta manera de intervenir como se puede observar lleva al equipo a acciones dependientes.

El trabajo del profesor está dirigido a centrar el trabajo del equipo; que había propuesto una respuesta bien estructurada e independiente del profesor, como ésta era errónea, el profesor trabaja tomando la dirección del equipo a fin de lograr que los estudiantes retomen las actividades con el enfoque esperado.

La responsabilidad del profesor es la que lo hace intervenir, aparentemente motivado por el error de los estudiantes, no entra a discutir la propuesta del equipo sino a señalar el camino propuesto por la actividad. No tiene tiempo para discutir la propuesta de los estudiantes, por ello el profesor se ve obligado a explicar el procedimiento a seguir, sin embargo esto hace que se consuma en su totalidad el tiempo de trabajo.

Equipo 5b	
<p>PROFESOR (45)</p> <ul style="list-style-type: none"> El profesor se acerca para revisar el trabajo. E₁: Le pregunta “¿entonces vamos bien?” P: van regular E_{1,2,3}: Explican por partes el esquema planteado en la solución hasta ese momento. E₁: Dice “que en un número elevado a la n número de veces, se multiplica n número de veces”, explica como: $2^{1/2} = (2)$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{2}$. ¿no? P: No, $2^{1/2}$ no es $\frac{2}{2}$. E₁: ¿Por qué? P: ¿Cuántas veces vas a multiplicar a 2 por 0.5? E: Ah ¿por 0.5? P: Por 0.5, se trata de localizar primero segmentos y después puntos, ustedes ya tienen localizados algunos segmentos por ejemplo: ¿dónde está $2^{1/2}$? E₁: Responde (2) por (0.5) = 1 P: ¿Dónde está $2^{1/4}$, $\frac{1}{4}$ cuánto es? E₁: 0.25, ¿sí? 	<ul style="list-style-type: none"> $\mapsto p(v) \leftarrow O(C, Dir, Aa)$ $\mapsto a(d, ind)$ $\mapsto a(d, ind)$ $\mapsto p(v)$ $\leftarrow O(C, Dir, E) \mapsto p(c)$ $\leftarrow P(C, Ind, Aa) \mapsto r(d)$ $\leftarrow I(C, Dir, Aa)$ $\leftarrow P(C, Dir, E)$ $\mapsto r(d)$ $\leftarrow P(C, Dir, Aa) \mapsto r(d) \mapsto p(v)$

<ul style="list-style-type: none"> • P: <i>Entonces está como a la media, según el dibujo.</i> • E: <i>Ya, ya; lo borramos (y lo borra). E₃: ¿Para qué vas a borrar todo?</i> <p>PROFESOR (46)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Otro Profesor: Se acerca y les pregunta del porqué de sus respuestas. • E₃: Dice que el “<i>método geométrico</i>” sólo se usaba como una comprobación de la propuesta que ellas plantean en sus resultados. • OP: Propone que desarrollen, el “<i>método geométrico</i>” y que escriban todo porque es la única forma de poder interpretar sus respuestas. 	<p>← O(C, Dir, Aa)</p> <p>↪ a(d,dep)</p> <p>← P(C, Ind, Aa)</p> <p>↪ r(d,ind)</p> <p>← I(C, Ind, Aa)</p>
--	--

Historia abreviada de las interacciones del episodio.

<p>↪ p(v) ← O(C, Dir, Aa) ↪ a(d,ind) ↪ a(d,ind) ↪ p(v) ← O(C, Dir, E) ↪ p(c)</p> <p>← P(C, Ind, Aa) ↪ r(d) ← I(C, Dir, Aa) ← P(C, Dir, E) ↪ r(d) ← P(C, Dir, Aa) ↪ r(d)</p> <p>↪ p(v) ← O(C, Dir, Aa) ↪ a(d,dep) // ← P(C, Ind, Aa) ↪ r(d,ind) ← I(C, Ind, Aa).</p>

Este episodio muestra un caso de respuestas e indicaciones ambiguas, que hace que tanto profesor como alumnos mantengan un diálogo que no logra profundizar en el significado de las afirmaciones tanto del profesor como de los estudiantes haciendo que el diálogo se mantenga en un sorprendente nivel de ambigüedad. Este hecho hace que el equipo no logre salir de la visión errónea en la cual se han colocado.

La interacción es tan ambigua que las estudiantes al final creen que están mal por que no pueden justificar lo que afirman, pero sin embargo algo hace que las cosas sean correctas ya que el resultado fue validado por el profesor. Como si fuera un error aceptable.

Equipo 7	
<p>PROFESOR (60)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Les sugiere que comenten entre ellos lo que han leído 	<p>← I(C, Dir, E)</p>
<p>PROFESOR (61)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sugiere que todo lo que escriban lo hagan en una sola hoja, intercambiándola si es necesario 	<p>//</p> <p>← I(C, Dir, E)</p>
<p>PROFESOR (62)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Pregunta a los estudiantes si está claro lo que deben hacer. E1: explica que hay que encontrar los segmentos $2^{1/2}$, $2^{1/4}$, etc. • P: Sugiere el uso de escuadras no graduadas. 	<p>← P(C, Dir, E)</p> <p>↗ r(c)</p> <p>← I(C, Dir, E)</p>
<p>PROFESOR (63)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Pregunta cómo localizaron el segmento de magnitud $2^{1/2}$. • E1: Explica que tomó en cuenta la unidad y señala en el plano: 	<p>//</p> <p>← P(C, Dir, E)</p> <p>↗ r(c)</p>
<p>PROFESOR (64)</p> <ul style="list-style-type: none"> • P: Sugiere hacer los trazos en la hoja que se les había proporcionado con lo ejes cartesianos ya dibujados. • P: Pregunta, por qué afirman que $2^{1/4}$ es aproximadamente 0.25. • E2: Argumenta haciendo estimaciones, pero no tiene idea clara. • P: Pregunta si $2^{1/4}$ es mayor o menor a la unidad. • E1: Indica que es mayor que 1 y menor que $2^{1/2}$. • P: ¿Por qué? E1: Por que, $2^{1/4} = \sqrt{2^{1/2}}$ es aproximadamente $\sqrt{1.42}$ y $\sqrt{1}$ es siempre 1. • P: pregunta cómo encontraron el segmento • E2: hace los trazos para encontrar $2^{3/2}$, argumentando el empleo del Teorema de Pitágoras y que coincide con el argumento de E1. 	<p>//</p> <p>← I(C, Dir, E)</p> <p>← P(D, Dir, E)</p> <p>↗ r(c)</p> <p>← P(D, Dir, E)</p> <p>↗ r(c)</p> <p>← P(D, Dir, E) ↗ r(c)</p> <p>← P(C, Dir, E)</p> <p>↗ r(c)</p>

<ul style="list-style-type: none"> • P: pregunta qué están haciendo, a lo que responde E_1 que buscando $2^{1/4}$. • P: Pregunta si recuerdan el procedimiento trabajado con su profesor para encontrar segmentos de magnitud $\sqrt{2}$. • E₁, reconstruye poco a poco el procedimiento trabajado. • P: pregunta si lo pueden utilizar para encontrar $2^{1/4}$. • E₂, explora empleando el teorema de Pitágoras, escribe • $h^2 = (\sqrt{a})^2 + a^2 h^2$ • $h = \sqrt{(\sqrt{a})^2 + a^2}$, pero de la exploración no logra aún obtener algo. • Explora al proporción $2/x = x/1/4$, $x^2 = 9/4$ ($9/4$ lo obtiene al interpretar 2 por $1/4$, como dos enteros un cuarto y pasarlo a fracción común). • P: Como los estudiantes no logran construir $2^{1/4}$, el profesor haciendo uso de la construcción: Dice, si a, tomara el valor de 2 o una cantidad que conozcan, ¿qué pasaría con el segmento vertical? • E₁ y E₂ están de acuerdo en que segmento vertical sería $\sqrt{2}$. • P: ¿Si a fuera $\sqrt{2}$?, E₁ se da cuenta de que \sqrt{a} , sería $\sqrt{\sqrt{2}}$, es decir $4\sqrt{2}$. <p>E₁ y E₂, inician el trazo del segmento $2^{1/4}$ empleando correctamente el algoritmo de la media geométrica.</p>	<p>↪ a(c, ind)</p> <p>← O(C, Dir, E)</p> <p>↪ a(c, dep)</p> <p>← P(C, Dir, E)</p> <p>↪ a(c, ind)</p> <p>↪ a(c, ind)</p> <p>← A(D, Dir, E)</p> <p>↪ r(c)</p> <p>← A(D, Dir, E) ↪ r(c)</p> <p>↪ a(c, ind)</p>
--	---

Historia abreviada de las interacciones del episodio.

<p>← I(C, Dir, E) // ← I(C, Dir, E) ← P(C, Dir, E) ↪ r(c) ← I(C, Dir, E) // ← P(C, Dir, E) ↪ r(c) // ← I(C, Dir, E) ← P(D, Dir, E) ↪ r(c) ← P(D, Dir, E) ↪ r(c) ← P(D, Dir, E) ↪ r(c) ← P(C, Dir, E) ↪ r(c) ↪ a(c, ind) ← O(C, Dir, E) ↪ a(c, dep) ← P(C, Dir, E) ↪ a(c, ind) ↪ a(c, ind) ← A(D, Dir, E) ↪ r(c) ← A(D, Dir, E) ↪ r(c) ↪ a(c, ind).</p>
--

Este episodio se caracteriza por interacciones desbloqueadoras orientadas a apoyar al equipo en sus exploraciones. Este equipo se distingue por su capacidad para realizar acciones independientes que se basan en la gran potencia matemática de los miembros del equipo. El caso de este equipo es interesante porque fue un bloqueo (la dificultad para la obtención del segmento correspondiente a la expresión $2^{1/4}$), combinado con el desarrollo de una estrategia independiente por parte del equipo para obtener $2^{1/2}$, que les permitió explorar y responder a todas las otras actividades de que constaba la situación.

El equipo mostró plena apropiación del problema e independencia en cuanto a las decisiones que tomó. Las interacciones con el profesor se reducen a la intervención por parte del profesor dirigida a esclarecer un algoritmo a fin de redondear el trabajo de los estudiantes.

Comentarios a las interacciones

La identificación de patrones de interacción tales que determinen el logro didáctico de la situación resulta muy complicado de establecer a partir del análisis expuestos arriba. Cada equipo generó su propia historia de interacciones a partir de las características de los miembros que componen al equipo y el profesor que los acompañó en su trabajo.

Decir que en el equipo “1b” hubo cuatro preguntas; tres observaciones; tres indicaciones y dos acciones, es decir muy poco, ya que habría que establecer de manera muy precisa la naturaleza de ese tipo de interacciones y sobre todo los efectos que en ese equipo provocaron. La configuración de la interacción con las categorías establecidas, sólo sirve para analizar y describir lo dicho y hecho en ese equipo y la configuración obtenida nada más nos da información de esa experiencia de comunicación. No podríamos decir nada de configuraciones ideales, la interacción es muy compleja y al parecer es única e irrepetible como toda experiencia humana.

Podría decirse de manera muy general que las observaciones, indicaciones y acciones tienen un carácter mayormente interventor que las preguntas, pero sigue siendo parcial la observación.

Es muy importante señalar la coherencia que hay entre la visión de los profesores obtenida después de haber trabajado la situación, donde reconocen la debilidad en el manejo del contenido matemático por parte de los estudiantes así como el desconocimiento de varios conceptos. Fue patente la inexperiencia de los estudiantes para proceder geoméricamente y cierta resistencia a elaborar reporte de lo discutían y estaban trabajando, en varios equipos es notorio la preferencia a discutir con el profesor lo que pensaban.

Ante la amplitud del problema, los estudiantes tuvieron dificultades en darse cuenta del sentido de la actividad o definitivamente fueron resolviendo punto por punto sin lograr en algunos casos tener una visión del conjunto de la situación.

Los profesores señalaron sobre los estudiantes falta de iniciativa para trabajar problemas, creencia que estuvo en funcionamiento a lo largo de toda la actividad, como si se supiera que no iban a poder hacer y que ahí sería necesario intervenir.

Este hecho prepara al profesor a estar atento a intervenir siempre que sea necesario, pero el análisis de dichas intervenciones nos ha servido para mostrarnos el carácter de las intervenciones. Como se ha podido ver en los episodios descritos arriba, el curso de una interacción puede ser muy variada, pero lo relevante es que de pronto dicho análisis nos muestra que éstas interacciones no son uniformes, es decir, si bien todas están regidas por el propósito de centrar y desbloquear, las formas de hacerlo están lejos de ser las idóneas. Descubrimos y se tienen que calificar algunas de ambiguas, por el lenguaje que se emplea o bien porque no se puede desprender un propósito claro en lo que se dice.

Nos muestra también que a respuestas, observaciones, indicaciones ambiguas le corresponden en muchos casos acciones dispersas, como sin sentido. Acciones o

intervenciones sistemáticas del profesor, le corresponden acciones dependientes por parte del estudiante.

Profesor y estudiante inmersos en un proceso de trabajo de una situación problemática, con un tiempo limitado le permite espacios muy reducidos de acción al profesor para entender lo que sus estudiantes argumentan y para gestionar de manera adecuada el tiempo sin entrar en crisis y aumentar su intervención.

Lo que es una realidad que en todos los equipos las preguntas siempre fueron menores que las restantes tres categorías. Caso especial es el equipo tres donde no se elaboró ninguna pregunta por parte del profesor.

En el contexto de la puesta en escena, las interacciones fueron fundamentales para el desarrollo de la actividad. Si éstas se suprimieran cambiaría radicalmente la experiencia y no podría afirmarse que para mejorar. Los equipos asumieron la presencia del profesor como un factor importante y natural para el desarrollo de su trabajo.

Un elemento importante a considerar es que las interacciones de los profesores sí están acordes con lo declarado meses antes al momento de discutir su visión sobre las posibles dificultades que tendrían los estudiantes al trabajar la situación didáctica.

¿Qué se reprodujo?

A partir de las conclusiones del análisis a posteriori de la puesta en escena del 97 hacemos una comparación con los resultados del 98 y 2000.

Conclusiones del análisis a posteriori.		
1997	1998	2000
<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes lograron romper la idea de que 2^x sólo tiene sentido para cuando x es un número entero 	<ul style="list-style-type: none"> Todos los equipos logran romper la idea de que 2^x solo tiene sentido para enteros. Hubo dos equipos que elaboraron propuestas alternas 	<ul style="list-style-type: none"> Todos los estudiantes pudieron establecer de manera clara la diferencia entre elevar a una potencia entera positiva y una fraccionaria. De hecho

	pero erróneas.	esa discusión consumió casi todo su tiempo, en todos los equipos se tuvieron propuestas de cómo obtener el valor, todas ellas como resultado de buscar algún sentido a dicha operación.
<ul style="list-style-type: none"> Manipularon el número $2^{1/2}$, ya que obtuvieron segmentos de magnitud $2^{1/2}$. 	<ul style="list-style-type: none"> La mayoría de los equipos obtuvieron los segmentos de longitud $2^{1/2}$, por métodos geométricos. 	<ul style="list-style-type: none"> La manipulación del número $2^{1/2}$ fue muy variada, algunos obteniendo los segmentos y otros proponiendo valores para dicha expresión.
<ul style="list-style-type: none"> Reconocen la naturaleza creciente de 2^x. 	<ul style="list-style-type: none"> Todos los equipos dieron evidencia del reconocimiento de la naturaleza creciente de la función. 	<ul style="list-style-type: none"> El reconocimiento de la naturaleza creciente de la función 2^x, fue muy variado. Algunos equipos no pudieron lograr una visión de función. Otros expresaron el gráfico como una recta pero todos colocaron su gráfica de manera ostensiblemente creciente.

Si esta sola comparación bastara para establecer lo que se reprodujo después del arduo trabajo desarrollado por profesores y estudiantes para la preparación, realización y análisis de los resultados, parecería que el esfuerzo fue vano.

La realización de los tres eventos se efectuó en lo que podríamos definir condiciones de control. En todos los casos había un ánimo de lograr que la ingeniería “funcionara en todos los escenarios” para lo cual se trabajó intensamente.

El esfuerzo y tiempo invertido para la realización de estas experiencias, si quisiéramos extenderlo a nuestra actividad cotidiana como profesores sería muy difícil de sostener.

La comparación establecida arriba descansa sobre el seguimiento y observación detenida de lo hecho y dicho por estudiantes y profesores. Compara una interpretación hecha por los investigadores sobre la actividad desarrollada por un grupo numeroso de personas.

Compara lo único comparable que desde nuestra experiencia podemos afirmar. Es inútil e imposible intentar una comparación de las personas, nuevamente decimos, es demasiado complejo. Lo que nos podemos permitir es una comparación de un proceso y una dinámica construida alrededor del objeto de conocimiento escolar bien definido en un diseño específico.

El diseño y estructura de la situación ha sufrido modificaciones mínimas. El objetivo ha permanecido inalterado a pesar de la intervención de más de veinte profesores. El contenido geométrico, a pesar de la dificultad que siempre han manifestado los estudiantes al trabajarlo, se ha conservado intacto ya que constituye un elemento medular para enfrentar los obstáculos didácticos y epistemológicos que representan pasar de potencias enteras a potencias fraccionarias.

Los grupos de estudiantes se han mantenido en un rango de edades (16 a los 22 años) y en escolaridad entre el último año del bachillerato y los primeros años de licenciatura. Los estudiantes han sido tanto de los sistemas privados como públicos (principalmente públicos). Los contenidos matemáticos tratados son curriculares en su totalidad.

El elemento más novedoso para estudiantes y profesores fue la estructura de la situación didáctica, por la manera en que se plantean los problemas y la dinámica de trabajo que impone a ambos. Ya que les impondrá prácticas que contrastan con lo que usualmente hacen en sus clases cotidianamente.

Los profesores, para definirlos de alguna manera son excepcionales, ya que todos ellos son profesores que tienen una importante disponibilidad a participar en este tipo de actividades y un interés genuino por los problemas de aprendizaje de sus estudiantes y la profesionalización de su práctica docente.

Simplificando extraordinariamente, nuestro quehacer de repetir una situación didáctica en diferentes escenarios, se ha concretado a la realización de las mismas actividades en grupos muy reducidos, éstos han enfrentando dificultades

particulares y para ello han sido auxiliados por un determinado profesor a través de una dinámica de interacciones enmarcadas en estrategias establecidas con anterioridad, y que irremediamente se han visto afectadas por la presión de los estudiantes y la responsabilidad epistemológica del profesor.

La experiencia en cada equipo ha sido distinta, lo único comparable son sus resultados.

Y finalmente ¿qué se reprodujo?. Se reprodujo un propósito didáctico, que hace uso de un diseño sofisticado que es capaz de soportar en cierto modo el asedio y la imprevisibilidad del quehacer humano.

Capítulo V

Elementos para un modelo de reproducibilidad de situaciones didácticas

La situación didáctica en el sistema didáctico

“La concepción moderna de la enseñanza va a pedir al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de problemas que le propone. Estos problemas elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer... Para ello, comunica o se abstiene de comunicar, según el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. En consecuencia, el docente está implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le ha planteado. Este juego o esta situación más amplia es la situación didáctica. ... Pero en la situación didáctica tanto para el maestro como para el alumno, es una especie de ideal hacia el que se trata de converger: el docente debe sin cesar ayudar al alumno a despojar en cuanto sea posible la situación, de todos los artificios didácticos para dejarle el conocimiento personal y objetivo.” (Brousseau, 1993).

La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque... Estos problemas elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por si mismo... el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer... el docente está implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le ha planteado... el docente debe sin cesar ayudar al alumno a despojar en cuanto sea posible la situación, de todos los artificios... Estas afirmaciones extraídas del discurso de Brousseau, denotan un carácter extraordinariamente personalizado, es decir, el maestro piensa “en sus alumnos”; aquellos que conoce. El profesor propone problemas, planea, diseña actividades, sigue el curso de las interacciones del alumno con el saber a aprender.

Tan personalizada es la actividad del profesor, que cuando éste propone el problema elegido con toda intención, se erige necesariamente un cuerpo de acuerdos tácitos que son provocados por la naturaleza de las actividades que la situación orillará a realizar al alumno, pero estos acuerdos conocidos con el nombre de contrato didáctico surgen porque el alumno ya ha aceptado o rechazado enfrentar los problemas propuestos.

Intencionalidad didáctica del profesor y aceptación del problema por parte del estudiante provocará en ambos el desarrollo de un conjunto de prácticas e interacciones, que caracterizarán al contrato didáctico. A modo de juego con el sistema, nos preguntamos, qué pasa con el sistema si ¿Cambio el problema? Cambia el contrato. ¿Y si cambio al profesor? Cambia el contrato. ¿Y si cambio al alumno? ¿Y si conservo el problema y cambio a maestro y alumnos?

El propósito didáctico de la ingeniería se mantiene aunque el profesor cambie, el propósito didáctico no constituye un elemento subjetivo, sin embargo la manera como el profesor se apropie y lo interprete, sí afectará el desempeño de los estudiantes ya que se producirán formas de interacción que estarán determinadas por el contrato didáctico. El problema (como sinónimo de situación) fue planteado

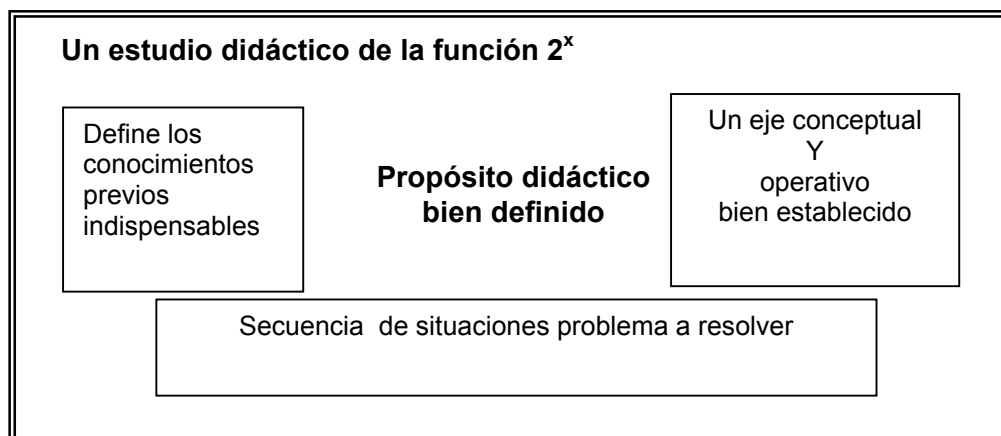
con un propósito didáctico, pero cuando interviene el profesor, aparece un factor que denominaremos “intencionalidad del profesor”; como el contrato didáctico se erige con base en la naturaleza del saber en juego y la adopción del problema por parte del alumno, podemos esperar que uno de los factores que con mayor fuerza afectan al sistema es la sustitución de profesor.

En los episodios de interacción discutidos en el capítulo IV podemos ver que la manera como cada profesor interactúa con su respectivo equipo es distinta, la interpretación de la importancia que dan al proceder geoméricamente no es homogénea. El acento que se concede a proceder eficientemente con las escuadras; a recuperar los algoritmos geométricos centrándose ampliamente en ello, contrasta con la dificultad patente que enfrentan los estudiantes a elevar a potencias fraccionarias y que no les permite ver para qué hacer geometría. El uso de la geometría constituye una estrategia didáctica pero no es el propósito de la situación.

El propósito didáctico deberá ser objetivo y comunicable, pero como nos lo ha permitido ver este trabajo, la adopción de dicho propósito si bien exige un trabajo sistemático y prolongado, no hay garantía de que opere automáticamente cuando la situación se pone en escena en un sistema didáctico determinado.

La estructura de la situación didáctica como factor de reproducibilidad.

La situación didáctica “Un estudio de la función 2^x ” fue producto de un trabajo de



ingeniería didáctica que fue debidamente validada y hasta entonces se decidió probarla en distintos escenarios.

Como sabemos, la situación didáctica podemos ubicarla dentro del sistema didáctico en el polo del saber, pero no se puede considerar independientemente de los otros dos polos, sin embargo como se discutirá más adelante la consideración sobre la estabilidad de su estructura y propósito didáctico resultaron fundamentales en nuestros interés de reproducir la situación didáctica.

Hasta ahora los elementos indicados en el recuadro anterior no han sido modificados, excepto en el aspecto operativo donde se ha colocado la primera etapa de la situación para trabajarse independientemente en cada grupo.

Podemos afirmar que la estructura de la situación se ha mantenido estable. En el caso del grupo CETIS, donde la primera etapa de la situación fue una experiencia débil, esto acarreó severas distorsiones al trabajo de la segunda etapa de la situación, como ya se ha podido ver en el capítulo IV.

En el proceso de comunicación del escenario y especialmente cuando se abrió la posibilidad de que los profesores propusieran cambios a la situación, las únicas modificaciones introducidas por ellos, fue a la redacción de algunas actividades que a decir de los profesores resultarían más comprensibles a los alumnos.

Propósitos, antecedentes, eje conceptual y secuencia de situaciones problema, permanecieron inalterados en todas las puestas en escena.

Otro elemento importante a mencionar es el carácter de las actividades de la situación, éstas son más bien puntuales pues le plantean asuntos muy concretos al estudiante, esto reduce la posibilidad de dispersión del estudiante pero aumenta las posibilidades de bloqueo.

Concluyendo con este punto, podemos decir que la situación trabajada, por sus características, es poco flexible para sufrir modificaciones en su estructura y que no

le cambie de manera importante su sentido. Este hecho obliga, pensando en términos de reproducibilidad y del sistema didáctico, a orientar la actividad de comunicación del escenario a una adopción casi integral de la propuesta didáctica por parte del profesor.

Este factor estable de la situación permite tener mayor control de la actividad de un grupo de estudiantes cuando la trabajan, son muy pocos los casos en que los estudiantes rompieron el orden propuesto en la situación.

Los estudiantes ante la reproducibilidad

Se hizo el mayor esfuerzo posible por trabajar con los grupos en condiciones lo más parecidas posibles a una clase común y corriente. Uno de los factores en que más cuidado se puso fue al control de tiempo. Sin embargo en todos los casos fuimos rebasados, los estudiantes se tomaron amplios espacios de tiempo para discutir algunas partes de la situación.

Los estudiantes siempre trabajaron en equipo, a pesar de la poca familiaridad que tienen en trabajar de esa manera según declararon sus profesores. El aspecto al que hubo de ponerse mayor atención sobre el trabajo de los estudiantes, fue el de que plasmaran en el papel lo que se les iba ocurriendo ya que al menor descuido, borraban una página completa.

Todos los equipos se comprometieron genuinamente con la situación. Les resultaba atrayente el tipo de actividades y la parafernalia investigativa que montamos alrededor de su trabajo.

Como se ha mostrado, el trabajo de los equipos resultó contrastante y esto, en la mayoría de los casos dependió del dominio o no de los conocimientos previos que se requerían para trabajar la situación, pero no únicamente debido a ello. También contó de alguna manera las características de los equipos, hubo varios muy activos en donde buscaban alternativas de solución con mucho sentido o apelando a la presencia del profesor. Otros se mostraron muy reservados. Algunos equipos fueron

extraordinariamente dependientes del profesor, buscando constantemente su aprobación a las actividades que desarrollaban.

El contenido matemático de la situación se constituyó en fuente de interés para algunos equipos y desalentadora para otros.

Un elemento importante a destacar fue el hecho de que los equipos se sintieron con libertad para expresarse, incurriendo en ocasiones en graves errores, pero pudiéndolos cometer sin temor a ser juzgados. Este fue un hecho patente y que dio a las experiencias un valor de autenticidad.

Es verdad de que en todos los escenarios los estudiantes tenían conciencia de que estaban realizando una experiencia especial. Todos habían sido invitados a participar por algún profesor que les era conocido y que estaba realizando un trabajo “especial “ e importante para él. En el ambiente flotaba un cierto espíritu de “apoyemos al profesor”, pero este hecho pronto quedó atrás, al enfrentar los problemas de la situación y a quién había que responder no era al profesor sino a la lógica interna del problema.

A pesar de que cada equipo estaba acompañado por un profesor, se cuidó el propiciar una imagen de profesor conductor de la experiencia, si bien los equipos trabajaron independientemente, quien propuso la actividad fue el profesor responsable del grupo. Él marcó los tiempos y dirigió las actividades comunes e institucionalizadoras.

Si el estudiante acepta los problemas, los trabaja, los discute, propone respuestas, las reconsidera, pregunta al profesor, reelabora sus respuestas, atiende a lo que otros equipos hacen, defiende su punto de vista, consume el tiempo asignado dejando inconcluso su trabajo. Si finalmente escucha los comentarios de sus otros compañeros y del profesor mismo con relación a los contenidos de la situación. ¿Se reprodujo en él el propósito didáctico de la situación? Lo descrito en este párrafo correspondería a una historia individual y así se podrían describir diez, quince o

veinte historias individuales. Cómo “sumar” esas historias individuales para hablar después de la historia del grupo y luego responder a la pregunta de si se reprodujo el propósito didáctico en el grupo. Ese problema lo estudió Artigue en su tesis sobre reproducibilidad y de hecho lo que hizo fue simular computacionalmente esas historias, ponderó probabilísticamente la factibilidad de las mismas, pero luego ya no era tan claro hablar de resultados. Rechazó la hipótesis de que la suma de historias daban una historia resultante que describía al grupo y le permitía establecer si el efecto didáctico se había reproducido.

La dinámica de cómo se difunde la respuesta adecuada a los problemas de la secuencia, puede ser muy variada. Dentro de un mismo equipo cuando un estudiante tomaba el liderazgo del trabajo, algunos compañeros daban muestra de quedarse al margen de la reflexión del líder, éstos se incorporaban a la discusión cuando el líder dudaba y requería de la validación de sus compañeros, en algunos casos ahí se producía un cambio de liderazgo. Pero no todos los grupos funcionaron por la vía del liderazgo, en algunos casos, la mayoría de ellos, los tres miembros del grupo trabajaron juntos para enfrentar los problemas, juntos se hicieron fuertes, juntos se equivocaron.

La situación se diseña pensando en estudiantes que cumplen determinados requisitos de conocimientos previos y que cuentan con los recursos para enfrentar los problemas propuestos; esta consideración es una parte fundamental de la planeación de la actividad. La adopción del problema por parte de los alumnos hace (como lo hemos señalado anteriormente) que surja un contrato que está necesariamente obligado a evolucionar, a quebrarse. Tanto si los estudiantes avanzan como si se estancan ante un problema que se muestra imposible de ser resuelto.

Los estudiantes resuelven y explican sus resultados y construyen significados con base a sus logros y fracasos. La consideración cuidadosa de los requerimientos sobre los estudiantes para enfrentarlos a la situación es un factor que posibilita la

reproducción del efecto didáctico, así como el establecimiento de una dinámica de trabajo que posibilite la difusión del conocimiento en juego.

Un fenómeno producido ante la falta de antecedentes matemáticos

En el caso del grupo CETIS, cuyos resultados en el ámbito de la reproducibilidad externa fue muy reducido, provocando con este hecho grandes dificultades para entender lo que desde el punto matemático habían realizado. Se encontraron hasta cinco interpretaciones distintas sobre lo que significaba realizar la operación $2^{p/q}$. Ante lo variado de las respuestas de los equipos, la interpretación primera que se hizo, se realizó desde el contrato didáctico. Se asumió que los estudiantes se sentían comprometidos con los profesores y quisieron colaborar con ellos, por eso no rechazaron trabajar la situación, pero sus respuestas no fueron resultado de un auténtico compromiso o apropiación de la situación sino que constituían una salida al paso. Reconsiderar esa posición llevó mucho tiempo y sólo se logró cuando se puso a la consideración de personas ajenas a la experiencia, ya que cuando se les solicitó que discutieran nuestras transcripciones nos hicieron observaciones importantes.

Interpretar desde el contrato didáctico tal desempeño sólo nos llevaba a trivializar el trabajo de los estudiantes.

La reconsideración de la actividad de cada equipo y la naturaleza de su respuesta errónea nos llevó a darnos cuenta que cada grupo estaba haciendo un esfuerzo de construcción de un significado, la carencia de antecedentes matemáticos firmes y la imposibilidad de ocupar los algoritmos geométricos, no canceló la posibilidad de proponer genuinamente una salida matemática a partir de elementos que sí dominaban. Interpolar linealmente, proponer respuestas que generaran números no enteros, o a través de operaciones que si conocían, constituyen evidencia de un quehacer matemático serio por más que se califique de erróneo. Los estudiantes se encontraban ante una frontera de conocimiento que les hizo proponer respuestas provisionales y que la cortedad del tiempo de trabajo no les permitió reconsiderar.

El profesor como agente de reproducibilidad

El profesor tiene una posición privilegiada dentro del sistema, domina el contenido matemático de la situación, conoce las características de sus estudiantes y además interviene en el establecimiento de los propósitos de la ingeniería; puede adaptar la ingeniería a partir de las características de los estudiantes.

En el proceso de reproducción de la ingeniería didáctica, el polo que mayor trabajo exige es el del profesor. Como fue planteado en la estrategia de la investigación, se había considerado el llevar la ingeniería a un sistema didáctico para el cual no se había diseñado y que por tanto era una intervención en él. Intervenir en un sistema didáctico sólo se puede llevar a cabo a través de un plan que haga posible la adaptación de la ingeniería al nuevo sistema.

Iniciar el proceso de adaptación del diseño para las nuevas condiciones, exige una amplia colaboración entre el profesor del grupo y los agentes que colaborarán en dicha puesta en escena.

El profesor ante la situación didáctica

Cuando los profesores trabajaron la situación didáctica enfrentaron dificultades, para ellos también resultó inusual. El uso de criterios geométricos llamó fuertemente su atención, si bien fueron capaces de hacer uso de los algoritmos geométricos para obtener los segmentos, en ese momento no tenían claro para qué llevar un problema de potenciación al campo geométrico. Declararon que la actividad era interesante, y que ponía en juego múltiples conceptos geométricos, pero en principio estaban lejos de poder darle sentido a la actividad que habían efectuado.

Suponemos que las dificultades que los profesores enfrentaron y la riqueza de la situación, en el sentido de que hace uso de varios aspectos matemáticos, los hizo iniciar una reflexión sobre qué deberían hacer para llevar esa situación a sus estudiantes. Manifiestan, como hemos podido ver en el capítulo tres, un amplio

número de asuntos que habría que enseñar a los estudiantes a fin de prepararlos para enfrentar la situación. A partir de esto, podemos interpretar que a criterio de los profesores los estudiantes no podrían enfrentar la situación sin un adiestramiento previo. Dicho adiestramiento fue ampliamente discutido y se redujo a preparar a los estudiantes en el dominio de los algoritmos geométricos.

Como hemos podido ver, el profesor trabajó la situación pero siempre en función de sus alumnos, los problemas que enfrentaba los vivía en cierto modo desde la perspectiva de los estudiantes. Esto que a mí me está costando trabajo, cómo van a hacer los estudiantes para resolverlo. Los profesores en la reflexión posterior a trabajar la situación, les fue fácil expresarse sobre el contenido matemático de la situación y las posibles dificultades que podrían enfrentar los alumnos al trabajarla, sin embargo en los aspectos relacionados sobre el sentido de la situación y los aprendizajes que ésta propicia, sus comentarios fueron más inciertos y breves.

Las estrategias de preparación tanto del grupo CETIS como del Teoloyocan, si bien se acordaron los términos en que ésta se llevaría a cabo, sin lugar a dudas se vieron determinadas por la visión que de la situación quedó en cada uno de los profesores.

Surgieron dos enfoques de lo que debería ser la preparación de los alumnos, ambos abordados con igual responsabilidad pero con estilos distintos. El grupo CETIS, abordó la preparación bajo la dirección del profesor a través de una explicación detallada, en contraste del grupo Teoloyocan que la abordó con estudiantes más fuertes matemáticamente hablando y con un criterio de entrenamiento para un evento especial.

Sin lugar a dudas en los dos grupos prevaleció un criterio de que iban a ponerse a prueba tanto profesores como alumnos. “A los estudiantes les falta información hay que nivelarlos”, este es un criterio del profesor que conoce las fallas de los estudiantes y que pretende resolverlas con instrucción. Hay confianza en la disposición de los estudiantes, más no en su fortaleza académica.

Todo el proceso de comunicación del escenario tenía el objetivo de que el profesor se apropiara del propósito de la situación y con base al conocimiento que tenía de los estudiantes iniciara un proceso de adaptación de la situación a la realidad de ellos. La actividad se llevó a cabo con el fin de que los profesores trabajaran con la situación a tal grado en que ya no la sintieran como una propuesta ajena, sin embargo y a pesar del largo trabajo realizado esto no se logró en su totalidad. Como ya se ha informado antes las modificaciones propuestas por los profesores sólo fueron sobre el lenguaje de las instrucciones.

Los profesores habían señalado de manera clara deficiencias en sus estudiantes y expresaron dudas sobre si éstos podrían abordar ciertos problemas, no se atrevieron a proponer modificaciones radicales a la situación o al tiempo de desarrollo de las actividades. O bien estaban convencidos de que con la instrucción de los algoritmos geométricos era suficiente o bien no pudieron llevar el análisis del contenido matemático de la situación y la realidad académica de los estudiantes al grado de sugerir modificaciones importantes.

Los profesores y las interacciones con los estudiantes

Las actividades de los estudiantes en los equipos de trabajo, exigieron diversas intervenciones de los profesores en la actividad de los estudiantes que como hemos podido ver en el capítulo cuatro fueron de naturaleza muy diversa.

En el análisis de las interacciones, catalogamos las intervenciones del profesor como preguntas, observaciones, indicaciones y acciones. Para el nivel de familiarización que para entonces tenían los profesores con la situación, se esperaban intervenciones bien dirigidas y que redujeran al mínimo la incertidumbre.

Sorprendentemente hubo de calificarse como ambiguas muchas de las intervenciones del profesor. En varios equipos fue este tipo de interacción la que determinó su logro. Lo que caracterizaba a la interacción ambigua era el uso de lenguaje inapropiado para los estudiantes, respuestas ajenas a lo que el estudiante

preguntaba u observaciones por parte del profesor ajenas a lo que en ese momento el estudiante estaba trabajando.

La explicación a la intervención ambigua es difícil de dar, o bien el profesor no entiende la pregunta del estudiante, o no está atento a lo que en ese momento el estudiante hace, o también el profesor no tiene claro el sentido de la actividad y sus observaciones o respuestas resultan impertinentes. Los profesores en el caso del grupo CETIS, ante la enorme dificultad que mostraban los estudiantes para interpretar los exponentes fraccionarios y la imposibilidad de reconstruir por ellos mismo los algoritmos geométricos, se abocaron a tratar de que los equipos recuperaran dichos algoritmos perdiendo la oportunidad de atender en ese momento las exploraciones independientes de los estudiantes y sus respectivas respuestas.

En contraste con el grupo Teoloyucan, (cuyos equipos de trabajo pudieron reconstruir los algoritmos geométricos logrando con esto que los equipos se desarrollaran con mayor independencia y la interacción con los profesores fuera menor), el grupo CETIS ocupó gran parte de su tiempo en dialogar con los profesores y en algunos casos como se pudo observar, fue el profesor quien tomó la dirección de la actividad del equipo.

La aparición del fenómeno de la interacción ambigua, es de gran importancia, ya que las dos formas básicas de intervención discutidas y planeadas durante en el proceso de comunicación del escenario, fueron el desbloqueo y la centración. Las interacciones ambiguas como hemos podido ver en el análisis de interacciones del capítulo cuatro, constituyeron fuente de bloqueos y desviaciones.

Incurrir en lo que hemos denominado como interacciones ambiguas muestra la complejidad de los fenómenos que se producen en el aula. Responder, indicar, hacer observaciones y realizar acciones en el marco de un plan de acciones para apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, son actividades propias del profesor (quien tiene la una posición privilegiada del sistema didáctico como

decíamos anteriormente) pero en determinadas circunstancias de presión o de enorme dificultad, puede hacerlas jugar en contra de sus propósitos.

Elementos para la modelación del fenómeno de la reproducibilidad

El llevar una Ingeniería Didáctica al interior de un sistema didáctico ajeno para el que fue diseñada, constituye una intervención a dicho sistema y esto sólo es posible siguiendo un proceso que adapte la Ingeniería al nuevo sistema, lográndose esto a través de lo que hemos denominado comunicación del escenario.

En el contexto de lo que llamamos el “proceso de reproducibilidad de una Ingeniería Didáctica”, hemos identificado elementos que consideramos imprescindibles en dicho proceso.

Profesor, estudiantes y un contenido a estudiar conforman un sistema muy dinámico y éste se pone en acción bajo acuerdos motivados por propuestas de estudio que en la mayoría de los casos son propiciadas por el profesor. Llevar una propuesta de estudio formal a un sistema, exige en el profesor que operará la propuesta un alto nivel de familiaridad con ella y además estar convencido de los beneficios que le acarrearán a sus estudiantes.

Con base en los ejercicios de reproducción efectuados, identificamos tres grandes espacios de acción a considerar para hacer un análisis de reproducibilidad:

Estructura de la Ingeniería Didáctica (Estructura)

Un espacio para el saber, constituido por la Ingeniería Didáctica a trabajar: Dicha ingeniería es el resultado de un análisis preliminar riguroso y su correspondiente validación. Al comunicarla a un profesor candidato a llevarla a sus estudiantes, consideramos deberán:

- Explicitarse de manera amplia el propósito didáctico

-
- Establecerse de manera clara los antecedentes matemáticos indispensables para abordarla
 - Mostrarse los ejes conceptual y operativo, establecido a través de una sucesión de elementos matemáticos a considerar, así como el conjunto de acciones, validaciones y formulaciones a realizar.
 - Analizar y discutir la estructura y sucesión de situaciones problema a resolver.

Comunicación del escenario (Comunicación)

Un espacio para la comunicación de la ingeniería (lo que se ha denominado Comunicación del Escenario)

- Discutir el propósito de la situación didáctica: Orientada a apropiarse del sentido de la actividad, analizar el por qué y para qué de todas sus partes.
- Establecimiento de un proceso de apropiación de la ingeniería, orientado a lograr que los profesores puedan considerarse como diseñadores de la situación.
- Resolver todas las situaciones problemas y discutiendo aspectos conceptuales y operativos de la situación.

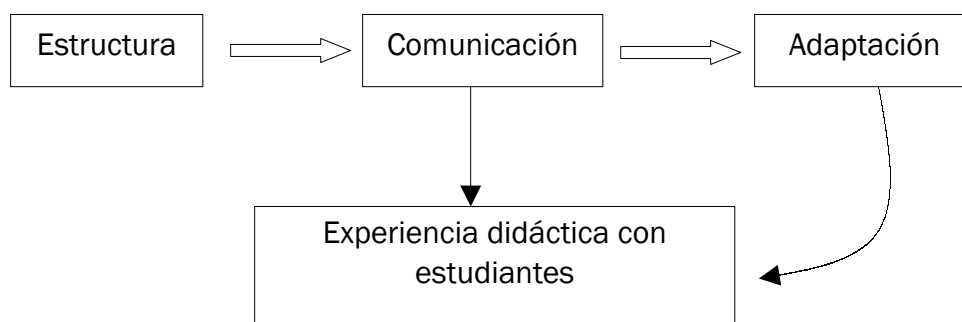
Adaptación al nuevo Sistema Didáctico (Adaptación)

Un espacio para la planeación de la puesta en escena

- Con base al conocimiento que se tiene de los alumnos, identificar los antecedentes matemáticos requeridos por los estudiantes para trabajar la situación así como las posibles dificultades que podría enfrentar desde la perspectiva matemática.

- Desarrollar un proceso de adaptación de la situación didáctica al grupo de estudiantes a través de una toma de acuerdos entre diseñador y profesores.
- Rediseño de la situación didáctica ajustada al nuevo grupo de estudiantes (resulta indispensable establecer los límites de modificación de la situación didáctica).
- Establecimiento de una estrategia de interacción entre profesor y alumnos.
- Organización social de la clase, donde se establece la modalidad de trabajo en la que los estudiantes afrontarán la situación.
- Elaborar las predicciones sobre lo que harán los estudiantes.

La experiencia de trabajo de la situación didáctica por los estudiantes, está determinada por la “Estructura” de la situación; el nivel de apropiación de la situación por parte del profesor que coordinará la puesta en escena (este factor dependerá de una apropiada “Comunicación” del escenario) y una conveniente “Adaptación” que toma en cuenta las características de los estudiantes.



La experiencia de trabajo de los estudiantes con la situación didáctica, es única, ya que está determinada en ese momento por la manera como los estudiantes la asuman. Los elementos de control sobre el desarrollo de la experiencia han sido determinados en parte desde el diseño de la situación y la modalidad de trabajo

que se establezca con los estudiantes. La estructura de la situación, la sucesión de las situaciones problemas a enfrentar, el lenguaje en el que se les presentan las situaciones problema, el establecimiento correcto de los antecedentes matemáticos de los estudiantes para que puedan enfrentar la situación con posibilidad de éxito, son elementos que determinarán el desarrollo de la experiencia.

Es ante las dificultades que los estudiantes enfrenten para resolver los problemas planteados que entra en juego la organización de la clase; si el trabajo se enfrenta colectivamente debe ser considerada la posibilidad de que la interacción entre estudiantes permita superar los problemas y avanzar.

Si los estudiantes enfrentan obstáculos que a juicio del profesor resultan insalvables o se desvían del tema de la situación, la planeación de la puesta en escena debe proporcionarle al profesor una estrategia de ayuda. Estas ayudas se dan a través de lo que hemos denominado interacciones. Las interacciones deberán de estar planificadas con el fin de que sean lo menos interventoras posibles, y respondan puntualmente a las necesidades de los estudiantes.

Como se ha podido ver a partir de nuestra investigación, las interacciones entre profesores y estudiantes es uno de los factores que mayor alteración puede introducir al desarrollo de la actividad.

La acción del profesor mirada a través de las interacciones con los estudiantes, es uno de los factores que está determinado sin lugar a dudas por el nivel de apropiación que tenga el profesor de la situación y la efectividad de los trabajos de adaptación. Es decir, la experiencia de trabajo de los estudiantes, sin poder negar que puede ser afectada por factores que resulten impredecibles, estará fuertemente influida o controladas por la calidad de los trabajos efectuados en las etapas descritas con anterioridad; estructura de la situación, comunicación y proceso de adaptación.

Como se ha señalado desde el capítulo uno, la reproducibilidad de la situación didáctica se puede dar en dos formas. Reproducibilidad externa, en la que los estudiantes pueden resolver en cierto modo todas las partes de la situación, pero sin dar muestras de comprensión, y que se puede observar por la manera como se convencen de sus propuestas de solución o por buscar sistemáticamente la validación externa del profesor o por relegar la validación. La otra es la reproducibilidad interna, en la que los estudiantes son capaces de utilizar las partes previas de la situación para explorar y responder los nuevos problemas que se les proponen, así como a tratar de justificar sus respuestas y ver que son coherentes con sus respuestas anteriores aunque para hacerlo acudan al auxilio de su profesor.

La reproducibilidad externa se puede dar en detrimento de la reproducibilidad interna y consistiría en transitar por todas las partes de la situación didáctica aunque no se esté seguro y no se pueda dar sentido a cada uno de los aspectos que se trabajan. Lograr la reproducibilidad interna consistiría en hacer evolucionar el trabajo de los estudiantes para que éstos puedan alcanzar el significado de las actividades, así como una visión de conjunto de la actividad, salvando todas las situaciones problema y logrando que se responsabilicen de los resultados obtenidos.

Esta evolución se puede lograr gracias a la dinámica planteada en la estructura de la situación o en caso de surgir dificultades por una apropiada intervención del profesor.

A continuación mostramos con un esquema de cómo esperamos que se produzca esta evolución:



Al trabajar la situación, se ponen en acción todos aquellos aspectos tratados en las etapas correspondientes al diseño, comunicación y adaptación de la situación.

Como se mostró en el capítulo dos, la situación didáctica estaba constituida por catorce situaciones problema estructuradas de tal manera que se esperaba que fueran abordadas en el orden que se plantearon, sin embargo responder a ese orden no era indispensable como lo mostró el equipo siete del grupo Teoloyucan. Se plantearon unas órbitas consistentes en una historia de clase principal y que podíamos esperar que las historias de clase descritas por los equipos tendieran a ella. Los avances fueron variados y las discusiones realizadas alrededor de las distintas situaciones problema fue muy diversa.

Todos los equipos abordaron los dos principales obstáculos (Paso de potencias enteras a fraccionarias y esclarecimiento del carácter creciente de la función 2^x) de distinta manera.

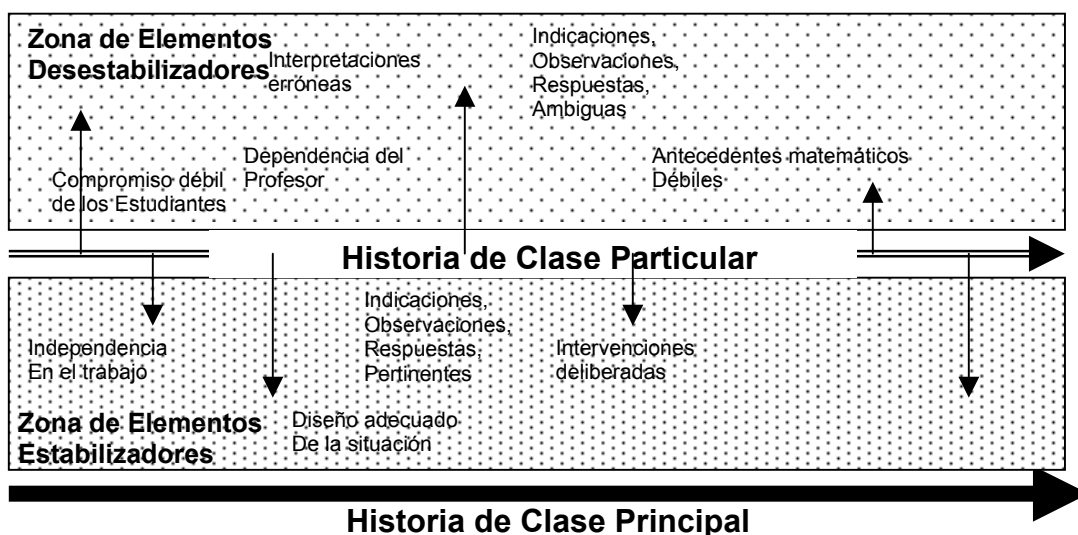
Lograr la reproducibilidad de una situación didáctica consiste en lograr que las historias de clase descritas por los estudiantes se encuentren lo más próximas posibles a la historia principal que es establecida desde el diseño. Las órbitas

descritas por cada uno de los equipos pueden ser variadas pero deben de estabilizarse cuando se discuten los obstáculos alrededor de los cuales se ha diseñado la situación.

¿La estructura de la situación es tal que orilla a los estudiantes a transitar casi de manera única por cada una de sus partes y provoca una comprensión uniforme en todos los estudiantes que la trabajan? Idealmente esa es la pretensión de un diseño científicamente planeado. Si bien un diseño apunta a reducir al mínimo las posibles alteraciones, sabemos que estas son inevitables, lo normal entonces es el surgimiento de múltiples alteraciones y estas son provocadas cuando los estudiantes entran a interpretar los problemas que se les plantean, por su bagaje matemático, por el dominio conceptual de los asuntos matemáticos que se tratan, por la heterogeneidad de los estudiantes. Estos elementos no pueden ser uniformes y por lo tanto introducen en escena elementos que producen inestabilidad en el efecto didáctico.

Es el profesor que desde su nivel de apropiación de la situación y estrategias de interacción con los estudiantes que puede ayudar a reducir los factores desestabilizadores. Pero nuestra investigación nos ha mostrado que contra lo esperado el profesor puede introducir nuevos e inesperados elementos desestabilizadores.

La historia particular desarrollada por cada uno de los estudiantes o grupo de estudiantes, para poder asegurar que el efecto didáctico se ha reproducido deberá de tener el mayor parecido a la historia principal o ideal. La cercanía o lejanía de la historia principal estará determinada por los elementos estabilizadores o inestabilizadores que se ponen en acción, como se muestra en la figura.



La reproducibilidad está determinada por la distancia o parecido de las historias particulares a la historia principal, pero bajo el supuesto de que es imposible tener historias de clase idénticas.

Si bien reproducir una situación didáctica, requiere de que el diseño sea lo suficientemente robusto con el fin de presentar el menor número de dificultades de interpretación tanto por su estructura conceptual como por el lenguaje con el que se plantean las situaciones problema, el proceso de reproducción de una situación didáctica se inicia con la actividad del profesor que operará la reproducción dirigida a trabajar la situación didáctica como un problema personal en el que él resolverá para sí, en lo que podríamos denominar un proceso personalizador, él identificará las partes problemáticas de ésta a partir de su experiencia y formación, para luego pasar a un proceso de despersonalización cuando mire a la situación como una actividad para otro (sus estudiantes) identificando los elementos problemáticos a partir del conocimiento que tiene de ellos.

La etapa de preparación o adaptación para sus estudiantes, podría ser considerada como de rediseño de la situación, el éxito de tal rediseño dependerá de su habilidad para despersonalizar su experiencia de trabajo con la situación, es decir deberá identificar no sus dificultades experimentadas al trabajarla, sino la estructura y el

sentido de la misma con el fin de poder generar estrategias apropiadas de adaptación para sus estudiantes.

Esta etapa de rediseño, deberá ser efectuada de tal manera que no cambie el propósito didáctico de la situación, y deberá ser producto de discusión y acuerdos con el diseñador. Un elemento característico de la toma de acuerdo, es que el diseño pase en la práctica a posesión del profesor que la aplicará, dado que él es el responsable de la puesta en escena.

Este espacio de intervención del profesor sobre la situación didáctica permitirá por fin intervenir en el sistema didáctico que se había señalado anteriormente como ajeno. El trabajo de reproducción consistirá en generar estrategias que reduzcan lo más posible aquellos elementos desestabilizadores, pero éstos aparecerán inevitablemente, queda a los operadores de la reproducción estar atentos al surgimiento de las situaciones inesperadas, pero atenderlas también está sujeto a acciones inesperadas del profesor cayendo así en procesos de naturaleza cíclica, pero que son característico de la actividad humana.

Conclusiones

Como hemos manifestado desde la introducción de este trabajo, la actividad de repetir situaciones de aprendizaje en la escuela es inherente a la actividad escolar, con la expectativa de garantizar efectos didácticos uniformes. De hecho los profesores generamos estrategias para explicar o introducir a los estudiantes a determinados temas y a partir de la experiencia, sabemos en cierto modo que sucederá, lo que en apariencia es estable, son los efectos globales en un grupo.

Como la Ingeniería Didáctica es un instrumento muy elaborado para el diseño de situaciones de aprendizaje (Situaciones didácticas), éstas deberán tener rangos de efectividad y de duración en el sistema didáctico mucho más amplios.

La búsqueda de elementos objetivos que garanticen la repetición de los efectos didácticos independientemente de los alumnos y el profesor con los que se trabaje,

hace que se piense el fenómeno de la reproducibilidad como un elemento ilusorio, ya que la experiencia dicta que cada grupo de estudiantes es distinto y por ende cada experiencia es distinta y por supuesto sí se repiten algunas cosas, pero la determinación exacta de qué hace que se repita el efecto didáctico no es posible, ya que la actividad humana en clase es extraordinariamente compleja.

A partir de la experiencia de repetir una situación didáctica en condiciones de control, nos ha hecho identificar algunos fenómenos que emergen cuando se repite una situación didáctica en distintos escenarios.

Como la situación didáctica tiene una estructura definida y hay elementos objetivos que nos permiten establecer qué hicieron o qué entendieron los estudiantes, cuáles fueron los factores que impidieron que los estudiantes no pudieran salvar los obstáculos que presentaba como problemas la situación. Hemos mostrado lo que hicieron los estudiantes en una experiencia específica, qué dificultades tuvieron y cómo salvaron las superaron, cuál fue el papel que el profesor tuvo para lograrlo o qué elementos introdujo éste como agregado a la problemática de la situación.

En este apartado nos proponemos señalar algunos aspectos que concluimos a raíz de la experiencia que se ha descrito y analizado en los capítulos anteriores. Abordaremos las conclusiones en dos niveles, unas de nivel general y otras que hacen referencia a asuntos específicos.

Generales

El fenómeno de la reproducibilidad, como uno de aquellos fenómenos que nos permite analizar la repetición del efecto didáctico se presenta como frágil ya que la repetición del efecto didáctico está determinado por múltiples factores, siendo los más complejos e incontrolables, los humanos.

El fenómeno de reproducibilidad consiste en el estudio de la intervención en sistemas didácticos, ya que en la tríada didáctica, el polo del saber es el que

permanece estable (en términos generales), siendo el de los estudiantes y profesores los más difíciles de controlar.

El ejercicio de reproducir situaciones didácticas o dicho de otra manera el fenómeno de reproducibilidad está asociado al fenómeno de transposición didáctica, ya que el proceso de adaptar una situación didáctica a un grupo específico de estudiantes, está sujeto a un proceso de negociaciones entre el diseñador o el diseño y los que hacen una relectura de la situación. La negociación y la posterior intervención sobre el diseño para obtener el rediseño, son actividades características del sistema operativo de la transposición didáctica que Chevallard (1991) denomina noosfera. Se podría afirmar que reproducir una situación didáctica es una transposición a un sistema didáctico específico.

La reproducibilidad de una situación didáctica entendida como la cercanía de las historias de clases particulares con la historia de clase principal puede ser establecida de manera objetiva dadas las características estructurales de una situación didáctica ya que están establecidas objetivamente las acciones, formulaciones y validaciones a realizarse, así como la respectiva institucionalización del profesor.

Los elementos estabilizadores y desestabilizadores pueden ser abordados, controlados en cierto modo, a partir del trabajo realizado en el proceso de comunicación del escenario y adaptación.

El profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas, ya que es el polo del sistema didáctico que requiere ser más activo y flexible, pues vive la situación didáctica, la discute, analiza y critica. Debe modificar su mirada sobre ella pues tendrá que reformularla para sus estudiantes y posteriormente acompañarlos cuando éstos la trabajen. Tal actividad exige en el profesor habilidades que van más allá del dominio disciplinar. Además son tantos los aspectos que el profesor deberá cubrir que es muy fácil que en alguno de ellos falle. En estas múltiples actividades podemos observar cómo se ponen en acción

las concepciones del profesor sobre su actividad como profesor, así como las concepciones que tiene de los alumnos, por las decisiones que toma para llevar a los estudiantes a la situación.

Con relación a las actividades que desarrolla el profesor, reviste primordial importancia las interacciones entre profesores y alumnos, ya que a través de dichas interacciones se puede observar en toda su realidad el sistema didáctico así como los roles que asumen los profesores y estudiantes.

Particulares

En el campo de las interacciones entre profesores y alumnos, se pudo identificar lo que denominamos intervenciones ambiguas, donde no le queda claro a ninguno de los participantes la dirección en la que hay que dirigirse creando un clima de acuerdo extraordinariamente ambiguo y que no permite dar salida a los problemas que se están enfrentando. Respuestas ambiguas a preguntas concretas, pudimos observar que le corresponden acciones ambiguas, mostrando así la confianza que tiene los estudiantes en sus profesores.

En las interacciones en las que el profesor observa que los estudiantes no avanzan, podríamos decir que este hecho angustia en extremo al profesor, obligándolo a realizar cada vez más intensas sus intervenciones, tomando la dirección del equipo y provocando acciones en los estudiantes totalmente dependientes del profesor.

Se pudo estudiar el fenómeno que hemos denominado de umbral de conocimiento, y que es resultado de la carencia de los antecedentes matemáticos indispensables para afrontar la situación. Las respuestas erróneas podrían ser calificadas de arbitrarias o resultado de un salir al paso ante preguntas en las que se desconocen las respuestas. Las estudiantes formularon respuestas provisionales que no estaban en posibilidad de validar o darse cuenta del error, creemos por que razones de tiempo. Las respuestas dadas por los estudiantes eran auténticas formulaciones, pero esto sólo lo permitió ver un largo análisis de lo hecho y dicho

por las estudiantes. En condiciones normales de clase sus respuestas hubieran sido calificadas de arbitrarias y erróneas.

El concepto de potencia entera positiva es estable en la mayoría de los estudiantes, pero en todos los casos mostraron que elevar a potencias fraccionarias carece de significado para la casi totalidad de los estudiantes.

La mayoría los estudiantes asocia la función exponencial con crecimiento, pero son incapaces de reconocer la modalidad de crecimiento pues la mayoría representó dicho crecimiento con líneas rectas crecientes.

Comentario

Este trabajo sólo ha centrado la atención a la reproducción de una Ingeniería Didáctica, resulta imposible hacer extrapolaciones a la reproducción de efectos didácticos de distintas propuestas u objetos didácticos. Si bien el diseño de propuestas didácticas requieren de una amplia perdurabilidad en la escuela, nuestra investigación ha mostrado para un caso específico, que todo producto didáctico se ve amenazado por un número grande de interpretaciones, modificaciones, reducciones, etc., de las cuales es casi imposible sustraerse.

Los actores que le dan vida a las propuestas didácticas, en nuestro caso profesores y alumnos requieren de propuestas capaces de producir efectos que sean más o menos uniformes. Obtener un efecto homogéneo en un ambiente diverso, puede lograrse en diseños que permitan considerar y encausar la heterogeneidad. Los productos que se necesitan entonces son aquellos que cuenten de amplia flexibilidad.

Se requiere hacer consideraciones de reproducibilidad a múltiples propuestas didácticas, analizando a partir de lo que tienen de específico y considerando cómo pueden ser afectadas por los usuarios de éstas.

También esta investigación nos ha dado muchos elementos para profundizar en el estudio de las interacciones en clase entre profesores y alumnos.

Si duda hay otros ámbitos de interés para hacerse planteamientos de reproducibilidad, como lo es en la educación a distancia y en diseños que estén mediados por la tecnología. Creemos que éste es un campo que abre cuestionamientos muy importantes en relación a la reproducibilidad de efectos didácticos.

Bibliografía

Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J. Moreno, J. (1997). Un estudio didáctico de la función 2^x . *Actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Morelia, México.

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*. Tesis de doctorado, no publicada. DME-Cinvestav-IPN, México.

Albert, A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior: un acercamiento sistémico*. Tesis de doctorado, no publicada. DME-Cinvestav-IPN, México.

Arsac, G (1989) Le rôle del professeur- aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique. Grenoble:IMAG-LSD.

Arsac, G., Balacheff, N. y Mante, M. (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23: 5 29.

Artigue, M. (1984). *Contributions à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques -Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'état. No publicada. Université Paris VII.

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(1), (pp.5-62).

Artigue, M. (1995) La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la*

-
- enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140). México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. y Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 3, No. 1, (pp.5-64).
- Artigue, M., Perrin-Glorian, M.J. (1991) Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the learning of mathematics* 11, 1. pp. 13-18.
- Balacheff, N. (1988) *Étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire*. Thèse de doctorat d'état és-sciences. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Boero, P et al. (1996) Didactics of Mathematics an the profesional Knowledge of Teachers. En Bishop, A. J. Et al. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. pp. 1097-1121. Kluwer Publishers.
- Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En Sánchez, Sánchez, E. y Zubieta, B. G. (Eds.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas, Escuela francesa*. DME, Cinvestav-IPN. México. Traducción de: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques 7(2), (pp. 33-115), (1986).

- Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz, (comps) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Editorial Paidós, pp. 65-94.
- Brousseau, G. (1994). *Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques*, ICMI Study 94.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cantoral, R. (1990). *Desequilibración y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado, DME- CINVESTAV-IPN, México.
- Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar, matemática educativa. *Programa Editorial, Serie: Artículos*. Área de Educación Superior, DME, Cinvestav-IPN. México.
- Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Investigación en didáctica de las matemáticas y profesionalización docente: Retos de la educación superior. *Programa Editorial, Serie: Antologías, No. 3*. Área de educación Superior, DME-CINVESTAV-IPN, México.
- Comiti, C. (2002) A la recherche d'une modelisation de l'enseignant: Breve histoire de dix ans de reflexion sur la question de l'enseignant e de la modelisation de ses pratiques ou L'evolution d'une problématique, en relation a avec le développement des avancées théoriques de la didactique des mathématiques. En Bessot (éd). *Formation des enseignantes et étude didactique de l'enseignant*, pp. 37-58.

-
- Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Texte préparé pour la deuxième Ecole d' Etè de Didactique des mathematiques. Orleáns.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Edit. Aique. Argentina.
- Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17, No. 3, pp. 17-54.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE-Horsori.
- Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar)*. Tesis de doctorado. DME- CINVESTAV-IPN, México.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice Bologna.
- Espinosa, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "Límite de función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos del estudio*. Tesis de doctorado. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Farfán, R.M. (1991). "El curso de precálculo un enfoque gráfico". *Memorias de la Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. 5(1). pp. 206-211.
- Farfán, R.M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de casos*. Tesis de doctorado, DME-CINVESTAV-IPN, México.

-
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 18, No. 1, pp. 7-34.
- Grenier, D. (1989). Construction et étude d'processus d'enseignement de la simetrie orthogonale: èlèments d'analyse du fonctionnement de la thèorie de situations. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.17, No. 1, pp. 5-60.
- Godino, J. (2002). La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas: El proyecto Edumat-Maestros. *V Simposio sobre Aportaciones del área Didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales*. Universidad de Alicante. <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.
- Jodelet, D. (1989). Les representations sociales. (dir.) P.U.F., París.
- Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un <<Résultat>> en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), (pp197-220).
- Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría, no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.
- Maiztegui, A. et al. (2000). La formación de los profesores de ciencias en Iberoamérica. *Revista Iberoamericana de Educación*, No. 24, pp. 163-187. OEI (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura).
- Margolinas, C., Perrin-Glorian, M.J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. (Editorial). *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17, No. 3, pp. 7-16.

- Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de un aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones $f \leftrightarrow f'$ en el bachillerato, interactuando con calculadoras gráficas*. Tesis de doctorado, no publicada. DME-Cinvestav-IPN, México.
- Mungny, G (1986). *Psychology sociale du développement cognitive*. Peter Lang, Berna.
- Perrin-Glorian, M. J. (1993). *Questions didactiques soulevées a partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes <<faibles>>. Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.13, No. 12, pp. 5-118
- Quiróz, M. (1989). *Istalación de un lenguaje gráfico en estudiantes que inician estudios universitarios. Un enfoque alternativo para la reconstrucción del discurso matemático escolar del precálculo*. Tesis de maestría, no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.
- Ruiz, L. (2000). *Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza- aprendizaje. Material de apoyo, del curso: Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje, impartido en RELME XIV*. Panamá.
- Salinas, P.; Alanis, J.A., et. Al. (2000). *Elementos del cálculo: Reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza*. Grupo Editorial Iberoamerica. México.
- Sierpinska, A. (1992). *On understanding the notion of fuction*. En Ed Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*, pp. 25-58. Washington, Dc: MAA.
- Soto, P. (1988) *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de los números negativos y los orígenes de la variable compleja*. Tesis de maestría, no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Trujillo, R. (19995) *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior*. Tesis de maestría, no publicada. DME, Cinvestav-IPN. México.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. Actes du 5ème colloque du groupe Psychology of Mathematics Educations.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.10, No. (2,3)), pp. 133-170.